Solucion tarea 4:

Gracias a Maribel y Rafael.

La pregunta (3) no fue respondida completamente por ninguno, sin embargo Fabiola, Maribel y Rafael tuvieron un razonamiento adecuado. Espero se entienda mi comentario.

Ejercicio 1:

Establecer las fórmulas de inversión de la tabla 264 del Capítulo 6 del *Concrete Mathematics* Segunda Edición:

$$\sum_k \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop m} \right] (-1)^{n-k} = [m = n]$$

$$\sum_k \left[{n \atop k} \right] \left\{ {k \atop m} \right\} (-1)^{n-k} = [m = n]$$

Solución:

Demostración: $\sum_k \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop m} \right] (-1)^{n-k} = [m = n]$

Primero, se realizará la demostración de la primera fórmula de inversión:

$$\sum_k \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop m} \right] (-1)^{n-k} = [m = n]$$

Esta demostración se realizará de acuerdo a la sugerencia del texto *Concrete Mathematics* en la página 266, donde se parte de la ecuación 6.12 que se muestra a continuación:

$$\sum_k \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}} = x^n$$

Luego, por la fórmula 6.11 del texto, se puede sustituir $x^{\overline{k}} = \sum_m \left[{k \atop m} \right] x^m$ y obtenemos la siguiente doble suma:

$$\sum_k \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^{n-k} \sum_m \left[{k \atop m} \right] x^m = x^n$$

Como las dos sumas son para todos los valores de k y m, podemos escribirlas como una sola suma y aplicando propiedad conmutativa del producto se obtiene la siguiente igualdad:

$$\sum_{k,m} \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop m} \right] (-1)^{n-k} x^m = x^n$$

Además, el polinomio del lado derecho se puede escribir como:

$$\sum_{k,m} \left\{ n \atop k \right\} \left[k \atop m \right] (-1)^{n-k} x^m = 0 \cdot x^0 + 0 \cdot x^1 + ... + 0 \cdot x^{n-1} + x^n + 0 \cdot x^{n+1} + ...$$

La ecuación anterior es una igualdad de dos polinomios, y como se cumple para todo x, se tienen que los coeficientes de x^0, x^1, ..., x^{n-1}, x^{n+1}, etc. en la suma deben ser iguales a 0, y además cuando $m = n$ el coeficiente debe ser 1. Por lo tanto, expresando la ecuacion sólo en función de los coeficientes de los polinomios se obtiene la siguiente identidad:

$$\sum_{k} \left\{ n \atop k \right\} \left[k \atop m \right] (-1)^{n-k} = [m = n]$$

$\blacksquare$

Demostración: $\sum_k \left[n \atop k \right] \left\{ k \atop m \right\} (-1)^{n-k} = [m = n]$

Ahora, se realizará la demostración de la segunda fórmula de inversión del enunciado:

$$\sum_{k} \left[n \atop k \right] \left\{ k \atop m \right\} (-1)^{n-k} = [m = n]$$

Haciendo un razonamiento análogo a la demostración anterior, se parte de la fórmula 6.13 del texto *Concrete Mathematics*:

$$\sum_{k} \left[n \atop k \right] (-1)^{n-k} x^k = x^{\underline{n}}$$

Luego, por la fórmula 6.10 del texto podemos sustituir $x^k = \sum_m \left\{ k \atop m \right\} x^{\underline{m}}$ y se obtiene la siguiente doble suma:

$$\sum_{k} \left[n \atop k \right] (-1)^{n-k} \sum_{m} \left\{ k \atop m \right\} x^{\underline{m}} = x^{\underline{n}}$$

Como las dos sumas son para todos los valores de k y m, podemos escribirlas como una sola suma y aplicando propiedad conmutativa del producto se obtiene la siguiente igualdad:

$$\sum_{k,m} \left[n \atop k \right] \left\{ k \atop m \right\} (-1)^{n-k} x^{\underline{m}} = x^{\underline{n}}$$

Además, el polinomio del lado derecho se puede escribir como:

$$\sum_{k,m} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} x^{\underline{m}} = 0 \cdot x^{\underline{0}} + 0 \cdot x^{\underline{1}} + ... + 0 \cdot x^{\underline{n-1}} + x^{\underline{n}} + 0 \cdot x^{\underline{n+1}} + ...$$

Como $x^{\underline{n}}$ es un polinomio de grado n, y la igualdad se cumple para todo x, se tiene que el coeficiente de $x^{\underline{0}}$, $x^{\underline{1}}$, ..., $x^{\underline{n-1}}$, $x^{\underline{n+1}}$, etc. en la suma debe ser igual a 0, y además cuando $m = n$ el coeficiente debe ser 1, de acuerdo al lado derecho de la ecuación. Por lo tanto, expresando la ecuación en términos de los coeficientes de los polinomios se obtiene la siguiente identidad:

$$\sum_{k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} = [m = n]$$

$\blacksquare$

Ejercicio 2:

Establecer la igualdad (6.17) de la tabla 265 del Capítulo 6 del *Concrete Mathematics* Segunda Edición:

$$\left\{ {n \atop m} \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ {k+1 \atop m+1} \right\} (-1)^{n-k}$$

Para $n, m \geq 0$.

