Universidad Simón Bolívar
Coordinación en Postgrados en Computación
CI-7521 Matemáticas para Computación
Estudiante: **Maribel Acosta Deibe 09-87384**

Examen #3

1. Conteo

Ejercicio a)

Halle una interpretación combinatoria del factorial ascendente $m^{\overline{n}} = m(m+1)...(m+n-1)$.

Solución:

El factorial ascendente cuenta el número de disposiciones de un un conjunto N de n elementos a un conjunto M de m elementos.

Por ejemplo, una *disposición* de los "objetos"(distinguibles) de N en las "cajas"(distinguibles) de M consiste en distribuir los objetos en las cajas formando pilas en las cajas, de manera que interesa el orden de los objetos en cada caja (Yriarte, Capítulo 1).

Veamos que en efecto, esta es una interpretación combinatoria del factorial ascendiente.

- 1° Operación: Colocar el primer objeto o_1 en alguna caja. Hay m formas de hacer esto, debido a que se puede asignar a cualquiera de las m cajas.
- 2° Operación: Colocar el segundo objeto o_2 en alguna caja. Veamos que hay $m+1$ formas de hacer esto. Se tiene $m-1$ formas de colocar o_2 en las cajas que no están ocupadas por o_1. Luego, en la caja donde está el primer elemento que se asignó en la operación anterior, hay 2 formas de colocarlo (arriba o abajo de o_1). Por lo tanto, en total hay $m-1+2 = m+1$ formas de colocar el segundo objeto.
- 3° Operación: Colocar el tercer objeto o_3 en alguna caja. Veamos que hay $m+2$ formas de hacer esto, independientemente de la forma en que se hayan asignado los dos objetos anteriores.

  En el caso que o_1 y o_2 hayan sido asignados a la misma caja, hay $m-1$ formas de colocar o_3 en las cajas que no están ocupadas. Luego en la caja ocupada, hay 3 formas de colocar o_3: abajo de la pila, en el medio de los dos objetos anteriores o arriba de la pila. Por lo tanto, en este caso hay $m-1+3 = m+2$ formas de colocar o_3.

  En el otro caso, en que o_1 y o_2 hayan sido asignados a cajas distintas, hay $m-2$ formas de colocar o_3 en las cajas que no están ocupadas. Luego, en las cajas ocupadas hay 4 formas de colocar o_3: abajo de o_1, arriba de o_1, abajo de o_2 o arriba de o_2. Por lo tanto, en este caso hay $m-2+4 = m-2$ formas de colocar o_3.

$\vdots$

- n° Operación: Colocar el n-ésimo objeto en alguna caja. Hay $m+n-1$ formas de hacer esto. Como ya se han colocado $n-1$ objetos, se puede colocar en cualquiera de las m cajas en cualquier posición entre los $n-1$ objetos que ya se han colocado. Por lo tanto, en total hay $m+n-1$ formas de colocar el último objeto.

Finalmente, las disposiciones o la cantidad total de formas de asignar n objetos distinguibles a m cajas distinguibles es:

$$m^{\overline{n}} = m(m+1)...(m+n-1)$$

$\blacksquare$

Ejercicio b)

Determine el número de patrones correspondientes a las funciones de un conjunto A de n elementos del tipo $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}...n^{\lambda_n}$ a un conjunto B de m elementos del tipo 1^m. Aplique los principios elementales de conteo para determinar a qué otro tipo de configuración equivale un patrón, y luego determinar el número de esas configuraciones.

Observación: Que A sea del tipo $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}...n^{\lambda_n}$ significa que hay λ_i subconjuntos de elementos de A con i elementos indistinguibles entre sí.

Solución:

Para ilustrar la forma de determinar los patrones correspondientes a las funciones de A a B, se presentará un ejemplo. Sean A y B conjuntos de la siguiente forma:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6\} \text{ y } B = \{a, b\}$$

De acuerdo a la notación utilizada, A es de la forma $1^4 3^2$ y B es de la forma 1^2. Ahora, calculemos la cantidad de funciones de A a B, determinando la cantidad de patrones que existen desde cada partición i^{λ_i} a B:

- 1° Operación: Determinar la cantidad de patrones correspondientes a las funciones de 1^4 a B. En este caso, se cuentan la cantidad de funciones de un conjunto que tiene 4 elementos distinguibles, al conjunto B que tiene 2 elementos distinguibles. El resultado es 2^4.

