Universidad Simón Bolívar
División de Física y Matemáticas
Departamento de Computación y Tecnología de la Información
CI-7521, abril-julio 2010

Tarea 1

Observaciones:

- Recuerde redactar el examen solo. Utilice un procesador de palabras o un formateador de texto.
- Debe entregar la solución en formato PDF, mandarla por correo electrónico a meza@ldc.usb.ve y entregarla en papel el 10/05 en mi casillero antes de las 3:30pm o en horas de clase.
- Las soluciones a los problemas deben ser razonadas detalladamente.
- Las preguntas (I), (II), (IV), (VI) valen 3 puntos, las preguntas (III) y (V) valen 4 puntos.

(I) Sea V un alfabeto finito con al menos dos letras. Muestre que $(V^*,\leq)$, donde $\leq$ es el orden lexicográfico, no es Noetheriano.

(II) Muestre que el conjunto de las secuencias finitas de ceros y unos es contable.

(III) Definamos inductivamente el siguiente conjunto de árboles A sobre un conjunto base de objetos E:

1) $<e,\emptyset>$ está en A, para todo e en E. Decimos que e es la raíz de $<e,\emptyset>$, el número de elementos de $<e,\emptyset>$ es 1, la altura es 0.
2) Si $a_1 = <e_1,A_1>$ y $a_2 = <e_2,A_2>$ son árboles en A y la altura de a_1 es menor o igual a la altura de a_2 entonces $<e_2,A_2\cup\{a_1\}>$ es un árbol de A. Decimos que e_2 es la raíz de este último árbol, su número de elementos es el número de elementos de a_1 más el número de elementos de a_2, y la altura es igual a 1 más el máximo de las alturas de los árboles en $A2\cup\{a1\}$.
3) Todo árbol en A se obtiene de la aplicación de las reglas (1) y (2) un número finito de veces.

(I.1) Investigue si es verdad que la altura de un árbol con n elementos en A tiene altura a lo sumo $\lfloor \log_2 n \rfloor$

(I.2) ¿Si en la regla (2) cambiamos "la altura de a_1 es menor o igual a la altura de a_2" por "el número de elementos de a_1 es menor o igual al número de elementos de a_2", entonces se puede deducir un resultado parecido a (I.1)?.

(ayuda: utilice inducción estructural.)

(IV) Sea A un conjunto de $n\geq 1$ elementos y $(P(A),\subseteq)$ el c.p.o. de sobre el conjunto P(A) de todos los subconjutos de A respecto a la inclusión. Muestre utilizando inducción noetheriana que para todo elemento B en P(A), en el diagrama de Hasse, toda cadena (o camino) que va de $\emptyset$ (el menor elemento del c.p.o.) a B tiene largo |B| y que el número de esas cadenas es |B|!.

(V) Mostrar por inducción constructiva que para todo k entero positivo, existen n_0 y d tales que para $n \geq n_0$, $t(n) \leq d.n!$, donde:

$$t(n) = \begin{cases} a & n = 1 \\ b.n^k + n.t(n-1) & n \geq 2 \end{cases} \quad \text{con a,b > 0}$$

(Ayuda: ver Brassard, trate una condición más fuerte: $t(n) <= d.n! - e.n^k$)

(VI) Ejercicio 12, capítulo 3 de "Concrete Mathematics 2da. edición". Hacer la prueba detallada de la solución que propone el libro.