Universidad Simón Bolívar
Coordinación en Postgrados en Computación
CI-7521 Matemáticas para Computación
Estudiante: **Maribel Acosta Deibe 09-87384**

Examen #2

Ejercicio 1:

Calular la suma $\sum_{1\leq k\leq n} \lfloor \log_2 k \rfloor$, donde $\lfloor a \rfloor$ es la parte entera por debajo de a.

Solución:

Para la resolución de esta suma se utilizará la notación de Iverson, es decir, se desea resolver la siguiente suma:

$$\sum_k \lfloor \log_2 k \rfloor [1 \leq k \leq n]$$

Sea a, $(a \in \Re)$, un número tal que $n = 2^a$. Sustituyendo en la suma anterior, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
& \sum_k \lfloor \log_2 k \rfloor [1 \leq k \leq 2^a] \\
= \quad & \left\{ \text{ Aplicando propiedad: } \lfloor x \rfloor = \textstyle\sum_j [1 \leq j \leq x] \right\} \\
& \sum_k \left(\sum_j [1 \leq j \leq \log_2 k] \right) [1 \leq k \leq 2^a] \\
= \quad & \{ \text{ Propiedad distributiva de la suma } \} \\
& \sum_j \sum_k [1 \leq j \leq \log_2 k][1 \leq k \leq 2^a] \\
= \quad & \left\{ \text{ Manipulación de rango: como } j \leq \log_2 k \text{, aplicando potencia se cumple } 2^j \leq k \right\} \\
& \sum_j \sum_k [1 \leq j \leq \log_2 k][2^j \leq k \leq 2^a]
\end{aligned}
$$

Ahora, se realiza una manipulación en el rango $[1 \leq j \leq \log_2 k]$. Debido a que $n = 2^a$ y $[1 \leq k \leq n]$, aplicando logaritmo se cumple que $\log_2 k \leq a$. Se desea extender el primer rango de la suma anterior hasta a, de manera que el rango sea $[1 \leq j \leq a]$. Para obtener una suma equivalente, se deben restar todos los términos que están en el rango $[\log_2 k \leq j \leq a]$, así:

$$\sum_j \sum_k [1 \leq j \leq a][2^j \leq k \leq 2^a] - \sum_j \sum_k [\log_2 k < j \leq a][2^j \leq k \leq 2^a]$$

Ahora analicemos la segunda suma del resultado anterior. En el primer rango se tiene que $[\log_2 k < j \leq a]$, al aplicar potenciación se obtiene $[k < 2^j \leq 2^a]$. Por otro lado, el segundo rango indica que $[2^j \leq k \leq 2^a]$, con lo cual se puede deducir que $[2^j \leq k < 2^j]$. Por lo tanto, el rango de la segunda sumatoria es $\mathtt{falso}$ y su resultado es 0. Luego, sólo queda resolver:

$$
\begin{aligned}
& \sum_j \sum_k [1 \leq j \leq a][2^j \leq k \leq 2^a] \\
= & \qquad \{ \text{ Manipulación de rango: } a \in \mathfrak{R}\text{, la suma es hasta } \lfloor a \rfloor \ \} \\
& \sum_j \sum_k [1 \leq j \leq \lfloor a \rfloor][2^j \leq k \leq 2^a] \\
= & \qquad \{ \text{ Propiedad distributiva de la suma } \} \\
& \sum_j [1 \leq j \leq \lfloor a \rfloor] \sum_k [2^j \leq k \leq 2^a] \\
= & \qquad \{ \text{ Eliminando notación de Iverson } \} \\
& \sum_{1 \leq j \leq \lfloor a \rfloor} \sum_k [2^j \leq k \leq 2^a] \\
= & \qquad \{ \text{ Resolución de suma: } \textstyle\sum_k [1 \leq k \leq n] = n - 1 + 1 \quad \} \\
& \sum_{1 \leq j \leq \lfloor a \rfloor} (2^a - 2^j + 1) \\
= & \qquad \{ \text{ Propiedad asociativa de la suma } \} \\
& \sum_{1 \leq j \leq \lfloor a \rfloor} 2^a - \sum_{1 \leq j \leq \lfloor a \rfloor} 2^j + \sum_{1 \leq j \leq \lfloor a \rfloor} 1 \\
= & \qquad \{ \text{ Propiedad distributiva de la suma } \} \\
& 2^a \cdot \sum_{1 \leq j \leq \lfloor a \rfloor} 1 - \sum_{1 \leq j \leq \lfloor a \rfloor} 2^j + \sum_{1 \leq j \leq \lfloor a \rfloor} 1 \\
= & \qquad \left\{ \text{ Resolución de suma: } \textstyle\sum_{1 \leq j \leq n} 1 = n \ \right\} \\
& 2^a \cdot \lfloor a \rfloor - \sum_{1 \leq j \leq \lfloor a \rfloor} 2^j + \lfloor a \rfloor \\
= & \qquad \left\{ \text{ Resolución de suma: } \textstyle\sum_{0 \leq j \leq n} 2^j = 2^{n+1} - 1 \ \right\} \\
& 2^a \cdot \lfloor a \rfloor - ((2^{\lfloor a \rfloor + 1} - 1) - 1) + \lfloor a \rfloor \\
= & \qquad \{ \text{ Sustitución } a = \log_2 n \ \} \\
& 2^a \cdot \lfloor \log_2 n \rfloor - ((2^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1} - 1) - 1) + \lfloor \log_2 n \rfloor \\
= & \qquad \{ \text{ Aritmética } \} \\
& \lfloor \log_2 n \rfloor \cdot (n + 1) - 2 \cdot (2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} - 1)
\end{aligned}
$$