- 2° Operación: Determinar la cantidad de patrones correspondientes a las funciones de 3^2 a B. En este caso, se cuentan la cantidad de funciones del conjunto $\{5, 5, 5, 6, 6, 6\}$ al conjunto $\{a, b\}$. Para simplificar, calculemos primero la cantidad de funciones de $\{5, 5, 5\}$ a B. Como los 5s son indistinguibles, si contamos todas las funciones posibles obtendremos asignaciones repetidas, por ejemplo abb y bab son las mismas asignaciones (pues una se obtiene de una permutación de la otra, y los 5s son indistinguibles). Luego, la cantidad de asignaciones diferentes entonces corresponden a palabras de longitud 3 que tengan distintas cantidades de letras en el alfabeto de B, como se ve en la Tabla 1.

Tabla 1. Formas de palabras que corresponden a asignaciones de $\{5, 5, 5\}$ a B

Cantidad de as	Cantidad de bs	Total
0	3	3
1	2	3
2	1	3
3	0	3

Por lo tanto, en la Tabla 1 se puede apreciar que la cantidad de asignaciones diferentes de $\{5, 5, 5, \}$ a B corresponden a las 2-particiones generalizadas ordenadas de 3. De acuerdo a lo visto en clase, esto corresponde a la cantidad de patrones del conjunto de la forma 3^1 (n^1) al conjunto 1^2 (1^m), y se calcula así:

$$\frac{m^{\overline{n}}}{n!} = \frac{2^{\overline{3}}}{3!} = \frac{2 \cdot (2+1) \cdot (2+2)}{3!} = 4$$

Por otro lado, se debe aplicar el mismo razonamiento para calcular la cantidad de patrones correspondientes a las funciones de $\{6, 6, 6\}$ a B, que serían también 4.

Luego, por Principio del Producto, la cantidad de funciones de $\{5, 5, 5, 6, 6, 6\}$ al conjunto $\{a, b\}$ es:

$$\left(\frac{2^{\overline{3}}}{3!}\right)^2 = 4^2 = 16$$

Finalmente, en el ejemplo, la cantidad de funciones de A a B es:

$$2^4 \cdot \left(\frac{2^{\overline{3}}}{3!}\right)^2 = 12$$

El resultado anterior se puede generalizar, y obtenemos que la cantidad de patrones correspondientes a las funciones desde cada i^{λ_i} $(1 \leq i \leq n)$ a 1^m corresponden a la cantidad de patrones desde cada conjunto de la forma i^1 al conjunto 1^m, y luego calcular las combinaciones entre los λ_i subconjuntos. Esto se calcula de la siguiente manera:

$$\left(\frac{m^{\overline{i}}}{i!}\right)^{\lambda_i}$$

De esta manera, se puede contar:

- 1° Operación: Determinar la cantidad de patrones correspondientes a las funciones de 1^{λ_1} a B. En este caso, se cuentan la cantidad funciones de un λ_1-conjunto a un conjunto de m elementos distinguibles y el resultado es m^{λ_1}. Veamos que este resultado se puede obtener de la generalización presentada anteriormente, pues se están contando las m-particiones generalizadas ordenadas de 1, donde hay λ_1 subconjuntos:

$$\left(\frac{m^{\overline{1}}}{1!}\right)^{\lambda_1} = m^{\lambda_1}$$

- 2° Operación: Determinar la cantidad de patrones correspondientes a las funciones de 2^{λ_2} a B. Por el razonamiento de las particiones se obtiene:

$$\left(\frac{m^{\overline{2}}}{2!}\right)^{\lambda_2}$$

$\vdots$

- n° Operación: Determinar la cantidad de patrones correspondientes a las funciones de n^{λ_n} a B. Análogo a las operación anteriores, el resultado es:

$$\left(\frac{m^{\overline{n}}}{n!}\right)^{\lambda_n}$$

Finalmente, por Principio del Producto, el número de patrones correspondientes a las funciónes del conjunto A de la forma $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}...n^{\lambda_n}$ al conjunto B de la forma 1^m es:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{m^{\overline{i}}}{i!}\right)^{\lambda_i}$$