Solución:

La demostración de esta igualdad se realizará por inducción sobre n.

- **Caso Base:** $n = 0$
  Como $n = 0$, se tiene que demostrar que se cumple:

  $$\left\{ {0 \atop m} \right\} = \sum_k \binom{0}{k} \left\{ {k+1 \atop m+1} \right\} (-1)^{-k}$$

  En este caso, se tiene que el coeficiente binomial $\binom{0}{k}$ siempre es igual 0, excepto cuando $k = 0$, que en este caso el coeficiente binomial es igual a 1. Debido a esto, todos los términos de la suma son 0, excepto cuando $k = 0$.

  Por lo tanto:

  $$\begin{array}{cl} & \left\{ {0 \atop m} \right\} = \sum_k \binom{0}{k} \left\{ {k+1 \atop m+1} \right\} (-1)^{-k} \\ \equiv & \quad \{ \text{ En la suma todos los términos son } 0\text{, excepto cuando } k = 0 \ \} \\ & \left\{ {0 \atop m} \right\} = \left\{ {0+1 \atop m+1} \right\} (-1)^{0} \\ \equiv & \quad \{ \text{ Aritmética } \} \\ & \left\{ {0 \atop m} \right\} = \left\{ {1 \atop m+1} \right\} \end{array}$$

  La igualdad anterior se satisface, debido a que por hipótesis $m \geq 0$. Si $m = 0$, ambos lados quedan iguales a 1. Si $m > 0$ ambos lados quedan iguales a 0. Por lo tanto, la ecuación (6.17) se cumple para el caso base $n = 0$.

- **Caso Inductivo:**

  Ahora, suponemos que la identidad se cumple para todos los valores hasta n.

  Hipótesis Inductiva:

$$\left(\forall i : 0 \leq i \leq n : \left\{ {i \atop m} \right\} = \sum_k \binom{i}{k} \left\{ {k+1 \atop m+1} \right\} (-1)^{i-k} \right)$$

  Probemos que se cumple para $i = n+1$.

$$\begin{aligned}
& \sum_k \binom{n+1}{k} \left\{ {k+1 \atop m+1} \right\} (-1)^{n+1-k} \\
= & \qquad \{ \text{ Fórmula de la Adición de Coeficiente Binomial } \} \\
& \sum_k \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) \left\{ {k+1 \atop m+1} \right\} (-1)^{n+1-k} \\
= & \qquad \{ \text{ Aritmética: Propiedad Distributiva } \} \\
& \sum_k \binom{n}{k} \left\{ {k+1 \atop m+1} \right\} (-1)^{n+1-k} + \binom{n}{k-1} \left\{ {k+1 \atop m+1} \right\} (-1)^{n+1-k} \\
= & \qquad \{ \text{ Propiedad Asociativa de la Suma } \} \\
& \sum_k \binom{n}{k} \left\{ {k+1 \atop m+1} \right\} (-1)^{n+1-k} + \sum_k \binom{n}{k-1} \left\{ {k+1 \atop m+1} \right\} (-1)^{n+1-k} \\
= & \qquad \{ \text{ Propiedad Distributiva en la primera Suma } \} \\
& -\sum_k \binom{n}{k} \left\{ {k+1 \atop m+1} \right\} (-1)^{n-k} + \sum_k \binom{n}{k-1} \left\{ {k+1 \atop m+1} \right\} (-1)^{n+1-k} \\
= & \qquad \{ \text{ Hipótesis Inductiva en la primera Suma } \} \\
& -\left\{ {n \atop m} \right\} + \sum_k \binom{n}{k-1} \left\{ {k+1 \atop m+1} \right\} (-1)^{n+1-k} \\
= & \qquad \{ \text{ Fórmula de la Adición de Stirling 2° Especie } \} \\
& -\left\{ {n \atop m} \right\} + \sum_k \binom{n}{k-1} \left((m+1) \left\{ {k \atop m+1} \right\} + \left\{ {k \atop m} \right\} \right) (-1)^{n+1-k} \\
= & \qquad \{ \text{ Aritmética: Propiedad Distributiva } \} \\
& -\left\{ {n \atop m} \right\} + \sum_k \binom{n}{k-1} \left\{ {k \atop m+1} \right\} (-1)^{n-(k-1)} (m+1) + \binom{n}{k-1} \left\{ {k \atop m} \right\} (-1)^{n-(k-1)} \\
= & \qquad \{ \text{ Cambio de Variable: } k \to k+1 \text{, el rango es } \forall k \ \} \\
& -\left\{ {n \atop m} \right\} + \sum_k \binom{n}{k} \left\{ {k+1 \atop m+1} \right\} (-1)^{n-k} (m+1) + \binom{n}{k} \left\{ {k+1 \atop m} \right\} (-1)^{n-k} \\
= & \qquad \{ \text{ Propiedad Asociativa de la Suma } \} \\
& -\left\{ {n \atop m} \right\} + \sum_k \binom{n}{k} \left\{ {k+1 \atop m+1} \right\} (-1)^{n-k} (m+1) + \sum_k \binom{n}{k} \left\{ {k+1 \atop m} \right\} (-1)^{n-k}
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{ll}
= & \{ \text{ Propiedad Distributiva de la Suma } \} \\
& -\left\{ n \atop m \right\} + (m+1) \sum_k \binom{n}{k} \left\{ k+1 \atop m+1 \right\} (-1)^{n-k} + \sum_k \binom{n}{k} \left\{ k+1 \atop m \right\} (-1)^{n-k} \\
= & \{ \text{ Hipótesis Inductiva en la primera Suma } \} \\
& -\left\{ n \atop m \right\} + (m+1) \left\{ n \atop m \right\} + \sum_k \binom{n}{k} \left\{ k+1 \atop m \right\} (-1)^{n-k} \\
= & \{ \text{ Hipótesis Inductiva con } m := m-1 \ \} \\
& -\left\{ n \atop m \right\} + (m+1) \left\{ n \atop m \right\} + \left\{ n \atop m-1 \right\} \\
= & \{ \text{ Aritmética } \} \\
& m \left\{ n \atop m \right\} + \left\{ n \atop m-1 \right\} \\
= & \{ \text{ Fórmula de la Adición en Stirling 2° Especie } \} \\
& \left\{ n+1 \atop m \right\}
\end{array}
$$