Finalmente: $\sum_k \lfloor \log_2 k \rfloor [1 \leq k \leq n] = \lfloor \log_2 n \rfloor \cdot (n+1) - 2 \cdot (2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} - 1)$

■

Ejercicio 2: 2.15 de *Concrete Mathematics*

Evaluate $\sum_{k=1}^{n} k^3$ by the text's Method 5 as follows: First write $\text{⧉}_n + \square_n = 2\sum_{1\le j\le k\le n} jk$; then apply (2.33).

Traducción: Evalúe $\sum_{k=1}^{n} k^3$ por el Método 5 del texto: Escriba $\text{⧉}_n + \square_n = 2\sum_{1\le j\le k\le n} jk$; luego aplique (2.33).

Solución:

Para la resolución de esta sumatoria, se utilizará el Método 5 del Texto *Concrete Mathematics*, denominado *"Expand and Contract"*.

Primero, demostremos que se puede escribir $\text{⧉}_n + \square_n = 2\sum_{1\le j\le k\le n} jk$ como sugiere el enunciado.

$$
\begin{aligned}
& \text{⧉}_n + \square_n \\
= \quad & \{ \text{ Definición de } \text{⧉}_n \text{ y } \square_n \ \} \\
& \sum_{1\le k\le n} k^3 + \sum_{1\le k\le n} k^2 \\
= \quad & \{ \text{ Propiedad asociativa de la suma } \} \\
& \sum_{1\le k\le n} k^3 + k^2 \\
= \quad & \left\{ \text{ Sacando factor común } k^2 \ \right\} \\
& \sum_{1\le k\le n} k^2(k+1) \\
= \quad & \{ \text{ Aritmética } \} \\
& \sum_{1\le k\le n} k\cdot(k\cdot(k+1)) \\
= \quad & \left\{ \text{ Como } \textstyle\sum_{1\le j\le k} j = \frac{k*(k+1)}{2}, \text{ despejando } 2\sum_{1\le j\le k} j = k*(k+1) \quad \right\} \\
& \sum_{1\le k\le n} k\cdot(2\cdot\sum_{1\le j\le k} j) \\
= \quad & \{ \text{ Propiedad distributiva de la suma } \} \\
& 2\sum_{1\le k\le n} k\cdot(\sum_{1\le j\le k} j) \\
= \quad & \{ \text{ Manipulación de rango y propiedad conmutativa } \} \\
& 2\sum_{1\le j\le k\le n} jk
\end{aligned}
$$

Ahora, se utilizará el resultado anterior y la propiedad (2.33) del texto para hallar $\Cube_n$, a través del cálculo de $\Cube_n + \Box_n$.

$$
\begin{aligned}
\Cube_n + \Box_n &= 2 \sum_{1\le j\le k\le n} jk \\
&= \quad \left\{ \text{Propiedad (2.33):} \textstyle\sum_{1\le j\le k\le n} a_j \cdot a_k = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right) \right\} \\
&\quad 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{1\le k\le n} k \right)^2 + \sum_{1\le k\le n} k^2 \right) \\
&= \quad \{ \text{ Aritmética } \} \\
&\quad \left(\sum_{1\le k\le n} k \right)^2 + \sum_{1\le k\le n} k^2 \\
&= \quad \{ \text{ Definición de } \Box_n \ \} \\
&\quad \left(\sum_{1\le k\le n} k \right)^2 + \Box_n
\end{aligned}
$$