$\blacksquare$

2. Coeficientes Binomiales

Ejercicio a) 5.37 y 5.67 de *Concrete Mathematics*

5.37 Muestre que el análogo al Teorema Binomial se cumple para los factoriales descendente y ascendente.

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_k \binom{n}{k} x^{\underline{n}} y^{\underline{n-k}}$$

$$(x+y)^{\overline{n}} = \sum_k \binom{n}{k} x^{\overline{n}} y^{\overline{n-k}}$$

Solución:

Primero, desmostremos que se satisface para el factorial descendete, es decir, que se cumple:

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_k \binom{n}{k} x^{\underline{n}} y^{\underline{n-k}}$$

La idea de esta demostración es partir del lado izquierdo, realizar algunas manipulaciones aritméticas y elementos combinatorios para obtener la Convolución de Vandermonde y finalmente llegar al lado derecho de la ecuación.

$$\begin{aligned}
& (x+y)^{\underline{n}} \\
= & \quad \{ \text{ Aritmética: Multiplicando por } \tfrac{n!}{n!} \ \} \\
& n!\frac{(x+y)^{\underline{n}}}{n!} \\
= & \quad \{ \text{ Definición de Coeficiente Binomial } \} \\
& n!\binom{x+y}{n} \\
= & \quad \{ \text{ Convolución de Vandermonde } \} \\
& n!\sum_k \binom{x}{k}\binom{y}{n-k} \\
= & \quad \{ \text{ Definición de Coeficiente Binomial } \} \\
& n!\sum_k \frac{x^{\underline{k}}}{k!}\frac{y^{\underline{n-k}}}{(n-k)!} \\
= & \quad \{ \text{ Propiedad Distributiva de la Suma } \} \\
& \sum_k n!\frac{x^{\underline{k}}}{k!}\frac{y^{\underline{n-k}}}{(n-k)!}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \qquad \{ \text{ Aritmética } \} \\
&\quad \sum_k \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{\underline{n}} y^{\underline{n-k}} \\
&= \qquad \{ \text{ Definición de Coeficiente Binomial } \} \\
&\quad \sum_k \binom{n}{k} x^{\underline{n}} y^{\underline{n-k}}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se ha demostrado que $(x+y)^{\underline{n}} = \sum_k \binom{n}{k} x^{\underline{n}} y^{\underline{n-k}}$.

Para realizar la demostración del análogo del Teorema Binomal para el factorial ascendente, se probará y utilizará la siguiente propiedad que relaciona a los factoriales ascendente y descendente:

$$x^{\overline{n}} = (-1)^n (-x)^{\underline{n}}$$

Prueba:

$$
\begin{aligned}
&\quad x^{\overline{n}} \\
&= \qquad \{ \text{ Definición de Factorial Ascendente } \} \\
&\quad x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot \ldots \cdot (x+n-1) \\
&= \qquad \{ \text{ Aritmética: Multiplicando por } (-1)^n (-1)^n \ \} \\
&\quad (-1)^n \cdot (-x) \cdot (-(x+1)) \cdot (-(x+2)) \cdot \ldots \cdot (-(x+n-1)) \\
&= \qquad \{ \text{ Aritmética: Propiedad Distributiva } \} \\
&\quad (-1)^n \cdot (-x) \cdot (-x-1) \cdot (-x-2) \cdot \ldots \cdot (-x-n+1) \\
&= \qquad \{ \text{ Definición de Factorial Descendete } \} \\
&\quad (-1)^n (-x)^{\underline{n}}
\end{aligned}
$$