Por lo tanto, la identidad (6.17) también se cumple para el caso inductivo.

Finalmente, por inducción queda demostrado que:

$$\left\{ n \atop m \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ k+1 \atop m+1 \right\} (-1)^{n-k}$$

■

Ejercicio 3:

Calcular cuántos m-subconjuntos de $\{1, 2, ..., n\}$ hay tales que no contienen dos enteros consecutivos. Utilice el Principio de Inclusión-Exclusión.

Solución:

Sea A el conjunto de los elementos $\{1, 2, ..., n\}$. Con el objetivo de utilizar el Principio de Inclusión-Exclusión, definimos las siguientes propiedades sobre los elementos de A:

$$p_i(x) \equiv \text{ el } m\text{-subconjunto } x \text{ tiene los elementos } i \text{ e } i+1 \ \wedge \ i = 1, 2, ...n-1$$

Se denota $A(1)$, $A(2)$, ..., $A(n-1)$ los subconjuntos de A que satisfacen las propiedades p_1, p_2, ..., p_{n-1}, respectivamente. Por lo tanto, se debe hallar la cantidad de m-subconjuntos que no satisfacen propiedad alguna, y por Principio de Inclusión-Exclusión esto es:

$$\left| \bigcap_{1 \leq i \leq n-1} \overline{A(i)} \right| = \sum_{0 \leq k \leq n-1} (-1)^k \sum_{j \subseteq \{1,..,n-1\} \ \wedge \ |j|=k} |A(j)|$$

Ahora, se debe determinar el valor de $|A(j)|$. Para esto, vamos a analizar los valores de $|A_j|$ de acuerdo a la cardinalidad de j:

- $|j| = 0$: En este caso se calcula $|A|$ que corresponde a la cantidad de m-subconjuntos que se pueden formar de un conjunto de n elementos, por lo tanto:

$$\sum_{j \subseteq \{1,..,n-1\} \ \wedge \ |j|=0} |A(j)| = \binom{n}{m}$$

- $|j| = 1$: En este caso se cuentan los subconjuntos que cumplen 1 propiedad. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $j = i$, por lo tanto se debe determinar $|A(i)|$ que corresponde a la cantidad de m-subconjuntos que contienen los elementos i e $i+1$. Para esto, fijamos los elementos i e $i+1$ en el subconjunto, luego de los $n-2$ elementos restantes se deben tomar $m-2$ para completar el m-subconjunto, y hay $\binom{n-2}{m-2}$ maneras de hacer esto. Además, de las $n-1$ propiedades, tomamos 1 que se debe cumplir y hay $\binom{n-1}{1}$ formas de escoger la propiedad. Finalmente se obtiene:

$$\sum_{j \subseteq \{1,..,n-1\} \ \wedge \ |j|=1} |A(j)| = \binom{n-1}{1}\binom{n-2}{m-2}$$

- $|j| = 2$: En este caso se cuentan los subconjuntos que cumplen 2 propiedades. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $j = \{h, i\}$, por lo tanto se debe determinar $|A(h)A(i)|$ que corresponde a la cantidad de m-subconjuntos que contienen los elementos h, $h+1$, i, $i+1$. Ahora tenemos dos subcasos, cuando $h+1 = i$, y cuando $h+1 \neq i$.

$$X = \sum_{J \subseteq \{1,\dots,n-1\},\ |J| = k} |A(J)| = \sum_i \binom{k-1}{i}\binom{n-k}{i+1}\binom{n-k-(i+1)}{m-k-(i+1)}$$ $k \neq 0$ ó $k = 0 \wedge m \neq 0$

(note que si $m = n$ en efecto $X = \binom{n-1}{k}$).

