0.1 La conjetura del levantamiento modular semiestable

En esta sección formulamos la conjetura del levantamiento modular semiestable (CLMS) y vemos cómo dos casos de la CLMS implican la conjetura de STW semiestable.

Teorema 1. *Sea p un primo impar y E una curva elíptica semiestable definida sobre $\mathbb{Q}$ tal que cumple las siguientes dos propiedades:*

i*)* *$\bar{\rho}_{E,p}$ es irreducible*

ii*)* *Existe una eigenforma $f \in S_2(\Gamma_0(N))$ y un ideal primo $\mathfrak{P} \subset \mathcal{O}_f$ tal que, para casi todo número primo q, se tiene*

$$a_q(f) \equiv q + 1 - \#E(\mathbb{F}_q) \pmod{\mathfrak{P}}.$$

Entonces E es modular.

A la proposición lógica que postula el teorema 1, aplicado a un primo impar p, la llamaremos CLMS(p).

Teorema 2. *Sea E una curva elíptica semiestable definida sobre $\mathbb{Q}$, entonces*

$$\text{CLMS}(3) \text{ y } \text{CLMS}(5) \quad \Longrightarrow \quad \text{STW semiestable}$$

Este teorema claramente se sigue de los siguientes dos resultados importantes:

Proposición 1. Sea E una curva elíptica semiestable, entonces:

$$\text{CMLS}(3) \text{ y } \bar{\rho}_{E,3} \text{ irreducible} \quad \Longrightarrow \quad E \text{ es modular.}$$

Proof. Por el teorema **??**, tenemos que la hipótesis sobre la irreducibilidad de $\bar{\rho}_{E,3}$, es suficiente para garantizar la existencia de una eigenforma $f \in S_2(\Gamma_0(N))$ y un ideal primo $\mathfrak{P} \subset \mathcal{O}_f$ que cumplen la condición *ii*) de la CLMS(3). Como estamos asumiendo por hipótesis que la CLMS(3) es cierta, podemos concluir que E es modular. □

Proposición 2. Sea E una curva elíptica semiestable, entonces:

$$\text{CMLS}(3),\ \text{CMLS}(5) \text{ y } \bar{\rho}_{E,3} \text{ reducible} \quad \Longrightarrow \quad E \text{ es modular.}$$