UNIVERSIDAD SIMÓN BOLIVAR **12 de mayo de 2010**
CI-7521 - Matemáticas para la computación **Lic. Alejandro Claro Mosqueda**

Tarea #1

Problema #1: Sea $\mathcal{V}$ un alfabeto finito con al menos dos letras. Muestre que $(\mathcal{V}^*, \leq)$ donde $\leq$ es el orden lexicográfico, no es Noetheriano.

Solución

Demostración. Sea $\mathcal{V}$ un alfabeto finito con un orden total $(\preceq)$ y $\mathcal{V}^*$ el conjunto de todas las cadenas de caracteres de longitud finita sobre $\mathcal{V}$. Se define como orden lexicográfico $(\leq)$ en el conjunto $\mathcal{V}^*$ de cadenas de caracteres sobre $\mathcal{V}$ como sigue,

Sean $s, t \in \mathcal{V}^*$. Entonces $s < t$ sii

1. s es un prefijo de j o
2. $s_i \prec t_i$ para algún i tal que $1 \leq i \leq \mathbf{MIN}(\ \mathbf{LEN}(s),\ \mathbf{LEN}(t))$ y $s_j = t_j$ para todo j, $1 \leq j < i$, donde $\prec$ es la relación de orden en $\mathcal{V}$.

Por simple inspección de la definición de orden lexicográfico en el conjunto $\mathcal{V}^*$, se observa que entre las dos primeras letras del alfabeto $\mathcal{V}$ (llámense, sin pérdida de generalidad, "**a**" y "**b**") se forma una cadena descendiente infinita:

$$\mathbf{b} > \mathbf{ab} > \mathbf{aab} > \mathbf{aaab} > \mathbf{aaaab} > \dots$$

y en consecuencia, por definición de orden Noetheriano, $(\mathcal{V}^*, \leq)$ no es Noetheriano. (En [1] se encuentra una demostración de la equivalencia entre la definición clásica de orden Noetheriano y la no existencia de una cadena descendiente infinita).

□

Problema #2: Muestre que el conjunto de las secuencias finitas de ceros y unos $\mathcal{S}$ es contable.

Solución

Demostración. Un conjunto $\mathcal{A}$ es **contable** sii es finito o tiene el mismo tamaño que $\mathbb{N}$. Sea $\mathcal{S}_k$ el conjunto de todas las secuencias de ceros y unos de longitud k. Este conjunto es finito, puesto que tiene exactamente 2^k elementos, y por lo tanto es contable. Además, vale la pena resaltar que los conjuntos $\mathcal{S}_k$ y $\mathcal{S}_l$ son disjuntos ($\mathcal{S}_k \cap \mathcal{S}_l = \emptyset$) si $k \neq l$ (ya que longitud de las secuencias en cada conjunto difieren en su longitud).

Por otro lado, es posible representar el conjunto de las secuencias finitas de ceros y unos $\mathcal{S}$ como la unión de todos los conjuntos S_n de distintas longitudes:

$$\mathcal{S} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n$$

Ahora, la unión de dos conjunto $\mathcal{S}_k$ y $\mathcal{S}_l$ también es finito, con exactamente $2^k + 2^l$ elementos, y por lo tanto $\mathcal{S}_k \cup S_l$ también es contable. Por inducción,

$$\begin{aligned}
C_{m+1} &= C_m \cup \mathcal{S}_{m+1} \\
&\vdots \\
C_2 &= C_1 \cup \mathcal{S}_2 = (\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1) \cup \mathcal{S}_2 \\
C_1 &= \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1
\end{aligned}$$

se obtiene que la unión de múltiples conjuntos disjuntos contables también es contable. En consecuencia, $\mathcal{S} \equiv C_\infty$ es un conjunto **infinito contable**.

