UNIVERSIDAD SIMÓN BOLIVAR **14 de junio de 2010**
CI-7521 - Matemáticas para la computación **Lic. Alejandro Claro Mosqueda**

Tarea #3

Problema #1a: Halle una interpretación combinatoria del factorial ascendente $m^{\overline{n}} = m(m+1)\ldots(m+n-1)$.

Solución

Al reordenar los términos en $m^{\overline{n}}$,

$$m^{\overline{n}} = (m+n-1)(m+n-2)\ldots(m+1)m$$

se observa que es igual al número de formas que se puede construir una secuencia S de n elementos, a partir de un conjunto A de cardinalidad $m+n-1$,

$$m^{\overline{n}} = P_n^{m+n-1} = n!\binom{m+n-1}{n}$$

Esto es bastante claro puesto que, hay $m+n-1$ formas de escoger el primer elemento en la secuencia, luego $m+n-2$ para el segundo elemento; y así sucesivamente, hasta m formas de escoger el n-simo elemento.

Problema #1b: Determinar el número de patrones correspondientes a las funciones de un conjunto A de n elementos del tipo $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots n^{\lambda_n}$ a un conjunto B de m elementos del tipo 1^m. Aplique los principios elementales de conteo para determinar a que otro tipo de configuración equivale un patrón, y luego determinar el número de esas configuraciones. (Que A sea del tipo $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots n^{\lambda_n}$, significa que hay λ_i subconjuntos de elementos de A con i elementos indistinguibles entre si)

Solución

El numero de patrones del tipo 1^m es equivalente a contar el numero de forma que se pueden acomodar m objetos en n particiones ({1,2,. . . ,n}) distinguibles con las cantidades $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ en cada partición:

$$P(1^m) = \frac{m!}{\lambda_1!\lambda_2!\ldots\lambda_n!} \qquad \text{en el caso } BIY(A,B)$$

donde $P(1^m)$ es el numero de patrones.

Problema #2: Muestre que un análogo al teorema binomial es válido para potencias factoriales. Esto es, demuestre las siguientes identidades [1, problema 5.37]:

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_k \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}} \tag{1}$$

$$(x+y)^{\overline{n}} = \sum_k \binom{n}{k} x^{\overline{k}} y^{\overline{n-k}} \tag{2}$$

para todo entero no negativo n.

Solución

Demostración. Es sencillo demostrar (2) transformando esta expresión en (1) utilizando la fórmula recíproca,

$$z^{\overline{n}} = (-1)^n (-z)^{\underline{n}}$$

y reacomodando los términos de cada lado de la expresión con sigue,

$$\begin{aligned}
(r+z)^{\overline{n}} &= \sum_k \binom{n}{k} r^{\overline{k}} z^{\overline{n-k}} \\
(-1)^n(-(r+z))^{\underline{n}} &= \sum_k \binom{n}{k} (-1)^k\,(-r)^{\underline{k}}\,(-1)^{n-k}\,(-z)^{\underline{n-k}} \\
(-1)^n(-r-z)^{\underline{n}} &= (-1)^n \sum_k \binom{n}{k} (-r)^{\underline{k}} (-z)^{\underline{n-k}} \\
(x+y)^{\underline{n}} &= \sum_k \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}}
\end{aligned}$$

Ahora, sólo resta demostrar (1). Para ello se divide ambos lados de la expresión (1) por $n!$,

$$\frac{(x+y)^{\underline{n}}}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_k \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}} \tag{3}$$

$$\binom{x+y}{n} = \frac{1}{n!} \sum_k \frac{n^{\underline{k}}}{k!} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}} \tag{4}$$

Al reacomodar los términos del lado derecho en (4),

$$
\begin{aligned}
\binom{x+y}{n} &= \sum_k \frac{n^{\underline{k}}}{n!}\frac{x^{\underline{k}}}{k!}y^{\underline{n-k}} && (5)\\
&= \sum_k \frac{1}{(n-k)!}\binom{x}{k}y^{\underline{n-k}} && (6)\\
&= \sum_k \binom{x}{k}\frac{y^{\underline{n-k}}}{(n-k)!} && (7)\\
&= \sum_k \binom{x}{k}\binom{y}{n-k} && (8)
\end{aligned}
$$

se obtiene una forma de la convolución de Vandermonde [1, 5.27]. La demostración de esta expresión se encuentra en [1, pp. 170].

$\square$

Problema #3: Encuentre la forma cerrada de

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{\binom{k}{2}}{2}\binom{2n-k}{n} \tag{9}$$

donde n es un entero no-negativo. [1, problema 5.67]

Solución

Desarrollando el coeficiente $\binom{\binom{k}{2}}{2}$, se observa que

$$
\begin{aligned}
\binom{\binom{k}{2}}{2} &= \binom{k(k-1)/2}{2}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{k(k-1)}{2}\left[\frac{k(k-1)}{2}-1\right]\right\}\\
&= \frac{1}{4\,2}\left\{k(k-1)\left[k^2-k-2\right]\right\}\\
&= \frac{3}{4\,3\,2}\{k(k-1)(k+1)(k-2)\}\\
&= \frac{3}{4!}\{(k+1)k(k-1)(k-2)\}\\
&= 3\frac{(k+1)^{\underline{4}}}{4!}\\
&= 3\binom{k+1}{4}
\end{aligned}
$$

al sustituir en (9), se obtiene

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{\binom{k}{2}}{2}\binom{2n-k}{n} = 3\sum_k \binom{2n-k}{n}\binom{k+1}{4} \tag{10}$$