En el resultado anterior se resta $\Box_n$ a ambos lados de la igualdad, y se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
\Cube_n &= \left(\sum_{1\le k\le n} k \right)^2 \\
&= \quad \left\{ \text{Resolución de suma: } \textstyle\sum_{1\le k\le n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2} \right\} \\
&\quad \left(\frac{n\cdot(n+1)}{2} \right)^2 \\
&= \quad \{ \text{ Aritmética } \} \\
&\quad \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}
\end{aligned}
$$

Finalmente:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

$\blacksquare$

Ejercicio 3: 2.23 de *Concrete Mathematics*

Evaluate the sum $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)/k(k+1)$ using: (b) Sum by parts.

Traducción: Evalúe la suma $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)/k\cdot(k+1)$ usando: (b) Suma por partes.

Solución:

Para evaluar la suma anterior utilizando el método de suma por partes, definimos la siguiente suma impropia y luego evaluamos en el rango correspondiente:

$$\sum \frac{2x+1}{x\cdot(x+1)}\delta x$$

Utilizando el Teorema de Suma por Partes:

$$\sum f(x) \triangle g(x)\delta x = f(x)g(x) - \sum g(x+1) \triangle f(x)\delta x$$

Se debe definir cuáles serán las funciones $f(x)$ y $g(x)$:

- Sea $f(x) = 2x+1$. Ahora calculamos $\triangle f(x)$:

$$\begin{aligned}
\triangle f(x) &= f(x+1) - f(x) \\
&= \qquad \{ \text{ Definición de } f(x) \ \} \\
&\quad 2(x+1)+1-(2x+1) \\
&= \qquad \{ \text{ Aritmética } \} \\
&\quad 2
\end{aligned}$$

- Sea $\triangle g(x) = \frac{1}{x\cdot(x+1)}$. Por definición de factorial descendiente, como $x^{\underline{-2}} = \frac{1}{(x+1)\cdot(x+2)}$ se obtiene que $\triangle g(x) = (x-1)^{\underline{-2}}$. Ahora calculamos $g(x)$, hallando una primitiva de $(x-1)^{\underline{-2}}$:

$$\begin{aligned}
g(x) &= \sum (x-1)^{\underline{-2}}\delta x \\
&= \qquad \left\{ \text{ Propiedad: } \sum x^{\underline{m}}\delta x = \tfrac{x^{\underline{m+1}}}{m+1}, \text{ para } m \neq -1 \ \right\} \\
&\quad \frac{(x-1)^{\underline{-1}}}{-1} \\
&= \qquad \{ \text{ Aritmética } \} \\
&\quad -(x-1)^{\underline{-1}}
\end{aligned}$$

En el procedimiento anterior se consideró $x \neq -1$, debido a que el rango la suma inicial considera $k \geq 1$, por lo tanto no está definida para $k = -1$.

Ahora, aplicamos el Teorema de Suma por Partes con $f(x)$ y $g(x)$ definidos anteriormente:

$$\begin{aligned}
\sum \frac{2x+1}{x \cdot (x+1)} \delta x &= -(2x+1)(x-1)^{\underline{-1}} - \sum -(x+1-1)^{\underline{-1}} \cdot 2\delta x \\
&= \qquad \{ \text{ Propiedad distributiva de la suma y aritmética } \} \\
&\quad -(2x+1)(x-1)^{\underline{-1}} + 2 \sum x^{\underline{-1}} \\
&= \qquad \{ \text{ Propiedad: } \textstyle\sum x^{\underline{m}} \delta x = H_m, \text{ para } m = -1 \ \} \\
&\quad -(2x+1)(x-1)^{\underline{-1}} + 2H_x \\
&= \qquad \{ \text{ Definición de factorial descendiente } \} \\
&\quad -(2x+1)\frac{1}{x} + 2H_x \\
&= \qquad \{ \text{ Aritmética } \} \\
&\quad -2 - \frac{1}{x} + 2H_x
\end{aligned}$$