Supongamos $m \neq 0$, pues $m = 0$ es el caso trivial.

$$\left|\bigcap_{1 \le i \le n-1} \overline{A(i)}\right| = \sum_{0 \le k \le n-1} (-1)^k \sum_i \binom{k-1}{i}\binom{n-k}{i+1}\binom{n-k-(i+1)}{m-k-(i+1)}$$

$$\overset{(5.21)}{=} \sum_{0 \le k \le n-1} (-1)^k \left(\sum_i \binom{k-1}{i}\binom{n-k}{m-k}\binom{m-k}{i+1}\right)$$

$$= \sum_{0 \le k \le n-1} (-1)^k \binom{n-k}{m-k} \sum_i \binom{k-1}{i}\binom{m-k}{i+1}$$

$$\overset{(5.23)}{=} \sum_{0 \le k \le n-1} (-1)^k \binom{n-k}{m-k}\binom{m-1}{k} =$$

$$= \sum_{k \le n} (-1)^k \binom{n-k}{m-k}\binom{m-1}{k} \overset{(5.25)}{=} \binom{n-m+1}{m}$$

Ejercicio 4:

Sea A un conjunto y $p_1, p_2, ..., p_n$ n propiedades sobre los elementos de A. Denotemos por $A_1, A_2, ..., A_n$ los subconjuntos de A que satisfacen las propiedades $p_1, p_2, ..., p_n$ respectivamente.
Sea $s_m = \sum_{J\subseteq\{1,2,...n\} \wedge |J|=m} |\bigcap_{j\in J} A_j|$, sea e_m el número de objetos de A que satisfacen exactamente m propiedades.

(a) Probar que $e_m = \sum_{0\leq i\leq n-m}(-1)^i\binom{m+i}{i}s_{m+i}$

(b) Sea $E(x) = \sum_{0\leq i\leq n} e_i x^i$

(b.1) Muestre que $E(x) = \sum_{0\leq i\leq n} s_i(x-1)^i$

(b.2) Utilice (4.b.1) para mostrar que $\sum_{0\leq i\leq n \,\wedge\, i \text{ par}} e_i = \frac{1}{2}(s_0 + \sum_{0\leq i\leq n}(-2)^i s_i)$

(c) Aplique (4.b.2) en el siguiente problema: determinar una forma cerrada del número de secuencias de largo n en el alfabeto $\{0, 1, 2\}$ que tienen un número par de ceros. Ayuda: considere las propiedades:

$$p_i(x) \equiv \text{ la secuencia } x \text{ tiene un cero en la posición } i \;\wedge\; i = 1, 2, ...n$$

Solución:

Solución (4.a): Se debe probar que el número de objetos del conjunto A que satisface exactamente m propiedades cumple que:

$$e_m = \sum_{0\leq i\leq n-m}(-1)^i\binom{m+i}{i}s_{m+i}$$

Para esta prueba analicemos los casos de los objetos que cumplen menos m propiedades, los que cumplen exactamente m propiedades y los objetos que cumplen más de m propiedades.

Por definición, los objetos en s_{m+i} satisfacen por lo menos $m+i$ propiedades, y como el rango es $0 \leq i \leq n-m$, la suma no considera los objetos con menos de r propiedades.

Un objeto que cumple exactamente m propiedades se cuenta en la suma una sola vez, en el término s_m, debido que sólo cumple m propiedades no será contado en $s_{m+1}, s_{m+2}, ..., s_n$ porque en dichas sumas están los objetos que satisface por lo menos $m+1$ propiedades.

Por otro lado, veamos el caso en que un objeto satisface más de m propiedades. En este caso, si el objeto satisface $m+i$ propiedades $(0 < i \leq n-m)$, entonces aparecerá en s_m tantas veces como subconjuntos de tamaño m se puedan tomar de $m+i$ elementos, esto es $\binom{m+i}{m}$. En forma general, aparecerá en el término s_{m+j} tantas veces como subconjuntos de tamaño $m+j$ se puedan tomar de los $m+i$ elementos que tiene, esto es $\binom{m+i}{m+j}$. Por lo tanto, veamos cuántas veces aparece este objeto en la suma sustituyendo los s_{m+i}:

$$
\begin{aligned}
& \binom{m+1}{0}\binom{m+i}{m} - \binom{m+1}{1}\binom{m+i}{m+1} + \dots + (-1)^i \binom{m+i}{i}\binom{m+i}{m+i} \\
= & \qquad \left\{ \text{ Propiedad*: } \tbinom{m+k}{k}\tbinom{m+i}{m+k} = \tbinom{m+i}{m}\tbinom{i}{k} \ \right\} \\
& \binom{m+i}{m}\binom{i}{0} - \binom{m+i}{m}\binom{i}{1} + \dots + (-1)^i \binom{m+i}{m}\binom{i}{i} \\
= & \qquad \{ \text{ Aritmética: Factor Común } \} \\
& \binom{m+i}{m} \cdot \left[\binom{i}{0} - \binom{i}{1} + \dots + (-1)^i \binom{i}{i} \right] \\
= & \qquad \{ \text{ Suma de Coeficientes } \} \\
& \binom{m+i}{m} \cdot \sum_{0 \le k \le i} \binom{i}{k} (-1)^k \\
= & \qquad \{ \text{ Aritmética: Multiplicando por } 1 \ \} \\
& \binom{m+i}{m} \cdot \sum_{0 \le k \le i} \binom{i}{k} (-1)^k (1)^{n-k} \\
= & \qquad \{ \text{ Teorema Binomial, con } x = -1 \text{ y } y = 1 \ \} \\
& \binom{m+i}{m} \cdot (-1+1)^i \\
= & \qquad \{ \text{ Aritmética } \} \\
& 0
\end{aligned}
$$

