

# Chapter 1

## Grupo Fundamental

### 1.1 Lazos

**Definición 1.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $x_0 \in X$ . Un *espacio basado* es la pareja  $(X, x_0)$  y un morfismo  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  entre espacios basados es una función continua  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $f(x_0) = y_0$ .

Observemos que la clase de espacios basados junto con los morfismos de espacios basados forman una categoría que denotamos por  $\mathbf{Top}_*$  (aquí la notación viene de  $\mathbf{Top}$ , la categoría de espacios topológicos). Esto se sigue inmediatamente de que la composición de funciones continuas es continua.

**Definición 2.** Sea  $(X, x_0)$  un espacio basado. Un *lazo* en  $(X, x_0)$  es una función continua  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $\alpha(0) = x_0 = \alpha(1)$ , es decir, una curva cerrada. Al conjunto de todos los lazos en  $(X, x_0)$  se denota por

$$\Omega(X, x_0) := \{[0, 1] \xrightarrow{\alpha} X \mid \alpha \text{ es una lazo en } (X, x_0)\}.$$

**Ejemplo 1.**

1. La función constante  $c(s) = x_0$  para toda  $s \in [0, 1]$  es claramente un lazo en  $(X, x_0)$ . De hecho se considera como el lazo trivial y funcionará como elemento neutro en las construcciones que haremos más adelante.
2. El círculo  $\mathbb{S}^1$  se puede pensar como un lazo en  $(\mathbb{C}, 1)$ , o en  $(\mathbb{R}^2, (1, 0))$ ; la función  $\alpha(s) = e^{2\pi i s}$  es continua y cumple que  $\alpha(0) = e^0 = 1 = e^{2\pi i} = \alpha(1)$ .

El espacio  $\Omega(X, x_0)$ , en general, es demasiado grande como para poder realmente detectar propiedades topológicas de  $X$ . Entonces vamos a subdividir  $\Omega(X, x_0)$  en clases de equivalencia. Para esto queremos que dos lazos sean equivalentes si podemos “deformar” continua un lazo en otro; de esta manera podremos aislar las propiedades topológicas de  $X$ .

La idea de “deformar” un lazo  $\alpha_0$  al lazo  $\alpha_1$  es realmente cambiar continuamente de lazos hasta llegar a  $\alpha_1$ . Más precisamente, una deformación es una familia de lazos  $\{\alpha_t\}_{0 \leq t \leq 1}$  que empiezan en  $\alpha_0$ , varían continuamente mientras  $t \rightarrow 1$  y terminan en  $\alpha_1$ . Escribimos la definición para hacer más preciso esta idea.

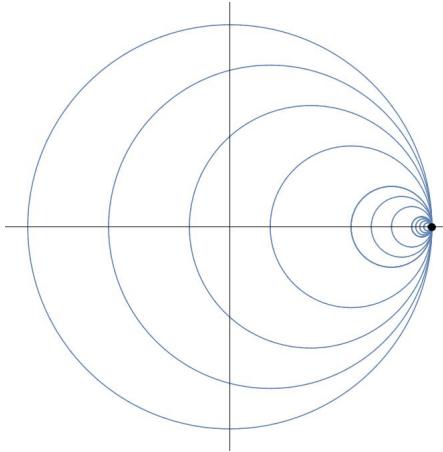
**Definición 3.** Sean  $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$ . Una *homotopía* entre  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$  es una función continua  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  tal que:

- Para toda  $t \in [0, 1]$  fija,  $\alpha_t(s) := H(s, t)$  es un lazo en  $(X, x_0)$ .
- $H(s, 0) = \alpha(s)$  y  $H(s, 1) = \beta(s)$ .

Si existe una homotopía entre dos lazos  $\alpha$  y  $\beta$ , decimos que son *homotópicos* y lo denotamos por  $\alpha \simeq \beta$ .

**Ejemplo 2.**

Figure 1.1:  $\mathbb{S}^1$  es homotópico a un punto.



- El lazo constante  $c(s) = (1, 0)$  y el lazo  $\mathbb{S}^1$  (del ejemplo 1) son homotópicos en el espacio basado  $(X, x_0) = (\mathbb{R}^2, (1, 0))$  mediante la homotopía:

$$H(s, t) = (t + (1 - t) \cos 2\pi s, (1 - t) \sin 2\pi s).$$

Podemos pensar a  $H$  como la restricción de una función suave  $\bar{H} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (con la misma regla de correspondencia) y así concluimos que  $H$  es continua. Observemos que para  $t_0 \in [0, 1]$  fija cada  $H(s, t_0)$  es un círculo con centro  $(t_0, 0)$  y radio  $1 - t_0$ . Por lo tanto es un lazo en  $(\mathbb{R}^2, (1, 0))$  porque

$$H(0, t_0) = (t_0 + (1 - t_0) \cos 2\pi 0, (1 - t_0) \sin 2\pi 0) = (1, 0) = H(1, t_0)$$

para toda  $t_0 \in [0, 1]$  ( $H$  es una función periódica en  $s$  con periodo 1), véase la figura 1.1.

Por último  $H(s, 0) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$  es el círculo  $\mathbb{S}^1$  y  $H(s, 1) = (1, 0) = c(s)$  es el punto y así,  $H$  es una homotopía entre  $\mathbb{S}^1$  y el lazo constante  $c(s)$ . Por lo tanto  $\mathbb{S}^1 \simeq c$  en  $(\mathbb{R}^2, (1, 0))$ .

- Si tomamos  $(X, x_0) = (\mathbb{R} - \{0\}, 2)$ , entonces el lazo  $\alpha(s) = 2 + \sin 2\pi s$  es homotópico al lazo constante  $c(s) = 2$ , mediante la homotopía  $H(s, t) = 2 + (1 - t) \sin 2\pi s$  (la prueba de este hecho es idéntico al ejemplo anterior; la idea es que el factor  $1 - t$  hace que las oscilaciones del lazo cada vez se hacen más pequeñas hasta que termina por no oscilar y se fija en el 2). Por lo tanto  $\alpha \simeq c$

Si cambiamos el punto base a  $(\mathbb{R} - \{0\}, -2)$  entonces tendremos lo opuesto:  $\alpha \not\simeq c$  (aquí el lazo constante cambia a  $c(s) = -2$  para ser consistente con el cambio de espacio basado). Para ver esto fijamos  $s_0 \in [0, 1]$ . Cualquier homotopía  $H$  entre  $\alpha$  y  $c$  nos induce una función continua  $H_{s_0} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  cuyos valores extremos son:

$$H_{s_0}(1) = c(s_0) = -2 < 1 \leq \alpha(s_0) = H_{s_0}(0).$$

Por lo tanto el Teorema del valor intermedio nos dice que  $H_{s_0}$  debe asumir el valor 0 en algún punto  $t \in [0, 1]$ , pero nuestra homotopía vive en  $\mathbb{R} - \{0\}$ , es decir nunca vale 0; esto es una contradicción. Por lo tanto  $\alpha \not\simeq c$  en  $(\mathbb{R} - \{0\}, -2)$  pero sí son homotópicos en  $(\mathbb{R} - \{0\}, 2)$ . Este ejemplo ilustra porque es importante aclarar en qué espacio basado estamos considerando las homotopías.

**Ejercicio 1.** La relación  $\alpha \simeq \beta$  en  $\Omega(X, x_0)$  es una relación de equivalencia.

*Proof.* Debemos probar tres cosas:

- (Simetría) Afirmamos que para todo lazo  $\alpha$ , tenemos que  $\alpha \simeq \alpha$  mediante la homotopía  $H(s, t) = \alpha(s)$ . Claramente  $H$  es continua porque es independiente del parámetro  $t$  y  $\alpha$  es una función continua sobre la variable  $s$ . Además, para toda  $t$ ,  $H(s, t) = \alpha_t(s) = \alpha(s)$  es un lazo. Por lo tanto  $H$  es una homotopía

- (Reflexividad) Supongamos que  $\alpha \simeq \beta$  para dos lazos en  $\Omega(X, x_0)$  mediante la homotopía  $H$ . Si definimos  $\bar{H}(s, t) := H(s, 1-t)$ , entonces claramente  $\bar{H}$  es continua porque es la composición de la función continua  $t \mapsto 1-t$  y  $H$ , que por hipótesis es continua. Además, para toda  $t$ ,  $\bar{H}(s, t)$  es un lazo, en particular es el lazo  $H(s, 1-t)$ . Por último,  $\bar{H}(s, 0) = H(s, 1) = \beta(s)$  y  $\bar{H}(s, 1) = H(s, 0) = \alpha(s)$ . Por lo tanto  $\bar{H}$  es una homotopía entre  $\beta$  y  $\alpha$ .
- (Transitividad) Sean  $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega(X, x_0)$  tales que  $\alpha \simeq \beta$  y  $\beta \simeq \gamma$  mediante las homotopías  $H$  y  $G$  respectivamente. Definimos una nueva homotopía:

$$F(s, t) := \begin{cases} H(s, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(s, 2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Primero observemos que al dominio de definición de  $F$  (el cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ ) lo estamos partiendo en dos cerrados  $[0, 1] \times [0, \frac{1}{2}]$  y  $[0, 1] \times [\frac{1}{2}, 1]$ , de tal manera que sobre la intersección de esos cerrados (ie.  $[0, 1] \times \{\frac{1}{2}\}$ ), las homotopías  $H$  y  $G$  coinciden:

$$F\left(s, \frac{1}{2}\right) = H(s, 1) = \beta(s) = G(s, 0) = F\left(s, \frac{1}{2}\right).$$

Como  $H$  y  $G$  son continuas, tenemos que  $F$  está bien definida y es continua sobre el cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

Por otro lado, para cada  $t_0 \in [0, 1]$  fija tenemos que  $F(s, t_0)$  es un lazo en  $\Omega(X, x_0)$  porque  $H(s, t_0)$  o  $G(s, t_0)$  es un lazo (la opción depende de si  $t \leq \frac{1}{2}$  o si  $t \geq \frac{1}{2}$ ). Por último verificamos que  $F$  deforma  $\alpha$  en  $\gamma$ :

$$F(s, 0) = H(s, 0) = \alpha(0) \quad \text{y} \quad F(s, 1) = G(s, 1) = \gamma(s).$$

Concluimos que  $\alpha \simeq \gamma$  mediante la homotopía  $F$ .

□

*Nota.* Es útil tener notación para cuando  $\alpha \simeq \beta$  mediante una homotopía  $H$ , entonces simplemente lo denotamos por  $\alpha \simeq_H \beta$

Una vez establecida una relación de equivalencia, el siguiente paso es definir el espacio cociente:

**Definición 4.** El *grupo fundamental* de un espacio basado  $(X, x_0)$  se define como el cociente del espacio de lazos módulo homotopía:

$$\pi_1(X, x_0) := \Omega(X, x_0) / \simeq$$

y sus elementos los denotamos por  $[\alpha]$  para algún representante  $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ .

Inmediatamente podemos identificar un elemento en todo grupo fundamental: en cualquier espacio basado  $(X, x_0)$  siempre existe el lazo constante  $c(s) = x_0$ , por lo tanto  $[c] \in \pi_1(X, x_0)$ . Pronto veremos que el lazo constante va a ser el neutro del grupo fundamental, entonces de ahora en adelante usaremos la notación de teoría de grupos y denotaremos por  $e$  al lazo constante  $e(s) = x_0$  del espacio basado  $(X, x_0)$ .

Se llama “grupo” fundamental porque le podemos definir una estructura de grupo de manera natural: simplemente recorre un lazo y después recorre el otro. Esta operación se llama *concatenación*.

**Definición 5.** Sean  $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$ , definimos la concatenación de lazos como el lazo

$$(\alpha * \beta)(s) := \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2s - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Como  $\alpha * \beta$  está definido por dos funciones continuas sobre dos cerrados cuya unión es el dominio de  $\alpha * \beta$  y valen lo mismo sobre su intersección ( $\alpha(2\frac{1}{2}) = \alpha(1) = x_0 = \beta(0) = \beta(2\frac{1}{2} - 1)$ ), podemos concluir que  $\alpha * \beta$  es continua. Además, como:

$$(\alpha * \beta)(0) = \alpha(0) = x_0 = \beta(1) = (\alpha * \beta)(1),$$

tenemos que  $\alpha * \beta$  es un lazo y la concatenación  $* : \Omega(X, x_0) \times \Omega(X, x_0) \rightarrow \Omega(X, x_0)$  es una operación bien definida.

De hecho, la concatenación respeta homotopías, es decir que si  $\alpha \simeq \alpha'$  y  $\beta \simeq \beta'$  entonces  $(\alpha * \beta) \simeq (\alpha' * \beta')$ . Esto quiere decir que la concatenación en  $\Omega(X, x_0)$  se factoriza a través del grupo fundamental, o en otras palabras, podemos concatenar clases de equivalencias. Esto nos dará una operación bien definida en  $\pi_1(X, x_0)$ .

Es importante pasar a  $\pi_1(X, x_0)$  porque la concatenación no convierte  $\Omega(X, x_0)$  en un grupo porque no tiene un elemento neutro:  $\alpha * e \neq \alpha$  ya que son funciones distintas.

Para probar que  $*$  es una operación bien definida en  $\pi_1(X, x_0)$  supongamos que  $\alpha \simeq_H \alpha'$  y  $\beta \simeq_G \beta'$ . Definimos:

$$F(s, t) := \begin{cases} H(2s, t) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(2s - 1, t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

como nuestro candidato a homotopía entre  $\alpha * \beta$  y  $\alpha' * \beta'$ .

Primero observemos que  $F$  está definido en base a dos funciones continuas sobre dos cerrados que se intersectan en  $\{\frac{1}{2}\} \times [0, 1]$ , pero sobre esta intersección ambas funciones coinciden:

$$H\left(\frac{2}{2}, t\right) = H(1, t) = x_0 = G(0, t) = G\left(\frac{2}{2} - 1, t\right).$$

Por lo tanto  $F$  es continua sobre la unión de ambos cerrados: el cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

Por último, si fijamos  $t_0 \in [0, 1]$  y denotamos por  $H_{t_0}$  y  $G_{t_0}$  a los lazos inducidos por las homotopías con parámetro fijo, obtenemos:

$$F(s, t_0) := \begin{cases} H(2s, t_0) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(2s - 1, t_0) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} = (H_{t_0} * G_{t_0})(s)$$

que ya hemos visto que es un lazo en  $(X, x_0)$ . Por lo tanto  $F$  es una homotopía y así podemos concluir que

$$(\alpha * \beta) \xrightarrow{F} (\alpha' * \beta').$$

Con este resultado podemos definir una operación en el grupo fundamental: si  $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$ , definimos:

$$[\alpha][\beta] := [\alpha * \beta].$$

El argumento anterior prueba que esta operación está bien definida y así proponemos:

**Teorema 1.** *Sea  $(X, x_0)$  un espacio basado. El grupo fundamental  $\pi_1(X, x_0)$  junto con la operación  $*$  (concatenación) es un grupo con neutro  $[e]$ , el lazo constante  $e(s) = x_0$ .*

Para probar esto vamos a requerir de más herramienta, empezando con generalizar la definición de homotopía a cualquier función continua  $f : X \rightarrow Y$  y no necesariamente un lazo.

Antes de seguir, vale la pena enunciar y probar el siguiente resultado:

*Proposición 1.* La asignación

$$(X, x_0) \mapsto \Omega(X, x_0)$$

es un functor  $\Omega : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}_*$  donde el punto base de  $\Omega(X, x_0)$  es el lazo constante  $e_{x_0}$ .

