1: Grupos Topológicos

Ejercicio 1

Sea H un subgrupo abeliano de un grupo topológico G de Hausdorff. Si H es denso, entonces G también es abeliano. Es decir que para verificar la conmutativididad de un grupo, basta verificarlo para un subgrupo denso.

Proof. Sea $f : G \times G \to G$ definido por $(x, y) \mapsto xyx^{-1}y^{-1}$. Claramente es continua porque es la composición de las funciones continuas:

$$\begin{array}{ccccccccc} G \times G & \longrightarrow & (G \times G) \times (G \times G) & \longrightarrow & (G \times G) \times (G \times G) & \xrightarrow{\mu \times \mu} & G \times G & \xrightarrow{\quad \mu \quad} & G \\ (x, y) & \longmapsto & (x, y, x, y) & \longmapsto & (x, y, x^{-1}, y^{-1}) & \longmapsto & (xy, x^{-1}y^{-1}) & \longmapsto & xyx^{-1}y^{-1} \end{array}$$

donde las primeras dos funciones son $(\mathrm{Id} \times \mathrm{Id}, \mathrm{Id} \times \mathrm{Id})$ y $\mathrm{Id} \times \mathrm{Id} \times \iota \times \iota$ respectivamente. Como G es Hausdorff, $\{e\} \subseteq G$ es cerrado, entonces:

$$X := f^{-1}[e] = \{(x, y) \in G \times G \mid xyx^{-1}y^{-1} = e\} = \{(x, y) \in G \times G \mid xy = yx\}$$

es un subconjunto cerrado de $G \times G$. Observa que G es abeliano si y sólo si $X = G \times G$.

Ahora, como H es abeliano por hipótesis, $H \times H \subseteq X$. Además $\overline{H \times H} = \overline{H} \times \overline{H}$, es el mínimo cerrado que contiene a $H \times H$, entonces $\overline{H} \times \overline{H} \subseteq X$. Por hipótesis H es denso, es decir $\overline{H} = G$. Por lo tanto $G \times G = \overline{H} \times \overline{H} \subseteq X$ lo cual implica que $X = G \times G$ o equivalentemente que G es abeliano.

$\square$

2: Compacidad