Finalmente, como los objetos que cumplen menos de m propiedades no aparecen en la suma, los que cumplen exactamente m propiedades son contados sólo una vez y los que cumplen más de m propiedades tampoco se cuentan como se mostró anteriormente, queda demostrado que que:

$$e_m = \sum_{0 \le i \le n-m} (-1)^i \binom{m+i}{i} s_{m+i}$$

**Demostración de Propiedad:* $\binom{m+k}{k}\binom{m+i}{m+k} = \binom{m+i}{m}\binom{i}{k}$

$$
\begin{aligned}
& \binom{m+k}{k}\binom{m+i}{m+k} \\
= & \qquad \{ \text{ Definición de Coeficiente Binomial } \} \\
& \frac{(m+k)!}{m!k!} \frac{(m+i)!}{(i-k)!(m+k)!} \\
= & \qquad \{ \text{ Aritmética } \}
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{m!k!}\frac{(m+i)!}{(i-k)!}$$

$=$ $\{$ Aritmética: Multiplicando por $\frac{i!}{i!}$ $\}$

$$\frac{i!}{i!}\frac{1}{m!k!}\frac{(m+i)!}{(i-k)!}$$

$=$ $\{$ Aritmética $\}$

$$\frac{(m+i)!}{m!i!}\frac{i!}{(i-k)!k!}$$

$=$ $\{$ Definición de Coeficiente Binomial $\}$

$$\binom{m+i}{m}\binom{i}{k}$$

$\blacksquare$

Solución (4.b.1): Suponemos que se cumple $E(x) = \sum_{0\leq i\leq n} e_i x^i$.

Para demostrar que se cumple $E(x) = \sum_{0\leq i\leq n} s_i(x-1)^i$, partimos de la suma:

$$\sum_{0\leq i\leq n} s_i(x-1)^i$$

$=$ $\{$ Aritmética $\}$

$$\sum_{0\leq i\leq n} s_i(-1+x)^i$$

$=$ $\{$ Teorema Binomial $\}$

$$\sum_{0\leq i\leq n} s_i \sum_{0\leq j\leq i} \binom{i}{j}(-1)^{i-j}x^j$$

$=$ $\{$ Propiedad Distributiva de la Suma $\}$

$$\sum_{0\leq i\leq n}\sum_{0\leq j\leq i} \binom{i}{j}(-1)^{i-j}x^j s_i$$

$=$ $\{$ Notación de Iverson $\}$

$$\sum_{i,j} \binom{i}{j}(-1)^{i-j}x^j s_i[0\leq i\leq n][0\leq j\leq i]$$

$=$ $\{$ Manipulación de Rango $\}$

$$\sum_{i,j} \binom{i}{j}(-1)^{i-j}x^j s_i[0\leq j\leq n][j\leq i\leq n]$$

$=$ $\{$ Notación con Rangos $\}$

$$\sum_{0\leq j\leq n}\sum_{j\leq i\leq n} \binom{i}{j}(-1)^{i-j}x^j s_i$$

$=$ $\{$ Propiedad Distributiva de la Suma $\}$

$$\sum_{0\le j\le n} x^j \sum_{j\le i\le n} \binom{i}{j}(-1)^{i-j}s_i$$
$$= \quad \{ \text{ Manipulación de Rango: Sumando } -j \text{ en segunda Suma } \}$$
$$\sum_{0\le j\le n} x^j \sum_{0\le i-j\le n-j} \binom{i}{j}(-1)^{i-j}s_i$$
$$= \quad \{ \text{ Cambio de Variable: } i-j \to k \ \}$$
$$\sum_{0\le j\le n} x^j \sum_{0\le k\le n-j} \binom{j+k}{j}(-1)^{k}s_{k+j}$$
$$= \quad \{ \text{ Simetría en Coeficiente Binomial } \}$$
$$\sum_{0\le j\le n} x^j \sum_{0\le k\le n-j} \binom{j+k}{k}(-1)^{k}s_{k+j}$$
$$= \quad \{ \text{ Ejercicio (4.a) } \}$$
$$\sum_{0\le j\le n} x^j e^j$$
$$= \quad \{ \text{ Aritmética } \}$$
$$\sum_{0\le j\le n} e^j x^j$$
$$= \quad \{ \text{ Hipótesis: Definición de } E(x) \ \}$$
$$E(x)$$

Por lo tanto, queda demostrado que se cumple:

$$E(x) = \sum_{0\le i\le n} s_i(x-1)^i$$

■

Solución (4.b.2): Suponemos que se cumple $E(x) = \sum_{0\le i\le n} e_i x^i$ y $E(x) = \sum_{0\le i\le n} s_i(x-1)^i$.