*Proof.* Primero debo establecer qué sucede con los morfismos en  $\mathbf{Top}_*$ . Sea  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  un morfismo de espacios basados y sea  $\alpha \in \Omega(X, x_0)$  un lazo. Observa que  $f \circ \alpha$  es un lazo en  $\Omega(Y, y_0)$  porque (claramente) es continua y además

$$(f \circ \alpha)(0) = f(\alpha(0)) = f(x_0) = y_0 = f(x_0) = f(\alpha(1)) = (f \circ \alpha)(1).$$

Por lo tanto si escribo  $\Omega f(\alpha) := f \circ \alpha$  tengo que  $\Omega f : \Omega(X, x_0) \rightarrow \Omega(Y, y_0)$  es un morfismo de espacios basados.

Si  $\text{Id}_X$  es la identidad sobre  $(X, x_0)$  entonces  $\Omega \text{Id}_X(\alpha) = \text{Id}_x \circ \alpha = \alpha$  y así  $\Omega \text{Id}_X = \text{Id}_{\Omega(X, x_0)}$ . Por último si  $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$  son morfismos entonces:

$$\Omega(g \circ f)(\alpha) = (g \circ f) \circ \alpha = g \circ (f \circ \alpha) = (g \circ \Omega f)(\alpha) = \Omega g(\Omega f)(\alpha) = (\Omega g \circ \Omega f)(\alpha).$$

Con esto acabo. □

## 1.2 Homotopías

**Definición 6.** Sean  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : X \rightarrow Y$  funciones continuas ( $\star$ ) entre espacios topológicos  $X$  y  $Y$ . Decimos que  $f$  y  $g$  son *homotópicas*, denotado por  $f \simeq g$ , si existe una función continua  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ , que llamamos *homotopía*, tal que:

- Para cada parámetro  $t \in [0, 1]$ , la función  $H_t : X \rightarrow Y$  definida por  $H_t(x) := H(x, t)$  es continua ( $\star$ ).
- $H_0 = f$  y  $H_1 = g$ .

Además decimos que la *homotopía es relativa a  $A \subseteq X$*  si para toda  $x \in A$  tenemos que  $f(x) = H_t(x)$  para toda  $t \in [0, 1]$ , es decir la homotopía fija a  $A$ .

*Nota.* La continuidad marcada por una ( $\star$ ) en la definición anterior se puede cambiar a cualquier otra propiedad como ser homeomorfismos, ser morfismo de espacios basados, ser suave, etc.

Además, de ahora en adelante denotaremos  $I = [0, 1]$ . Antes con los lazos, esta notación podía confundirse en la definición de homotopía porque un intervalo es el dominio del lazo mientras que el otro intervalo parametriza la familia de lazos en la deformación.

Escribimos:

$$\text{Map}(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ es continua}\}.$$

Si además quiero que las funciones continuas  $f$  sean de espacios basados, escribo:

$$\text{Map}_*((X, x_0), (Y, y_0)) := \{f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0) \mid f \text{ es continua y } f(x_0) = y_0\}$$

A estos conjuntos se les puede dotar de la topología *compacto-abierto* que es la topología con sub-base: para todo compacto  $K \subseteq X$  y todo abierto  $U \subseteq Y$ ,

$$B_K(U) := \{f \in \text{Map}(X, Y) \mid f[K] \subseteq U\}.$$

Al igual que en el caso de lazos, tenemos:

**Ejercicio 2.** La relación  $\alpha \simeq \beta$  en  $\text{Map}(X, Y)$  es una relación de equivalencia.

*Proof.* Debemos probar tres cosas:

- (Simetría) Afirmamos que para toda  $f \in \text{Map}(X, Y)$ , tenemos que  $f \simeq f$  mediante la homotopía  $H(x, t) = f(x)$ . Claramente  $H$  es continua porque es independiente del parámetro  $t$  y  $f$  es continua. Además  $H_0 = f = H_1$ , por lo tanto  $H$  es una homotopía.
- (Reflexividad) Supongamos que  $f \simeq g$  para  $f, g \in \text{Map}(X, Y)$  mediante la homotopía  $H$ . Si definimos  $\tilde{H}(x, t) := H(x, 1 - t)$ , entonces claramente  $\tilde{H}$  es continua porque es la composición de la función continua  $t \mapsto 1 - t$  y  $H$ , que por hipótesis es continua. Además, para toda  $t$ ,  $\tilde{H}_t(x) = H_{1-t}(x)$ , y así  $\tilde{H}_t$  es continua. Por último,  $\tilde{H}_0 = H_1 = g$  y  $\tilde{H}_1 = H_0 = f$ . Por lo tanto  $\tilde{H}$  es una homotopía entre  $f$  y  $g$ .
- (Transitividad) Sean  $f, g, h \in \text{Map}(X, Y)$  tales que  $f \simeq g$  y  $g \simeq h$  mediante las homotopías  $H$  y  $G$  respectivamente. Definimos una nueva homotopía:

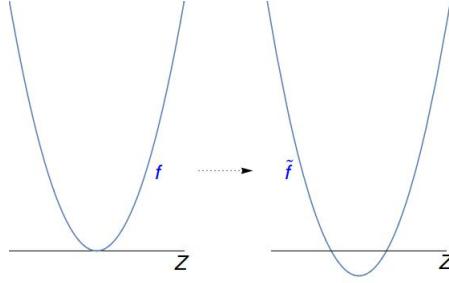
$$F(x, t) := \begin{cases} H(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Primero observemos que al dominio de definición de  $F$  (el espacio  $X \times I$ ) lo estamos partiendo en dos cerrados  $X \times [0, \frac{1}{2}]$  y  $X \times [\frac{1}{2}, 1]$ , de tal manera que sobre la intersección de esos cerrados (ie.  $X \times \{\frac{1}{2}\}$ ), las homotopías  $H$  y  $G$  coinciden:

$$F\left(x, \frac{1}{2}\right) = H(x, 1) = g(x) = G(x, 0) = F\left(x, \frac{1}{2}\right).$$

Como  $H$  y  $G$  son continuas, tenemos que  $F$  está bien definida y es continua sobre  $X \times I$ .

Figure 1.2: Deformación de una función  $f$  para que sea transversal a  $Z$  (aquí está dibujado la imagen de  $f$ ).



Por otro lado, para cada  $t \in I$  fija tenemos que  $F_t$  es una función continua porque es igual a  $H_t$  o  $G_t$  que por hipótesis son continuas (la opción depende de que  $t \leq \frac{1}{2}$  o que  $t \geq \frac{1}{2}$ ). Por último verificamos que:

$$F_0(x) = H(x, 0) = H_0(x) = f(x) \quad \text{y} \quad F_1(x) = G(x, 1) = G_1(x) = h(x).$$

Concluimos que  $f \simeq h$  mediante la homotopía  $F$ .

□

Con el resultado anterior podemos definir: para dos espacios topológicos  $X$  y  $Y$  tenemos:

**Definición 7.**

$$[X, Y] := \text{Map}(X, Y)/\simeq$$

y éste viene con un mapeo natural:  $f \mapsto [f]$ . La ventaja de trabajar con  $[X, Y]$  y no con  $\text{Map}(X, Y)$  es que en general una función continua  $f : X \rightarrow Y$  puede ser complicada de manejar, pero en general se va a poder deformar a una función  $\tilde{f} : X \rightarrow Y$  que sea más fácil de manipular. Un ejemplo clásico de esto es cuando una función  $f$  (suave) no es transversal a una subvariedad  $Z \subset Y$  y lo deformamos para que  $\tilde{f}$  sí sea transversal a  $Z$  (figura 1.2).

La homotopía “preserva composiciones”:

*Proposición 2.* Sean  $X, Y$  y  $Z$  espacios topológicos con funciones continuas  $f, \tilde{f} : X \rightarrow Y$  y  $g, \tilde{g} : Y \rightarrow Z$  tales que  $f \simeq \tilde{f}$  y  $g \simeq \tilde{g}$ . Entonces  $g \circ f \simeq \tilde{g} \circ \tilde{f}$ .

*Proof.* Supongamos que  $F : X \times I \rightarrow Y$  y  $G : Y \times I \rightarrow Z$  son las homotopías  $f \simeq \tilde{f}$  y  $g \simeq \tilde{g}$  respectivamente. Definimos una función  $H : X \times I \rightarrow Z$  mediante la siguiente composición:

$$X \times I \xrightarrow{(F, \text{Id})} Y \times I \xrightarrow{G} Z \quad \text{con} \quad (x, t) \mapsto (F(x, t), t) \mapsto G(F(x, t), t).$$

$H$  es continua porque es composición de funciones continuas (la primera es continua porque la imagen inversa de un abierto  $U \times V$  de  $Y \times I$  tiene como imagen inversa  $F^{-1}[U] \times I$  que es abierto en  $X \times I$  porque  $F$  es continua). Ahora, para  $t \in I$  fija tenemos que  $H_t = G_t(F_t(x))$  que es continua porque  $F_t$  y  $G_t$  lo son. Por último tenemos que  $H_0 = G_0 \circ F_0 = g \circ f$  y  $H_1 = G_1 \circ F_1 = \tilde{g} \circ \tilde{f}$  por hipótesis. Concluimos que  $g \circ f \simeq \tilde{g} \circ \tilde{f}$ . □

Ahora damos un criterio importante y útil para saber cuando dos funciones son homotópicos.

**Teorema 2.** Sea  $X$  un espacio topológico arbitrario y  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$  un subespacio del espacio euclídeo. Si  $f, g : X \rightarrow Y$  son continuas tales que para toda  $x \in X$  el segmento de recta que une los puntos  $f(x)$  y  $g(x)$  en  $\mathbb{R}^n$ , que denotamos por  $\mathcal{L}_x = \overline{f(x)g(x)}$ , está completamente contenido en  $Y$ , entonces  $f \simeq g$ . En símbolos:

$$\forall x \in X, \quad \mathcal{L}_x \subseteq Y \implies f \simeq g.$$

*Proof.* Observemos que podemos parametrizar  $\mathcal{L}_x$  como la trayectoria  $\mathcal{L}_x(t) = (1-t)f(x) + tg(x)$  que empieza en el punto  $f(x)$  y termina en  $g(x)$ . Esto nos induce un candidato a homotopía:

$$H : X \times I \rightarrow Y \quad \text{con} \quad H(x, t) = \mathcal{L}_x(t) = (1-t)f(x) + tg(x).$$

Observemos que por hipótesis  $\mathcal{L}_x \subseteq Y$  entonces  $H$  está bien definida (ie. su imagen efectivamente está contenido en su contradominio). Sólo falta ver que  $H$  es continua.

Podemos descomponer la regla de correspondencia de  $H$  de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{H} & Y \\ \downarrow & & \uparrow + \\ (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\cdot} & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ & & (1-t, f(x), t, g(x)) \mapsto ((1-t)f(x), tg(x)) \end{array}$$

La primera flecha hacia abajo es una función continua porque es el producto cartesiano de funciones continuas de variables independientes (por entrada), en particular de las cuatro funciones continuas  $(x, t) \mapsto 1-t$ ,  $(x, t) \mapsto f(x)$ ,  $(x, t) \mapsto t$  y  $(x, t) \mapsto g(x)$ . Las siguientes dos flechas, correspondientes al producto por escalares y a la suma, representan funciones continuas (cf. ejercicio 3).

Por lo tanto  $H$  continua por ser composición de funciones continuas. Sólo falta verificar que:

$$H_0(x) = (1-0)f(x) + 0 \cdot g(x) = f(x) \quad \text{y} \quad H_1(x) = (1-1)f(x) + 1 \cdot g(x) = g(x).$$

Con esto concluimos que  $H$  es una homotopía entre  $f$  y  $g$ , y que  $f \simeq g$ .  $\square$

*Nota.* Observemos que si  $f(x) = g(x)$ , entonces  $H(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x) = f(x) - tf(x) + tf(x) = f(x) = g(x)$ , entonces la homotopía  $H$  es relativo al conjunto  $A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ .

Los conjuntos convexos  $Y \subset \mathbb{R}^n$  cumplen que cualesquiera dos puntos (en particular  $f(x)$  y  $g(x)$  del teorema anterior) se pueden conectar mediante un segmento de recta completamente contenido en  $Y$ . Por lo tanto los conjuntos convexos cumplen de sobre las hipótesis del teorema anterior y así tenemos el siguiente corolario.

**Corolario 3.** Si  $X$  es un espacio topológico y  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$  es un conjunto convexo, entonces  $f \simeq g$  para cualesquier dos funciones continuas  $f, g : X \rightarrow Y$ . En símbolos:

$$[X, Y] = \{e\}$$

donde  $e : X \rightarrow Y$  es la función constante  $e(x) = y_0$  para cualquier  $y_0 \in Y$ .

Probamos lo que nos hace falta:

**Ejercicio 3.**  $\mathbb{R}^n$  es un espacio vectorial topológico: la suma  $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y el producto por escalares  $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  son continuas.

*Proof.* Como  $\mathbb{R}^n$  es un espacio métrico y su topología usual es la inducida por la métrica euclídea, la base son las bolas abiertas:

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < \varepsilon\}.$$

Para probar que la suma es continua, voy a probar que la imagen inversa  $X := (+)^{-1}[B_\varepsilon(x)]$  es abierta para toda  $\varepsilon > 0$  y para toda  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Sea  $\varepsilon > 0$  y  $x \in \mathbb{R}^n$ . Tomo  $y = (y_1, y_2) \in X$ , es decir que

$$y_1 + y_2 \in B_\varepsilon(x) \iff |x - y_1 - y_2| = \varepsilon - \delta < \varepsilon$$

para alguna  $\delta > 0$

Propongo al abierto  $V := B_{\delta/2}(y_1) \times B_{\delta/2}(y_2) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  como vecindad de  $(y_1, y_2)$  contenida en  $X$ . Si efectivamente  $V \subseteq X$ , entonces  $X$  es abierto y acabo. Para probar que  $V \subseteq X$  calculo: si  $(z_1, z_2) \in V$  entonces  $|y_i - z_i| < \delta/2$  y así:

$$\begin{aligned} |x - z_1 - z_2| &= |x - y_1 + y_1 - z_1 + y_2 - y_2 - z_2| \leq |x - y_1 - y_2| + |y_1 - z_1| + |y_2 - z_2| \\ \therefore |x - z_1 - z_2| &< \varepsilon - \delta + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Concluyo que la suma  $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua.

Ahora aplicaré exactamente el mismo método para probar que el producto por escalares es continua: sea  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon > 0$  y fijo  $(t_0, y_0) \in Y := (\cdot)^{-1}[B_\varepsilon(x)] \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Entonces tengo que

$$t_0 y_0 \in B_\varepsilon(x) \iff |x - t_0 y_0| = \varepsilon - \delta < \varepsilon$$

para una  $\delta > 0$  fija.

