Universidad Simón Bolívar
Departamento de Computación y Tecnología de la Información
CI-7521 Matemática para Computación

Gracias a Maribel, Alejandro, Ricardo y Carmen, de quienes tome las respuestas.

EXAMEN #1

1. Sea V un alfabeto finito con al menos dos letras. Muestre que $\langle V^*, \leq \rangle$, donde $\leq$ es el orden lexicográfico, no es Noetheriano.

Solución:

Para mostrar que $\langle V^*, \leq \rangle$ no es Noetheriano, se dará un contraejemplo.

Por definición de orden Noetheriano, $\langle V^*, \leq \rangle$ debe cumplir que para todo subconjunto no vacío de V^* tiene elemento minimal.

Sea V un alfabeto finito de la forma V={a_1, a_2, …, a_n} con $n \geq 2$. Sean a_i, aj cualesquiera tal que $a_i \in V$, $a_j \in V$ y que cumplen $a_i \leq a_j$, bajo la relación de orden lexicográfico. Esto se puede suponer sin pérdida de generalidad, debido a que la demostración con $a_j \leq a_i$ es totalmente análoga.

Luego, sea P un conjunto tal que $P \subseteq V^*$, que está conformado por todas las palabras de la forma $a_i{}^*a_j$. Veamos que el conjunto P no posee elemento minimal, ya que siempre es posible conseguir para cualquier palabra una que sea menor lexicográficamente, pues:

$$a_i^{k+1}\, a_j < a_i^{k}\, a_j.\text{(para todo } k \geq 0)$$

Por ejemplo

$a_ia_j < a_j$ y $a_ia_ia_j < a_ia_j$ y $a_ia_ia_j < a_ia_ia_ia_i$ y etc.

Por lo tanto, como existe un subconjunto de V^* que no contiene minimal, $\langle V^*, \leq \rangle$ no es Noetheriano.

2. Muestre que el conjunto de las secuencias finitas de ceros y unos es contable.

Solución:

Sea B el conjunto de secuencias finitas de ceros y unos. Para demostrar que B es contable se hallará una función inyectiva f tal que f: B $\rightarrow \mathbb{N}$.

La idea para hallar f es hacer una correspondencia de cada secuencia finita de ceros y unos en los número naturales. La solución más evidente que es transformar la secuencia en su respectivo valor natural no es una función inyectiva. Veamos el siguiente ejemplo: las secuencias ‘01’ y ‘1’ tienen la misma imagen en los naturales que es el número 1. El error en este ejemplo ocurre que las secuencias base < > y 0 tienen la misma imagen en los naturales que es 0. Sin embargo, para evitar este tipo de casos se puede concatenar un uno a la secuencia.

Considerando lo anterior, sea $x \in$ B, se define f de la siguiente manera:

$$f(x) = binario(1.x) - 1$$

Donde se utiliza la función *binario* que transforma la cadena que consiste de B que consiste en un ‘1’ concatenada con ‘x’.

Veamos unos ejemplos de la aplicación de f:

$$\begin{aligned}
f(<>) &= binario(1.<>) - 1 = binario(1) - 1 = 1 - 1 = 0 \\
f(0) &= binario(1.0) - 1 = binario(10) - 1 = 2 - 1 = 1 \\
f(1) &= binario(1.1) - 1 = binario(11) - 1 = 3 - 1 = 2 \\
f(00) &= binario(1.00) - 1 = binario(100) - 1 = 4 - 1 = 3 \\
f(01) &= binario(1.01) - 1 = binario(101) - 1 = 5 - 1 = 4 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Nótese que en el ejemplo anterior las cadenas ‘01’ y ‘1’ tienen imágenes diferentes, con lo cual se resuelve el problema plantado inicialmente.

