Ejercicio. (11.8) Sea A un anillo, $X = \operatorname{Spec}(A)$ su espectro, $U \subseteq X$ un abierto y $X_g := X - \mathbb{V}(g)$ el abierto básico asociado a $g \in A$. Ahora, si $g \notin \mathfrak{q}$ entonces bajo el morfismo natural $A \to A_\mathfrak{q}$, la imagen de g es una unidad entonces la propiedad universal de la localización nos garantiza la existencia de un único morfismo $\rho_{g\mathfrak{q}} : A_g \to A_\mathfrak{q}$. Definimos:

$$\mathcal{O}_U := \{\{f_\mathfrak{p}\}_{\mathfrak{p}\in U} \mid \forall \mathfrak{p} \in U, \exists g \notin \mathfrak{p} \text{ y } f \in A_g \text{ tal que } \forall \mathfrak{q} \in X_g, f_\mathfrak{q} = \rho_{g\mathfrak{q}}(f)\} \subseteq \prod_{\mathfrak{p}\in U} A_\mathfrak{p}$$

1. Si A es un dominio entero, entonces
$$\mathcal{O}_U \cong \bigcap_{\mathfrak{p}\in U} A_\mathfrak{p} \subseteq K(A)$$
donde $K(A)$ es su campo de fracciones.
2. Sea $V \subseteq U$ un abierto de U. Demuestra que la proyección:
$$\prod_{\mathfrak{p}\in U} A_\mathfrak{p} \to \prod_{\mathfrak{p}\in V} A_\mathfrak{p}$$
induce un morfismo $\rho_{UV} : \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_V$.
3. Demuestra que $\{\mathcal{O}_U\}$ junto con las restricciones ρ_{UV} forman una gavilla sobre X.
4. Demuestra que $\mathcal{O}_X \cong A$.

Proof. (1) Recordemos que si $f \in \cap A_\mathfrak{p} \subseteq K(A)$, es decir que $f = a/b$ con $b \neq 0$ entonces para cada $\mathfrak{p} \in U$ tenemos la inclusión $\iota_\mathfrak{p} : \cap A_\mathfrak{p} \to A_\mathfrak{p}$. Notemos que, como elemento de $A_\mathfrak{p}$, f no necesariamente preserva su representación $f = a/b$, pero sigue siendo el mismo elemento porque $\iota_\mathfrak{p}$ es una inclusión, es decir, si $\iota_\mathfrak{p}(f) = c/d$, entonces $c/d = a/b$ lo cual implica que $ad - bc = 0$ porque A es un dominio entero.

Con esto definimos
$$\varphi : \bigcap_{\mathfrak{p}\in U} A_\mathfrak{p} \to \mathcal{O}_U, \quad \varphi(f) = \{\iota_\mathfrak{p}(f)\}_{\mathfrak{p}\in U} \in \prod_{\mathfrak{p}\in U} A_\mathfrak{p}$$
Para probar que φ es un isomorfismo, debemos probar tres cosas:

Primero probamos que está bien definida esta función. Por la propiedad universal del producto, sabemos que efectivamente $\varphi(f) \in \prod A_\mathfrak{p}$. Para ver que $\varphi(f) \in \mathcal{O}_U$ fijemos un primo $\mathfrak{p} \in U$ y escribimos $f = \iota_\mathfrak{p}(f) = a/g$, como elemento de $K(A)$, con $g \notin \mathfrak{p}$. Ahora sea $\mathfrak{q} \in X_g$ arbitraria. Como hemos mencionado, existe un único morfismo $\rho_{g\mathfrak{q}} : A_g \to A_\mathfrak{q}$ que es inyectivo gracias a que A es dominio. Por lo tanto podemos pensar que $\rho_{g\mathfrak{q}}$ es la inclusión $A_g \subseteq A_\mathfrak{q}$ dentro de $K(A)$ y así tenemos que:

$$\rho_{g\mathfrak{q}}(f) = f = \iota_\mathfrak{q}(f)$$

donde cada parte de la igualdad lo vemos como un elemento de $A_\mathfrak{q}$. Hemos probado que para todo $\mathfrak{p} \in U$, existe una $g \notin \mathfrak{p}$ (i.e. el denominador de f en $A_\mathfrak{p}$) tal que para toda $\mathfrak{q} \in X_g$ se tiene que $f_\mathfrak{q} := \iota_\mathfrak{q}(f) = \rho_{g\mathfrak{q}}(f)$ (aquí estamos pensando en $f = a/g$ como elemento de A_g).

