6. Zusammengesetzte ungerade Transformationsgrade.

1. Transformation 15^{ten} Grades. Die zur linken Seite der imaginären w-Achse gelegene Hälfte des Klassenpolygons K_15 ist das in Fig. 22 dargestellte, von sechs Symmetriekreisen begrenzte Kreisbogensechseck. Die beiden Ecken e_0 und e_1, bei

$$w = ...$$

und

$$w = ...$$

gelegen, sind die Fixpunkte der Substitutionen *matrix* und *matrix* ; sie sind die Nullpunkte der beiden qua dratischen Formen (15, 15, 4), (30, 15, 2), durch die wir die beiden Klassen der Diskriminante $D = -15$ repräsentieren können. Der Fixpunkt e_2 von W_15 gehört zur Hauptklasse der Diskriminante $D = -60$; und der $w = ...$ gelegene Fixpunkt der Substitution *matrix* ist der Nullpunkt der quadratischen Form (120, 90, 17), die die zweite Formklasse mit $D = -60$ repräsentiert. Die drei mit den Nummern 1, 2, 3 versehenen Seiten entsprechen den Gleichungen und Spiegelungen:

1...

2...

3...

während der Kreis 4 der Symmetriekreis der Spiegelung W_15 ist. Die zweite und dritte Spiegelung sind bereits in der Γ_15 enthalten. Neben der Spitze ∞ ragt K_15 noch mit dem Spitzenzyklus $\pm 1/3$ an die reelle w-Acbse heran.

Funktionentheoretisch sind die zusammengesetzten Transformationsgrade besonders leicht zugänglich. Man setze zur Abkürzung:

$$\Delta_\nu = ...$$

und beachte, daß sowohl $\Delta_3.\Delta_5$ wie $\Delta_1.\Delta_15$ gegenüber den Substitutionen der Γ_15 invariant sind. Der Quotient $\Delta_3.\Delta_5/\Delta_3.\Delta_5$ ist also eine Funktion des Polygons K_15, und zwar kann diese Funktion Pole und Nullpunkte nur in der Spitze $i\infty$ und im Spitzenzyklus $\pm 1/3$ haben. Da aber in der Spitze $i\infty$ ein Pol achter Ordnung liegt, so findet sich im Zyklus $\pm 1/3$ ein Nullpunkt der gleichen Ordnung, so daß in:

$$(1)\tau = ...$$

bereits eine einwertige Funktion von K_15 gewonnen ist.

Die beiden Formen $\sqrt[8]{\Delta_3\Delta_5}$ und $\sqrt[8]{\Delta_1\Delta_{15}}$ als solche der Dimension —3 haben beide Nullpunkte der Gesamtordnung 3 auf K_15. Dabei hat $\sqrt[8]{\Delta_3\Delta_5}$

in der Spitze $i\infty$ einen Nullpunkt erster Ordnung und also im Zyklus $\pm 1/3$ einen solchen zweiter Ordnung, während $\sqrt[8]{\Delta_1 \Delta_{15}}$ an diesen beiden Stellen bzw. Nullpunkte der Ordnung 2 und 1 hat. Hiernach haben wir in:

$$z_0, z_1 = ...$$

zwei ganze Formen mit je einem Nullpunkte erster Ordnung im Zyklus $\pm 1/3$ bzw. in der Spitze $i\infty$, deren Quotient $z_0 : z_1$ die in (1) erklärte Funktion τ ist. In $(az_0 + bz_1)$ aber haben wir eine Formenschar mit einem beweglichen Nullpunkte erster Ordnung auf $K_1 5$.

Das Transformationspolygon $T_1 5$ wird durch $\tau(\omega)$ auf eine zweiblättrige Riemannsche Fläche des Geschlechtes 1 abgebildet, deren Yerzweigungsform wir in üblicher Art herstellen. Die nähere formentheoretische Diskussion zeigt, daß die zur $\Gamma_{\psi(15)}$ gehörende ganze Modulform (-2) Dimension:

$$(3) v = ...$$

die gegenüber W_{15} Zeichenwechsel erfährt, ihre vier einfachen Nullstellen in den Punkten hat, die die Verzweigungspunkte jener zweiblättrigen Fläche liefern. Die Potenzreihen ergeben dann für v^2 die Darstellung:

$$(4). v^2 = ...$$

womit die Verzweigungsform gewonnen ist. Als Funktionssystem des Transformationspolygons T_{15} haben wir daraufhin:

$$(5) \tau = ..., \sigma = ...$$

wobei sich σ in τ durch die Quadratwurzel darstellt:

$$(6) \sigma = \sqrt{\tau^4 + ...}$$

so daß wir hier mit einem elliptischen Gebilde der absoluten Invariante $\frac{13^3 37^3}{2^6 3^7 5^4}$ tun haben.