Ahora, demostremos que f es inyectiva. Para esto, se debe cumplir que:

$$(\forall x, y: f(x) \neq f(y) \Longrightarrow x \neq y)$$

Sean x, $y \in$ B elementos cualesquiera:

$$f(x) \neq f(y)$$

$\equiv$ {Por definición de función f }

$$binario(1.x) - 1 \neq binario(1.y) - 1$$

$\equiv$ {Sumando 1 a ambos lados}

$$binario(1.x) \neq binario(1.y)$$

$\rightarrow$ {El valor correspondiente en los naturales de las cadenas es diferente, y las cadenas empiezan por 1}

$$1.x \neq 1.y$$

$\equiv$ {Suprimiendo los 1 al inicio de ambas cadenas}

$$x \neq y$$

Por lo tanto, *f* es inyectiva y se puede concluir que el conjunto B definido como el conjunto de las secuencias de ceros y unos es contable.

PREGUNTA 3

(4 puntos).

Definamos inductivamente el siguiente conjunto de árboles A sobre un conjunto de objetos E:

1. $< e, \emptyset >$ **está en** A**, para todo** e **en** E**. Decimos que** e **es la raiz de** $< e, \emptyset >$ $, elnmerodeelementosde < e, \emptyset >$ **es 1, la altura es 0.**

2. **Si** $a_1 =< e_1, A_1 >$ **y** $a_2 =< e_2, A_2 >$ **son árboles en** A **y la altura de** a_1 **es menor o igual a la altura de** $a2$ **entonces** $< e_2, A_2 \cup \{a_1\} >$ **es un árbol de** A**. Decimos que** e_2 **es la raíz del este último árbol, su múmero de elementos es el número de elementos de** a_1 **más el número de elementos de** a_2**, y la altura es igual a 1 más el máximo de las alturas de los árboles en** $A_2 \cup \{a1\}$

3. **Todo árbol en A se obtiene de la aplicación de las reglas** (1) **y** (2) **un número finito de veces.**

a) **Investigue si es verdad que la altura de una árbol de** n **elementos en** A **tiene altura a lo sumo** $\lfloor \log_2 n \rfloor$**.**

b) **¿Si en la regla (2) cambiamos "la altura de** a_1 **es menor o igual a la altura de** a_2**" por "el número de elementos de** a_1 **es menor o igual al número de elementos de** a_2**", entonces se puede deducir un resultado parecido a (a).**

a) **Investigue si es verdad que la altura de una arbol de n elementos en A tiene altura a lo sumo $\lfloor \log_2 n \rfloor$.**

Para demostrar este propiedad, primero denotemos $altura(a)$ como la altura del árbol a, y $numElems(a)$ como la cantidad de elementos del mismo. Concretamente queremos demostrar lo siguiente:

$$altura(a) \; \leq \; \lfloor \log_2 numElems(a) \rfloor$$

Se procede entonces a demostrar la propiedad por inducción estructural.

a) **Caso base:**
Sea $a =< e_1, \emptyset >$. Este árbol tiene un solo elemento ($numElems(a) = 1$) y su altura es 0. ($altura(a) = 0 \leq \log_2 1$). Por lo tanto, la propiedad se cumple para el caso base.

b) **Caso inductivo**
Sean dos árboles $a_1 =< e_1, A_1 >$ y $a_2 =< e_2, A_2 >$ y a el árbol que resulta de aplicar la regla (2) con a_1 y a_2. Debemos mostrar entonces que $altura(a) \leq \lfloor \log_2 numElems(a) \rfloor$. ~~Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $altura(a_1) \leq altura(a_2)$, ya que al ocurrir lo contrario podría simplemente hacerse un intercambio de nombres y la demostración quedaría análoga.~~

- **Caso $altura(a_1) < altura(a_2)$:**
  $altura(a) = 1 + max\{altura(b) | b \in (A_2 \cup \{a_1\})\}$
  $\equiv$ { Sabemos que $altura(A_2) = altura(a_2) - 1$ y por hipótesis, este es el máximo. }
  $altura(a) = 1 + (altura(a_2) - 1)$
  $\equiv$ { Aritmética }
  $altura(a) = altura(a_2)$
  $\equiv$ { Hipótesis inductiva $altura(a_2) \leq \lfloor \log_2 numElems(a_2) \rfloor$}
  $altura(a) \leq \lfloor \log_2 numElems(a_2) \rfloor$
  $\equiv$ { Logaritmo es una función monótonamente no decreciente. }
  $altura(a) \leq \lfloor \log_2 numElems(a_2) + numElems(a_1) \rfloor$
  $\equiv$ { Definición en regla (2) }
  $altura(a) \leq \lfloor \log_2 numElems(a) \rfloor$
- **Caso $altura(a_1) = altura(a_2)$:**
  $altura(a) = 1 + max\{altura(b) | b \in (A_2 \cup \{a_1\})\}$