Probar que φ es inyectiva es fácil, pues si $\varphi(f) = \{\iota_\mathfrak{p}(f)\}_{\mathfrak{p}\in U} = \{0\}_{\mathfrak{p}\in U}$ entonces para cada $\mathfrak{p} \in U$ tenemos que $f = 0$ como elemento de $A_\mathfrak{p}$, es decir que existe un $v_\mathfrak{p} \notin \mathfrak{p}$ tal que $fv_\mathfrak{p} = (av_\mathfrak{p})/b = 0$ como fracción de $K(A)$. Como A es un dominio entero concluimos que necesariamente $a = 0$ y así $f = 0$.

Ahora probamos que φ es sobreyectiva. Sea $\{f_\mathfrak{p}\} \in \mathcal{O}_U$. Para toda $\mathfrak{p} \in U$ existen $a = a(\mathfrak{p}) \in A$, $g = g(\mathfrak{p}) \notin \mathfrak{p}$ y $f = f(\mathfrak{p}) \in A_{g(\mathfrak{p})}$ tales que $f_\mathfrak{q} = \rho_{g\mathfrak{q}}(f)$ para toda $\mathfrak{q} \in X_g$. Por lo tanto tenemos que $\{X_{g(\mathfrak{p})}\}_{\mathfrak{p}\in U}$ forma una cubierta abierta de U de la cual extraemos una cubierta finita: $X_{g_1}, \ldots, X_{g_n}$.

(2) Como $\mathcal{O}_U$ es un subanillo de $\prod A_\mathfrak{p}$, basta probar que la proyección $\pi : \prod_U A_\mathfrak{p} \to \prod_V A_\mathfrak{p}$, restringido a $\mathcal{O}_U$, tiene como contradominio a $\mathcal{O}_V$. Para esto sea $s = \{f_\mathfrak{p}\}_{\mathfrak{p}\in U}$, entonces

$$s \xrightarrow{\pi} \{f_\mathfrak{p}\}_{\mathfrak{p}\in V}.$$

Para probar que $\pi(s) \in \mathcal{O}_V$, damos $\mathfrak{p} \in V$ arbitrario. Como $V \subseteq U$ y como $\{f_\mathfrak{p}\}_{\mathfrak{p}\in U} \in \mathcal{O}_U$, entonces existe una $g = g(\mathfrak{p}) \notin \mathfrak{p}$ y una $f \in A_g$ tal que $\rho_{g\mathfrak{q}}(f) = f_\mathfrak{q}$ para toda $\mathfrak{q} \in U$. Observemos que si nos restringimos a V, la misma g y la misma f funcionan:

$$\exists g \notin \mathfrak{p} \text{ y } f \in A_g \text{ tal que } \rho_{g\mathfrak{q}} = f_\mathfrak{q} \;\; \forall \mathfrak{q} \in V.$$

Por lo tanto $\pi(s) = \{f_\mathfrak{p}\}_{\mathfrak{p}\in V} \in \mathcal{O}_V$.

(3) Para probar que $\{\mathcal{O}_U\}_{U\subseteq X}$ junto con las ρ_{UV} forman una gavilla. El hecho que sea pregavilla se sigue inmediatamente de que los morfismos ρ_{UV} son restricciones de las proyecciones canónicas:

$$\rho_{UV} = \pi_{UV} \mid_{\mathcal{O}_U} \quad \text{donde} \quad \pi_{UV} : \prod_{\mathfrak{p}\in U} A_\mathfrak{p} \to \prod_{\mathfrak{p}\in V} A_\mathfrak{p}$$

Estas proyecciones cumplen trivialmente las propiedades funtoriales de ser pregavilla.