□

Problema #3: Definamos inductivamente el siguiente conjunto de árboles A sobre un conjunto de objetos E:

1. $\langle e, \emptyset \rangle$ está en A, para todo e en E. Decimos que e es la raíz¸ de $\langle e, \emptyset \rangle$, el número de elementos de $\langle e, \emptyset \rangle$ es 1, la altura es 0.
2. Si $a_1 = \langle e_1, A_1 \rangle$ y $a_2 = \langle e_2, A_2 \rangle$ son árboles en A y la altura de a_1 es menor o igual a la altura de a_2 entonces $\langle e_2, A_2 \cup \{a_1\} \rangle$ es un árbol de A. Decimos que e_2 es la raíz¸ de este último árbol, su número de elementos es el número de elementos de a_1 mas el número de elementos de a_2, y la altura es igual a 1 mas el máximo de las alturas de los árboles en $A_2 \cup \{a_1\}$.
3. Todo árbol en A se obtiene de la aplicación de las reglas (1) y (2) un número finito de veces.

a) Investigue si es verdad que la altura de un árbol con n elementos en A tiene altura a lo sumo $\lfloor \log_2 n \rfloor$.

b) ¿Si en la regla (2) cambiamos "la altura de a_1 es menor o igual a la altura de a_2" por "el número de elementos de a_1 es menor o igual al número de elementos de a_2", entonces se puede deducir un resultado parecido a (a)?.

Solución

a) $\mathbf{DEPTH}(A) \leq \lfloor \log_2 n \rfloor$.

Demostración. Sea A un árbol con n elementos definido inductivamente por la reglas dadas en el enunciado. Observese que el **caso base** $\langle e, \emptyset \rangle$ tiene un solo elemento ($\mathbf{SIZE}(\langle e, \emptyset \rangle) = 1$) y cumple la proposición inicial.

$$\mathbf{DEPTH}(\langle e, \emptyset \rangle) = 0 \leq \lfloor \log_2(1) \rfloor = 0$$

Además, supongase que

$$\mathbf{DEPTH}(a_1) \leq \lfloor \log_2 n_1 \rfloor \tag{1}$$

$$\mathbf{DEPTH}(a_2) \leq \lfloor \log_2 n_2 \rfloor \tag{2}$$

es verdad. Donde $a_1 = \langle e_1, A_1 \rangle$, $a_2 = \langle e_2, A_2 \rangle$, $n_1 = \mathbf{SIZE}(a_1)$ y $n_2 = \mathbf{SIZE}(a_2)$.

Partiendo de la segundo regla en la definición del conjunto de árboles, que proporciona una regla de construcción de elementos en A,

$$a_k = \langle e_2, A_2 \cup \{a_1\} \rangle \tag{3}$$

se obtiene la siguiente expresión

$$\mathbf{DEPTH}(a_k) \leq \lfloor \log_2 (n_1 + n_2) \rfloor \tag{4}$$

que se debe demostrar. Para ello, se debe utilizar la información, proporcionada en la segunda regla, sobre la relación entre la profundidad del árbol a_k y las profundidades de los árboles a_1 y a_2.

$$\mathbf{DEPTH}(a_k) = 1 + \mathbf{MAXDEPTH}(A_2 \cup \{a_1\}) \tag{5}$$

De esta información, se obtiene la siguente forma de la expresión (4)

$$1 + \mathbf{MAXDEPTH}(A_2 \cup \{a_1\}) \leq \lfloor \log_2 (n_1 + n_2) \rfloor \tag{6}$$

Por otro lado, de la segunda regla en el enunciado se puede deducir que

$$\mathbf{MAXDEPTH}(A_2 \cup \{a_1\}) = \begin{cases} \mathbf{DEPTH}(a_1) & \mathbf{DEPTH}(a_1) = \mathbf{DEPTH}(a_2) \\ \mathbf{DEPTH}(a_2) - 1 & \mathbf{DEPTH}(a_1) < \mathbf{DEPTH}(a_2) \end{cases} \tag{7}$$

puesto que $\mathbf{DEPTH}(A_2) = \mathbf{DEPTH}(a_2) - 1$. Al remplazar (7) en (6)

$$\lfloor \log_2 (n_1 + n_2) \rfloor \geq 1 + \begin{cases} \mathbf{DEPTH}(a_1) & \mathbf{DEPTH}(a_1) = \mathbf{DEPTH}(a_2) \\ \mathbf{DEPTH}(a_2) - 1 & \mathbf{DEPTH}(a_1) < \mathbf{DEPTH}(a_2) \end{cases} \tag{8}$$