$\equiv$ { Sabemos que $altura(A_2) = altura(a_2) - 1$ y por hipótesis, el máximo sería $altura(a_1)$. }
$altura(a) = 1 + altura(a_1)$
$\equiv$ { Hipótesis inductiva $altura(a_1) \leq \lfloor \log_2 numElems(a_1) \rfloor$}
$altura(a) \leq 1 + \lfloor \log_2 numElems(a_1) \rfloor$
$\equiv$ {1 es entero y es igual a $\log_2 2$}
$altura(a) \leq \lfloor \log_2 2 + \log_2 numElems(a_1) \rfloor$
$\equiv$ { Aritmética }
$altura(a) \leq \lfloor \log_2 (2 * numElems(a_1)) \rfloor$
$\equiv$ { Suponiendo $numElems(a_2) \geq numElems(a_1)$}
$altura(a) \leq \lfloor \log_2 (numElems(a_2) + numElems(a_1)) \rfloor$

Claro está, que esta demostración está restringida al caso en que $altura(a_1) = altura(a_2)$ y $numElems(a_2) \geq numElems(a_1)$. Sin embargo realmente no se pierde la generalidad, ya que al igual que antes, puede realizarse un intercambio de nombres para asegurar esta propiedad.

b) **¿Si en la regla (2) cambiamos "la altura de a_1 es menor o igual a la altura de a_2" por "el número de elementos de a_1 es menor o igual al número de elementos de a_2", entonces se puede deducir un resultado parecido a (a).**

   En este caso, la diferencia reside en que no ay una garantía que diga que $altura(a_1) \leq altura(a_2)$. Si este fuera el caso la demostración es análoga a la parte anterior. Queda demostrar lo que pasa cuando $altura(a_1) > altura(a_2)$.

   $altura(a) = 1 + max\{altura(b) | b \in (A_2 \cup \{a_1\})\}$

   $\equiv$ { Sabemos que $altura(A_2) = altura(a_2) - 1$ y por hipótesis, el máximo sería $altura(a_1)$. }

   $altura(a) = 1 + altura(a_1)$

   $\equiv$ { Hipótesis inductiva $altura(a_1) \leq \lfloor \log_2 numElems(a_1) \rfloor$}

   $altura(a) \leq 1 + \lfloor \log_2 numElems(a_1) \rfloor$

   $\equiv$ {1 es entero y es igual a $\log_2 2$}

   $altura(a) \leq \lfloor \log_2 2 + \log_2 numElems(a_1) \rfloor$

   $\equiv$ { Aritmética }

   $altura(a) \leq \lfloor \log_2 (2 * numElems(a_1)) \rfloor$

   $\equiv$ { Por hipótesis, $numElems(a_2) \geq numElems(a_1)$}

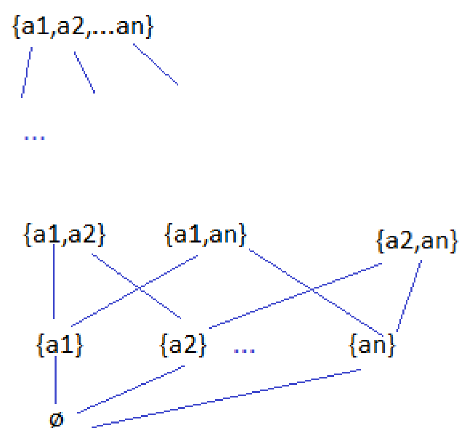
   $altura(a) \leq \lfloor \log_2 (numElems(a_2) + numElems(a_1)) \rfloor$

Nótese que en este caso si era importante no tener una restricción, como en el segundo caso de la demostración anterior, ya que no se podía realizar correctamente el simple intercambio de nombres.