Ahora, demostremos que el análogo para el Teorema Binomial se satisface para el factorial ascendente, es decir, que se cumple:

$$(x+y)^{\overline{n}} = \sum_k \binom{n}{k} x^{\overline{n}} y^{\overline{n-k}}$$

La idea de esta demostración es partir del lado izquierdo de la ecuación, utilizar la propiedad anteriormente probada y luego utilizar el resultado de la parte anterior del ejercicio para llegar al lado derecho de la ecuación.

$$
\begin{aligned}
&\quad (x+y)^{\overline{n}} \\
&= \qquad \left\{ \text{ Propiedad } x^{\overline{n}} = (-1)^n (-x)^{\underline{n}} \ \right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& (-1)^n(-(x+y))^{\underline{n}} \\
= & \qquad \{ \text{ Aritmética: Propiedad Distributiva } \} \\
& (-1)^n(-x-y)^{\underline{n}} \\
= & \qquad \{ \text{ Parte anterior del ejercicio } \} \\
& (-1)^n \sum_k \binom{n}{k} (-x)^{\underline{k}} (-y)^{\underline{n-k}} \\
= & \qquad \{ \text{ Propiedad Distributiva de la Suma } \} \\
& \sum_k (-1)^n \binom{n}{k} (-x)^{\underline{k}} (-y)^{\underline{n-k}} \\
= & \qquad \left\{ \text{ Aritmética: } (-1)^n = (-1)^k(-1)^{n-k} \right\} \\
& \sum_k \binom{n}{k} (-1)^k (-x)^{\underline{k}} (-1)^{n-k} (-y)^{\underline{n-k}} \\
= & \qquad \left\{ \text{ Propiedad } x^{\overline{n}} = (-1)^n(-x)^{\underline{n}} \right\} \\
& \sum_k \binom{n}{k} x^{\overline{k}} y^{\overline{n-k}}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se ha demostrado que $(x+y)^{\overline{n}} = \sum_k \binom{n}{k} x^{\overline{n}} y^{\overline{n-k}}$.

$\blacksquare$

5.67 Encuentre una forma cerrada para

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\binom{k}{2}}{2} \binom{2n-k}{n}$$

$n \geq 0$ entero.

Solución:

Para hallar una fórmula cerrada a la suma $\sum_k \binom{\binom{k}{2}}{2}\binom{2n-k}{n}$ con $n \geq 0$ entero, vamos a desarrollar el término $\binom{\binom{k}{2}}{2}$ para obtener otro coeficiente binomial que permita aplicar alguna fórmula conocida.

$$\binom{\binom{k}{2}}{2}$$

$=$ { Definición de Coeficiente Binomial }

$$\frac{\binom{k}{2}^{\underline{2}}}{2!}$$

$=$ { Definición de Factorial Decreciente }

$$\frac{\binom{k}{2}\left(\binom{k}{2}-1\right)}{2!}$$

$=$ { Aritmética: Propiedad Distributiva }

$$\frac{\binom{k}{2}^2 - \binom{k}{2}}{2!}$$

$=$ { Definición de Coeficiente Binomial }

$$\frac{\left(\frac{k^{\underline{2}}}{2!}\right)^2 - \frac{k^{\underline{2}}}{2!}}{2!}$$

$=$ { Aritmética }

$$\frac{\frac{(k^{\underline{2}})^2}{4} - \frac{k^{\underline{2}}}{2!}}{2!}$$

$=$ { Aritmética: Resta de Fracciones }

$$\frac{\frac{(k^{\underline{2}})^2 - 2k^{\underline{2}}}{4}}{2!}$$

$=$ $\left\{ \text{ Aritmética: } \frac{1}{2 \cdot 4} = 3 \cdot \frac{1}{4!} \right\}$