Para demostrar que se cumple $\sum_{0\le i\le n \ \wedge \ i \text{ par}} e_i = \frac{1}{2}(s_0 + \sum_{0\le i\le n}(-2)^i s_i)$ vamos a partir del lado derecho de la igualdad:

$$\frac{1}{2}(s_0 + \sum_{0\le i\le n}(-2)^i s_i)$$
$$= \quad \{ \text{ Aritmética } \}$$
$$\frac{1}{2}(s_0 + \sum_{0\le i\le n}(-1-1)^i s_i)$$
$$= \quad \{ \text{ Ejercicio (4.b.1) con } x=-1 \ \}$$
$$\frac{1}{2}(s_0 + E(-1))$$

$$
\begin{aligned}
= & \quad \{ \text{ Definición de } \mathsf{E}(x) \ \} \\
& \frac{1}{2}(s_0 + \sum_{0 \le i \le n} e_i(-1)^i) \\
= & \quad \{ \text{ Separación de Rango de Suma } \} \\
& \frac{1}{2}(s_0 + \sum_{0 \le i \le n \ \wedge \ i \ par} e_i(-1)^i + \sum_{0 \le i \le n \ \wedge \ i \ impar} e_i(-1)^i) \\
= & \quad \left\{ \text{ Cuando } i \text{ es par } (-1)^i = 1, \text{ cuando } i \text{ es impar } (-1)^i = -1 \ \right\} \\
& \frac{1}{2}(s_0 + \sum_{0 \le i \le n \ \wedge \ i \ par} e_i - \sum_{0 \le i \le n \ \wedge \ i \ impar} e_i) \\
= & \quad \left\{ \textstyle\sum_{0 \le i \le n \ \wedge \ i \ impar} e_i = \sum_{0 \le i \le n} e_i - \sum_{0 \le i \le n \ \wedge \ i \ par} e_i \ \right\} \\
& \frac{1}{2}(s_0 + \sum_{0 \le i \le n \ \wedge \ i \ par} e_i - \sum_{0 \le i \le n} e_i + \sum_{0 \le i \le n \ \wedge \ i \ par} e_i) \\
= & \quad \{ \text{ Aritmética } \} \\
& \frac{1}{2}(s_0 + 2 \sum_{0 \le i \le n \ \wedge \ i \ par} e_i - \sum_{0 \le i \le n} e_i) \\
= & \quad \{ \text{ Definición de } \mathsf{E}(x), \text{ con } x = 1 \ \} \\
& \frac{1}{2}(s_0 + 2 \sum_{0 \le i \le n \ \wedge \ i \ par} e_i - \mathsf{E}(1)) \\
= & \quad \{ \text{ Ejercicio (4.b.1) con } x = 1 \ \} \\
& \frac{1}{2}(s_0 + 2 \sum_{0 \le i \le n \ \wedge \ i \ par} e_i - \sum_{0 \le i \le n} s_i(1-1)^i) \\
= & \quad \{ \text{ Separación de primer término y aritmética } \} \\
& \frac{1}{2}(s_0 + 2 \sum_{0 \le i \le n \ \wedge \ i \ par} e_i - s_0 + \sum_{1 \le i \le n} s_i 0^i) \\
= & \quad \left\{ \text{ Aritmética: } \forall i \ge 0, 0^i = 0 \ \right\} \\
& \frac{1}{2}(s_0 + 2 \sum_{0 \le i \le n \ \wedge \ i \ par} e_i - s_0) \\
= & \quad \{ \text{ Aritmética } \} \\
& \sum_{0 \le i \le n \ \wedge \ i \ par} e_i
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, queda demostrado que se cumple:

$$
\sum_{0 \le i \le n \ \wedge \ i \ par} e_i = \frac{1}{2}(s_0 + \sum_{0 \le i \le n} (-2)^i s_i)
$$

$\blacksquare$

Solución (4.c): Se desea determinar una forma cerrada del número de secuencias que tienen un número par de ceros, para esto, se ha definido la propiedad:

$$p_i(x) \equiv \text{ la secuencia } x \text{ tiene un cero en la posición } i \ \wedge \ i = 1, 2, ...n$$

Como el número de secuencias que tienen número par de ceros son aquéllas que contienen exactamente 0 ceros, ó 2 ceros, ó 4 ceros, etc. se puede utilizar la fórmula demostrada en el ejercicio (4.b.2):

$$\sum_{0 \leq i \leq n \ \wedge \ i \ par} e_i = \frac{1}{2}(s_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} (-2)^i s_i)$$

Ahora, para utilizar el resultado anterior se deben calcular cada uno de los valores de s_i:

- s_0: es la cantidad de secuencias que cumplen con 0 o más propiedades p_i. Por lo tanto $s_0 = 3^n$, que corresponde al número total de secuencias que se pueden formar con el alfabeto $\{0, 1, 2\}$ de largo n.