Ahora propongo al abierto  $W := B_{\delta_1}(t_0) \times B_{\delta_2}(y_0)$  donde:

$$\delta_1 := \frac{\delta}{|y_0| + 1} \quad \text{y} \quad \delta_2 := \frac{\delta}{\delta + |t_0| + |t_0| |y_0|}.$$

Observa que ambos denominadores son estrictamente positivos por ser suma de un número positivo y otro no-negativo; el numerador de ambos es positivos. Esto quiere decir que  $0 < \delta_1, \delta_2$  son radios posibles de una bola abierta. De aquí sólo debo probar que  $W$  está contenido en  $Y$ :

Sea  $(t, y) \in W$ . Por definición tengo  $|t_0 - t| < \delta_1$  y  $|y_0 - y| < \delta_2$ . Observa que  $|t| = |t_0 - t + t_0| \leq |t_0 - t| + |t_0| < \delta_1 + |t_0|$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} |x - ty| &= |x - t_0 y_0 + t_0 y_0 - ty_0 + ty_0 - ty| \\ &\leq |x - t_0 y_0| + |t_0 y_0 - ty_0| + |ty_0 - ty| \\ &\leq |x - t_0 y_0| + |t_0 - t| |y_0| + |t| |y_0 - y| \\ &< \varepsilon - \delta + \delta_1 |y_0| + \delta_2 \delta_1 + \delta_2 |t_0| \end{aligned}$$

Sustituyo las expresiones para  $\delta_1$  y  $\delta_2$ :

$$\begin{aligned} |x - ty| &< \varepsilon - \delta + \frac{\delta |y_0|}{|y_0| + 1} + \frac{\delta}{|y_0| + 1} \cdot \frac{\delta}{\delta + |t_0| + |t_0| |y_0|} + \frac{\delta |t_0|}{\delta + |t_0| + |t_0| |y_0|} \\ &< \varepsilon - \delta + \delta \frac{|y_0| (\delta + |t_0| + |t_0| |y_0|) + \delta + |t_0| (|y_0| + 1)}{(|y_0| + 1)(\delta + |t_0| + |t_0| |y_0|)}. \end{aligned}$$

Como todo el cociente se hace 1, obtengo:

$$|x - ty| < \varepsilon \implies ty \in B_\varepsilon(x) \implies (t, y) \in Y$$

y así  $W \subset Y$ .

Por lo tanto el producto por escalares es continua. □

### 1.3 $\pi_1(X, x_0)$ es un grupo.

En esta parte demuestro el Teorema 1. Sea  $(X, x_0)$  un espacio basado, abrevio  $\Omega = \Omega(X, x_0)$   $\pi = \pi_1(X, x_0)$  y sea  $[e] \in \pi$  la clase del lazo constante  $e \in \Omega$ . Defino la operación  $[\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha * \beta]$ . Para probar que la pareja  $(\pi, \cdot)$  es un grupo, hay que probar que cumple las siguientes tres propiedades:

1. La operación  $*$  es asociativa.
2. El elemento  $[e]$  cumple que  $[\alpha][e] = [\alpha] = [e][\alpha]$  para toda  $[\alpha] \in \pi$ .
3. Para todo elemento  $[\alpha] \in \pi$  existe un  $[\alpha]^{-1} \in \pi$  tal que  $[\alpha][\alpha]^{-1} = [e] = [\alpha]^{-1}[\alpha]$ .

Para la primera propiedad, voy a demostrar asociatividad generalizada:

$$[\alpha_1] \cdots [\alpha_n] = ([\alpha_1] \cdots [\alpha_r]) \cdot ([\alpha_{r+1}] \cdots [\alpha_n]) \quad \forall [\alpha_i] \in \pi, \forall r \in \{1, \dots, n-1\}. \quad (1.1)$$

Llevado al espacio de lazos, la asociatividad se escribe como:

$$\alpha_1 * \cdots * \alpha_n \simeq (\alpha_1 * \cdots * \alpha_r) * (\alpha_{r+1} * \cdots * \alpha_n) \quad \forall \alpha_i \in \Omega, \forall r \in \{1, \dots, n-1\}. \quad (1.2)$$

Para probar esto primero necesito definir la concatenación para más de dos lazos:

**Definición 8.** Sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_n : I \rightarrow X$  funciones continuas (ie. *trayectorias*) tales que  $\alpha_i(0) = \alpha_{i-1}(1)$ , es decir que el punto final de una trayectoria es el punto inicial de la que sigue. Defino:

$$(\alpha_1 * \dots * \alpha_n)(s) := \begin{cases} \alpha_1(ns) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{n} \\ \alpha_2(ns - 1) & \text{si } \frac{1}{n} \leq s \leq \frac{2}{n} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_r(ns - (r-1)) & \text{si } \frac{r-1}{n} \leq s \leq \frac{r}{n} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n(ns - (n-1)) & \text{si } \frac{n-1}{n} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Observa que la condición  $(r-1)/n \leq s \leq r/n$  es equivalente a  $0 \leq sn - (r-1) \leq 1$ , entonces cada  $\alpha_r(ns - (r-1))$  está bien definida. Además, en cada intersección de los intervalos  $[(r-1)/n, rn]$ , ie. en los puntos  $s = r/n$ , ambas funciones  $\alpha_{r+1}$  y  $\alpha_r$  coinciden:

$$\alpha_{r+1}\left(\frac{r}{n}\right) = \alpha_{r+1}\left(n\frac{r}{n} - r\right) = \alpha_{r+1}(0) = \alpha_r(1) = \alpha_r\left(n\frac{r}{n} - (r-1)\right) = \alpha_r\left(\frac{r}{n}\right).$$

Por lo tanto  $\alpha_1 * \dots * \alpha_n$  es continua.

Para probar (1.2), voy a “reparametrizar” la curva  $\alpha_1 * \dots * \alpha_n$  para que la igualdad se siga inmediatamente de la nueva fórmula.

Considera la siguiente función  $f : I \rightarrow I$ :

$$f_r(s) := \begin{cases} \frac{2rs}{n} & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 2s - 1 + \frac{2r}{n}(1-s) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (1.3)$$

Está definida mediante funciones lineales que coinciden en la intersección de sus dominios:

$$\frac{2r(1/2)}{n} = \frac{r}{n} = 2\frac{1}{2} - 1 + \frac{2r}{n}\left(1 - \frac{1}{2}\right).$$

Por lo tanto  $f_r$  es continua para  $r \in \{1, \dots, r-1\}$ .

Ahora, como  $I \subset \mathbb{R}$  es convexo, el Teorema 2 me garantiza que  $f_r$  es homotópica a cualquier función continua  $f : I \rightarrow I$ , en particular la identidad  $\text{Id}_I$ . Por lo tanto  $f_r \simeq \text{Id}_I$ . Además, como  $f_r(0) = 0$  y  $f_r(1) = 1$  son los únicos dos puntos donde coinciden  $f_r$  y  $\text{Id}_I$  (la intersección de sus gráficas es  $A = \{0, 1\}$ ), entonces la homotopía entre  $f_r$  y  $\text{Id}_I$  es relativo a  $A$ .

Por el momento asume que  $(\alpha_1 * \dots * \alpha_n) \circ f_r = (\alpha_1 * \dots * \alpha_r) * (\alpha_{r+1} * \dots * \alpha_n)$  (esto lo probaré en el ejercicio 4). Como  $f \simeq \text{Id}_I$ , la proposición 2 garantiza que:

$$(\alpha_1 * \dots * \alpha_n) \circ \text{Id}_I \simeq (\alpha_1 * \dots * \alpha_n) \circ f = (\alpha_1 * \dots * \alpha_r) * (\alpha_{r+1} * \dots * \alpha_n).$$

Esta expresión es justo la fórmula (1.2) de la cual concluyo la asociatividad de  $(\pi, \cdot)$ . Pruebo lo que me falta:

**Ejercicio 4.** Sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_n : I \rightarrow X$  trayectorias tales que  $\alpha_r(0) = \alpha_{r-1}(1)$ . Si  $f_r : I \rightarrow I$  está definida como en 1.3, entonces:

$$(\alpha_1 * \dots * \alpha_n) \circ f_r = (\alpha_1 * \dots * \alpha_r) * (\alpha_{r+1} * \dots * \alpha_n).$$

*Proof.*

$$0 \leq s \leq \frac{1}{2} \implies 2s = \frac{n}{r}f_r(s), \quad \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \implies 2s - 1 = f_r(s) - \frac{2r}{n}(1-s)$$

También escribo explícitamente la definición de  $\alpha_{r+1} * \dots * \alpha_n$ :

$$(\alpha_r * \dots * \alpha_n)(s) := \begin{cases} \alpha_r((n-r)s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{n-r} \\ \alpha_{r+1}((n-r)s - 1) & \text{si } \frac{1}{n-r} \leq s \leq \frac{2}{n-r} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{r+k'}((n-r)s - (k'-1)) & \text{si } \frac{k'-1}{n-r} \leq s \leq \frac{k'}{n-r} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n((n-r)ns - ((n-r)-1)) & \text{si } \frac{(n-r)-1}{n-r} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

donde  $r \in \{1, \dots, n-1\}$  y  $k \in \{1, \dots, n-r\}$

Para probar el ejercicio, evalúo ambos lados en  $s \in [0, 1]$ . Para facilitar la cuenta, divido en dos casos: Primero supongo que  $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$ . Entonces el lado izquierdo se vuelve:

$$((\alpha_1 * \dots * \alpha_n) \circ f_r)(s) = (\alpha_1 * \dots * \alpha_n) \left( \frac{2rs}{n} \right) = \alpha_k \left( n \frac{2rs}{n} - (k-1) \right) = \alpha_k (2rs - k + 1)$$

donde  $k \in \{1, \dots, n\}$  es un elemento tal que

$$\frac{k-1}{n} \leq \frac{2rs}{n} \leq \frac{k}{n} \iff \frac{k-1}{r} \leq 2s \leq \frac{k}{r} \quad (1.4)$$

Ahora, como  $s \leq 1/2$ , tengo:

$$((\alpha_1 * \dots * \alpha_r) * (\alpha_{r+1} * \dots * \alpha_n))(s) = (\alpha_1 * \dots * \alpha_r)(2s).$$

Como  $2s$  cumple (1.4), puedo calcular explícitamente la función anterior:

$$(\alpha_1 * \dots * \alpha_r)(2s) = \alpha_k (r(2s) - (k-1)) = \alpha_k (2rs - k + 1)$$

y coincide con  $((\alpha_1 * \dots * \alpha_n) \circ f_r)(s)$ .

En el segundo caso, supongo que  $1/2 < s \leq 1$  y hago el mismo proceso:

$$\begin{aligned} ((\alpha_1 * \dots * \alpha_n) \circ f_r)(s) &= (\alpha_1 * \dots * \alpha_n) \left( 2s - 1 + \frac{2r}{n}(1-s) \right) \\ &= \alpha_k \left( n \left( 2s - 1 + \frac{2r}{n}(1-s) \right) - (k-1) \right) \\ &= \alpha_k (2ns - n + 2r(1-s) - k + 1) \end{aligned} \quad (1.5)$$

donde  $k \in \{1, \dots, n\}$  es el único tal que

$$\frac{k-1}{n} \leq 2s - 1 + \frac{2r}{n}(1-s) < \frac{k}{n}.$$

Si le restas  $(2r/n)(1-s)$  a la desigualdad, separas  $2r = r + r$  y factorizas  $n-r$ , llegas a que:

$$\frac{k-1}{n} \leq 2s - 1 + \frac{2r}{n}(1-s) \leq \frac{k}{n} \iff \frac{k-r-1}{n-r} \leq 2s - 1 \leq \frac{k-r}{n-r} \quad (1.6)$$

Si haces  $k' = k-r$  (o equivalentemente  $k'+r=k$ ), entonces  $(\alpha_{r+1} * \dots * \alpha_n)(2s-1)$  se evalúa en la trayectoria  $\alpha_{r+k'}$ . Por lo tanto:

$$\begin{aligned} ((\alpha_1 * \dots * \alpha_r) * (\alpha_{r+1} * \dots * \alpha_n))(s) &= (\alpha_{r+1} * \dots * \alpha_n)(2s-1) \\ &= \alpha_{r+k'} \left( (n-r)(2s-1) - (k'-1) \right) \\ &= \alpha_k \left( 2ns - n - 2rs + 2r - (k-r-1) \right) \\ &= \alpha_k (2ns - n + 2r(1-s) - k + 1) \end{aligned}$$

Esto coincide con (1.5) y termino. □

Para probar que  $(\pi, \cdot)$  cumple las otras dos propiedades, usaré un método similar al que acabo de usar: Sea  $e = e_{x_0}$  el lazo constante  $e(s) = x_0 \in X$  y sea  $\alpha \in \Omega$  arbitrario. Quiero probar que:

$$[\alpha][e] = [\alpha] = [e][\alpha] \iff \alpha * e \simeq \alpha \simeq e * \alpha. \quad (1.7)$$

Defino la función  $f_e : I \rightarrow I$  como

$$f_e(s) := \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 2s-1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}.$$

Observa que  $0 = 2(1/2) - 1$  entonces  $f_e$  está definido por dos funciones lineales que coinciden en  $s = 1/2$ . Por lo tanto  $f_e$  es continua y por el Teorema 2 tengo que  $f_e \simeq \text{Id}_I$ . Uso la proposición 2 para deducir

$$\alpha \circ f_e \simeq \alpha \circ \text{Id}_I = \alpha.$$

Por último, calculo

$$(\alpha \circ f_e)(s) = \begin{cases} \alpha(0) = x_0 & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2s - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} = (e * \alpha)(s)$$

para concluir que  $e * \alpha \simeq \alpha$  y así  $[e][\alpha] = [\alpha]$ . Para probar la igualdad en el otro orden, has una calca de esta prueba pero usando:

$${}_e f(s) := \begin{cases} 2s & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}.$$

*Nota.* Si  $\alpha : I \rightarrow X$  es una trayectoria que empieza en  $\alpha(0) = x_0$  y termina en  $\alpha(1) = x_1$ , entonces

$$e_{x_0} * \alpha \simeq \alpha \simeq \alpha * e_{x_1}.$$

Observa que  $\alpha * e_{x_0}$  y  $e_{x_1} * \alpha$  no están bien definidas en  $s = 1/2$  y por lo tanto no representan funciones al menos de que  $x_0 = x_1$ , o en palabras:  $\alpha$  es un lazo.

Lo último que debo probar es la existencia de inversos en  $\pi$ . Si  $\alpha$  es un lazo, el candidato natural a ser su inverso bajo la concatenación, es simplemente el lazo en sentido contrario: para toda  $\alpha \in \Omega$ , defino:

$$\bar{\alpha}(s) = \alpha(1 - s).$$

Claramente  $\bar{\alpha}$  es un lazo y además si  $\alpha \simeq \beta$  mediante una homotopía  $H$ , entonces  $\bar{\alpha} \simeq \bar{\beta}$  mediante la homotopía  $\bar{H}(s, t) := H(1 - s, t)$ . Como  $t$  se mantiene igual para  $H$  y  $\bar{H}$ , si  $H$  es relativo a  $A \subseteq I$ , entonces también lo será  $\bar{H}$ .

Ahora sigo la misma ruta que antes. Defino

$$\bar{f}(s) := \begin{cases} 2s & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 2(1 - s) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}.$$

Claramente en  $s = 1/2$  coinciden ambas funciones lineales. Por lo tanto  $\bar{f}$  es continua y cumple que  $\bar{f} \simeq 0$  donde  $0 : I \rightarrow I$  es la función constante 0 porque  $\bar{f}(0) = 0 = \bar{f}(1)$ . Por lo tanto  $\alpha \circ \bar{f} \simeq \alpha \circ 0 = e$  ya que  $(\alpha \circ 0)(s) = \alpha(0) = x_0$ .