$$3\frac{(k^{\underline{2}})^2 - 2k^{\underline{2}}}{4!}$$

$=$ { Definición de Factorial Decreciente }

$$3\frac{k^2(k-1)^2 - 2k(k-1)}{4!}$$

$$
\begin{aligned}
= & \quad \{ \text{ Desarrollo de Polinomio } \} \\
& 3\frac{k^2(k^2-2k+1)-2k(k-1)}{4!} \\
= & \quad \{ \text{ Aritmética: Propiedad Distributiva } \} \\
& 3\frac{k^4-2k^3-k^2-2k^2+2k}{4!} \\
= & \quad \{ \text{ Aritmética } \} \\
& 3\frac{k^4-2k^3-k^2+2k}{4!} \\
= & \quad \left\{ \text{ Factorización: } k^4-2k^3-k^2+2k=(k+1)(k)(k-1)(k-2) \right\} \\
& 3\frac{(k+1)(k)(k-1)(k-2)}{4!} \\
= & \quad \{ \text{ Definición de Factorial Decreciente } \} \\
& 3\frac{(k+1)^{\underline{4}}}{4!} \\
= & \quad \{ \text{ Definición de Coeficiente Binomial } \} \\
& 3\binom{k+1}{4}
\end{aligned}
$$

Utilizando el resultado anterior, ahora podemos escribir la suma de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{n} \binom{\binom{k}{2}}{2}\binom{2n-k}{n} \\
= & \quad \left\{ \tbinom{\binom{k}{2}}{2} = 3\tbinom{k+1}{4} \right\} \\
& \sum_{k=0}^{n} 3\binom{k+1}{4}\binom{2n-k}{n} \\
= & \quad \{ \text{ Propiedad Distributiva de la Suma } \} \\
& 3\sum_{k=0}^{n} \binom{k+1}{4}\binom{2n-k}{n} \\
= & \quad \{ \text{ Aritmética } \} \\
& 3\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{n}\binom{k+1}{4} \\
= & \quad \{ \text{ Aritmética } \} \\
& 3\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{n}\binom{1+k}{4}
\end{aligned}
$$

Finalmente, para resolver la última suma, se utiliza la fórmula (5.26) de *Concrete Mathematics* para enteros $l, m \geq 0$ y enteros $n \geq q \geq 0$:

$$\sum_{0\leq k\leq l} \binom{l-k}{m}\binom{q+k}{n} = \binom{l+q+1}{m+n+1}$$

En la fórmula (5.26) se coloca $l = 2n$, $m = n$, $q = 1$, $n = 4$, $k = k$, y se puede utilizar pues n es entero (por hipótesis inicial) y k es entero, y además se cumple la restricción que $n \geq q \geq 0$ pues $4 \geq 1 \geq 0$. Se obtiene:

$$3\sum_{0\leq k\leq 2n} \binom{2n-k}{n}\binom{1+k}{4} = 3\binom{2n+1+1}{n+4+1}$$

Nótese que el rango de la suma anterior es $0 \leq k \leq 2n$, en la suma original el rango es $0 \leq k \leq n$. Sin embargo, por separación de rango podemos escribir la suma así:

$$3\sum_{0\leq k\leq 2n} \binom{2n-k}{n}\binom{1+k}{4} = 3\sum_{0\leq k\leq n} \binom{2n-k}{n}\binom{1+k}{4} + 3\sum_{n+1\leq k\leq 2n} \binom{2n-k}{n}\binom{1+k}{4}$$

Al analizar la ecuación anterior, se puede determinar que todos los términos de la suma de rango $n+1 \leq k \leq 2n$ son 0, debido a que cuando $k \geq n+1$, el coeficiente binomial $\binom{2n-k}{n}$ es igual a 0, pues $2n-k < n$ (con n y k enteros). Por lo tanto, se puede afirmar que:

$$3\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{n}\binom{1+k}{4} = 3\binom{2n+2}{n+5}$$

$\blacksquare$

Ejercicio b) Ecuación (5.24) de Tabla 169 de *Concrete Mathematics*

$$\sum_k \binom{l}{m+k}\binom{s+k}{n}(-1)^k = (-1)^{l+m}\binom{s-m}{n-l}$$

Para $l \geq 0$ entero, y m, n enteros.

Solución:

La demostración de la ecuación (5.24) de *Concrete Mathematics*, se realizará por inducción sobre l de acuerdo a la sugerencia del texto en la página 170.