Finalmente, al hacer uso de la identidad

$$\sum_k \binom{l'-k}{m'}\binom{q'+k}{n'} = \binom{l'+q'+1}{m'+n'+1}$$

encontrada en la tabla 169 de [1, pp. 169], con

$$\begin{aligned} l' &= 2n \\ m' &= n \\ q' &= 1 \\ n' &= 4 \end{aligned}$$

se obtiene

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{\binom{k}{2}}{2}\binom{2n-k}{n} = 3\binom{2n+2}{n+5}} \tag{11}$$

Problema #4: Demuestre que

$$\sum_k \binom{l}{m+k}\binom{s+k}{n}(-1)^k = (-1)^{l+m}\binom{s-m}{n-l} \tag{12}$$

donde l es un entero no-negativo y m, n son enteros.

Solución

Demostración. La idea para realizar la demostración consiste en convertir la expresión en la convolución de Vandermonde. Para esto, primero se utiliza la ley de simetría,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

para bajar las k al índice inferior en los coeficientes en (12),

$$\sum_k \binom{l}{l-m-k}\binom{s+k}{s+k-n}(-1)^k \tag{13}$$

luego utilizando la propiedad de "negación superior",

$$\binom{n}{k} = (-1)^k\binom{k-n-1}{k}$$

se obtiene

$$\sum_k \binom{l}{l-m-k}(-1)^{s+k-n}\binom{-1-n}{s+k-n}(-1)^k = (-1)^{s-n}\sum_k \binom{l}{l-m-k}\binom{-1-n}{s+k-n} \tag{14}$$

La sumatoria en el lado derecho de la expresión es una forma de la convolución de Vandermonde [1, pp. 169],

$$\sum_k \binom{l}{l-m-k}\binom{-1-n}{s+k-n} = \binom{l-n-1}{l-m-n+s} \tag{15}$$

Finalmente, luego de sustituir, aplicar la propiedad de "negación superior" y la propiedad de simetría de nuevo, se obtiene que

$$\begin{aligned}
(-1)^{s-n}\binom{l-n-1}{l-m-n+s} &= (-1)^{s-n}(-1)^{l-m-n+s}\binom{s-m}{l-m-n+s} && (16)\\
&= (-1)^{l-m}\binom{s-m}{l-m-n+s} && (17)\\
&= (-1)^{l-m}\binom{s-m}{n-l} && (18)
\end{aligned}$$

Por último, se debe notar que,

$$\begin{aligned}
(-1)^{l-m} &= \frac{(-1)^l(-1)^m}{(-1)^m(-1)^m}\\
&= \frac{(-1)^l(-1)^m}{(-1)^{2m}}\\
&= (-1)^{l+m}
\end{aligned}$$

En conclusión, luego de sustituir, queda demostrada (12).

$$\boxed{\sum_k \binom{l}{m+k}\binom{s+k}{n}(-1)^k = (-1)^{l+m}\binom{s-m}{n-l}} \tag{19}$$

$\square$

Problema #5: Mostrar que $\forall n$ entero se cumple:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{r-tk}{k}\binom{s-t(n-k)}{n-k}\frac{r}{r-tk} = \binom{r+s-tn}{n} \tag{20}$$

Solución

Demostración. Es posible realizar esta demostración por inducción Noetheriana. Para ello primero se debe remplazar s por $m+n-r+tn$ en (20)

$$\begin{aligned}
A(r,m,n,t) &= \sum_{k\geqslant 0}\binom{r-tk}{k}\binom{m+n-r+tn-tn+tk}{n-k}\frac{r}{r-tk}\\
&= \sum_{k\geqslant 0}\binom{r-tk}{k}\binom{m+n-r+tk}{n-k}\frac{r}{r-tk}
\end{aligned}$$

donde $r \neq tk$ de manera que este definida la expresión. A partir de esto, se observa que para $m = 0$,$n = 0$,$k = 0$,

$$\begin{aligned} A(r,m,n,t) &= \sum_{k \geqslant 0} \binom{r}{0} \binom{-r}{0} \frac{r}{r} \\ &= 0 \end{aligned}$$

se cumple claramente el caso base. Ahora, para realizar el paso inductivo, es necesario probar que se cumple para todo antecesor de m y n. Al aplicar la fórmula de adición a $\binom{m+n-r+tk}{n-k}$ se obtiene

$$\begin{aligned} A(r,m,n,t) &= \sum_{k \geqslant 0} \binom{r-tk}{k} \binom{m-1+n-r+tn-tn+tk}{n-k} \frac{r}{r-tk} \\ &+ \sum_{k \geqslant 0} \binom{r-tk}{k} \binom{m-1+n-r+tn-tn+tk}{n-k-1} \frac{r}{r-tk} \end{aligned}$$

Al remplazar por la hipótesis inductiva se observa

$$A(r,m-1,n,t) + A(r,m,n-1,t) = \binom{m-1+n}{n} + \binom{m+n-1}{n-1}$$

Luego, al aplicar nuevamente la fórmula de adicción en el segundo termino, se obtiene

$$A(r,m,n,t) = \binom{m+n}{n}$$

quedando así, demostrado el paso inductivo.

□

Referencias

[1] R.L. Graham, D.E. Knuth, and O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.