Por último calculo

$$(\alpha \circ \bar{f})(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2(1 - s)) = \bar{\alpha}(2s - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} = (\alpha * \bar{\alpha})(s).$$

Con esto concluyo que  $\alpha * \bar{\alpha} \simeq e$  y así  $[\alpha][\bar{\alpha}] = [e]$ . Para la igualdad en el otro orden, sólo observa que:

$$(\bar{\alpha} \circ \bar{f})(s) = \begin{cases} \bar{\alpha}(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \bar{\alpha}(2(1 - s)) = \alpha(2s - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} = (\bar{\alpha} * \alpha)(s).$$

Por lo tanto si defino  $[\alpha]^{-1} := [\bar{\alpha}]$  obtengo la existencia de inversos en  $\pi$ :

$$\forall [\alpha] \in \pi \quad \exists [\alpha]^{-1} = [\bar{\alpha}] \in \pi \quad \text{tal que} \quad [\alpha][\alpha]^{-1} = [\alpha][\bar{\alpha}] = [e] = [\bar{\alpha}][\alpha] = [\alpha]^{-1}[\alpha]. \quad (1.8)$$

Con esto termino la prueba del Teorema 1:

$$(\pi_1(X, x_0), \cdot) \quad \text{con} \quad [\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha * \beta] \quad \text{es un grupo.}$$

## 1.4 El funtor $(X, x_0) \mapsto \pi_1(X, x_0)$

Como  $\pi_1(X, x_0)$  es un grupo, pertenece como objeto a la categoría **Grupos** cuyos objetos son grupos y cuyos morfismos son los homomorfismos de grupo. Sea anotar que

$$\mathcal{F} : \mathbf{Top}_* \longrightarrow \mathbf{Grupos} \quad \text{con} \quad \mathcal{F}(X, x_0) = \pi_1(X, x_0)$$

sea un funtor. Para esto debemos definir un homomorfismo de grupos  $\mathcal{F}(f)$  para cada morfismo de espacios basados  $f$ .

Sea  $f \in \text{Hom}((X, x_0), (Y, y_0))$ , es decir  $f : X \rightarrow Y$  es continua y  $f(x_0) = y_0$ . Entonces si  $\alpha \in \Omega(X, x_0)$  es un lazo, tendremos que  $f \circ \alpha$  es un lazo en  $(Y, y_0)$ . En efecto,  $f \circ \alpha$  es continua y  $(f \circ \alpha)(0) = f(\alpha(0)) = f(x_0) = f(\alpha(1))(f \circ \alpha)(1)$ . Por lo tanto  $a \mapsto f \circ \alpha$  es una función bien definida entre  $\Omega(X, x_0)$  y  $\Omega(Y, y_0)$ .

Para ver que esa función induce una función entre los grupos fundamentales, hay que probar que la función respeta homotopías, es decir

$$\alpha \simeq \beta \implies (f \circ \alpha) \simeq (f \circ \beta).$$

Esto es consecuencia directa de la proposición 2. Por lo tanto

$$f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0) \quad \text{con} \quad f_{\#}([\alpha]) = [f \circ \alpha]$$

es una función bien definida. Observa que:

$$f_{\#}([\alpha][\beta]) = f_{\#}([\alpha * \beta]) = [f \circ (\alpha * \beta)] = [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] = [f \circ \alpha][f \circ \beta] = f_{\#}([\alpha])f_{\#}([\beta])$$

donde la tercera igualdad se da porque los lazos son iguales:

$$\begin{aligned} (f \circ (\alpha * \beta))(s) &= \begin{cases} f(\alpha)(2s) = f_{\#}(\alpha)(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ f(\beta)(2s - 1) = f_{\#}(\beta)(2s - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \\ &= (f_{\#}(\alpha) * f_{\#}(\beta))(s) = ((f \circ \alpha) * (f \circ \beta)). \end{aligned}$$

Además  $f_{\#}([e_{x_0}]) = [f \circ e_{x_0}] = [e_{y_0}]$  porque  $f(x_0) = y_0$ .

Por lo tanto  $f_{\#}$  es un homomorfismo de grupos y así  $\mathcal{F}$  está bien definido para ser funtor, sólo hacen falta dos propiedades.

Claramente

$$(\text{Id}_X)_{\#}([\alpha]) = [\text{Id}_X \circ \alpha] = [\alpha],$$

entonces  $(\text{Id}_X)_{\#}$  es la función identidad en  $\pi_1(X, x_0)$ . Por último, si  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  y  $g : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$  son morfismos de espacios basados, entonces

$$(g \circ f)_{\#}([\alpha]) = [(g \circ f) \circ \alpha] = [g \circ (f \circ \alpha)] = g_{\#}([f \circ \alpha]) = g_{\#}(f_{\#}([\alpha])) = (g_{\#} \circ f_{\#})([\alpha])$$

y así concluyo que

$$(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}$$

Todo esto prueba:

**Teorema 4.** *La asignación  $\mathcal{F} : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grupos}$  definido por*

$$(X, x_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi_1(X, x_0) \quad \left\{ (X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \right\} \longmapsto \left\{ \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_{\#}} \pi_1(Y, y_0) \right\}$$

*es un funtor (covariante).*

La importancia de este teorema es que ahora tenemos una forma de estudiar los grupos fundamentales. El teorema introduce un concepto importante para clasificar espacios:

**Corolario 5.** El grupo fundamental de un espacio basado es un invariante topológico, es decir, si  $(X, x_0)$  y  $(Y, y_0)$  son espacios basados, entonces:

$$(X, x_0) \approx (Y, y_0) \implies \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$$

*Proof.* Los isomorfismos de una categoría se preservan bajo funtores, más precisamente si  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  es un isomorfismo en  $\mathbf{Top}_*$  (ie.  $f : X \rightarrow Y$  es un homeomorfismo y  $f(x_0) = y_0$ ), entonces  $\mathcal{F}(f) = f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$  es un isomorfismo.  $\square$

*Nota.* Este corolario nos da un criterio útil para saber cuando dos espacios basados no son homeomorfos: simplemente niega la implicación del corolario para escribir

$$\pi_1(X, x_0) \not\cong \pi_1(Y, y_0) \implies (X, x_0) \not\approx (Y, y_0).$$

Observa que el functor del grupo fundamental toma como objetos espacios basados, no sólo espacios topológicos. Esto nos restringe un poco la información que podemos deducir al calcular un grupo fundamental de un espacio. Esto se nota especialmente en el caso  $(X, x_0) \neq (X, x_1)$  ya que los espacios topológicos pueden ser el mismo. Por suerte hay un (pseudo) remedio para esto:

**Ejercicio 5.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $x_0, x_1 \in X$  tales que existe una trayectoria  $\sigma : I \rightarrow X$  tal que  $\sigma(0) = x_0$  y  $\sigma(1) = x_1$ . Entonces:

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$$

mediante el isomorfismo  $\hat{\sigma}([\alpha]) = [\bar{\sigma} * \alpha * \sigma]$

*Proof.* Primero verifico que  $\hat{\sigma}$  está bien definida. Observemos que, como  $\sigma$  es continua, entonces  $\bar{\sigma} * \alpha * \sigma$  también lo es. Observa que

$$(\bar{\sigma} * \alpha * \sigma)(0) = \bar{\sigma}(0) = x_1 = \sigma(1) = (\bar{\sigma} * \alpha * \sigma)(1).$$

Por lo tanto  $\hat{\sigma}([\alpha]) \in \pi_1(X, x_1)$ . Además, como  $\hat{\sigma}$  está definida para clases de equivalencia hay que probar que respeta homotopías:

Sean  $\alpha \simeq \beta$  lazos en  $(X, x_0)$ . Entonces  $\alpha * \sigma \simeq \beta * \sigma$ . Esto se parece mucho al resultado que usé para probar que la operación  $[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta]$  está bien definida; la diferencia es que  $\sigma$  es una trayectoria en lugar de un lazo. Sin embargo la homotopía es la misma:

Si  $\alpha \simeq_H \beta$  (relativo a  $A = \{0, 1\}$ ) entonces  $\alpha * \sigma \simeq_F \beta * \sigma$  donde

$$F(s, t) := \begin{cases} H(2s, t) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \sigma(2s - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}.$$

Volvemos a aplicar este resultado a  $(\alpha * \sigma)$  y concluimos que  $\bar{\sigma} * \alpha * \sigma \simeq \bar{\sigma} * \beta * \sigma$ . Por lo tanto

$$\hat{\sigma}([\alpha]) = [\bar{\sigma} * \alpha * \sigma] = [\bar{\sigma} * \beta * \sigma] = \hat{\sigma}([\beta])$$

cuando  $\alpha \simeq \beta$  y así  $\hat{\sigma}$  está bien definido.

Para probar que es un homomorfismo de grupos, hay que probar la siguiente igualdad:

$$\hat{\sigma}([\alpha][\beta]) = \hat{\sigma}([\alpha])\hat{\sigma}([\beta]).$$

Aplico la asociatividad del grupo fundamental y la existencia de neutros para concluir que:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}([\alpha][\beta]) &= \hat{\sigma}([\alpha * \beta]) = [\bar{\sigma} * \alpha * \beta * \sigma] = [\bar{\sigma}][\alpha][\beta][\sigma] = [\bar{\sigma}][\alpha]\left([\sigma][\sigma]^{-1}\right)[\beta][\sigma] \\ &= [\bar{\sigma}][\alpha]\left([\sigma][\bar{\sigma}]\right)[\beta][\sigma] = \left([\bar{\sigma}][\alpha][\sigma]\right)\left([\bar{\sigma}][\beta][\sigma]\right) \\ &= \hat{\sigma}([\alpha])\hat{\sigma}([\beta]). \end{aligned}$$

$\square$

El funtor  $\mathfrak{F}$  preserva productos:

*Proposición 3.* Sea  $\{(X_j, x_j)\}_{j \in J}$  una familia de espacios basados, entonces las proyecciones  $p_i : \Pi(X_j, x_j) \rightarrow (X_i, x_i)$  inducen un isomorfismo natural

$$\pi_n\left(\prod_{j \in J}(X_j, x_j), \star\right) \cong \prod_{j \in J} \pi_n(X_j, x_j)$$

donde  $\star = \{x_j\}_{j \in J}$  es el punto base canónico de  $\Pi(X_j, x_j)$ .

*Proof.* Aplico el funtor  $\mathfrak{F}$  a la familia  $\{p_i : \Pi(X_j, x_j) \rightarrow (X_i, x_i)\}_{i \in J}$  para obtener una familia de homomorfismos de grupos

$$\{(p_i)_\# : \pi_n\left(\prod_{j \in J}(X_j, x_j), \star\right) \longrightarrow \pi_n(X_i, x_i)\}_{i \in J}.$$

Por la propiedad universal del producto en **Grupos** existe un único homomorfismo  $\Phi : \pi_n(\Pi(X_j, x_j)) \rightarrow \pi_n(X_i, x_i)$  a través del cual se factorizan todas las proyecciones  $(p_i)_\#$ :

$$\begin{array}{ccc} (\prod(X_j, x_j), \star) & \xrightarrow{\pi_n} & \pi_n(\prod(X_j, x_j), \star) \xrightarrow{\Phi} \prod \pi_n(X_j, x_j) \\ p_i \downarrow & & (p_i)_\# \downarrow & q_i \swarrow & q_i \circ \Phi = (p_i)_\# \\ (X_i, x_i) & \xrightarrow{\pi_n} & \pi_n(X_i, x_i) & & \end{array}$$

donde las  $q_i$ 's son las proyecciones naturales del producto en **Grupos**. El homomorfismo  $\Phi$  es un isomorfismo:

( $\Phi$  es sobre) Sea  $\alpha = \{[\alpha_j]\}_{j \in J} \in \pi_n(\prod(X_j, x_j))$  un elemento arbitrario. Claramente induce una familia de funciones continuas  $\{\alpha_j : \mathbb{S}^n \rightarrow X_j\}$ . En **Top**, el producto cartesiano es el producto, entonces existe un único morfismo  $\tilde{\alpha} : \mathbb{S}^n \rightarrow \prod X_j$  que hace commutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \prod X_j \\ & \searrow \alpha_i & \swarrow p_i \\ & X_i & \end{array}$$

Observa que  $[\tilde{\alpha}] \in \pi_n(\prod X_j, \star)$ , entonces:

$$\Phi[\tilde{\alpha}] = \{(q_i \circ \Phi)[\tilde{\alpha}]\}_{i \in J} = \{(p_i)_\#[\tilde{\alpha}]\}_{i \in J} = \{[p_i \circ \tilde{\alpha}]\}_{i \in J} = \{[\alpha_i]\}_{i \in J} = \alpha$$

Por lo tanto  $[\tilde{\alpha}]$  está en la preimagen de  $\alpha$  y así  $\Phi$  es sobre.

( $\Phi$  es inyectiva) Sea  $[\beta] \in \pi_n(\prod X_j, \star)$  tal que  $\Phi[\beta] = 1$ , es decir, cada coordenada de  $\Phi[\beta]$  es la clase del lazo constante  $e_i : \mathbb{S}^n \rightarrow X_i$ . Entonces:

$$\{[e_i]\}_{i \in J} = \Phi[\beta] = \{[p_i \circ \beta]\}_{i \in J}$$

o equivalentemente  $e_i \simeq p_i \circ \beta$  para toda  $i \in J$ .

Esto quiere decir que existe una familia de homotopías  $H_i : \mathbb{S}^n \times I \rightarrow X_i$  tales que  $H_i(s, 0) = (p_i \circ \beta)(s)$  y  $H_i(s, 1) = e_i(s) = x_i$ . Además, como cada  $p_i \circ \beta$  es basada en el punto  $\bullet = (1, 0, \dots, 1) \in \mathbb{S}^n$ , entonces cada homotopía es basada:  $H_i(\bullet, t) = x_i$  para toda  $t \in I$ .

Por lo tanto  $\{H_i\}_{i \in J}$  es una familia de morfismos en **Top\***. Por la propiedad universal del producto, existe un único morfismo  $H : \mathbb{S}^n \times I \rightarrow \prod X_j$  tal que hace commutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n \times I & \xrightarrow{H} & \prod X_j \\ & \searrow H_i & \swarrow p_i \\ & X_i & \end{array}$$

Observa que

$$\begin{aligned} H_0(s) &= \{p_i(H(s, 0))\}_{i \in J} = \{H_i(s, 0)\}_{i \in J} = \{(p_i \circ \beta)(s)\}_{i \in J} = \beta(s) \\ H_1(s) &= \{p_i(H(s, 1))\}_{i \in J} = \{H_i(s, 1)\}_{i \in J} = \{e_i(s)\}_{i \in J} = e_\star(s) \end{aligned}$$

donde  $e_\star : \mathbb{S}^n \rightarrow \Pi X_j$  es el lazo constante. Entonces  $H$  es una homotopía entre las funciones  $\beta$  y  $e_\star$ . Por lo tanto  $[\beta] = [e_\star] = 1 \in \pi_n(\Pi X_j)$  y  $\Phi$  es inyectiva.

□

## 1.5 Generalización del grupo fundamental a otras dimensiones

Para poder generalizar el grupo fundamental a otras dimensiones, necesito encontrar otra definición equivalente de la cual resulte obvio generalizar a otras dimensiones. Para este fin, considera el siguiente argumento:

Un lazo  $\alpha \in \Omega(X, x_0)$  es una función continua  $\alpha : I \rightarrow X$  tal que  $\alpha(0) = x_0 = \alpha(1)$ . Esto significa que  $\alpha$  se factoriza a través de  $I/\partial I$ . Más precisamente:

La función  $\nu : I \rightarrow \mathbb{S}^1$  definido por  $\nu(t) = e^{2\pi i t}$  es continua y sobre. Además, para toda  $U \subseteq \mathbb{S}^1$  se tiene

$$U \text{ es abierto} \iff \nu^{-1}[U] \text{ es abierto.}$$

Por lo tanto  $\nu$  es una proyección de espacios topológicos.

