Gracias a Rafael.

La pregunta 3 nadie la hizo del todo bien. Los que propusieron la ecuación de recurrencia, tenían erradas las condiciones iniciales y por eso no les dió una función generatriz mas sencilla.

Ejercicio 1: Ejercicio 35 del capítulo 7 del Concrete Mathematics 2da. Edición:

Evaluar la suma $\displaystyle\sum_{0<k<n} \frac{1}{k(n-k)}$ de dos maneras:

a) Expanda el sumando en fracciones parciales.

b) Trate la suma como una convolución y use funciones generatrices.

Solución:

a) Usando la técnica de fracciones parciales tenemos:

$$\frac{1}{k(n-k)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{n-k}$$

multiplicando ambos lados de la igualdad por $k(n-k)$

$$k(n-k)\frac{1}{k(n-k)} = k(n-k)\frac{A}{k} + k(n-k)\frac{B}{n-k}$$
$$1 = (n-k)A + kB$$

Ahora, por conveniencia, sustituimos k por n:

$$1 = (n-n)A + nB$$

por lo tanto nos queda

$$1 = nB$$
$$B = \frac{1}{n}$$

Hacemos lo mismo para hallar el valor de A, pero esta vez sustituimos k por cero:

$$1 = (n-0)A + 0B$$

por lo tanto nos queda

$$\begin{aligned} 1 &= nA \\ A &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Entonces podemos reescribir nuestra suma inicial de la siguiente manera:

$$\frac{1}{n}\sum_{0<k<n}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right)$$

Veamos que:

$$\sum_{0<k<n}\frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1} = H_{n-1}$$

y también

$$\sum_{0<k<n}\frac{1}{n-k} = \frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-3}+\cdots+\frac{1}{1} = H_{n-1}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{0<k<n}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right) &= \frac{1}{n}(H_{n-1}+H_{n-1}) \\ &= \frac{2}{n}H_{n-1} \end{aligned}$$

b) En la parte a) de este mismo ejercicio nos dimos cuenta de que estamos tratando con dos secuencias iguales representadas de diferente forma. Por lo tanto, en este caso lo que queremos es simplemente obtener el n-ésimo término de la convolución de $\langle \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \rangle$ consigo misma. Podemos encontrar la función generatriz para esta secuencia en la Tabla 335 de [2, p. 335]. Entonces tenemos que:

$$\sum_{0<k<n}\frac{1}{k(n-k)} = [z^n]\left(\ln\frac{1}{1-z}\right)^2$$

por la identidad (7.50) de la Tabla 351 de [2, p. 351], y como lo que necesitamos es el n-ésimo término, tenemos que

$$= \frac{2!}{n!}\left[{n \atop 2}\right]$$

ahora usamos la identidad (6.58) de [2, p. 275], por lo tanto

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2!}{n!}(n-1)!H_{n-1} \\
&= \frac{2}{n(n-1)!}(n-1)!H_{n-1} \\
&= \frac{2}{n}H_{n-1}
\end{aligned}
$$

Sea U(n,m) el número de maneras distintas de sentar n alumnos en una fila de m pupitres dejando al menos un pupitre vacío entre alumnos.

- Determine la función generatriz de la secuencia U(n,0), U(n,1), U(n,2), …
- Halle una forma cerrada para U(n,m)

Las maneras de sentar n alumnos en m pupitres (todos los objetos son distinguibles, tanto los alumnos como los pupitres) las podemos dividir en las maneras en que el último pupitre está ocupado por uno de los n alumnos y las maneras en que el último pupitre está desocupado. Esto es:

- $U(n,m) = n.U(n-1,m-2) + U(n,m-1)$, con $n\geq1$ y $m\geq2$
- $U(0,m) = 1$, para todo $m \geq 0$
- $U(n,0) = [n=0]$
- $U(n,1) = [0\leq n\leq 1]$
- $U(n,m) = 0$, $m<0$

Por lo tanto:

$$\sum_m U(n,m)z^m = \sum_m n.U(n-1,m-2)z^m + \sum_m U(n,m-1)z^m + \sum_m [m=0 \wedge n=0]z^m + \sum_m [m=1 \wedge n=1]z^m$$

Si $A_n(z) = \sum U(n,m)z^m$. Entonces de acuerdo a la ecuación anterior tenemos:

$$A_n(z) = n!\frac{z^{2n-1}}{(1-z)^{n+1}} \quad \text{si } n\geq 1$$

$$A_0(z) = \frac{1}{1-z}$$

A partir de estas funciones generatrices podemos hallar la forma cerrada de U(n,m):

$$U(n,m) = n!\binom{m-n+1}{m-2n+1} \quad \forall n,m \geq 0$$

■

Ejercicio 3: Ejercicio 15 del capítulo 9 del Concrete Mathematics 2da. Edición:

Dar una fórmula asintóntica para el coeficiente trinomial "central" $\binom{3n}{n,n,n}$, con error relativo $O(n^{-3})$.

