UNIVERSIDAD SIMÓN BOLIVAR **12 de julio de 2010**
CI-7521 - Matemáticas para la computación **Lic. Alejandro Claro Mosqueda**

Tarea #5

Problema #1: Evalué $\sum_{0<k<n} \frac{1}{k(n-k)}$ de dos formas diferentes:

a) Expandiendo en fracciones parciales.

b) Tratando la suma como una convolución y utilizando funciones generatrices.

Solución

a) Primero se deben determinar las fracciones parciales.

$$\begin{aligned} \frac{1}{k(n-k)} &= \frac{a}{k} + \frac{b}{n-k} \\ &= \frac{a(n-k) + b\,k}{k(n-k)} \\ &= \frac{(b-a)k + a\,n}{k(n-k)} \end{aligned}$$

Para que se cumpla la igualdad $(b-a)k + a\,n = 1$. Esto se cumple si $a = b = \frac{1}{n}$. De esta manera se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k} \\ &= \frac{1}{n}\mathcal{H}_{n-1} + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-3} + \ldots + \frac{1}{2} + 1\right) \\ &= \frac{1}{n}\mathcal{H}_{n-1} + \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n-1}\frac{1}{h} \\ &= \frac{1}{n}\mathcal{H}_{n-1} + \frac{1}{n}\mathcal{H}_{n-1} \\ &= \frac{2}{n}\mathcal{H}_{n-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} = \frac{2}{n}\mathcal{H}_{n-1}} \tag{1}$$

b) La expresión $\sum_{0<k<n} \frac{1}{k(n-k)}$ se puede ver como la convolución de $\langle \mathcal{G}_k \rangle = \left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \right\rangle$ consigo mismo

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{G}_k \, \mathcal{G}_{n-k} = [z^n] \, \mathcal{G}(z)^2$$

donde $\mathcal{G}(z)$ es la función generatriz de $\langle \mathcal{G}_k \rangle$. La forma cerrada de esta función generatriz se encuentra en la tabla 335 de [1, pp. 335]:

$$\mathcal{G}(z) = \ln\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

Ahora, utilizando la ecuación 7.50 de [1, pp. 351] se obtiene

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} &= [z^n] \, \mathcal{G}(z)^2 \\
&= [z^n] \left\{ \ln\left(\frac{1}{1-z}\right) \right\}^2 \\
&= \frac{2}{n!} \left[\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right]
\end{aligned}$$

Finalmente, para obtener la solución en la misma forma que en la parte (a), solo se debe remplazar la identidad

$$\left[\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right] = (n-1)! \, \mathcal{H}_{n-1} \qquad [1, \text{eq. } 6.58]$$

en la expresión anterior.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} = \frac{2}{n} \mathcal{H}_{n-1}} \tag{2}$$

Problema #3: Proporcione una formula asintotica para el coeficiente trinomial "medio" $\binom{3n}{n,n,n}$ con un error relativo $O(n^{-3})$.

Solución

Al remplazar la aproximación de Stirling [1, eq. 9.91]

$$\ln(z!) = \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \left(z + \frac{1}{2}\right) \ln(z) - z + \frac{1}{12} z^{-1} + O(z^{-3})$$

en el logaritmo neperaino de la formula del coeficiente trinomial

$$\begin{aligned}\ln\binom{3n}{n,n,n} &= \ln\left[\frac{(3n)!}{(n!)^3}\right]\\ &= \ln\left[(3n)!\right] - 3\ln\left[n!\right]\end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\ln\binom{3n}{n,n,n} &= \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \left(3n+\frac{1}{2}\right)\ln(3n) - 3n + \frac{1}{12}(3n)^{-1}\\ &\quad -\frac{3}{2}\ln(2\pi) - 3\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) + 3n - \frac{3}{12}n^{-1} + O(n^{-3})\\ &= -\ln(2\pi) + \left(3n+\frac{1}{2}\right)\ln(3) + \left(3n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) - \left(3n+\frac{3}{2}\right)\ln(n)\\ &\quad + \left(\frac{1}{36}-\frac{1}{4}\right)n^{-1} + O(n^{-3})\\ &= -\ln(2\pi) + \left(3n+\frac{1}{2}\right)\ln(3) - \ln(n) + \left(\frac{1}{36}-\frac{1}{4}\right)n^{-1} + O(n^{-3})\\ &= \ln\left(\frac{3^{3n+\frac{1}{2}}}{2\pi\, n}\right) - \frac{2}{9}n^{-1} + O(n^{-3})\end{aligned}$$