Esto quiere decir que  $\mathbb{S}^1$  tiene la topología cociente: sobre  $I$  definimos la siguiente relación de equivalencia:

$$s \sim t \iff \nu(s) = \nu(t).$$

Esta relación parte el conjunto en todos los singuletes  $\{s\}_{s \neq 0,1}$  y en  $\partial I = \{0, 1\}$ . Por lo tanto el espacio de clases cumple

$$\frac{I}{\partial I} \approx \mathbb{S}^1.$$

Además, cualquier función continua  $\alpha : I \rightarrow X$  tal que  $\alpha(0) = \alpha(1)$ , ie. un lazo se factoriza a través de  $\nu$ :

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \nu \downarrow & \nearrow \tilde{\alpha} & \\ \frac{I}{\partial I} & & \end{array} \quad \text{con } \alpha = \tilde{\alpha} \circ \nu$$

Por lo tanto hay una biyección natural

$$[(\mathbb{S}^1, 1), (X, x_0)] \xrightarrow{\Phi} \pi_1(X, x_0) \quad \text{con} \quad [\beta] \longmapsto [\beta \circ \nu]$$

con inverso  $[\alpha] \mapsto [\tilde{\alpha}]$ . Está bien definido por la proposición 2:  $\alpha \simeq \beta \implies \alpha \circ \nu \simeq \beta \circ \nu$ .

Además, esta biyección es un homeomorfismo.....

*Proposición 4.* Si  $\Omega(X, x_0)$  y  $\text{Map}_*((\mathbb{S}^1, 1), (X, x_0))$  tienen la topología compacto-abierta; si  $\pi_1(X, x_0)$  y  $[(\mathbb{S}^1, 1), (X, x_0)]$  tienen sus correspondientes topologías cociente, entonces

$$[(\mathbb{S}^1, 1), (X, x_0)] \approx \pi_1(X, x_0)$$

*Proof.* Primero pruebo que  $\Phi$  es continuo. Sea  $U \subseteq \pi_1(X, x_0)$ , entonces su preimagen  $\bar{U}$  en

$$\Omega(X, x_0) = \{I \xrightarrow{\alpha} X \mid \alpha \text{ es continua y } \alpha(0) = \alpha(1)\},$$

con la topología de subespacio de  $C^0(I, Y)$ , es abierto, es decir es una unión arbitraria de intersecciones finitas de los abiertos  $B_K(U)$ :

$$\bar{U} = \bigcup_{j \in J} B_{K_j}(U_j)$$

con  $K_j \subseteq I$  compacto y  $U_j \subseteq Y$  abierto. Quiero probar que la preimagen bajo  $\Phi$  de  $\bar{U}$  es un abierto. Como  $\Phi$  es biyectiva, basta probar esto para  $\bar{U} = B_K(U)$  (esto es porque la)..

□

*Nota.* Puedo intercambiar  $(\mathbb{S}^1, 1)$  por  $(I/\partial I, \star)$  donde  $\star \in I/\partial I$  es la clase de equivalencia  $[\partial I]$  ya que son homeomorfos como espacios basados.

Este resultado motiva la siguiente definición:

**Definición 9.** El grupo fundamental de dimensión  $n$  de un espacio basado  $(X, x_0)$  se define como

$$\pi_n(X, x_0) := [(\mathbb{S}^n, 1), (X, x_0)].$$

Primero analizamos qué sucede cuando  $n = 0$  ya que este caso es distinto a los demás.

Recuerda que  $\mathbb{S}^0 = \{x \in \mathbb{R} : |x| = 1\} = \{-1, 1\}$ . Llamaré a estos puntos de otra manera para que las cuentas sean más nítidas: sean  $1 = \star$  y  $-1 = \bullet$ . Con esta notación puedo escribir:

$$M := \text{Map}_* \left( (\mathbb{S}^0, \star), (X, x_0) \right) = \{\mathbb{S}^0 \xrightarrow{f} X \mid f \text{ es continua y } f(\star) = x_0\}.$$

Entonces la única información que nos falta saber para determinar a  $f$  es el valor  $f(\bullet) \in X$ . Esto nos induce la función:

$$M \xrightarrow{\Psi} X \quad \text{con} \quad f \longmapsto f(\bullet).$$

Observa que si  $f, g \in M$  son homotópicos, existe una función continua  $H : \{\star, \bullet\} \times I \rightarrow X$  donde  $H_0 = f$  y  $H_1 = g$ . Esto significa que la función  $F_\bullet : I \rightarrow X$  definida por  $F_\bullet(t) = H(\bullet, t)$ , es continua. Además  $F_\bullet(0) = H_0(\bullet) = f(\bullet) = \Psi(f)$  y  $F_\bullet(1) = H_1(\bullet) = g(\bullet) = \Psi(g)$ . Es decir  $F_\bullet$  es una trayectoria de  $\Psi(f)$  a  $\Psi(g)$  en  $X$ . Decimos que  $\Psi(f)$  y  $\Psi(g)$  son *conectables por trayectorias*.

Con esto podemos definir una relación de equivalencia natural en  $X$ : para todas  $x, y \in X$

$$\begin{aligned} x \sim y &\iff x \text{ y } y \text{ son conectables por trayectorias} \\ &\iff \exists \sigma : I \rightarrow X \text{ continua tal que } \sigma(0) = x \text{ y } \sigma(1) = y. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el argumento del párrafo anterior nos dice que:

$$f \simeq g \implies \Psi(f) \sim \Psi(g)$$

y así, puedo definir  $\Psi$  para clases de equivalencia:

$$\Psi([f]_\sim) = [\Psi(f)]_\sim \quad \text{está bien definida.}$$

Debería de cambiar de notación a algo como  $\hat{\Psi}$ , pero no creo que cause problemas. Observa que  $[f]_\sim \in M/\sim$  que es precisamente  $\pi_0(X, x_0)$ . Por lo tanto  $\Psi : \pi_0(X, x_0) \rightarrow X/\sim$ .

Pruebo que  $\Psi$  es biyectiva:

Para toda  $[x]_\sim \in X/\sim$ , toma  $f_x \in M$  definida por  $f_x(\bullet) = x$ . Claramente

$$\Psi([f_x]_\sim) = [\Psi(f_x)]_\sim = [f_x(\bullet)]_\sim = [x]_\sim,$$

y así  $\Psi$  es sobreyectiva.

Sean  $[\alpha], [\beta] \in \pi_0(X, x_0)$  tales que  $\Psi([\alpha]) = \Psi([\beta])$ , es decir que  $\alpha(\bullet)$  y  $\beta(\bullet)$  son conectables por trayectorias; supongamos que es mediante la trayectoria  $\sigma : I \rightarrow X$ . Defino la siguiente homotopía entre  $\alpha$  y  $\beta$ :

$$H(s, t) := \begin{cases} x_0 & \text{si } s = \star \\ \sigma(t) & \text{si } s = \bullet \end{cases}$$

Esta es una homotopía porque es la unión disjunta de funciones continuas y es una calca de la homotopía  $F$  que construí para definir la relación de equivalencia en  $X$ . Por lo tanto  $\alpha \simeq \beta$ , entonces  $[\alpha] = [\beta]$  y concluyo que  $\Psi$  es inyectiva.

Por último observa que  $X/\sim$  se puede ver como el espacio de componentes conexas del espacio  $X$  ya que al hacer cociente reducimos toda una componente conexa (arco-conexa) a un punto sobre ella.

Con todo esto he probado que

*Proposición 5.*

$$\pi_0(X, x_0) \xrightarrow{\Psi} \left\{ \begin{array}{l} \text{componentes} \\ \text{conexas de } X \end{array} \right\} \quad \text{es biyectiva.}$$

Los demás grupos fundamentales son muy parecidos a  $\pi_1(X, x_0)$ . La única diferencia es que los lazos ahora están definidos sobre  $I^n / \partial I^n$  en lugar de sobre  $I / \partial I$ . Si defino la operación como:

$$(\alpha * \beta)(s_1, \dots, s_n) := \begin{cases} \alpha(2s_1, s_2, \dots, s_n) & \text{si } 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1 \end{cases}$$

donde  $\alpha, \beta : I^n \rightarrow X$ , entonces todas las propiedades de grupo de  $\pi_n(X, x_0)$  son idénticas a las propiedades de  $\pi_1(X, x_0)$ . Las enumero para tenerlas a la mano:

$$\begin{aligned} (\pi_n(X, x_0), *) &\text{ es un grupo} \\ [e] = [e_{x_0}] &\text{ es el neutro} \\ \forall [\alpha], [\alpha]^{-1} = [\bar{\alpha}] & \end{aligned}$$

También observa que

$$(X, x_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi_n(X, x_0) \quad \left\{ (X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \right\} \longmapsto \left\{ \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{f_\#} \pi_n(Y, y_0) \right\}$$

es un funtor (covariante) de la categoría **Top<sub>\*</sub>** a la categoría de grupos. La prueba de esto es la misma que en el Teorema 4.

## 1.6 Equivalencia Homotópica

El propósito de esta sección es introducir una propiedad más débil que homeomorfismo pero que el grupo fundamental siga siendo un invariante.

**Definición 10.** Una función continua  $f : X \rightarrow Y$  es una *equivalencia homotópica* si existe una función continua  $g : Y \rightarrow X$  tal que  $g \circ f \simeq \text{Id}_X$  y  $f \circ g \simeq \text{Id}_Y$ . En este caso se denota como  $X \simeq Y$ .

Claramente es una condición más débil que homeomorfismo, es decir

$$X \approx Y \implies X \simeq Y$$

porque un homeomorfismo  $f : X \rightarrow Y$  cumple  $f^{-1} \circ f = \text{Id}_X$  y  $f \circ f^{-1} = \text{Id}_Y$  donde igualdad de funciones claramente implica que son homotópicos.

Una clase importante de espacios son los que son homotópicos a un punto:

**Definición 11.** Un espacio  $X$  es *contraible* si  $X \simeq \{x_0\}$ .

Una definición alternativa es:

**Ejercicio 6.** Un espacio  $X$  es contraible si y sólo si  $\text{Id}_X \simeq e_x$  donde  $e_x : X \rightarrow X$  es la función constante, para alguna  $x \in X$ .

*Proof.*  $\implies$ ) Supongamos que  $X$  es contraible, es decir que  $X \simeq \{p\}$ . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $p \in X$  porque para todo elemento  $x_0 \in X$  tenemos que  $\{x_0\} \approx \{p\}$  y así  $X \simeq \{p\} \simeq \{x_0\}$ .

Por definición esto quiere decir que existen funciones continuas  $f : X \rightarrow \{x_0\}$  y  $g : \{x_0\} \rightarrow X$  tales que  $g \circ f \simeq_H \text{Id}_X$  y  $f \circ g \simeq_G \text{Id}_{\{x_0\}}$ . En particular,

$$H(x, 0) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{y} \quad H(x, 1) = \text{Id}_X(x).$$

Como  $H$  es continua por hipótesis, esto quiere decir que  $H$  es una homotopía entre  $\text{Id}_X$  y la función constante  $x \mapsto g(x_0)$ .

$\impliedby$ ) Supongamos que existe una homotopía  $H : X \times I \rightarrow X$  tal que  $H(x, 0) = \text{Id}_X(x) = x$  y  $H(x, 1) = e_{x_0} = x_0$ . Si denotamos  $f = \text{Id}_X|_{\{x_0\}} : \{x_0\} \rightarrow X$  entonces  $e_{x_0} \circ f = \text{Id}_{\{x_0\}}$  porque  $(e_{x_0} \circ f)(x_0) = e_{x_0}(x_0) = x_0$ , en particular  $e_{x_0} \circ f \simeq \text{Id}_{\{x_0\}}$ . Por otro lado  $f \circ e_{x_0} = e_{x_0}$  porque  $(f \circ e_{x_0})(x) = f(e_{x_0}(x)) = f(x_0) = x_0$  y por hipótesis  $e_{x_0} \simeq \text{Id}_X$ . Por lo tanto  $f \circ e_{x_0} \simeq \text{Id}_X$ . Ambas homotopías implican que  $X \simeq \{x_0\}$  y así  $X$  es contraible.  $\square$

Una propiedad importante de las equivalencias homotópicas es que si  $X \simeq Y$  entonces los grupos fundamentales son isomorfos. Para esto necesitamos una propiedad de funciones homotópicas:

*Proposición 6.* Sean  $f, g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  funciones basadas. Entonces  $f \simeq g \implies f_{\#} = g_{\#}$ .

*Proof.* Para cualquier elemento  $[\alpha] \in \pi_n(X, x_0)$  tenemos que  $f_{\#}[\alpha] = [f \circ \alpha]$  y  $g_{\#}[\alpha] = [g \circ \alpha]$ . Por la proposición 2 tenemos que  $f \simeq g$  implica que  $f \circ \alpha \simeq g \circ \alpha$ , es decir

$$f_{\#}[\alpha] = [f \circ \alpha] = [g \circ \alpha] = g_{\#}[\alpha] \quad \forall [\alpha] \in \pi_n(X, x_0).$$

Por lo tanto  $f_{\#} = g_{\#}$ . □

Hay un detalle de esta prueba que no probamos. La proposición 2 es para espacios no basados, pero esto se puede resolver fácilmente:

**Ejercicio 7.** Sean  $f, \tilde{f} : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  y  $g, \tilde{g} : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$  funciones basadas tales que  $f \simeq \tilde{f}$  y  $g \simeq \tilde{g}$  donde las homotopías son basadas. Entonces  $g \circ f \simeq \tilde{g} \circ \tilde{f}$  donde las homotopías son de funciones basadas.

*Proof.* Supongamos que  $F : X \times I \rightarrow Y$  y  $G : Y \times I \rightarrow Z$  son las homotopías  $f \simeq \tilde{f}$  y  $g \simeq \tilde{g}$  respectivamente. Definimos una función  $H : X \times I \rightarrow Z$  mediante la siguiente composición:

$$X \times I \xrightarrow{(F, \text{Id})} Y \times I \xrightarrow{G} Z \quad \text{con} \quad (x, t) \mapsto (F(x, t), t) \mapsto G(F(x, t), t).$$

$H$  es continua porque es composición de funciones continuas. Ahora, para  $t \in I$  fija tenemos que  $H_t = G_t(F_t(x))$  que es continua porque  $F_t$  y  $G_t$  lo son. Por último tenemos que  $H_0 = G_0 \circ F_0 = g \circ f$  y  $H_1 = G_1 \circ F_1 = \tilde{g} \circ \tilde{f}$  por hipótesis.

Solamente nos falta verificar que  $H$  es una homotopía basada. Nada más hay que calcular

$$H_t(x_0) = G_t(F_t(x_0)) = G_t(y_0) = z_0 \quad \forall t \in I$$

ya que  $F$  y  $G$  son homotopías basadas por hipótesis. Por lo tanto  $g \circ f \simeq \tilde{g} \circ \tilde{f}$  donde la homotopía  $H$  es basada. □

De la proposición anterior podemos demostrar fácilmente la invariancia homotópica del grupo fundamental:

**Corolario 6. ??**  $(X, x_0) \simeq (Y, y_0) \implies \pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(Y, y_0)$ .

*Proof.* Si  $(X, x_0) \simeq (Y, y_0)$  entonces existen funciones continuas  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  y  $g : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  tales que  $g \circ f \simeq \text{Id}_X$  y  $f \circ g \simeq \text{Id}_Y$ . Por la proposición anterior tenemos que:

$$(\text{Id}_X)_{\#} = (f \circ g)_{\#} = f_{\#} \circ g_{\#} \quad \text{y} \quad (\text{Id}_Y)_{\#} = (g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}.$$

Por lo tanto  $f_{\#} : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$  (y  $g_{\#}$ ) es un isomorfismo. □

En particular, como  $\pi_n(\{p\}, p) = 0$  porque la única función de  $\mathbb{S}^n$  a  $\{p\}$  es la función constante, tenemos:

**Corolario 7.** Si  $X$  es contraible entonces  $\pi_n(X, x_0) = 0$  para toda  $x_0 \in X$ .

Otro caso en que se anula el grupo fundamental se obtiene del corolario 3 del teorema 2:

**Corolario 8.** Si  $X \subseteq \mathbb{R}^m$  es convexo, entonces  $X$  es contraible y  $\pi_n(X, x_0) = 0$  para toda  $x_0 \in X$ .