Solución:

Por la definición dada en [2, p. 168]: del coeficiente trinomial "central" tenemos que

$$\binom{3n}{n,n,n} = \frac{(3n)!}{n!n!n!}$$

aplicando logaritmo a ambos lados de la igualdad

$$\ln\binom{3n}{n,n,n} = \ln\frac{(3n)!}{n!n!n!}$$

aplicando propiedades del logaritmo, tenemos

$$\begin{aligned} &= \ln(3n)! - \ln(n!n!n!) \\ &= \ln(3n)! - 3\ln(n!) \end{aligned}$$

ahora usaremos la identidad (9.91) [2, p. 481], con la cual podemos aproximar el logaritmo de un factorial. Aplicando esta idendidad, nos queda que

$$= 3n\ln 3n - 3n + \frac{1}{2}\ln 3n + \sigma + \frac{1}{12(3n)} + O(n^{-3}) - 3(n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \sigma + \frac{1}{12n} + O(n^{-3}))$$

aplicando operaciones aritméticas, propiedades del logaritmo y de O-grande, tenemos

$$
\begin{aligned}
&= 3n\ln 3n - 3n + \frac{1}{2}\ln 3n + \sigma + \frac{1}{12(3n)} + O(n^{-3}) - 3n\ln n + 3n - \frac{3}{2}\ln n - 3\sigma - \frac{3}{12n} - 3O(n^{-3}) \\
&= 3n\ln 3n + \frac{1}{2}\ln 3n - 2\sigma + (\frac{1}{36} - \frac{1}{4})n^{-1} - 3n\ln n - \frac{3}{2}\ln n + O(n^{-3}) \\
&= 3n\ln 3 + 3n\ln n + \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{2}\ln n - 2\sigma - \frac{2}{9}n^{-1} - 3n\ln n - \frac{3}{2}\ln n + O(n^{-3}) \\
&= 3n\ln 3 - \ln n + \frac{1}{2}\ln 3 - 2\sigma - \frac{2}{9}n^{-1} + O(n^{-3})
\end{aligned}
$$

Ahora aplicamos *exp* a ambos lados de la igualdad. Nos queda que

$$
\begin{aligned}
\exp(\ln\binom{3n}{n,n,n}) &= \exp(3n\ln 3 - \ln n + \frac{1}{2}\ln 3 - 2\sigma - \frac{2}{9}n^{-1} + O(n^{-3})) \\
\binom{3n}{n,n,n} &= \exp(3n\ln 3)\exp(-\ln n)\exp(\frac{1}{2}\ln 3)\exp(-2\sigma)\exp(-\frac{2}{9}n^{-1})\exp(O(n^{-3}))
\end{aligned}
$$

acomodamos los términos usando propiedades de *exp*

$$
\begin{aligned}
&= \exp(\ln 3^{3n})\exp(\ln n^{-1})\exp(\ln 3^{1/2})\exp(\sigma)^{-2}\exp(-\frac{2}{9}n^{-1})\exp(O(n^{-3})) \\
&= 3^{3n}n^{-1}3^{1/2}\sqrt{2\pi}^{-2}\left(1 - \frac{2}{9}n^{-1} + \frac{2}{81}n^{-2}\right)(1 + O(n^{-3})) \\
&= \frac{3^{3n+1/2}}{2\pi n}\left(1 - \frac{2}{9}n^{-1} + \frac{2}{81}n^{-2}\right)(1 + O(n^{-3}))
\end{aligned}
$$

En conclusión, la fórmula asintóntica para el coeficiente trinomial “central” con error relativo $O(n^{-3})$ es:

$$
\binom{3n}{n,n,n} = \frac{3^{3n+1/2}}{2\pi n}\left(1 - \frac{2}{9}n^{-1} + \frac{2}{81}n^{-2} + O(n^{-3})\right)
$$

Referencias

[1] Yriarte, Vicente. *Elementos de Teoria Combinatoria*. Universidad Simón Bolívar, 1996.

[2] R.L. Graham, D.E. Knuth, and O. Patashnik. *Concrete Mathematics 2nd edition*. Addison-Wesley, 1989.

[3] Berge, C. *Principles of Combinatorics*.