Luego, al hacer uso de la función exponencial en ambos lados de la ecuación

$$\binom{3n}{n,n,n} = \frac{3^{3n+\frac{1}{2}}}{2\pi\, n}\exp\left(-\frac{2}{9}n^{-1} + O(n^{-3})\right)$$

y utilizar la aproximación asintotica de la función exponencial [1, eq. 9.32]

$$\exp(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + O(z^3)$$

se obtiene finalmente

$$\boxed{\binom{3n}{n,n,n} = \frac{3^{3n+\frac{1}{2}}}{2\pi\, n}\left[1 - \frac{2}{9}n^{-1} + \frac{2}{81}n^{-2} + O(n^{-3})\right]} \tag{3}$$

Problema #2: Sea $U(n,m)$ el número de maneras distintas de sentar n alumnos en una fila de m pupitres dejando al menos un pupitre vacío entre alumnos.

a) Determine la función generatriz de la secuencia $U(n,0)$, $U(n,1)$, $U(n,2)$, $\ldots$

b) Halle una forma cerrada para $U(n,m)$.

Solución

a) Primero se debe construir la relación de recurrencia para la función $U(n,m)$. Es sencillo notar que $U(n,m)$ es el numero de maneras de sentar n alumnos en una fila $m-1$ [$U(n,m-1)$], más el numero de de maneras de sentarlos dejando un alumno sentado en el ultimo pupitre [$K(n,m)$].

$$U(n,m) = U(n,m-1) + K(n,m)$$

Al final un alumno en el ultimo pupitre, se deben acomodar $n-1$ estudiantes en $m-1$ pupitres. Sin embargo, debido a la restricción, el penúltimo pupitre debe estar vacío, y por lo tanto realmente se deben acomodar los $n-1$ estudiantes restantes en $m-2$ pupitres.

$$K(n,m) = nU(n-1,m-2)$$

Considerando los casos base se tiene que la relación de recurrencia esta dada por,

$$U(n,m) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \vee m < 2n, \\ m & \text{si } n = 1, \\ U(n,m-1) + n\,U(n-1,m-2) & \text{en el resto de los casos} \end{cases}$$

Luego, al remplazar la relación de recurrencia en la función generatriz se obtiene

$$\begin{aligned}
G(z;n) &= \sum_{m=0}^{\infty} U(n,m)z^m \\
&= 0 + nz + \sum_{m=2}^{\infty} U(n,m)z^m \\
&= nz + \sum_{m=2}^{\infty} U(n,m-1)z^m + n\sum_{m=2}^{\infty} U(n-1,m-2)z^m \\
&= nz + \left(\sum_{m=1}^{\infty} U(n,m-1)z^m - U(n,0)z\right) + n\sum_{m=2}^{\infty} U(n-1,m-2)z^m \\
&= nz + \sum_{m=1}^{\infty} U(n,m-1)z^m + n\sum_{m=2}^{\infty} U(n-1,m-2)z^m \\
&= nz + \sum_{k=0}^{\infty} U(n,k)z^{k+1} + n\sum_{k=0}^{\infty} U(n-1,k)z^{k+2} \\
&= nz + zG(z;n) + nz^2G(z;n-1) \\
&= \frac{nz^2}{1-z}G(z;n-1) + \frac{nz}{1-z} \\
&= \frac{nz}{1-z}\left[zG(z;n-1) + 1\right]
\end{aligned}$$

Referencias

[1] R.L. Graham, D.E. Knuth, and O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.