y hacer uso de la hipótesis inductiva (1-2) se obtiene

$$\lfloor \log_2 (n_1 + n_2) \rfloor \geq \begin{cases} \lfloor \log_2 n_1 \rfloor + 1 & \mathbf{DEPTH}(a_1) = \mathbf{DEPTH}(a_2) \\ \lfloor \log_2 n_2 \rfloor & \mathbf{DEPTH}(a_1) < \mathbf{DEPTH}(a_2) \end{cases} \tag{9}$$

$$\tag{10}$$

$$\lfloor \log_2 (n_1 + n_2) \rfloor \geq \begin{cases} \lfloor \log_2 2\, n_1 \rfloor & \mathbf{DEPTH}(a_1) = \mathbf{DEPTH}(a_2) \\ \lfloor \log_2 n_2 \rfloor & \mathbf{DEPTH}(a_1) < \mathbf{DEPTH}(a_2) \end{cases} \tag{11}$$

que para el caso $\mathbf{DEPTH}(a_1) < \mathbf{DEPTH}(a_2)$ es obviamente cierto puesto que la función $\log_2(x)$ es monótono creciente. Sin embargo para el caso $\mathbf{DEPTH}(a_1) = \mathbf{DEPTH}(a_2)$ sólo es cierto si $n_1 \leq n_2$.

$\square$

b) ¿Si en la regla (2) cambiamos "la altura de a_1 es menor o igual a la altura de a_2" por "el número de elementos de a_1 es menor o igual al número de elementos de a_2", entonces se puede deducir un resultado parecido a (a)?.

La demostración proporcionada en la parte (a) del problema sigue siendo válida para los casos $\mathbf{DEPTH}(a_1) < \mathbf{DEPTH}(a_2)$ y $\mathbf{DEPTH}(a_1) = \mathbf{DEPTH}(a_2)$. Con la ventaja que ahora, el caso $\mathbf{DEPTH}(a_1) = \mathbf{DEPTH}(a_2)$ cumple la desigualdad (11) por definición.

Al retirar la suposición "la altura de a_1 es menor o igual a la altura de a_2", se requiere demostrar que la expresión (4) se cumple en un caso adicional, $\mathbf{DEPTH}(a_1) > \mathbf{DEPTH}(a_2)$, a los vistos en la sección anterior.

Demostración. Para el caso $\mathbf{DEPTH}(a_1) > \mathbf{DEPTH}(a_2)$, se observa que

$$\mathbf{MAXDEPTH}(A_2 \cup \{a_1\}) = \mathbf{DEPTH}(a_1) \tag{12}$$

al igual que el caso $\mathbf{DEPTH}(a_1) = \mathbf{DEPTH}(a_2)$. Luego, al remplazar $\mathbf{MAXDEPTH}(A_2 \cup \{a_1\})$ en (6) se obtiene,

$$\lfloor \log_2(n_1 + n_2) \rfloor \geq \lfloor \log_2 2\, n_1 \rfloor \qquad \text{si} \quad \mathbf{DEPTH}(a_1) > \mathbf{DEPTH}(a_2) \tag{13}$$

lo cual es obviamente cierto puesto que la función $\log_2(x)$ es monótono creciente y por hipótesis "el número de elementos de a_1 es menor o igual al número de elementos de a_2" $(n_1 + n_2 \geq n_1 + n_1)$.

$\square$

Problema #4: Sea A un conjunto de $n \geq 1$ elementos y $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ el c.p.o. de sobre el conjunto $\mathcal{P}(A)$ de todos los subconjuntos de A respecto a la inclusión. Muestre utilizando inducción noetheriana que para todo elemento B en $\mathcal{P}(A)$, en el diagrama de Hasse, toda cadena (o camino) que va de $\emptyset$ (el menor elemento del c.p.o.) a B tiene largo $|B|$ y que el número de esas cadenas es $|B|!$.