(IV) Sea A un conjunto de n≥1 elementos y (P(A),⊆) el conjunto parcialmente ordenado sobre el conjunto P(A) de todos los subconjuntos de A con respecto a la inclusión. Muestre utilizando inducción noetheriana que para todo elemento B en P(A), en el diagrama de Hasse, toda cadena (o camino) que va de ø (el menor elemento del CPO) a B tiene largo |B| y que el número de esas cadenas es |B|!

Resolución:

Sea A= $\{a_1,a_2,\ldots a_n\}$. El diagrama de Hasse del conjunto parcialmente ordenado sobre la inclusión luciría de la forma:



Para probar las propiedades propuestas por inducción noetheriana es necesario probar que:

1) Todo minimal de P(A) satisface las propiedades
2) Para todo elemento no minimal x, si para todo elemento y tal que y<=x , y satisface las propiedades , entonces x satisface las propiedades

Consideremos los minimales de P(A), los conjuntos unitarios de los elementos de A ({a1},{a2},…,{an}). La cadena desde el mínimo ø hasta cada uno de estos subconjuntos unitarios de A es de largo 1, lo que coincide con la cardinalidad del subconjunto. Asimismo, el número de cadenas que permiten llegar desde el mínimo a cada uno de estos minimales es 1, que coincide con el factorial de la cardinalidad.

Consideremos ahora un elemento no minimal x, para el cual se cumple que todo elemento y menor o igual que x por la relación de orden (⊆) se cumplen las propiedades especificadas. Consideremos los antecesores directos de x, y', que son aquellos conjuntos de cardinalidad |y'|=|x|-1, formados, cada uno de ellos, por todos menos uno de los elementos de x.
Como y' cumple las propiedades, sabemos que:

- El camino desde ø a y' tiene largo |y'| y esto es, por definición, |x|-1
- La cantidad de caminos desde ø a y' es |y'|! y esto es, por definición (|x|-1)!

Como todo y' es un antecesor directo de x, es claro que en el diagrama de Hasse la longitud del camino para llegar a x será 1 más la longitud del camino para llegar a cualquiera de los y', esto es:
Longitud de los caminos para llegar a x =|y'|+1 y esto es |x|

Ahora bien, la cantidad de antecesores directos de x es igual a $|x|$, pues cada antecesor directo es un subconjunto de x al que le falta un solo elemento (y por tanto existen $|x|$ de estos conjuntos). En consecuencia, la cantidad de caminos para llegar a x desde $\emptyset$ equivale a la cantidad de $|x|$ multiplicado por la cantidad de caminos existentes para llegar a los antecesores directos de x, esto es $(|x|-1)!$. Por tanto la cantidad de caminos para llegar desde $\emptyset$ a x es $|x|!$.
Por lo tanto, por inducción noetheriana, queda demostrado que las propiedades indicadas se cumplen para todos los elementos de $(P(A), \subseteq)$

Problema #5: Mostrar por inducción constructiva que para todo k entero positivo, existen n_0 y d tales que para $n \geq n_0$, $t(n) \leq d.n!$, donde:

$$t(n) = \begin{cases} a & \text{si } n = 1 \\ b.n^k + n.t(n-1) & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \qquad \text{con } a, b > 0.$$