*Proof.* Por el corolario 3 las dos funciones  $\text{Id}_X : X \rightarrow X$  y la función constante  $e_{x_0} : X \rightarrow X$  son homotópicas. Por el ejercicio 6 se tiene que  $X$  es contraible. Por el corolario anterior concluimos que  $\pi_n(X, x_0) = 0$ . □

## 1.7 Producto cuña

A lo largo de las siguientes tres secciones voy a desarrollar herramienta topológica para poder estudiar a fondo la relación

$$\pi_n(X, x_0) := [(\mathbb{S}^n, 1), (X, x_0)]$$

y cómo usarlo para relacionar los diferentes grupos fundamentales de un espacio basado. La primera construcción es el producto cuña:

Sea  $\{(X_j, x_j)\}_{j \in J}$  una familia de espacios basados,  $\sqcup_j (X_j, x_j)$  su unión disjunta e identifico todos los puntos base en uno sólo. Más precisamente defino  $B = \{x_j\}_{j \in J}$ , el conjunto de todos los puntos bases y hago cociente sobre  $B$  (ie. identifico a todos los elementos en  $B$  y a los demás los identifico sólo con ellos mismos). Así si define el producto cuña:

$$\bigvee_{j \in J} (X_j, x_j) := \frac{\sqcup (X_j, x_j)}{\{x_j\}}$$

con la topología cociente.

**Lema 9.** *El producto cuña en  $\mathbf{Top}_*$  es un coproducto, es decir para cualquier familia  $\{(X_j, x_j)\}_{j \in J}$  de espacios basados existen morfismos  $\{\mu_i : (X_i, x_i) \rightarrow \vee (X_j, x_j)\}_{j \in J}$  tales que cumplen la siguiente propiedad universal: Si  $(Y, y_0)$  es cualquier espacio basado junto con morfismos  $\{f_i : (X_i, x_i) \rightarrow (Y, y_0)\}_{i \in J}$  entonces existe un único morfismo  $\theta : \vee (X_j, x_j) \rightarrow (Y, y_0)$  que hace el siguiente diagrama comutar:*

$$\begin{array}{ccc} \vee (X_j, x_j) & \xrightarrow{\theta} & (Y, y_0) \\ \mu_i \swarrow & & \searrow f_i \\ (X_i, x_i) & & \end{array} \quad (1.9)$$

*Proof.* Primero exibo los morfismos  $\mu_i : (X_i, x_i) \rightarrow \vee (X_j, x_j)$ : para toda  $i \in J$ , existe una inclusión natural:

$$u_i : (X_i, x_i) \longrightarrow \bigsqcup_{j \in J} (X_j, x_j)$$

que hace  $x \mapsto x \in \sqcup (X_j, x_j)$ . Si compongo esta inclusión con la identificación natural  $\nu : \sqcup (X_j, x_j) \rightarrow \vee (X_j, x_j)$ , puedo definir  $\mu_i := \nu \circ u_i$ . Afirmo que  $\vee (X_j, x_j)$  junto con  $\{\mu_i : (X_i, x_i) \rightarrow \vee (X_j, x_j)\}$  es un coproducto.

Sea  $(Y, y_0)$  un espacio basado con morfismos  $\{f_i : (X_i, x_i) \rightarrow (Y, y_0)\}_{i \in J}$ . Puedo definir de manera natural la función:

$$\sqcup f_j : \bigsqcup_{j \in J} (X_j, x_j) \longrightarrow (Y, y_0) \quad \text{con} \quad (\sqcup f_j(x)) = f_i(x) \quad \text{si } x \in X_i.$$

Como la unión es disjunta,  $\sqcup f_j$  está bien definida y es continua (porque cada  $f_j$  lo es). Observa que por definición  $f_i = \sqcup f_j \circ u_i$  donde  $u_i$  es la inclusión natural de  $(X_i, x_i)$  en  $\sqcup (X_i, x_i)$ .

Además, es una función basada porque  $\sqcup f_j(x_i) = f_i(x_i) = y_0$  para toda  $i \in J$ . Esta última igualdad implica que  $(\sqcup f_j)[B] = \{y_0\}$  y así  $\sqcup f_j$  se factoriza a través de  $\vee (X_j, x_j)$ ; a esta nueva función (continua de espacios basados) la llamo  $\vee f_j$ :

$$\begin{array}{ccc} \sqcup (X_j, x_j) & \xrightarrow{\sqcup f_j} & (Y, y_0) \\ \nu \downarrow & \nearrow \vee f_j & \\ \vee (X_j, x_j) & & \end{array} \quad \sqcup f_j = \vee f_j \circ \nu$$

Ahora sólo falta ver que  $\theta = \vee f_j$  satisface el diagrama comutativo (1.9), es decir que  $f_i = \vee f_j \circ \mu_i$ . Esto se sigue inmediatamente de todas las definiciones que he dado y el diagrama comutativo anterior:

$$\vee f_j \circ \mu_i = \vee f_j \circ (\nu \circ u_i) = (\vee f_j \circ \nu) \circ u_i = \sqcup f_j \circ u_i = f_i.$$

Observa que si  $\star \in \vee (X_j, x_j)$  es su punto base natural, entonces para  $x_i \in (X_i, x_i)$  en la preimagen bajo (cualquier)  $\mu_i$  tenemos que  $\vee f_j(\star) = \vee f_j(\mu_i(x_i)) = f_i(x_i) = y_0$ . Entonces  $\vee f_j$  es un morfismo en  $\mathbf{Top}_*$ .

La unicidad de  $\vee f_j$  se sigue de que el coproducto es un objeto inicial en una categoría adecuada.  $\square$

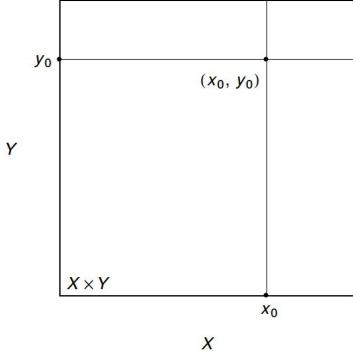


Figure 1.3:  $X \vee Y \subset X \times Y$

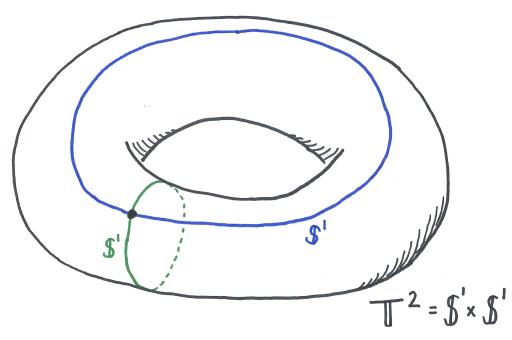


Figure 1.4:  $S^1 \vee S^1 \subset T^2$

*Nota.* Al morfismo  $\vee f_j$  se le puede dar una fórmula: sea  $[x] \in \vee(X_j, x_j)$ , entonces  $x \in \sqcup(X_j, x_j)$  y puedo asumir sin pérdida de generalidad que  $x \in X_i$  para una  $i \in J$ . Observa que  $\sqcup f_j(x) = f_i(x) \in Y$ . Por construcción tengo que

$$\vee f_j([x]) = f_i(x) \quad \text{si } x \in (X_i, x_i).$$

Antes de seguir, observa que si considero el producto cuña de dos espacios  $(X, x_0)$  y  $(Y, y_0)$  entonces hay una manera canónica de ver  $X \vee Y$  encajado en  $X \times Y$  como el conjunto  $(X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y)$ . Ve la figura 1.3 para el caso general y la figura 1.4 para el caso particular  $S^1 \vee S^1 \subset T^2$ .

En efecto, si denoto  $V := (X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y)$  y defino las siguientes dos funciones  $f_X : X \rightarrow V$  y  $f_Y : Y \rightarrow V$  como

$$f_X(x) = (x, y_0) \quad \text{y} \quad f_Y(y) = (x_0, y),$$

claramente tengo dos morfismos de espacios basados (ie.  $f_X$  y  $f_Y$  son continuas y basadas) y como el producto cuña es un coproducto en  $\mathbf{Top}_*$  existe un único morfismo  $g := f_X \vee f_Y$  de  $X \vee Y$  a  $V$  tal que:

$$g([z]) = \begin{cases} f_X(z) = (z, y_0) & \text{si } z \in X \\ f_Y(z) = (x_0, z) & \text{si } z \in Y \end{cases}$$

Para construir el inverso, observa que  $V$  se puede descomponer en una unión disjunta  $V = ((X - x_0) \times \{y_0\}) \cup (\{y_0\} \times (Y - y_0)) \cup \{(x_0, y_0)\}$ . Ahora defino la siguiente función:

$$h(x, y) := \begin{cases} [x] & \text{si } x \neq x_0, y = y_0 \\ [y] & \text{si } x = x_0, y \neq y_0 \\ \star & \text{si } x = x_0, y = y_0 \end{cases}$$

donde  $\star \in X \vee Y$  es el punto base canónico (ie  $\star = [x_0] = [y_0]$ ). Esta función es claramente continua porque sobre cada componente de  $V$ ,  $h$  es la restricción de la función continua  $X \rightarrow X \vee Y$ ,  $Y \rightarrow X \vee Y$  y la función constante  $(x_0, y_0) \mapsto \star$ . Claramente:

$$(g \circ h)(x, y) = \begin{cases} g([x]) = (x, y_0) & \text{si } x \neq x_0, y = y_0 \\ g([y]) = (x_0, y) & \text{si } x = x_0, y \neq y_0 = \text{Id}_V \\ g(\star) = (x_0, y_0) & \text{si } x = x_0, y = y_0 \end{cases}$$

y

$$(h \circ g)([z]) = \begin{cases} h(z, y_0) = [z] & \text{si } z \in X \\ h(x_0, z) = [z] & \text{si } z \in Y \end{cases} = \text{Id}_{X \vee Y}.$$

por lo tanto  $X \vee Y \approx V = (X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y) \subset X \times Y$ . Observa que la continuidad de  $g$  y  $h$  requieren que  $V$  tenga la topología de subespacio de la topología producto en  $X \times Y$ .

En general, si tomamos el producto cuña de una familia arbitraria de espacios basados, no necesariamente podemos encajar  $\vee(X_j, x_j)$  en  $\prod(X_j, x_j)$  (ie. que  $\vee(X_j, x_j)$  sea homeomorfo a su imagen). Pero no todo se pierde:

**Ejercicio 8.** Sea  $\{(X_j, x_j)\}_{j \in J}$  una familia de espacios basados y sean  $\lambda_i : (X_i, x_i) \rightarrow \prod(X_j, x_j)$  las inclusiones naturales definidas por

$$\lambda_i(x) = \{z_j\}_{j \in J} \quad \text{con} \quad z_j = \begin{cases} x & \text{si } j = i \\ x_j & \text{si } j \neq i \end{cases}.$$

Entonces el morfismo inducido

$$\vee \lambda_j : \bigvee_{j \in J} (X_j, x_j) \longrightarrow \prod_{j \in J} X_j$$

es inyectivo.

*Proof.* Como en el lema 9, sean  $\{\mu_j : (X_j, x_j) \rightarrow \vee(X_j, x_j)\}_{j \in J}$  los morfismos canónicos que hacen que  $\vee(X_j, x_j)$  sea el coproducto en de  $\{(X_j, x_j)\}$  en  $\mathbf{Top}_*$ . Además, sean  $\pi_i : \prod(X_j, x_j) \rightarrow (X_i, x_i)$  las proyecciones canónicas definidas por

$$\pi_i(\{y_j\}_{j \in J}) = y_i \in (X_i, x_i).$$

Sean  $[x], [x'] \in \vee(X_j, x_j)$  elementos distintos con  $x \in (X_i, x_i)$  y  $x' \in (X_l, x_l)$ . Como las clases de  $x$  y  $x'$  son distintas, al menos una de ellos (sin pérdida de generalidad supongo que  $x$ ) no es un punto base, ie.  $x \neq x_i$ .

Ahora si  $i \neq l$  entonces:

$$\vee \lambda_j([x]) = \lambda_i(x) = \{z_j\} \neq \{z'_j\} = \lambda_l(x') = \vee \lambda_j([x'])$$

porque por definición los elementos  $\{z_j\}$  y  $\{z'_j\}$  difieren en la  $i$ -ésima entrada donde valen  $x$  y  $x_i$  respectivamente.

Si  $i = l$ , entonces:

$$\vee \lambda_j([x]) = \lambda_i(x) = \{z_j\} \neq \{z'_j\} = \lambda_i(x') = \vee \lambda_j([x'])$$

porque los elementos  $\{z_j\}$  y  $\{z'_j\}$  difieren nada más en la  $i$ -ésima entrada donde valen  $x$  y  $x'$  respectivamente que por hipótesis son distintos porque  $[x] \neq [x']$  y  $x, x' \in X_i$ .

Por lo tanto si  $[x] \neq [x']$  tengo que  $\vee \lambda_j([x]) \neq \vee \lambda_j([x'])$  y  $\vee \lambda_j$  es inyectiva.

□

## 1.8 La ley exponencial y la suspensión reducida

En la categoría de conjuntos se cumple que:

**Ejercicio 9.** Sean  $X, Y$  y  $Z$  conjuntos, entonces:

$$\text{Hom}(X \times Z, Y) \xrightarrow{\Phi} \text{Hom}(X, \text{Hom}(Z, Y))$$

$$(X \times Z \xrightarrow{f} Y) \longmapsto (X \xrightarrow{\Phi_f} \text{Hom}(Z, Y))$$

definido por  $\Phi_f(x) : Z \rightarrow Y$  con  $\Phi_f(x)(z) = f(x, z)$  es una biyección.

*Proof.* Doy un inverso de  $\Phi$ : sea  $g \in \text{Hom}(X, \text{Hom}(Z, Y))$  con  $g(x) : Z \rightarrow Y$  y defino

$$\Psi(g) : X \times Z \longrightarrow Y \quad \text{con} \quad \Psi(g)(x, z) = g(x)(z).$$

Para  $f \in \text{Hom}(X \times Z, Y)$  calculo:

$$\Psi(\Phi(f))(x, z) = \Psi(\Phi_f)(x, z) = \Phi_f(x)(z) = f(x, z) \implies \Psi(\Phi(f)) = f.$$

Por otro lado si  $g \in \text{Hom}(X, \text{Hom}(Z, Y))$  entonces:

$$\Phi(\Psi(g))(x)(z) = \Phi_{\Psi(g)}(x)(z) = \Psi(g)(x, z) = g(x)(z) \implies \Phi(\Psi(g)) = g.$$

Por lo tanto  $\Psi = \Phi^{-1}$  y  $\Phi$  es una biyección.

