0.1 Introducción

Panorama histórica

El propósito de esta tesis es describir la prueba de un caso particular, pero muy importante, de la conjetura de Shimura-Taniyama-Weil (STW). La fama de STW claramente viene de su rol en la prueba del Último Teorema de Fermat (UTF) que dice: para $n > 2$ tenemos

$$\exists x, y, z \in \mathbb{Z} \text{ tales que } x^n + y^n = z^n \quad \Longrightarrow \quad xyz = 0. \qquad \Big[\mathrm{UTF}(n)\Big]$$

Claramente si $d \mid n$, entonces $\mathrm{UTF}(d) \Longrightarrow \mathrm{UTF}(n)$. Esto quiere decir que solamente hay que considerar los casos cuando $n = p$ un primo impar; el caso $n = 4$ fue probado por el mismo Pierre de Fermat (1607-1665) cuando demostró que la ecuación $x^4 - y^4 = z^2$ no tiene soluciones enteras.

Hasta mediados del siglo XIX, algunos casos particulares de UTF se fueron probando: Euler probó el UTF para $n = 3$ en 1753, Dirichlet y Legendre ambos probaron el caso $n = 5$ en los 1820's y en 1839 Lamé prueba el caso $n = 7$. Ocho años después, Lamé presentó una prueba completa del UTF, pero resultó estar equivocada pues había asumido, incorrectamente, que el anillo de enteros $\mathbb{Z}[e^{2\pi i/p}]$ era un dominio de factorización única para todo primo p, pero esto no es cierto (e.g. $p = 23$). Usando estas ideas, Kummer probó el UTF para todo primo regular.*

Todo cambió cuando Frey sugirió una nueva alternativa en los 80's. Para ese entonces la geometría algebráica estaba bien fundamentada y ofrecía herramientas poderosas para estudiar el UTF. En el área particular de curvas elípticas, ya se había formado una conjetura importante:

$$\text{Toda curva elíptica sobre } \mathbb{Q} \text{ es modular.} \qquad \Big[\mathrm{STW}\Big]$$

Frey sugirió que de un contraejemplo $a^p + b^p = c^p$ de $\mathrm{UTF}(p)$, la curva elíptica asociada

$$E_{a,b,c,p} : \; y^2 = x(x - a^p)(x + b^p).$$

podría ser un contraejemplo de STW. Esta curva se llama la *curva de Frey* en su honor apesar de que la conexión entre la curva de Frey y el UTF fue establecido por Hellegouarch unos años antes.

Para argumentar porqué $E = E_{a,b,c,p}$ podría contradecir STW, Frey, junto con Serre, describieron las propiedades de las representaciones $\bar{\rho} = \bar{\rho}_{E,p}$ de Galois asociadas a los puntos de $p-$torsión de E. En particular, ellos probaron que $\bar{\rho}$ era impar, absolutamente irreducible, no-ramificado fuera de $2p$ y plano sobre p. Cumplir al mismo tiempo estas cuatro propiedades es excepcional para una representación de Galois y sugiere fuertemente que tal $\bar{\rho}$ no puede existir.

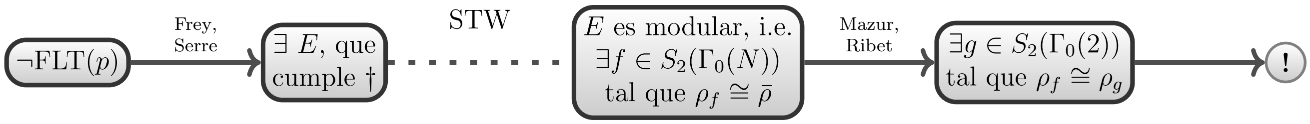
Serre formuló explícitamente varias conjeturas sobre cómo clasificar representaciones de Galois, e.g. $\bar{\rho}$, según la teoría de formas modulares. Más precisamente, estudió cómo asociar representaciones ρ_f a ciertas formas modulares f y cuando pasaba que una representación arbitraria ρ era de la forma $\rho = \rho_f$, i.e. cuando ρ era modular. En particular, Serre conjeturó que a las representaciones modulares ρ_f que además cumplían las propiedades extraordinarias de $\bar{\rho}$, se les podía bajar su *nivel* hasta su conducto de Artin.

La reducción de nivel de (ciertas) representaciones modulares lo probaron Ribet y Mazur en los 80's y por fin la intuición de Frey se confirmó: el conductor de Artin de $\bar{\rho}$ es 2, entonces si STW fuese cierto y E fuese modular, la representación $r\bar{h}o$ sería modular y por el teorema de

*Un primo p es *regular* si $p \nmid h_K$ donde h_K es el número de clase del campo $K = \mathbb{Q}(e^{2\pi i/p})$, i.e. el orden del grupo de Picard de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$.

Mazur-Ribet induce una representación modular de nivel 2 asociado a una forma modular cuspidal f de nivel 2 no trivial, pero era bien conocido que el espacio de tales formas modulares es nulo; contradicción. Por lo tanto la curva de Frey era un contraejemplo de STW. El camino a la prueba del UTF se iluminó: pruebas la conjetura de Shimura-Taniyama-Weil y pruebas el Último teorema de Fermat.

Esquemáticamente, la prueba del UTF se ve así:



Sobre la tesis