Ahora, como en la suma inicial el rango es $1 \leq k \leq n$, el resultado anterior lo evaluamos en los límites correspondientes:

$$\begin{aligned}
&\left(-2 - \frac{1}{x} + 2H_x\right)\Big|_{1}^{n+1} . \\
= &\qquad \{ \text{ Evaluando los límites superior e inferior de la suma en } n+1 \text{ y } 1 \ \} \\
&\left(-2 - \frac{1}{n+1} + 2H_{n+1}\right) - \left(-2 - \frac{1}{1} + 2H_1\right) \\
= &\qquad \{ \ H_1 = 1 \text{ y aritmética } \} \\
&-2 - \frac{1}{n+1} + H_{n+1} + H_{n+1} + 1 \\
= &\qquad \left\{ \ H_{n+1} - \tfrac{1}{n+1} = H_n \text{ y aritmética } \right\} \\
&H_{n+1} + H_n - 1 \\
= &\qquad \left\{ \ H_{n+1} - \tfrac{1}{n+1} = H_n \text{ y } \tfrac{1}{n+1} - 1 = -\tfrac{n}{n+1} \ \right\} \\
&2H_n - \frac{n}{n+1}
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k \cdot (k+1)} = 2H_n - \frac{n}{n+1}$$

■

Ejercicio 4:

Determine una forma cerrada para la suma:

$$\sum_{0\leq i\leq n} \frac{i^2 4^{i-1}}{(i+1)(i+2)}$$

Solución:

Para hallar una fórmula cerrada de esta suma, la idea es separar la fracción en fracciones simples de manera que se obtengan sumas más sencillas. Para esto, expresaremos la fracción $\frac{i^2}{(i+1)(i+2)}$ como suma de fracciones simples, como se muestra a continuación:

$$\frac{i^2}{(i+1)(i+2)} = \frac{Ai+B}{i+1} + \frac{Ci+D}{i+2}$$

Ahora, se procede a resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(Ai+B)(i+2) + (Ci+D)(i+1) = i^2$$

El sistema de ecuaciones anterior es indeterminado (con infinitas soluciones), pues tiene cuatros variables y una sola ecuación. Sin embargo, para efectos del ejercicio es suficiente con determinar una solución que permita expresar la suma original en sumas de fracciones simples. Para hallar una solución al sistema, aplicamos lo siguiente:

- Si $i = -2$ se obtiene:

$$\begin{array}{ll} & (Ci+D)(i+1) = i^2 \\ \equiv & \quad \{ \text{ Sustituyendo } i = -2 \ \} \\ & (-2C+D)(-2+1) = 4 \\ \equiv & \quad \{ \text{ Aritmética } \} \\ & 2C - D = 4 \end{array}$$

Despejando se obtiene $D = 2C - 4$.

- Si $i = -1$ se obtiene:

$$
\begin{array}{ll}
 & (Ai + B)(i + 2) = i^2 \\
\equiv & \qquad \{ \text{ Sustituyendo } i = -1 \ \} \\
 & (-A + B)(-1 + 2) = 1 \\
\equiv & \qquad \{ \text{ Aritmética } \} \\
 & -A + B = 1
\end{array}
$$

Despejando se obtiene $B = 1 + A$.

En la expresión original podemos sustitur $B = 1 + A$ y $D = 2C - 4$, y se obtiene:

$$\frac{i^2}{(i+1)(i+2)} = \frac{Ai + 1 + A}{i+1} + \frac{Ci + 2C - 4}{i+2}$$

Se puede seleccionar $C = 0$ y $A = 1$ para satisfacer esta ecuación y, queda que:

$$\frac{i^2}{(i+1)(i+2)} = \frac{i+2}{i+1} - \frac{4}{i+2}$$

Ahora, se puede utilizar el resultado anterior para formular la suma $\sum_{0 \le i \le n} \frac{i^2 4^{i-1}}{(i+1)(i+2)}$ de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{ll}
 & \displaystyle\sum_{0 \le i \le n} \left(\frac{i+2}{i+1} - \frac{4}{i+2} \right) 4^{i-1} \\
= & \qquad \{ \text{ Aritmética: multiplicando por } \frac{4}{4} \ \} \\
 & \displaystyle\frac{1}{4} \sum_{0 \le i \le n} \left(\frac{i+2}{i+1} - \frac{4}{i+2} \right) 4^{i} \\
= & \qquad \{ \text{ Aritmética } \} \\
 & \displaystyle\frac{1}{4} \sum_{0 \le i \le n} \left(\frac{(i+2) \cdot 4^i}{i+1} - \frac{4^{i+1}}{i+2} \right) \\
= & \qquad \{ \text{ Propiedad asociativa de la suma } \} \\
 & \displaystyle\frac{1}{4} \left(\sum_{0 \le i \le n} \frac{(i+2) \cdot 4^i}{i+1} - \sum_{0 \le i \le n} \frac{4^{i+1}}{i+2} \right) \\
= & \qquad \{ \text{ Propiedad de permutación de rango de la suma: } i + 1 \to i \ \}
\end{array}
$$