□

En la categoría **Top** si sustituimos  $\text{Hom}(\cdot, \cdot)$  por  $\text{Map}(\cdot, \cdot)$  entonces

$$\Phi : \text{Map}(X \times Z, Y) \longrightarrow \text{Map}(X, \text{Map}(Z \times Y)) \quad (1.10)$$

no es necesariamente una biyección porque la imagen de alguna  $f \in \text{Map}(X \times Z, Y)$  bajo  $\Phi$  no necesariamente es continua. Pero si le pedimos propiedades adicionales a  $Z$  podemos hacer que  $\Phi$  sea biyectiva:

**Teorema 10.** *Si  $Z$  es localmente compacto y Hausdorff, entonces  $\Phi$  de (1.10) es biyectiva.*

Para este caso particular vamos a hacer  $Z = I$  que claramente es localmente compacto (pues es compacto) y Hausdorff, entonces el teorema es válido. Además, si quiero aplicarlo a lazos y al grupo fundamental, es necesario cambiar de categoría a **Top<sub>\*</sub>** e identificar  $I \rightarrow I/\partial I$ . El lado derecho de 1.10 es fácil cambiarlo pero no es inmediatamente obvio que es lo hay que hacer del lado izquierdo para mantener la biyección:

$$\begin{array}{ccc} \text{Map}(X \times I, Y) & \xrightarrow{\Phi} & \text{Map}(X, \text{Map}(I, Y)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ ? & \longleftrightarrow & \text{Map}_*((X, x_0), \Omega(Y, y_0)) \end{array}$$

Considera  $f \in \text{Map}(X \times I, Y)$  arbitrario. Quiero que  $\Phi_f(x) \in \Omega(Y, y_0)$ , es decir  $\Phi_f(x)(0) = f(x, 0) = y_0 = f(x, 1) = \Phi_f(x)(1)$  para toda  $x \in X$ . Una forma de forzar esto es identificar, en  $X \times I$ , todos los puntos de la forma  $(x, 0)$  ó  $(x, 1)$ . Entonces el primer paso es hacer:

$$X \times I \rightsquigarrow X \times I /_{(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})}$$

También quiero que  $\Phi_f$  sea un morfismo de espacios basados, es decir que  $\Phi_f(x_0)$  es el punto base de  $\Omega(Y, y_0)$ , ie. el lazo contante  $e_{y_0}$ . Esto significa que  $\Phi_f(x_0)(t) = e_{y_0}(t) = y_0$  para toda  $t \in I$ . Similarmente fuerzo esta condición al identificar todo el conjunto  $\{x_0\} \times I$  en  $X \times I$ :

$$X \times I \rightsquigarrow X \times I /_{(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})} \rightsquigarrow X \times I /_{(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (\{x_0\} \times I)}.$$

Resulta que esto es suficiente para traducir la biyección  $\Phi$  de (1.10) al espacio de lazos. La construcción anterior tiene un nombre:

**Definición 12.** Sea  $(X, x_0)$  un espacio basado, entonces la *suspensión reducida* de  $X$  es:

$$\mathcal{S}X := (X \times I) /_{(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (\{x_0\} \times I)}$$

y también es un espacio basado con base  $\star$ , el punto al que se identifica todo el conjunto  $(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (\{x_0\} \times I)$ .

*Nota.* A veces es útil definir el paso intermedio que se usó para definir la suspensión reducida. Si defino  $A = X \times \{0\} \subset X \times I$  y  $B = X \times \{1\} \subset X \times I$ , entonces la *suspensión no-reducida* de  $X$  es el cociente:

$$\Sigma X := (X \times I) /_{A, B}.$$

Observa que no estoy identificando  $A \cup B$  a un punto. Más bien estoy identificando  $A$  a un punto y  $B$  a otro punto. La figura 1.5 ilustra los pasos para construir la suspensión de  $\mathbb{S}^1$ .

Vale la pena mencionar que la figura 1.5 también funciona para visualizar la construcción de la suspensión reducida del disco; el cilindro del inicio está lleno en este caso y por lo tanto la esfera al final está llena también, por lo tanto  $\mathcal{SD}^2 \approx B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$  la bola de radio 1 con centro en el origen.

Con esta definición, puedo reescribir (1.10) como:

**Ejercicio 10.** Sean  $(X, x_0)$  y  $(Y, y_0)$  espacios basados, entonces:

$$\text{Map}_*((\mathcal{S}X, \star), (Y, y_0)) \xrightarrow{\Phi} \text{Map}_*((X, x_0), (\Omega(Y, y_0), e))$$

$$(\mathcal{S}X \xrightarrow{f} Y) \longmapsto (X \xrightarrow{\Phi_f} \Omega(Y, y_0))$$

definido por  $\Phi_f(x)(t) = f[x, t]$  es una biyección. Aquí  $[x, t]$  es una clase de equivalencia en  $\mathcal{S}X$ .

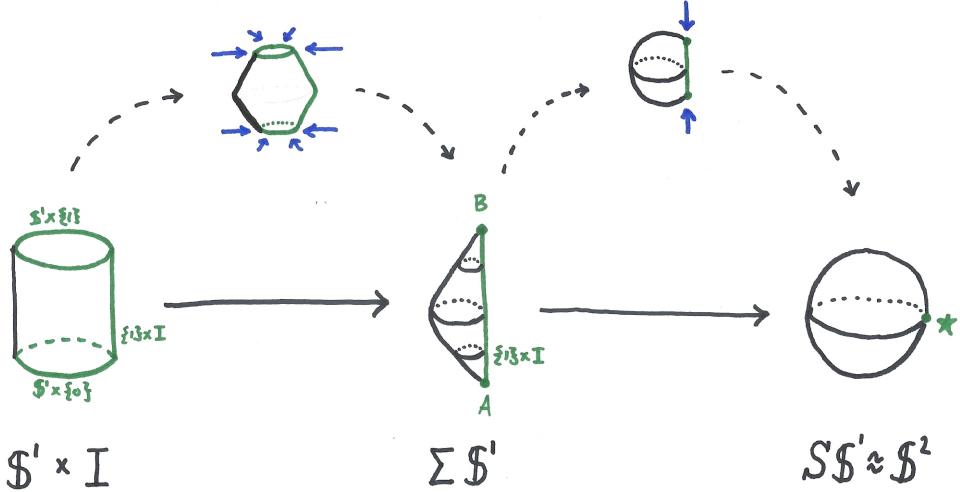


Figure 1.5: Construcción de  $S^1$ .

*Proof.* La prueba es muy similar al ejercicio 9; hay unos detalles adicionales que hay que verificar. Para probar que  $\Phi$  es biyectiva, exhibo un inverso.

Sea  $g \in \text{Map}_*((X, x_0), (\Omega(Y, y_0), e)) = \text{Map}_*(X, \Omega)$ . Entonces  $g(x) : I \rightarrow Y$  es un lazo (ie.  $g(x)(0) = y_0 = g(x)(1)$  para toda  $x \in X$ ) y  $g(x_0) = e_{y_0}$  es el lazo constante. Defino la siguiente función:

$$\Psi(g) : SX \longrightarrow Y \quad \text{con} \quad \Psi(g)[x, t] = g(x)(t).$$

Observa que está bien definido porque:

$$\Psi(g)[x, 0] = g(x)(0) = y_0 = g(x)(1) = \Psi(g)[x, 1] \quad \forall x \in X$$

y

$$\Psi(g)[x_0, t] = e_{y_0}(t) = y_0 \quad \forall t \in I.$$

Estas últimas dos igualdades implican que  $\Psi(g)$  está bien definido sobre  $SX$ .

Ahora verifico que  $\Psi = \Phi^{-1}$ . Para  $f \in \text{Map}_*(SX, Y)$  calculo:

$$\Psi(\Phi(f))[x, t] = \Psi(\Phi_f)[x, t] = \Phi_f(x)(t) = f[x, t] \implies \Psi(\Phi(f)) = f.$$

Por otro lado si  $g \in \text{Map}_*(X, \Omega)$  entonces:

$$\Phi(\Psi(g))(x)(t) = \Phi_{\Psi(g)}(x)(t) = \Psi(g)[x, t] = g(x)(t) \implies \Phi(\Psi(g)) = g.$$

Por lo tanto  $\Psi = \Phi^{-1}$  y  $\Phi$  es una biyección. □

La suspensión reducida es un funtor  $\mathcal{S} : \text{Top}_* \rightarrow \text{Top}_*$ . En efecto, si  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  es un morfismo, entonces la función continua  $(f \times \text{Id}_I) : X \times I \rightarrow Y \times I$  se factoriza a través de  $SX$ , es decir:

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{f \times \text{Id}_I} & Y \times I \\ \downarrow & & \downarrow \\ SX & \dashrightarrow_{\mathcal{S}f} & SY \end{array}$$

Esto sucede porque

$$(f \times \text{Id}_I)(x, 0) = (f(x), 0), \quad (f \times \text{Id}_I)(x, 1) = (f(x), 1), \quad (f \times \text{Id}_I)(x_0, t) = (y_0, t) \quad \forall x \in X, t \in I,$$

es decir que el conjunto en  $X \times I$  que se identifica a un punto se manda, bajo  $f \times \text{Id}_I$ , al conjunto de  $Y \times I$  que se identifica a un punto.

Además claramente tengo que  $\mathcal{S}\text{Id}_X = \text{Id}_{\mathcal{S}X}$  porque  $\mathcal{S}\text{Id}_X$  es inducido por  $\text{Id}_X \times \text{Id}_I = \text{Id}_{X \times I}$  y por último, si  $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$ , entonces  $(g \circ f) \times \text{Id}_I = (g \times \text{Id}_I) \circ (f \times \text{Id}_I)$  y así  $\mathcal{S}(g \circ f) = \mathcal{S}g \circ \mathcal{S}f$ . Por lo tanto he probado que:

*Proposición 7.* La suspensión reducida es un functor (covariante)  $\mathcal{S} : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}_*$ .

Podemos juntar esta proposición con la proposición 1 y el ejercicio 10 para deducir:

**Corolario 11.** Los funtores  $\mathcal{S} : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}_*$  y  $\Omega : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}_*$  son funtores adjuntos, más precisamente  $\mathcal{S}$  es adjunto izquierdo de  $\Omega$  y  $\Omega$  es adjunto derecho de  $\mathcal{S}$ :

$$\text{Hom}(\mathcal{S}X, Y) \longleftrightarrow \text{Hom}(X, \Omega Y)$$

donde he sustituido  $\text{Map}_*(\cdot, \cdot)$  por la notación categórica.

Más que  $\text{Map}_*$ , me interesa las clases de equivalencia módulo homotopía. Resulta que la función  $\Phi$  del ejercicio 10 se factoriza a través de las clases de homotopía. Más precisamente:

**Ejercicio 11.** Sean  $(X, x_0)$  y  $(Y, y_0)$  espacios basados, entonces la función inducida por  $\Phi$  del ejercicio 10:

$$[(\mathcal{S}X, \star), (Y, y_0)] \longleftrightarrow [(X, x_0), (\Omega(Y, y_0), e)]$$

es una biyección.

*Proof.* Usaré la misma notación que el ejercicio 10 y todos los espacios son basados.

Sean  $f, f' \in \text{Map}_*(\mathcal{S}X, Y)$  y  $g, g' \in \text{Map}_*(X, \Omega Y)$ . Si pruebo que

$$f \simeq f' \implies \Phi(f) \simeq \Phi(f') , \quad g \simeq g' \implies \Psi(g) \simeq \Psi(g')$$

entonces  $\Phi$  y  $\Psi$  se factorizan naturalmente a través de los espacios cocientes, es decir que existen únicos:

$$\begin{array}{ccc} \text{Map}_*(\mathcal{S}X, Y) & \xrightarrow{\Phi} & \text{Map}_*(X, \Omega Y) \\ \pi_1 \downarrow & \nearrow \Phi & \downarrow \pi_2 \\ [\mathcal{S}X, Y] & & [X, \Omega Y] \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{Map}_*(X, \Omega Y) & \xrightarrow{\Psi} & \text{Map}_*(\mathcal{S}X, Y) \\ \pi_2 \downarrow & \nearrow \bar{\Psi} & \downarrow \bar{\Phi} \\ [X, \Omega Y] & & [\mathcal{S}X, Y] \end{array} \quad (1.11)$$

que hacen comutar los diagramas, es decir que  $\Phi = \bar{\Phi} \circ \pi_1$  y  $\Psi = \bar{\Psi} \circ \pi_2$ . He denotado por  $\pi_i$  la función cociente. Observa que por definición  $\bar{\Phi}([f]) = \Phi(f)$ .

Supongo que  $f \simeq f'$  mediante la homotopía  $F : \mathcal{S}X \times I \rightarrow Y$ . Para un parámetro fijo  $t \in I$  tengo que  $F_t \in \text{Map}_*(\mathcal{S}X, Y)$  entonces  $\Phi(F_t) \in \text{Map}_*(X, \Omega Y)$  tiene sentido y es una función continua. Con esto defino  $F' : X \times I \rightarrow \Omega Y$  con:

$$F'(x, t) := \Phi(F_t)(x)$$

que es continua porque cada  $\Phi(F_t)$  lo es. Observa que  $F'(x, 0) = \Phi(F_0)(x) = \Phi(f)(x)$  y  $F'(x, 1) = \Phi(F_1)(x) = \Phi(f')(x)$  entonces  $F'$  es una homotopía entre  $\Phi(f)$  y  $\Phi(f')$ , es decir  $\Phi(f) \simeq \Phi(f')$ .

Por otro lado supongo que  $g \simeq_G g'$  con  $G : X \times I \rightarrow \Omega Y$  una homotopía. Observa que para todo parámetro  $G_t \in \text{Map}_*(X, \Omega Y)$  y así  $\Psi(G_t) \in \text{Map}_*(\mathcal{S}X, Y)$  y es continua. Similarmente defino:

$$G'([x, s], t) := \Psi(G_t)[x, s]$$

donde  $[x, s] \in \mathcal{S}X$ . Observa que como cada  $\Psi(G_t)$  es continua entonces  $G'$  también lo es. Además  $G'([x, s], 0) = \Psi(G_0)[x, s] = \Psi(g)[x, s]$  y  $G'([x, s], 1) = \Psi(G_1)[x, s] = \Psi(g')[x, s]$ . Por lo tanto  $\Psi(g) \simeq_{G'} \Psi(g')$ .

Como  $\text{Id} = \Psi \circ \Phi$ , entonces:

$$\Phi(f) \simeq \Phi(f') \implies \Psi(\Phi(f)) = f \simeq f' = \Psi(\Phi(f'))$$

y así:

$$f \simeq f' \iff \Phi(f) \simeq \Phi(f')$$

o equivalentemente:

$$[f] = [f'] \iff [\Phi(f)] = [\Phi(f')].$$

Si uso la notación de los diagramas commutativos en (1.11), la equivalencia anterior quiere decir que la función

$$(\pi_2 \circ \bar{\Phi}) : [\mathcal{S}X, Y] \longrightarrow [X, \Omega Y]$$

es inyectiva porque

$$(\pi_2 \circ \bar{\Phi})([f]) = \pi_2(\bar{\Phi}([f])) = \pi_2(\Phi(f)) = [\Phi(f)].$$

Además, si  $[g] \in [X, \Omega Y]$  entonces:

$$(\pi_2 \circ \bar{\Phi})([\Psi(g)]) = \pi_2(\bar{\Phi}(\Psi(g))) = \pi_2(\Phi(\Psi(g))) [\Phi(\Psi(g))] = [g]$$

y así  $\pi_2 \circ \bar{\Phi}$  es sobreyectiva. Por lo tanto ésta es la biyección

$$[\mathcal{S}X, Y] \longleftrightarrow [X, \Omega Y].$$

□

Intuitivamente, el ejercicio 11 dice que la propiedad adjunta de los funtores  $\mathcal{S}$  y  $\Omega$  se preserva bajo homotopías.