- s_1: es la cantidad de secuencias que cumplen al menos una propiedad p_i. Por definición de la propiedad p_i, la secuencia debe tener un 0 en la posición i, y en el resto de la secuencia cualquier letra, por lo tanto hay 3^{n-1} secuencias que cumplen esta propiedad. Luego, se debe escoger en cuál de las n posiciones de la secuencia se coloca el 0, y se tienen $\binom{n}{1}$ formas de hacer esto. Por lo tanto, se obtiene que:

$$s_1 = \binom{n}{1} 3^{n-1}$$

- s_2: es la cantidad de secuencias que cumplen al menos dos propiedades p_i y p_j $(i \neq j)$. Por definición de las propiedades, la secuencia debe tener un 0 en la posición i, otro 0 en la posición j, y en el resto de la secuencia cualquier letra, por lo tanto hay 3^{n-2} secuencias que cumplen esto. Luego, se debe escoger en cuál de las n posiciones de la secuencia se colocan los dos 0, y se tiene que hay $\binom{n}{2}$ formas de hacer esto. Por lo tanto, se obtiene que:

$$s_2 = \binom{n}{2} 3^{n-2}$$

$\vdots$

- s_n: es la cantidad de secuencias que cumplen n propiedades. Por definición de las propiedades, la secuencia debe tener un 0 en las n posiciones, por lo tanto hay una sola secuencia que satisface esto (la secuencia de n ceros). Utilizado el razonamiento del cálculo de los s_i anteriores, los resultados corresponden y se obtiene que:

$$s_n = \binom{n}{n} 3^{n-n}$$

Ahora, uitlizamos los resultados anteriores y se obtiene:

$$
\begin{array}{ll}
 & \displaystyle\sum_{0\leq i\leq n \,\wedge\, i \text{ par}} e_i \\
= & \qquad \{ \text{ Ejercicio (4.b.2) } \} \\
 & \displaystyle\frac{1}{2}(s_0 + \sum_{0\leq i\leq n} (-2)^i s_i) \\
= & \qquad \{ \text{ Sustitución de } s_0 \text{ y } s_i \ \} \\
 & \displaystyle\frac{1}{2}(3^n + \sum_{0\leq i\leq n} (-2)^i \binom{n}{i} 3^{n-i}) \\
= & \qquad \{ \text{ Teorema Binomial, } x = 3 \text{ y } y = 2 \ \} \\
 & \displaystyle\frac{1}{2}(3^n + (3-2)^n) \\
= & \qquad \{ \text{ Aritmética } \} \\
 & \displaystyle\frac{3^n + 1}{2}
\end{array}
$$

Finalmente, el número de secuencias de largo n en el alfabeto $\{0, 1, 2\}$ que tienen un número par de ceros es:

$$\frac{3^n + 1}{2}$$

■

Ejercicio 5: Muestre que el número de palabras circulares de largo n y período n en un alfabeto de m letras, $M(n)$, es igual a

$$M(n) = \frac{1}{n} \sum_{I \sqsubseteq \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}} (-1)^{|I|} m^{n/\prod_{i \in I} p_i},$$

donde $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$, es la descomposición en factores primos de n.

Para ello invierta la fórmula: $\sum_{d|n} dM(d) = m^n$.

Solución:

Queremos invertir la fórmula: $\sum_{d|n} dM(d) = m^n$, entonces tenemos que $f(n) = m^n$ y $g(d) = dM(d)$. Reescribiendo la fórmula, nos queda de la forma:

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d),$$

por lo que la fórmula de inversión sería:

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d)\mu(d, n)$$

haciendo el cambio de variable $d = n/d$ nos queda

$$= \sum_{\frac{n}{d}|n} f\left(\frac{n}{d}\right) \mu(n/d, n)$$

Si d es divisor de n, entonces n/d también lo es, por lo tanto el índice de la suma $n/d|n$ es equivalente a $d|n$ porque los dos representan a la suma sobre los divisores de n. Cambiando el índice de la suma tenemos

$$= \sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right) \mu(n/d, n)$$

sabemos que $\mu(d, n)$ es isomorfo a $\mu(1, n/d)$, por lo que podemos quitar la multiplicidad de los primos $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$ y pasar a tener $p_1 p_2 \cdots p_k$

$$= \sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right) \mu(1, n/(n/d))$$

$$= \sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right) \mu(1, d)$$

ahora colocaremos la suma en la función de números primos. Sabemos que d tiene que ser un producto de primos para dividir a n, entonces los divisores los podemos representar como $\{p_i 1 p_i 2 \cdots p_i l\}$. Conocemos la función de Möbius este el c.p.o. (el de los enteros positivos con la relación de divisibilidad):

$$\mu(d,n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = d \\ (-1)^k & \text{si } n = p_1 p_2 \cdots p_k d \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por lo tanto, la suma nos queda

$$= \sum_{\{p_i 1 p_i 2 \cdots p_i l\} \subseteq \{p_1 p_2 \cdots p_k\}} (-1)^l f\left(\frac{n}{p_i 1 p_i 2 \cdots p_i l}\right)$$

ahora simplemente representaremos a $\{p_i 1 p_i 2 \cdots p_i l\}$ como I, por lo tanto tenemos

$$g(n) = \sum_{I \subseteq \{p_1 p_2 \cdots p_k\}} (-1)^{|I|} f\left(\frac{n}{\prod_i \in I p_i}\right)$$

sustiyendo las funciones f y g por sus respectivas definiciones, nos queda

$$nM(n) = \sum_{I \subseteq \{p_1 p_2 \cdots p_k\}} (-1)^{|I|} m^{n/\prod_{i\in I} p_i}$$

Por consiguiente

$$M(n) = \frac{1}{n} \sum_{I \subseteq \{p_1 p_2 \cdots p_k\}} (-1)^{|I|} m^{n/\prod_{i\in I} p_i}$$

Ejercicio 6:

Sea X el conjunto de las n-tuplas de números naturales y $\leq$ la relación de orden de las n-tuplas:

$$\langle x_1, x_2, ...x_n\rangle \leq \langle y_1, y_2, ...y_n\rangle$$

si y sólo si $x_i \leq y_i$ para todo i. Determine la función de Möbius para el CPO $(X, \leq)$.