Zur Darstellung von J als rationale Funktion von σ und τ bedienen wir uns der in (6) S.392 bei der Transformation fünften Grades eingeführten Funktion τ, die bier mit τ_5 bezeichnet werden möge, und in der sich J in der Gestalt (1.3) S.393 darstellt. Es ist hinreichend, die auf T_{15} vierwertige Funktion τ_5 in σ und τ darzustellen. Wird τ_5 durch W_{15} in τ_5' transformiert, so hat man:

$$\tau_5 = 125 \sqrt[4]{\frac{\Delta_5}{\Delta_1}}, \quad \tau_5' = 125 \sqrt[4]{\frac{\Delta_3}{\Delta_{15}}}, \quad \tau_5' - \tau_5 = \frac{\sqrt[4]{\Delta_1 \Delta_3} - 125 \sqrt[4]{\Delta_5 \Delta_{15}}}{\sqrt[4]{\Delta_1 \Delta_{15}}} \qquad (1)$$

Der rechts stehende Zähler ist nun eine ganze Form $(-6)^{ter}$ Dimension von K_{15}, die gegenüber W_{15} Zeichenwechsel erfährt und also den Faktor v enthält. Hierdurch werden Nullpunkte der Gesamtordung 2 auf K_{15} erledigt, so daß noch solche der Gesamtordnung 4 übrigbleiben. Ein Nullpunkt erster Ordnung liegt in der Spitze $i\infty$, so daß die Ordnung 3 verbleibt. Da diese Ordnung ganzzahlig ist, so muß im Zyklus $\pm 1/3$, wo unser Ausdruck sicher verschwindet, mindestens ein Nullpunkt erster Ordnung liegen. Zwei weitere Nullpunkte dieser Ordnung sind dann noch zu bestimmen. Dieser Überlegung entspricht der Ansatz:

$$\sqrt[4]{\Delta_1\Delta_3} - 125\sqrt[4]{\Delta_5\Delta_{15}} = vz_0z_1(az_0^2 + bz_0z_1 + cz_1^2)$$

Die Potenzreihen ergeben:

$$\sqrt[4]{\Delta_1\Delta_3} - 125\sqrt[4]{\Delta_5\Delta_{15}} = vz_0z_1(z_0^2 - 4z_0z_1 - z_1^2) \tag{2}$$

Zur Prüfung dieses Ergebnisses berechne man mit Hilfe von (4) den Ausdruck von $(\sqrt[4]{\Delta_1\Delta_3}+125\sqrt[4]{\Delta_5\Delta_{15}})^2$ in z_0, z_1, wobei sich das Quadrat einer homogenen Funktion sechsten Grades ergeben muß. Dies bestätigt sich, man findet durch Ausziehen der Quadratwurzel:

$$\sqrt[4]{\Delta_1\Delta_3} + 125\sqrt[4]{\Delta_5\Delta_{15}} = z_0z_1(z_0^4 - 9z_0^3z_1 - 9z_0z_1^3 - z_1^4). \tag{3}$$

Von (7) und (8) aus gelangt man nun leicht zum Ziele: Der gesuchte Ausdruck der heim Grade 5 auftretenden Funktion τ_5 in den jetzigen σ und τ ist:

$$\tau_5 = \frac{\tau^4 - 9\tau^3 - 9\tau - 1 - \sigma(\tau^2 - 4\tau - 1)}{2\tau} \tag{4}$$