Solución

Demostración. Considérese una conjetura mas fuerte que la exigida en el enunciado,

$$(\exists d, e > 0)\,(\forall n \in \mathbb{N})\left[t(n) \leq d\,n! - e\,n^k\right]$$

con n "suficientemente grande". El enfoque de inducción constructiva consiste en preguntar para que valores de d y e se sigue que $P_{d,e}(n) \equiv \left[t(n) \leq d\,n! - e\,n^k\right]$ tomando como base la hipótesis de inducción especificada parcialmente y consistente en que $P_{d,e}(m)$ es cierto para todo entero m que sea menor que n pero que tenga un valor suficientemente grande. Empleando la definición de $t(n)$ y esta hipótesis, y siempre y cuando $n-1$ sea también "suficientemente grande":

$$\begin{aligned} t(n) &= b\,n^k + n\,t(n-1) && (20)\\ t(n) &\leq b\,n^k + n\left[d\,(n-1)! - e\,(n-1)^k\right] && (21)\\ t(n) &\leq b\,n^k + d\,n! - e\,n\,(n-1)^k && (22)\\ t(n) &\leq b\,n^k + d\,n! - e\,n\,(n-1)^k - e\,n^k + e\,n^k && (23)\\ t(n) &\leq d\,n! - e\,n^k + \left[b\,n^k - e\,n\,(n-1)^k + e\,n^k\right] && (24) \end{aligned}$$

Para concluir que $t(n) \leq d\,n! - e\,n^k$, es necesario que $d\,n! - e\,n^k + \left[b\,n^k - e\,n\,(n-1)^k + e\,n^k\right] \leq d\,n! - e\,n^k$. Por algebra elemental,

$$\begin{aligned} d\,n! - e\,n^k + \left[b\,n^k - e\,n\,(n-1)^k + e\,n^k\right] &\leq d\,n! - e\,n^k && (25)\\ b\,n^k - e\,n\,(n-1)^k + e\,n^k &\leq 0 && (26)\\ \left(1 + \frac{b}{e}\right) n^k - n\,(n-1)^k &\leq 0 && (27)\\ \frac{b}{e} &\leq \frac{(n-1)^k}{n^{k-1}} - 1 && (28) \end{aligned}$$

se observa que si $b > 0$ y finito, entonces es posible definir un valor para $e > 0$ tal que para cierto valor $n = n_0$ "suficientemente grande" se cumpla la condición (28). Finalmente, la constante d debe cumplir

$$t(n_0) \leq d\, n_0! - e\, n_0^k \tag{29}$$

$$d \geq \frac{t(n_0) + e\, n_0^k}{n_0!} \tag{30}$$

De esta manera queda entonces demostrado que $t(n) \leq d.n!$.

$\square$

Problema #6: Pruebe que

$$\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n+m-1}{m} \right\rfloor$$

para todo entero n y todo entero positivo m. [Esta identidad nos da otra forma de convertir la función techo en la función piso y viceversa, en lugar de usar la propiedad de reflexividad.]

Solución

Demostración. Considere un número entero q. Existen al menos un número entero k y un número entero positivo s tales que:

$$q = \left\lfloor \frac{k}{s} \right\rfloor \tag{31}$$

y por lo tanto,

$$\frac{k}{s} - 1 < \quad q \quad \leq \quad \frac{k}{s} \quad < q + 1 \tag{32}$$

$$k - s \leq s\, q \quad \leq \quad k \quad < s\,(q+1) \tag{33}$$

$$s\, q \quad \leq \quad k \quad \leq s\,(q+1) - 1 \tag{34}$$

Por otro lado, también existen al menos un número entero n y un número entero positivo m tales que:

$$q = \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil \tag{35}$$

y en consecuencia,

$$
\begin{aligned}
q-1 < \quad \frac{n}{m} \quad &\leq \quad q \quad < \frac{n}{m}+1 && (36)\\
m\,(q-1) < \quad n \quad &\leq \quad m\,q < n+m && (37)\\
m\,(q-1)+1 \leq \quad n \quad &\leq \quad m\,q && (38)
\end{aligned}
$$

Al reacomodar los términos en la ecuación (38), se obtiene:

$$
\begin{aligned}
m\,(q-1) \leq \qquad n-1 \quad &\leq \quad m\,q-1 && (39)\\
m\,q \leq n-1+m \quad &\leq \quad m\,q-1+m && (40)\\
m\,q \leq n+m-1 \quad &\leq \quad m\,(q+1)-1 && (41)
\end{aligned}
$$

lo cual es equivalente a la expresión (34) con:

$$
\begin{aligned}
k \quad &= \quad n+m-1 && (42)\\
s \quad &= \quad m && (43)
\end{aligned}
$$

y de donde finalmente se concluye que

$$
\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n+m-1}{m} \right\rfloor
$$