Solución:

Sean x, $y \in X$, n-tuplas tales que $x \leq y$. En la Figura 6.1. se ilustra el método para calcular la función de Möbius para el CPO $(X, \leq)$, con $n = 3$.

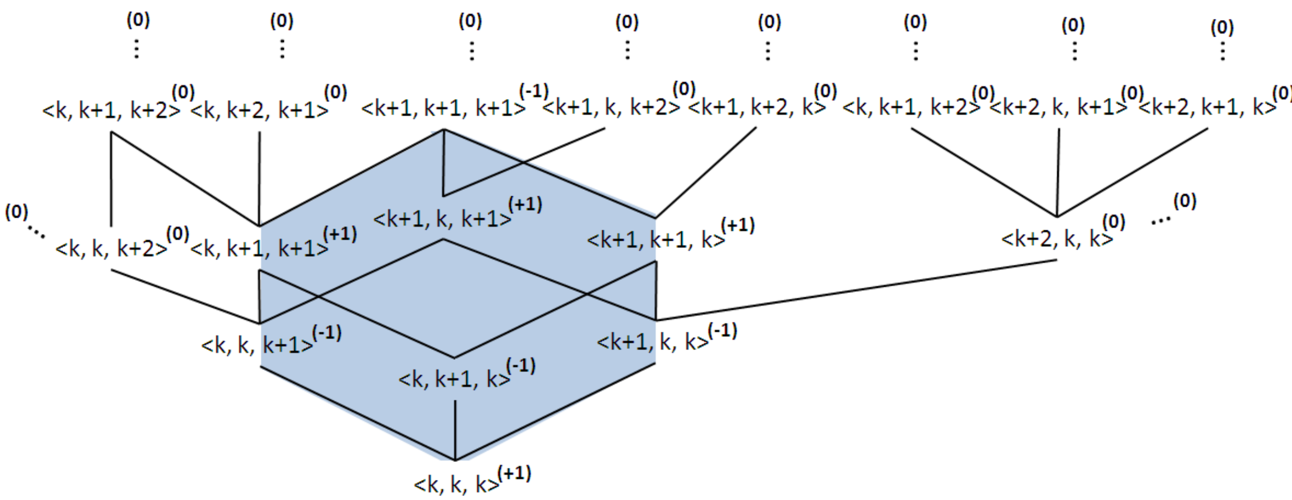

Figura 6.1. Diagrama de cálculo de μ (entre paréntesis)

Por definición de la función de Möbius se tiene que $\mu(\langle k, k, k\rangle, \langle k, k, k\rangle)$ es 1. Luego, se cumple que $\mu(\langle k, k, k\rangle, suc(\langle k, k, k\rangle)) = -1$, donde $suc(\langle k, k, k\rangle)$ son las tuplas que suceden a $\langle k, k, k\rangle$ en el diagrama.

En la Figura 6.1. del ejemplo, está resaltado el fragmento del diagrama donde la función de Möbius toma valores distintos de 0. Éste corresponde a un hipercubo, en este caso de 3 dimensiones, y es isomorfo al diagrama del CPO $(\mathbb{P}, \subseteq)$.

Luego, el signo de la función de Möbius en los valores distintos de cero está relacionado con el nivel en que se encuentra la 3-tupla en el diagrama de Hasse. En general, la suma de los componentes de todas las n-tuplas que se encuentran en un mismo nivel, es la misma. Por ejemplo, para el nivel 1, todas lo componentes de las 3-tuplas suman $3k + 1$. Debido a esto, se puede determinar el signo de acuerdo al nivel en el que esté la n-tupla de la siguiente manera:

$$(-1)^{\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Es fácil ver en el ejemplo que cuando en la 3-tupla alguna de los componentes es $k+2$ (o mayor), el valor de la función de Möbius es 0. Además estas tuplas están afuera del cubo resaltado mencionado anteriormente.

Finalmente, generalizando se puede concluir que la función de Möbius del CPO $(X, \leq)$, para las n-tuplas $x = \langle x_1, x_2, ...x_n \rangle$, $y = \langle y_1, y_2, ...y_n \rangle$ tales que $x \leq y$ es:

$$\mu(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \exists i : 0 \leq i \leq n : y_i \geq x_i + 2 \\ (-1)^{\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i} & \text{si } \forall i : 0 \leq i \leq n : y_i = x_i \ \vee \ y_i = x_i + 1 \end{cases}$$

■