6. Composite odd transformation line.

Transformation 15^{th} degrees. The half of the class polygon K_{15}, which is to the left of the imaginary ω-axis, is the circular hexagon delimited by six symmetry circles shown in FIG22. The two corners e_0 and e_1, at

$$\omega = \frac{-\sqrt{15}+i}{2\sqrt{15}}$$

and

$$\omega = \frac{-\sqrt{15}+i}{4\sqrt{15}}$$

located, the fixed points of the substitutions are $\begin{pmatrix} -15 & -8 \\ 30 & 15 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} -15 & -4 \\ 60 & 15 \end{pmatrix}$; they are the zero points of the two quadratic forms (15, 15, 4), (30, 15, 2), by which we can represent the two classes of the discriminant $D = -15$. The fixed point e_2 of W_{15} belongs to the main class of the discriminant $D = -60$; and the $\omega = \frac{-3\sqrt{15}+i}{8\sqrt{15}}$ fixed point of the substitution $\begin{pmatrix} -45 & -17 \\ 120 & 45 \end{pmatrix}$ is the zero point of the quadratic form (120, 90, 17), which represents the second shape class with $D = -60$. The three pages numbered 1, 2, 3 correspond to the equations and reflections:

$$1. \quad 30(\xi^2 + \eta^2) + 30\xi + 7 = 0, \qquad \omega' = \frac{-15\bar{\omega} - 7}{30\bar{\omega} + 15}$$

$$2. \quad 15(\xi^2+\eta^2)+11\xi+2=0, \qquad \omega' = \frac{-11\bar{\omega}-4}{30\bar{\omega}+11}$$

$$3. \quad 15(\xi^2+\eta^2)+8\xi+1=0, \qquad \omega' = \frac{-4\bar{\omega}-1}{15\bar{\omega}+4}$$

while circle 4 is the symmetry circle of the reflection $\overline{W}_{15}$. The second and third reflections are already included in the $\Gamma_{\psi(15)}$. In addition to the peak $i\infty$, K_{15} still reaches the real ω-axis with the peak cycle $\pm 1/3$.

Functionally, the composite degrees of transformation are particularly easy to access. For short:

$$\Delta(v\omega_1, \omega_2) = \Delta_\nu$$

and note that both $\Delta_3 \cdot \Delta_5$ and $\Delta_1 \cdot \Delta_{15}$ are invariant to the substitutions of Γ_{15}. The quotient $\Delta_3 \cdot \Delta_5 / \Delta_1 \cdot \Delta_{15}$ is thus a function of the polygon K_{15}, and this function can only use poles and zeros in the peak $i\infty$ and in the peak cycle $\pm 1/3$ have. But since in the peak $i\infty$ lies a pole of the eighth order, there is a zero point of the same order in the cycle $\pm 1/3$, so that in:

$$\tau(\omega) = \sqrt[8]{\frac{\Delta_3 \cdot \Delta_5}{\Delta_1 \cdot \Delta_{15}}} = q^{-2} + 3 + 9q^2 + \cdots \tag{5}$$

already won a one-valued function of K_{15}.

The two forms $\sqrt[8]{\Delta_3\Delta_5}$ and $\sqrt[8]{\Delta_1\Delta_{15}}$ as those of dimension -3 both have zero points of order 3 on K_{15}. $\sqrt[8]{\Delta_3\Delta_5}$ has a first-order zero in the top $i\infty$ and thus such a second order in the $\pm 1/3$ cycle, while $\sqrt[8]{\Delta_1\Delta_{15}}$ at these two places or zero points of order 2 and 1. After that we have in:

$$\begin{cases} z_0 = \sqrt[24]{\frac{\Delta_3^2\Delta_5^2}{\Delta_1\Delta_{15}}} = \frac{2\pi}{\omega_2}(1+q^2+2q^4+q^6+3q^8+q^{10}+\cdots) \\ z_1 = \sqrt[24]{\frac{\Delta_1^2\Delta_{15}^2}{\Delta_3\Delta_5}} = \frac{2\pi}{\omega_2}(q^2-2q^4-q^6+3q^8-q^{10}+\cdots) \end{cases} \tag{6}$$

two whole forms, each with a first-order zero in the cycle $\pm 1/3$ or in the peak $i\infty$, whose quotient $z_0 : z_1$ is the function τ declared in (1). But in $(az_0 + bz_1)$ we have a set of shapes with a first-order moving zero on K_{15}.