Solución

Demostración. Sea $\mathcal{L}(B)$ el largo de toda cadena que va de $\emptyset$ a B en el diagrama de Hasse de $\mathcal{P}(A)$ y $\mathcal{C}(B)$ el número de esas cadenas. El enunciado hace las siguientes proposiciones:

$$\mathcal{L}(B) = |B| \tag{14}$$

$$\mathcal{C}(B) = |B|! \tag{15}$$

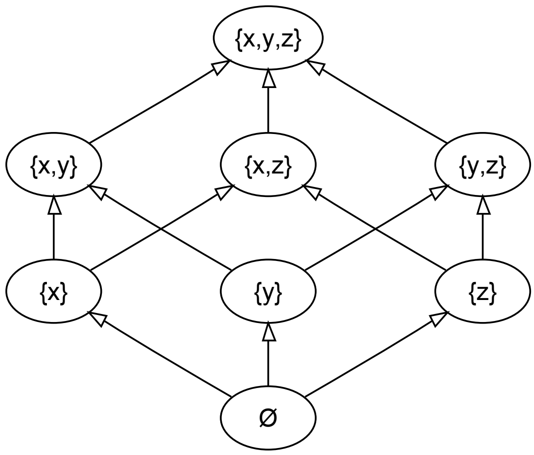

Figura 1: Diagrama de Hasse para $A = \{x, y, z\}$

Para demostrar estas proposiciones, observese primero que se cumplen para el **caso base**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\{x\}) &= 1 \qquad \forall x \in A && (16) \\ \mathcal{C}(\{x\}) &= 1 \qquad \forall x \in A && (17) \end{aligned}$$

ya que por la regla de inclusión, solo hay un camino de longitud 1 entre el conjunto $\emptyset$ y el conjunto con un solo elemento $\{x\}$. Para el **paso inductivo** es necesario definir $B_k \in \mathcal{P}(A)$ como un subconjunto de A con $k \leq n$ elementos. Es claro que no existe un conjunto B_l tal que $B_k \subset B_l \subset B_{k+1}$ y en consecuencia,

$$\mathcal{L}(B_{k+1}) = \mathcal{L}(B_k) + 1 \qquad (18)$$

Además, es sencillo observar que al remover un elemento cualquiera de un subconjunto $B_{k+1} \in \mathcal{P}(A)$ se obtiene un subconjunto $B_k \subset B_{k+1}$ con k elementos. Como B_{k+1} tiene $k+1$ elementos, entonces esté tiene $k+1$ subconjuntos con k elementos y por ende hay $k+1$ caminos en el diagrama de Hasse que van desde estos $k+1$ subconjuntos B_k hasta B_{k+1}:

$$\mathcal{C}(B_{k+1}) = (k+1)\,\mathcal{C}(B_k) \qquad (19)$$

Ahora, por hipótesis inductiva, si $\mathcal{L}(B_k) = |B_k| = k$ entonces de (18) se obtiene que

$$\mathcal{L}(B_{k+1}) = k + 1 = |B_{k+1}|$$

lo cual esta de acuerdo con la proposición inicial. De igual manera, si $\mathcal{C}(B_k) = |B|! = k!$ entonces de la expresión (19) se obtiene que

$$\mathcal{C}(B_{k+1}) = (k+1)k! = (k+1)! = |B_{k+1}|!$$

Concluyendo así que ambas proposiciones son ciertas.

□

Problema #5: Mostrar por inducción constructiva que para todo k entero positivo, existen n_0 y d tales que para $n \geq n_0$, $t(n) \leq d.n!$, donde:

$$t(n) = \begin{cases} a & \text{si } n = 1 \\ b.n^k + n.t(n-1) & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \qquad \text{con } a, b > 0.$$

Solución

Demostración. Considérese una conjetura mas fuerte que la exigida en el enunciado,

$$(\exists d, e > 0)\,(\forall n \in \mathbb{N})\left[t(n) \leq d\,n! - e\,n^k\right]$$

con n "suficientemente grande". El enfoque de inducción constructiva consiste en preguntar para que valores de d y e se sigue que $P_{d,e}(n) \equiv \left[t(n) \leq d\,n! - e\,n^k\right]$ tomando como base la hipótesis de inducción especificada parcialmente y consistente en que $P_{d,e}(m)$ es cierto para todo entero m que sea menor que n pero que tenga un valor suficientemente grande. Empleando la definición de $t(n)$ y esta hipótesis, y siempre y cuando $n-1$ sea también "suficientemente grande":

$$\begin{aligned}
t(n) &= b\,n^k + n\,t(n-1) && (20)\\
t(n) &\leq b\,n^k + n\left[d\,(n-1)! - e\,(n-1)^k\right] && (21)\\
t(n) &\leq b\,n^k + d\,n! - e\,n\,(n-1)^k && (22)\\
t(n) &\leq b\,n^k + d\,n! - e\,n\,(n-1)^k - e\,n^k + e\,n^k && (23)\\
t(n) &\leq d\,n! - e\,n^k + \left[b\,n^k - e\,n\,(n-1)^k + e\,n^k\right] && (24)
\end{aligned}$$