$$\frac{1}{4}\left(\sum_{0\le i\le n}\frac{(i+2)\cdot 4^i}{i+1}-\sum_{1\le i+1\le n+1}\frac{4^i}{i+1}\right)$$

$=$ { Suma 1 y -1 para agregar el término $i=0$ en la segunda suma }

$$\frac{1}{4}\left(\sum_{0\le i\le n}\frac{(i+2)\cdot 4^i}{i+1}-\sum_{0\le i+1\le n+1}\frac{4^i}{i+1}+1\right)$$

$=$ { Separación de último término $i=n+1$ en la segunda suma }

$$\frac{1}{4}\left(\sum_{0\le i\le n}\frac{(i+2)\cdot 4^i}{i+1}-\sum_{0\le i+1\le n}\frac{4^i}{i+1}+1-\frac{4^{n+1}}{n+2}\right)$$

$=$ { Propiedad asociativa de la suma }

$$\frac{1}{4}\left(1-\frac{4^{n+1}}{n+2}+\sum_{0\le i\le n}\left(\frac{(i+2)\cdot 4^i}{i+1}-\frac{4^i}{i+1}\right)\right)$$

$=$ { Aritmética: resta de fracciones }

$$\frac{1}{4}\left(1-\frac{4^{n+1}}{n+2}+\sum_{0\le i\le n}\frac{(i+2)\cdot 4^i-4^i}{i+1}\right)$$

$=$ $\left\{\right.$ Aritmética: sacando factor común 4^i $\left.\right\}$

$$\frac{1}{4}\left(1-\frac{4^{n+1}}{n+2}+\sum_{0\le i\le n}\frac{4^i\cdot(i+1)}{i+1}\right)$$

$=$ $\left\{\right.$ Aritmética: $\frac{i+1}{i+1}=1$ $\left.\right\}$

$$\frac{1}{4}\left(1-\frac{4^{n+1}}{n+2}+\sum_{0\le i\le n}4^i\right)$$

$=$ $\left\{\right.$ Resolución de suma: $\sum_{0\le i\le n}4^i=\frac{4^{n+1}-1}{3}$ $\left.\right\}$

$$\frac{1}{4}\left(1-\frac{4^{n+1}}{n+2}+\frac{4^{n+1}-1}{3}\right)$$

$=$ { Aritmética }

$$\frac{1}{4}\left(1+\frac{-3\cdot 4^{n+1}+(n+2)\cdot(4^{n+1}-1)}{(n+2)\cdot 3}\right)$$

$=$ { Aritmética }

$$\frac{1}{4}\left(1+\frac{-3\cdot 4^{n+1}+n\cdot 4^{n+1}-n+2\cdot 4^{n+1}-2}{(n+2)\cdot 3}\right)$$

$=$ $\left\{\right.$ Aritmética y sacando factor común 4^{n+1} $\left.\right\}$

$$\frac{1}{4}\left(1+\frac{4^{n+1}(n-1)-(n+2)}{(n+2)\cdot 3}\right)$$

$=$ { Aritmética: separando fracciones }

$$\frac{1}{4}\left(1+\frac{4^{n+1}(n-1)}{(n+2)\cdot 3}-\frac{(n+2)}{(n+2)\cdot 3}\right)$$

$=$ { Aritmética }

$$\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{4^{n+1}}{3}\cdot\frac{(n-1)}{(n+2)}\right)$$

$=$ { Aritmética }

$$\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}+\frac{4^{n+1}}{3}\cdot\frac{(n-1)}{(n+2)}\right)$$

$=$ { Aritmética: propiedad distributiva }

$$\frac{1}{6}+\frac{4^{n}}{3}\cdot\frac{(n-1)}{(n+2)}$$

Finalmente:

$$\sum_{0\le i\le n}\frac{i^2 4^{i-1}}{(i+1)(i+2)}=\frac{1}{6}+\frac{4^{n}}{3}\cdot\frac{(n-1)}{(n+2)}$$

■