The transformation polygon T_{15} is mapped by $\tau(\omega)$ to a two-leaf Riemann surface of gender 1 whose branching form we produce in the usual way. The closer theory-theoretical discussion shows that the whole modular form belonging to the $\Gamma_{\psi(15)}$ (-2) Dimension:

$$v = -2\pi i \frac{z_1}{z_0} \frac{\tau}{(\omega, d\omega)} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 (1 - 3q^2 - 9q^4 - 3q^6 - 21q^8 - \cdots), \tag{7}$$

which is opposite to W_{15} character change, has its four simple zeros in the points that provide the branch points of that two-leaf surface. The power series then give the representation for v^2:

$$v^2 = z_0^4 - 10z_0^3z_1 - 13z_0^2z_1^2 + 10z_0z_1^3 + z_1^4, \tag{8}$$

with which the branching form is won. As a functional system of the transformation polygon T_{15} we have:

$$\tau(\omega) = \frac{z_0}{z_1}, \quad \sigma(\omega) = \frac{v}{z_1^2} = -\frac{2\pi i}{z_0 z_1} \frac{d\tau}{(\omega, d\omega)}, \tag{9}$$

where σ in τ is represented by the square root:

$$\sigma = \sqrt{\tau^4 - 10\tau^3 - 13\tau^2 + 10\tau + 1} \tag{10}$$

so that here we have an elliptic structure of the absolute invariant $\frac{13^3 37^3}{2^6 3^7 5^4}$.

To represent J as a rational function of σ and τ, we use the τ function introduced in (6) p.392 in the fifth-degree transformation, denoted by τ_5 may, and in which J is in the form (1.3) p.393. It is sufficient to represent the quadrivalent function τ_5 in σ and τ on T_{15}. If τ_5 is transformed into τ_5' by W_{15}, you get:

$$\tau_5 = 125 \sqrt[4]{\frac{\Delta_5}{\Delta_1}}, \quad \tau_5' = \sqrt[4]{\frac{\Delta_3}{\Delta_{15}}}, \quad \tau_5' - \tau_5 = \frac{\sqrt[4]{\Delta_1 \Delta_3} - 125 \sqrt[4]{\Delta_5 \Delta_{15}}}{\sqrt[4]{\Delta_1 \Delta_{15}}} \tag{11}$$

The counter to the right is now a whole $(-6)^{ter}$ dimension of K_{15}, which is opposite to W_{15} character changes and thus contains the factor v. As a result, zero points of the total order 2 on K_{15} done, so that even those of the total order 4 remain. A zero point of first order lies in the peak $i\infty$, so that the order 3 remains. Since this order is an integer, in the cycle $\pm 1/3$, where our expression surely disappears, there must be at least one first-order zero point. Two more zeros of this order have to be determined. This consideration corresponds to the approach:

$$\sqrt[4]{\Delta_1 \Delta_3} - 125 \sqrt[4]{\Delta_5 \Delta_{15}} = v z_0 z_1 (a z_0^2 + b z_0 z_1 + c z_1^2)$$

The power series result in:

$$\sqrt[4]{\Delta_1 \Delta_3} - 125 \sqrt[4]{\Delta_5 \Delta_{15}} = v z_0 z_1 (z_0^2 - 4 z_0 z_1 - z_1^2) \tag{12}$$

To test this result, use (4) to compute the expression of $(\sqrt[4]{\Delta_1 \Delta_3} + 125 \sqrt[4]{\Delta_5 \Delta_{15}})^2$ in z_0, z_1, where the square of a homogeneous sixth degree function must result. This is confirmed, you can find by extracting the square root:

$$\sqrt[4]{\Delta_1 \Delta_3} + 125 \sqrt[4]{\Delta_5 \Delta_{15}} = z_0 z_1 (z_0^4 - 9 z_0^3 z_1 - 9 z_0 z_1^3 - z_1^4). \tag{13}$$

From (7) and (8) one now easily reaches the goal: The sought expression of the home Grade 5 occurring function τ_5 in the current σ and τ is:

$$\tau_5 = \frac{\tau^4 - 9\tau^3 - 9\tau - 1 - \sigma(\tau^2 - 4\tau - 1)}{2\tau}. \tag{14}$$