Para concluir que $t(n) \leq d\,n! - e\,n^k$, es necesario que $d\,n! - e\,n^k + \left[b\,n^k - e\,n\,(n-1)^k + e\,n^k\right] \leq d\,n! - e\,n^k$. Por algebra elemental,

$$\begin{aligned}
d\,n! - e\,n^k + \left[b\,n^k - e\,n\,(n-1)^k + e\,n^k\right] &\leq d\,n! - e\,n^k && (25)\\
b\,n^k - e\,n\,(n-1)^k + e\,n^k &\leq 0 && (26)\\
\left(1 + \frac{b}{e}\right) n^k - n\,(n-1)^k &\leq 0 && (27)\\
\frac{b}{e} &\leq \frac{(n-1)^k}{n^{k-1}} - 1 && (28)
\end{aligned}$$

se observa que si $b > 0$ y finito, entonces es posible definir un valor para $e > 0$ tal que para cierto valor $n = n_0$ "suficientemente grande" se cumpla la condición (28). Finalmente, la constante d debe cumplir

$$t(n_0) \leq d\, n_0! - e\, n_0^k \tag{29}$$

$$d \geq \frac{t(n_0) + e\, n_0^k}{n_0!} \tag{30}$$

De esta manera queda entonces demostrado que $t(n) \leq d.n!$.

$\square$

Problema #6: Pruebe que

$$\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n+m-1}{m} \right\rfloor$$

para todo entero n y todo entero positivo m. [Esta identidad nos da otra forma de convertir la función techo en la función piso y viceversa, en lugar de usar la propiedad de reflexividad.]

Solución

Demostración. Considere un número entero q. Existen al menos un número entero k y un número entero positivo s tales que:

$$q = \left\lfloor \frac{k}{s} \right\rfloor \tag{31}$$

y por lo tanto,

$$\frac{k}{s} - 1 < \quad q \quad \leq \quad \frac{k}{s} \quad < q + 1 \tag{32}$$

$$k - s \leq s\, q \quad \leq \quad k \quad < s\,(q+1) \tag{33}$$

$$s\, q \quad \leq \quad k \quad \leq s\,(q+1) - 1 \tag{34}$$

Por otro lado, también existen al menos un número entero n y un número entero positivo m tales que:

$$q = \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil \tag{35}$$

y en consecuencia,

$$
\begin{aligned}
q - 1 < \quad \frac{n}{m} \quad &\leq \quad q \quad < \frac{n}{m} + 1 && (36)\\
m\,(q-1) < \quad n \quad &\leq \quad m\,q < n + m && (37)\\
m\,(q-1) + 1 \leq \quad n \quad &\leq \quad m\,q && (38)
\end{aligned}
$$

Al reacomodar los términos en la ecuación (38), se obtiene:

$$
\begin{aligned}
m\,(q-1) \leq \qquad n - 1 \quad &\leq \quad m\,q - 1 && (39)\\
m\,q \leq n - 1 + m \quad &\leq \quad m\,q - 1 + m && (40)\\
m\,q \leq n + m - 1 \quad &\leq \quad m\,(q+1) - 1 && (41)
\end{aligned}
$$

lo cual es equivalente a la expresión (34) con:

$$
\begin{aligned}
k \quad &= \quad n + m - 1 && (42)\\
s \quad &= \quad m && (43)
\end{aligned}
$$

y de donde finalmente se concluye que

$$
\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n+m-1}{m} \right\rfloor
$$

$\square$

Referencias

[1] Klappenecker, Andreas. *Noetherian Induction.* http:// faculty.cs.tamu.edu / klappi / csce222-s10 / noetherian induction.pdf