$\square$

Referencias

[1] Klappenecker, Andreas. *Noetherian Induction.* http:// faculty.cs.tamu.edu / klappi / csce222-s10 / noetherian induction.pdf

6. Ejercicio 12 del Capítulo 13 de “Concrete Mathematics 2da. Edición”. Hacer la prueba detallada de la solución que propone el libro.

$$\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n+m-1}{m} \right\rfloor$$

Para todo *n*, *m* enteros positivos.

Solución:

A continuación se presenta la solución detallada propuesta por el libro.

Partimos de lo que se quiere demostrar:

$$\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n+m-1}{m} \right\rfloor$$

La solución del libro sugiere que se resta $\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$ a ambos lados de la igualdad, y se obtiene:

$$\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+m-1}{m} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$$

Luego, se utiliza la propiedad (3.6) de Knuth en la que se cumple $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$ y $\lceil x+n \rceil = \lceil x \rceil + n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Esta propiedad se puede usar debido a que $\lfloor {}^{n}/_{m} \rfloor$ es un número entero. Por lo tanto:

$$\left\lceil \frac{n}{m} - \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor \right\rceil = \left\lfloor \frac{n+m-1}{m} - \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor \right\rfloor$$

Por aritmética, resta de fracción y un número entero se cumple que:

$$\left\lceil \frac{n - m\lfloor {}^{n}/_{m} \rfloor}{m} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n+m-1-m\lfloor {}^{n}/_{m} \rfloor}{m} \right\rfloor$$

Sustituyendo por la definición de módulo: $n \bmod m = n - m\lfloor {}^{n}/_{m} \rfloor$, se tiene:

$$\left\lceil \frac{n \bmod m}{m} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n \bmod m + m - 1}{m} \right\rfloor$$

Ahora analicemos el resultado anterior. Como *n*, *m* son enteros positivos y $m \neq 0$, por propiedad de Knuth se cumple que : $0 \leq n \bmod m < m$. En caso que:

(i) $n \bmod m = 0$

Se obtiene lo siguiente:

$$\left\lceil \frac{0}{m} \right\rceil = \left\lfloor \frac{m-1}{m} \right\rfloor$$

Por la definición de función de parte entera por encima se tiene que $\lceil 0 \rceil = 0$, y como $0 < (m-1)/m < 1$, por definición de función de parte entera por debajo se tiene que $\left\lfloor \frac{m-1}{m} \right\rfloor = 0$. Por lo tanto, la igualdad se cumple.

(ii) $n \; mod \; m \neq 0$

En este caso se tiene que $0 < n \; mod \; m \; < m$. Al dividir las desigualdades anteriores por m (m>0), es fácil ver que:

$$0 < \frac{n \; mod \; m}{m} < 1$$

Por lo tanto:

$$\left\lceil \frac{n \; mod \; m}{m} \right\rceil = 1$$

Por otro lado, al realizar un razonamiento similar con las desigualdades, pero en este caso sumando (m - 1) y dividiendo por m (m>0), se obtiene que:

$$\frac{m-1}{m} < \frac{n \; mod \; m \; + m - 1}{m} < \frac{2m-1}{m}$$

Como $\frac{2m-1}{m} < 2$, entonces se cumple que:

$$\left\lfloor \frac{n \; mod \; m + m - 1}{m} \right\rfloor = 1$$

En este caso, la igualdad también se cumple.

Por lo tanto, que demostrado que:

$$\left\lceil \frac{n \; mod \; m}{m} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n \; mod \; m + m - 1}{m} \right\rfloor$$

Son iguales a $[n \; mod \; m > 0]$, debido a que cuando no se satisface $n \; mod \; m > 0$, es decir cuando $n \; mod \; m = 0$, se cumple que ambos lados son iguales a 0, y cuando se satisface $n \; mod \; m > 0$ se cumple que ambos lados son iguales a 1.