- **Caso Base:** $l = 0$

  Como $l = 0$, se tiene que demostrar que se cumple:

  $$\sum_k \binom{0}{m+k}\binom{s+k}{n}(-1)^k = (-1)^{m}\binom{s-m}{n}$$

  Se tiene que el coeficiente binomial $\binom{0}{m+k}$ siempre es igual 0, excepto cuando $m + k = 0$, que en este caso el coeficiente binomial es igual a 1. Por lo tanto, todos los términos de la suma son 0, excepto cuando $k = -m$.

  Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
& \sum_k \binom{0}{m+k}\binom{s+k}{n}(-1)^k \\
= \quad & \{ \text{ Todos los términos son } 0 \text{, excepto cuando } k = -m \ \} \\
& \binom{0}{m+(-m)}\binom{s+(-m)}{n}(-1)^{(-m)} \\
= \quad & \{ \text{ Aritmética } \} \\
& \binom{0}{0}\binom{s-m}{n}(-1)^{(-m)} \\
= \quad & \left\{ \text{ Propiedad: } \tbinom{k}{0} = 1 \text{ para todo } k \ \right\} \\
& \binom{s-m}{n}(-1)^{(-m)} \\
= \quad & \left\{ \text{ Aritmética: } (-1)^{(-m)} = (-1)^m \ \right\} \\
& \binom{s-m}{n}(-1)^{m} \\
= \quad & \{ \text{ Aritmética: Propiedad Conmutativa } \} \\
& (-1)^m\binom{s-m}{n}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la ecuación (5.24) se cumple para el caso base $l = 0$.

- **Caso Inductivo:**

  Ahora, suponemos que la identidad se cumple para todos los valores hasta $l - 1$.

  Hipótesis Inductiva:

$$\left(\forall i : 0 \le i \le l - 1 : \sum_k \binom{i}{m+k} \binom{s+k}{n} (-1)^k = (-1)^{i+m} \binom{s-m}{n-i} \right)$$

  Probemos que se cumple para $i = l$.

$$\begin{aligned}
& \sum_k \binom{l}{m+k} \binom{s+k}{n} (-1)^k \\
= \quad & \{ \text{ Fórmula de la Adición en 1er Coeficiente Binomial } \} \\
& \sum_k \left[\binom{l-1}{m+k} + \binom{l-1}{m+k-1} \right] \binom{s+k}{n} (-1)^k \\
= \quad & \{ \text{ Aritmética: Propiead Distributiva } \} \\
& \sum_k \left[\binom{l-1}{m+k} \binom{s+k}{n} (-1)^k \right] + \left[\binom{l-1}{m+k-1} \binom{s+k}{n} (-1)^k \right] \\
= \quad & \{ \text{ Propiedad Asociativa de la Suma } \} \\
& \sum_k \binom{l-1}{m+k} \binom{s+k}{n} (-1)^k + \sum_k \binom{l-1}{m+k-1} \binom{s+k}{n} (-1)^k \\
= \quad & \{ \text{ Hipótesis Inductiva en la primera Suma } \} \\
& (-1)^{(l-1)+m} \binom{s-m}{n-(l-1)} + \sum_k \binom{l-1}{m+k-1} \binom{s+k}{n} (-1)^k \\
= \quad & \{ \text{ Hipótesis Inductiva con } m = m-1 \ \} \\
& (-1)^{(l-1)+m} \binom{s-m}{n-(l-1)} + (-1)^{(l-1)+(m-1)} \binom{s-(m-1)}{n-(l-1)} \\
= \quad & \{ \text{ Aritmética } \} \\
& (-1)^{l-1+m} \binom{s-m}{n-l+1} + (-1)^{l+m-2} \binom{s-m+1}{n-l+1} \\
= \quad & \left\{ \text{ Aritmética: } (-1)^{l-1+m} = -(-1)^{l+m} \ \right\} \\
& -(-1)^{l+m} \binom{s-m}{n-l+1} + (-1)^{l+m-2} \binom{s-m+1}{n-l+1} \\
= \quad & \left\{ \text{ Aritmética: } (-1)^{l+m-2} = (-1)^{l+m} \ \right\} \\
& -(-1)^{l+m} \binom{s-m}{n-l+1} + (-1)^{l+m} \binom{s-m+1}{n-l+1} \\
= \quad & \{ \text{ Aritmética: Factor Común } \}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& (-1)^{l+m}\left[-\binom{s-m}{n-l+1}+\binom{s-m+1}{n-l+1}\right] \\
= \quad & \{ \text{ Despejando Fórmula de la Adición } \} \\
& (-1)^{l+m}\binom{s-m}{n-l}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la identidad (5.24) también se cumple para el caso inductivo.