Ahora probamos las dos características de ser gavilla:

Sea $U \subseteq X$ un abierto con una cubierta abierta $U = \cup U_\lambda$. Tomemos $s = \{f_\mathfrak{p}\}_{\mathfrak{p}\in U}$ una sección de $\mathcal{O}_U$ tal que $\rho_\lambda(s) = \rho_{UU_\lambda}(s) = \{0\}_{\mathfrak{p}\in U_\lambda}$ para toda λ. Entonces para toda $\mathfrak{p} \in U$, existe una λ tal que $\mathfrak{p} \in U_\lambda$ y así, la coordenada $f_\mathfrak{p}$ de s, bajo ρ_λ se hace 0. Pero ρ_λ es una proyección canónica, por lo tanto necesariamente $f_\mathfrak{p} = 0$. Como esto es para toda $\mathfrak{p} \in U$, tenemos que $s = \{f_\mathfrak{p}\}_{\mathfrak{p}\in U} = \{0\} = 0$.

Ahora sea $s_\lambda = \{f_\mathfrak{p}^\lambda\}_{\mathfrak{p}\in U_\lambda} \in \mathcal{O}_{U_\lambda}$ una familia de secciones tales que:

$$\rho_{U_\lambda U_\lambda \cap U_\mu}(s_\lambda) = \rho_{U_\mu U_\lambda \cap U_\mu}(s_\mu)$$

para toda λ, μ. Definimos $s = \{f_\mathfrak{p}\}_{\mathfrak{p}\in U}$ tal que $f_\mathfrak{p} = s_\lambda(\mathfrak{p}) = f_\mathfrak{p}^\lambda$ si $\mathfrak{p} \in U_\lambda$. Esta definición para $f_\mathfrak{p}$ está bien definido porque si $\mathfrak{p} \in U_\lambda \cap U_\mu$, entonces la ecuación anterior nos dice que la coordenada referente a $\mathfrak{p}$ de s_λ y de s_μ coinciden, i.e. $s_\lambda(\mathfrak{p}) = s_\mu(\mathfrak{p})$. Esto sucede para cada λ, μ y cada $\mathfrak{p} \in U_\lambda \cap U_\mu$. Por lo tanto está bien definido s y por definición $\rho_{UU_\lambda}(s) = s_\lambda$ para cada λ.

(4) Sea $f \in A$, sabemos que para cada $\mathfrak{p} \in X$, hay un morfismo canónico de localización $l_\mathfrak{p} : A \to A_\mathfrak{p}$ que hace: $l_\mathfrak{p}(f) = f/1 \in A_\mathfrak{p}$. Con esto definimos:

$$\psi : A \to \mathcal{O}_X \quad \psi(f) = \{l_\mathfrak{p}(f)\}_{\mathfrak{p}\in X} = \{f/1\}_{\mathfrak{p}\in X}$$

Como cada $l_\mathfrak{p}$ es una función bien definida, la propiedad universal del producto nos garantiza que ψ está bien definida. Para ver que el contradominio es efectivamente $\mathcal{O}_X$, fijamos una $\mathfrak{p} \in X$. Sabemos que $1 \notin \mathfrak{p}$ y que $f \in A_1 = A$. Por último sea $\mathfrak{q} \in X$ (claramente $1 \notin \mathfrak{q}$). En la definición de $\rho_{g\mathfrak{q}}$ estamos tomando $g = 1$, entonces $\rho_{1\mathfrak{q}}$ coincide con la localización canónica: $l_\mathfrak{q} = \rho_{1\mathfrak{q}}$ entonces trivialmente tenemos que $f_\mathfrak{q} := l_\mathfrak{q}(f) = \rho_{1\mathfrak{q}}(f)$ y así $\psi(f) \in \mathcal{O}_X$.