Finalmente, por inducción queda demostrado que:

$$
\sum_{k}\binom{l}{m+k}\binom{s+k}{n}(-1)^{k}=(-1)^{l+m}\binom{s-m}{n-l}
$$

$\blacksquare$

2.2) Este ejercicio se puede hacer por inducción:

Reemplazamos s por m+n-r+tn con la idea de hacer inducción y simplificar la expresión. Resulta:

$$A(r,m,n,t) = \sum_{k\geq 0}\binom{r-tk}{k}\binom{m+n-r+tk}{n-k}\frac{r}{r-tk} \overset{?}{=} \binom{m+n}{n}$$

Si aplicamos la fórmula de adición de coeficientes binomiales tenemos:

$$A(r,m,n,t) = \sum_{k\geq 0}\binom{r-tk}{k}\binom{m-1+n-r+tk}{n-k}\frac{r}{r-tk} + \sum_{k\geq 0}\binom{r-tk}{k}\binom{m+n-1-r+tk}{n-1-k}\frac{r}{r-tk}$$

= A(r,m-1,n,t) + A(r,m,n-1,t)

Por lo que si inductivamente A(r,m-1,n,t) + A(r,m,n-1,t) = $\binom{m-1+n}{n}+\binom{m+n-1}{n-1}$

entonces por adición otra vez, tendríamos A(r,m,n,t) = $\binom{m+n}{n}$. Finalmente, como tanto el lado izquierdo como el derecho de $\sum_{k\geq 0}\binom{r-tk}{k}\binom{s-t(n-k)}{n-k}\frac{r}{r-tk} = \binom{r+s-tn}{n}$ son polinomios de grado n en s, cuya igualdad se cumple para un número infinito de valores de s, por argumento polinomial se tiene esta igualdad.

Basta mostrar la base de la inducción. La base de la inducción (inducción noetheriana) habrá que mostrarla para los pares (n,m) de la forma (0,m) ó (n,-1) con n≥0 y m≥-1 (-1 por conveniencia).

Los pares de la forma (0,m):

$$A(r,m,0,t) = \binom{r-t.0}{0}\binom{m-r-t.0}{0}\frac{r}{r} = 1$$ y el lado derecho sería $\binom{m+0}{0} = 1$

Los pares de la forma (n,-1):

A(r,-1,n,t) = $\sum_{k\geq 0}\binom{r-tk}{k}\binom{-1+n-r+tk}{n-k}\frac{r}{r-tk} \overset{?}{=} \binom{-1+n}{n} = 0$ para n>0

El término general $\binom{r-tk}{k}\binom{-1+n-r+tk}{n-k}\frac{r}{r-tk}$ se puede reducir a $\frac{r}{n!}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}\prod_{0<j<n}(-r+tk+j)$. Note que la productoria es un polinomio en k de grado n-1.

Así por una igualdad vista en clases:

A(r,-1,n,t) = $-\frac{r}{n!}\sum_{k}(\binom{n}{k}(-1)^k(a_0+a_1k+\ldots+a_nk^n)) = -\frac{r}{n!}(-1)^n n!a_n$=0 ya que a_n es cero.

Por último la igualdad $\sum_{k\geq 0}\binom{r-tk}{k}\binom{s-t(n-k)}{n-k}\frac{r}{r-tk} = \binom{r+s-tn}{n}$ es cierta para n negativo pues en ambos lados da cero. Por lo que demostramos que la igualdad es válida para todo n entero.

■