Para la inyectividad supongamos que $\psi(f) = \{0\}_{\mathfrak{p}\in X}$, es decir que $l_\mathfrak{p}(f) = f/1 = 0$ en cada $A_\mathfrak{p}$. Por lo tanto para toda $\mathfrak{p} \in X$, existe una $v = v(\mathfrak{p}) \notin \mathfrak{p}$ tal que $vf = 0$ en A, es decir que $(0 : f) \cap \mathfrak{p}^c \neq \emptyset$ o equivalentemente $(0 : f) \not\subseteq \mathfrak{p}$ para toda $\mathfrak{p} \in X$. Por lo tanto $\mathbb{V}((0 : f)) = \emptyset$ lo cual sucede si y sólo si $1 \in (0 : f)$. De esto se sigue inmediatamente que $f = 1 \cdot f = 0$ y que ψ es inyectiva.

Probamos la sobreyectividad: sea $s = \{f_\mathfrak{p}\}_{\mathfrak{p}\in X}$ una sección en $\mathcal{O}_X$. Para cada $\mathfrak{p} \in X$, sabemos que existe un abierto básico X_{g_i} alrededor de $\mathfrak{p}$ junto con una fracción $a_i/g_i^{n_i} \in A_{g_i}$ tal que para toda $\mathfrak{q} \in X_{g_i}$, $f_\mathfrak{q} = \rho_{g_i\mathfrak{q}}(a_i/g_i^{n_i}) = a_i/g_i^{n_i}$. Esta última igualdad se da porque, como $g_i \notin \mathfrak{q}$, g_i es unidad de $A_\mathfrak{q}$ y así $(a_i/g_i^{n_i})/1 = a_i/g_i^{n_i}$ en $A_\mathfrak{q}$. Como $X_{g_i} = X_{g_i^{n_i}}$, podemos reescribir esta fracción de tal manera que el exponente $n_i = 1$ ya que en $A_\mathfrak{q}$, g_i es una unidad. Con todo esto decimos que s está representado por a_i/g_i en el abierto X_{g_i}.

Hacemos una última observación: en las intersecciones $X_{g_i} \cap X_{g_k} = X_{g_i g_k}$, ambas fracciones a_i/g_i y a_k/g_k representan a s, entonces existe una potencia n_{ij} tal que $(g_i g_k)^{n_{ij}}(a_i g_k - a_k g_i) = 0$. Si tomamos $N = \max n_{ij}$, entonces

$$(g_i g_k)^N (a_i g_k - a_k g_i) = 0 \implies (g_k)^{N+1}(a_i g_i^N) - (g_i)^{N+1}(a_k g_k^N) = 0. \tag{1}$$

Por lo tanto si ahora sustituimos la representación de s en X_{g_i} por:

$$\frac{a_i}{g_i} \to \frac{a_i g_i^N}{g_i^{N+1}}$$

la representación a_i/g_i no cambia pero la ecuación 2 nos dice que ahora

$$(g_k)^{N+1}(a_i g_i^N) - (g_i)^{N+1}(a_k g_k^N) = 0 \quad \to \quad g_k a_i - g_i a_k = 0 \tag{2}$$

Claramente $\{X_{g_i}\}$ es una cubierta abierta de X, pero como X es cuasi-compacto (por el teorema de la partición de la unidad), sin pérdida de generalidad podemos asumir que la cubierta es finita, i.e. $X = X_{g_1} \cup \cdots \cup X_{g_n}$, y además:

$$1 = \mu_1 g_1 + \cdots + \mu_n g_n \quad \text{para algunas} \quad \mu_1, \ldots, \mu_n \in A.$$

Definimos $a = \mu_1 a_1 + \cdots + \mu_n a_n$ y observemos que:

$$g_i a = \sum_{k=1}^{n} \mu_k g_i a_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k g_k a_i = a_i$$

donde hemos usado que $g_k a_i = g_i a_k$ (la ecuación 3). Esta última igualdad nos dice que en A_{g_i}, tenemos: $a/1 = a_i/g_i$. Por lo tanto $l_{g_i}(a) = a_i/g_i$ y así tenemos que $\psi(a) = s$ sobre todas las $X'_{g_i}s$, i.e. sobre X.

□