## 1.9 Producto “smash”

Las dos secciones anteriores me obligan a desarrollar una manera de calcular la suspensión reducida porque el lado izquierdo del ejercicio 11 se parece mucho a la definición 9; quiero una manera de encontrar una relación

$$[(\mathcal{S}X, \star), (Y, y_0)] \rightsquigarrow [(\mathbb{S}^n, 1), (Y, y_0)] = \pi_n(Y, y_0)$$

Resulta que la suspensión se puede caracterizar mediante otra construcción topológica: el producto smash:

**Definición 13.** Sean  $(X, x_0)$  y  $(Y, y_0)$  espacios basados, entonces su *smash product* se define como el espacio cociente  $X \times Y$  identificando  $X \vee Y$  a un punto:

$$X \wedge Y := (X \times Y) /_{X \vee Y}.$$

*Nota.* Recuerda que la discusión que motiva el ejercicio 8 nos garantiza que  $X \vee Y$  es homeomorfo al subespacio  $(X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y)$  de  $X \times Y$  y así el smash product está bien definido. Como consecuencia de esto, puedo reescribir el smash product como:

$$X \wedge Y := (X \times Y) /_{(X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y)}.$$

La figura 1.6 ilustra el proceso de identificación para obtener el smash product de dos círculos.

La relación entre la suspensión reducida y el smash product es evidente con el siguiente resultado:

**Ejercicio 12.** Para cualquier espacio basado  $(X, x_0)$  se tiene que

$$\mathcal{S}X \approx X \wedge \mathbb{S}^1$$

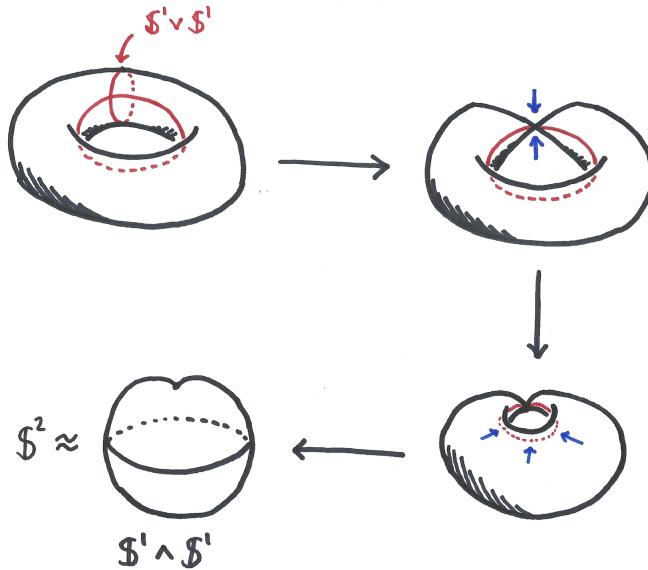


Figure 1.6: Construcción de  $\mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^1$ .

*Proof.* Usaré  $I/\partial I$  en lugar de  $\mathbb{S}^1$ , pero resumo la notación a  $J := I/\partial I$ . Denoto  $\nu : I \rightarrow J$  como la función identificación; también tomo a  $[0] = [1] \in J$  como el punto base. Considero la función:

$$\iota : X \times I \longrightarrow X \wedge J \quad \text{con} \quad \iota(x, t) = [x, [t]]$$

donde  $[t] \in J$  y  $[x, [t]]$  es la clase del punto  $(x, [t]) \in X \times J$ . Claramente es continua porque es la composición de las siguientes funciones continuas

$$X \times I \xrightarrow{\text{Id}_X \times \nu} X \times J \xrightarrow{\pi} X \wedge J$$

$$(x, t) \longmapsto (x, [t]) \longmapsto [x, [t]]$$

donde  $\pi : X \times J \rightarrow X \wedge J$  es la proyección natural. Observa también, que como  $\nu$  y  $\pi$  son sobreyectivas,  $\iota$  es sobreyectiva.

Si denoto por  $\star$  al punto base canónico de  $X \wedge J$ , claramente se cumple que

$$\iota(x, 0) = [x, [0]] = \star = [x, [1]] = \iota(x, 1)$$

para toda  $x \in X$  porque  $(x, [0]), (x, [1]) \in X \vee J = (X \times \{\star\}) \cup (\{x_0\} \times J) \subset X \times J$  que es el conjunto que se identifica a un punto al construir  $X \wedge J$ . Además tengo que

$$(x_0, [t]) \in X \vee J \implies \iota(x_0, t) = [x_0, [t]] = \star \quad \forall t \in I.$$

Todo esto junto implica que  $\iota$  es constante sobre el conjunto  $(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (\{x_0\} \times I)$  y así se factoriza a través de la suspensión reducida:

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{\iota} & X \wedge J \\ \nu \downarrow & \nearrow \bar{\iota} & \\ SX & & \end{array}$$

Si pruebo que  $\iota$  es una identificación, entonces podré concluir que  $\bar{\iota}$  es un homeomorfismo. Como  $\iota$  es sobreyectiva, basta probar que es una función abierta:

Sea  $U \subseteq X \times I$  abierto. Entonces existen abiertos  $V_1 \subseteq X$  y  $V_2 \subseteq I$  tales que  $U = V_1 \times V_2$ .

□

La siguiente proposición nos permite calcular la suspensión reducida de cualquier esfera:

*Proposición 8.*

$$\mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^n \approx \mathbb{S}^{n+1} \quad \forall n \geq 0$$

*Proof.* Encajo  $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$  como el conjunto de vectores unitarios y defino los hemisferios:

$$\mathbb{S}_{\pm}^{n+1} := \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{S}^{n+1} \mid \pm x_{n+2} > 0\}.$$

También encajo  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$  como

$$\mathbb{S}^n := \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{S}^{n+1} \mid x_{n+2} = 0\},$$

en particular  $\mathbb{S}^{n+1} = \mathbb{S}_+^{n+1} \cup \mathbb{S}_-^{n+1} \cup \mathbb{S}^n$ . Por último encajo el disco unitario  $\mathbb{D}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$  como

$$\mathbb{D}^{n+1} := \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \sum x_i^2 \leq 1 \text{ y } x_{n+2} = 0\}.$$

Ahora defino dos funciones  $\rho_+$  y  $\rho_-$  como  $\rho_{\pm} : \mathbb{D}^{n+1} \rightarrow \mathbb{S}_{\pm}^{n+1}$  con regla de correspondencia:

$$\rho_{\pm}(x_1, \dots, x_{n+1}, 0) = \left( x_1, \dots, x_{n+1}, \pm \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2} \right).$$

Cada  $\rho_{\pm}$  es continua porque  $\sum x_i^2 \leq 1$  y así son composición de funciones continuas. Además, son homeomorfismos porque ambas tienen el mismo inverso continuo: la proyección  $\mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  que iguala la última coordenada a 0 (estas  $\rho$ 's se parecen mucho a las cartas de la esfera  $\mathbb{S}^{n+1}$  que la dotan de una estructura diferenciable, la única diferencia es que las cartas tienen como dominio el disco abierto y como imagen al interior de los hemisferios, véase el ejemplo 5 de la sección 1.11).

Sea  $s_0 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$  el punto base de  $\mathbb{S}^n$  y  $\mathbb{S}^{n+1}$ . Con esto defino la función  $h : I \times \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$  como:

$$h(t, x) := \begin{cases} \rho_-(2tx + (1 - 2t)s_0) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \rho_+(2(1 - t)x + (2t - 1)s_0) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Para probar que  $h$  es continua basta ver que ambas partes coinciden en  $t = \frac{1}{2}$ . Como  $x = (x_1, \dots, x_{n+1}, 0) \in \mathbb{S}^n$  entonces  $\sum x_i^2 = 1$  entonces:

$$\rho_-(2\frac{1}{2}x + (1 - 2\frac{1}{2})s_0) = \rho_-(x) = (x_1, \dots, x_{n+1}, -\sqrt{1 - \sum x_i^2}) = (x_1, \dots, x_{n+1}, 0) = x.$$

Similarmente:

$$\rho_+(2(1 - \frac{1}{2})x + (2\frac{1}{2} - 1)s_0) = \rho_+(x) = (x_1, \dots, x_{n+1}, \sqrt{1 - \sum x_i^2}) = (x_1, \dots, x_{n+1}, 0) = x.$$

Por lo tanto  $h$  es continua.

Además  $h(0, x) = \rho_-(s_0) = s_0 = \rho_+(s_0) = h(1, x)$ , entonces  $h$  se factoriza a través de:

$$\begin{array}{ccc} I \times \mathbb{S}^n & \xrightarrow{h} & \mathbb{S}^{n+1} \\ \nu \times \text{Id}_{\mathbb{S}^n} \downarrow & \nearrow \bar{h} & \\ \frac{I}{\partial I} \times \mathbb{S}^n & & \end{array}$$

Observa que, como  $\mathbb{S}^n$  es compacto y Hausdorff y  $\nu$  es una identificación, la función  $\nu \times \text{Id}_{\mathbb{S}^n}$  también es una identificación.

Lo único que falta probar es que  $\bar{h}$  se factoriza a través de

$$\begin{array}{ccc} \frac{I}{\partial I} \times \mathbb{S}^n & \xrightarrow{\bar{h}} & \mathbb{S}^{n+1} \\ \pi \downarrow & \nearrow \hat{h} & \\ \frac{I/\partial I \times \mathbb{S}^n}{I/\partial I \vee \mathbb{S}^n} & & \end{array}$$

y que  $\hat{h}$  es biyectiva. Estas dos cosas nos implican que  $\hat{h}$  es un homeomorfismo ya que sería una función continua y biyectiva con dominio compacto y Hausdorff (ie.  $\frac{I/\partial I \times \mathbb{S}^n}{I/\partial I \vee \mathbb{S}^n} = \mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^n$ ) y por lo tanto  $\mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^n \approx \mathbb{S}^{n+1}$ . Lo que me falta lo pruebo en el siguiente ejercicio:

**Ejercicio 13.** Sea  $\bar{h} : \frac{I}{\partial I} \times \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$  como en la proposición 8. Entonces  $\bar{h}$  se factoriza a través de  $\mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^n$  y que  $\hat{h}$ , la función inducida, es biyectiva.

□

Si junto el ejercicio 12 y la proposición 8, obtengo una fórmula para calcular la suspensión reducida de cualquier esfera:

**Corolario 12.**

$$\mathcal{SS}^n \approx \mathbb{S}^{n+1}$$

Con este corolario puedo reescribir la definición del grupo fundamental (como mencioné al principio de esta sección). Omito la notación de espacio basado: para toda  $n \geq 1$  tengo

$$\pi_n(X, x_0) = [\mathbb{S}^n, X] = [\mathcal{SS}^{n-1}, X] \longleftrightarrow [\mathbb{S}^{n-1}, \Omega X] = \pi_{n-1}(\Omega X, e).$$

En particular para  $n = 1$  concluyo que

$$\pi_1(X, x_0) \longleftrightarrow \pi_0(\Omega X, e).$$

Esto quiere decir que el grupo fundamental de un espacio está en biyección canónica con las componentes conexas de su espacio de lazos (cf. proposición 5). Tiene sentido este hecho porque, de alguna manera, las homotopías entre lazos funcionan como trayectorias que las une.

## 1.10 *H*-grupos y *H*-cogrupos

Hasta ahora, todas las relaciones entre los grupos fundamentales y las clases de funciones continuas de la forma  $[(X, x_0), (Y, y_0)]$  han sido biyecciones; nunca he establecido más estructura salvo el de conjunto. En esta sección estudio cuando  $[(X, x_0), (Y, y_0)]$  tiene estructura de grupo y como depende de las propiedades de  $X$  y de  $Y$ . Esto me permitirá clasificar los grupos fundamentales de manera algebraica. En el resto de la sección, todos los espacios considerados son basados, entonces omito la notación de espacio basado: cambio  $(X, x_0)$  por  $X$ .

Como primer ejemplo, supongo que  $G$  es un grupo topológico con un producto  $\mu : G \times G \rightarrow G$  y neutro  $1 \in G$  (que funciona como base del espacio  $G$ ). Entonces al conjunto  $[X, G]$  se le puede dotar, de manera natural, una estructura de grupo:

$$[f] *_{\mu} [g] := [\mu \circ (f, g)] = \left[ X \xrightarrow{(f, g)} G \times G \xrightarrow{\mu} G \right].$$

De hecho se cumple más:  $\text{Map}_*(X, G)$  es un grupo con  $(f *_{\mu} g)(x) := \mu(f(x), g(x))$ . Observa que mantengo la misma notación para la operación apesar de que una está definida para funciones y la otra para clases de homotopía de funciones; esto no debería causar confusión.

La operación  $*_{\mu}$  sobre  $\text{Map}_*(X, G)$  es una operación de grupo. En efecto,

$$\begin{aligned} ((f *_{\mu} g) *_{\mu} h)(x) &= \mu((f *_{\mu} g)(x), h(x)) \\ &= \mu(\mu(f(x), g(x)), h(x)) \\ &= \mu(f(x), \mu(g(x), h(x))) \\ &= \mu(f(x), (g *_{\mu} h)(x)) \\ &= (f *_{\mu} (g *_{\mu} h))(x) \end{aligned}$$

y así  $*_{\mu}$  es asociativa. Además la función constante (basado)  $e : X \rightarrow G$  es el neutro:  $(f *_{\mu} e)(x) = \mu(f(x), 1) = f(x) = \mu(1, f(x)) = (e *_{\mu} f)$ . Además, para toda  $f \in \text{Map}_*(X, G)$  la función  $\bar{f}(x) = f(x)^{-1}$  es claramente el inverso de  $f$  porque tomar inversos en  $G$  es continua.

Esta conclusión es muy fuerte. Yo quiero estructura de grupo para  $[X, Y]$ , no para  $\text{Map}_*(X, Y)$ . Si relajo las condiciones para  $Y$  puedo incluir a más ejemplos.

Me interesan las relaciones de grupo topológico *módulo* homotopía. En lugar de la igualdad en la definición de grupo, por ejemplo la asociatividad  $\mu(\mu, \text{Id}) = \mu(\text{Id}, \mu)$ , me basta tomar la homotopía porque quiero trabajar con clases de funciones. Con esto puedo definir un “grupo módulo homotopía”. Más precisamente:

**Definición 14.** (Hopf) Sea  $(W, w_0)$  un espacio basado y  $e_0 : W \rightarrow W$  es la función constante  $w_0$ .  $(W, \mu, \lambda)$  es un  $H$ -grupo si  $W$  viene equipada con dos funciones continuas (basadas)  $\mu : W \times W \rightarrow W$  y  $\lambda : W \rightarrow W$  que cumplen:

1. (Asociatividad)  $\mu \circ (\mu \times \text{Id}_W) \simeq \mu \circ (\text{Id}_W \times \mu)$ .
2. (Existencia de Neutro)  $\mu \circ (\text{Id}_W, e_0) \simeq \text{Id}_W \simeq \mu \circ (e_0, \text{Id}_W)$ .
3. (Existencia de Inversos)  $\mu \circ (\text{Id}_W, \lambda) \simeq \text{Id}_W \simeq \mu \circ (\lambda, \text{Id}_W)$ .

Un  $H$ -grupo es un grupo topológico módulo homotopías. Las tres propiedades se pueden resumir en las siguientes tres diagramas comutativos módulo homotopías (ie. cualquiera dos caminos que empiezan y terminan en los mismos puntos producen funciones homotópicas):

$$\begin{array}{ccc} W \times W \times W & \xrightarrow{\text{Id} \times \mu} & W \times W \\ \mu \times \text{Id} \downarrow & & \downarrow \mu \\ W \times W & \xrightarrow{\mu} & W \end{array} \quad \begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{(\text{Id}, e_0)} & W \times W & \xleftarrow{(e_0, \text{Id})} & W \\ \text{Id} \searrow & & \downarrow \mu & & \swarrow \text{Id} \\ & W & & & W \end{array} \quad \begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{(\text{Id}, \lambda)} & W \times W & \xleftarrow{(\lambda, \text{Id})} & W \\ \text{Id} \searrow & & \downarrow \mu & & \swarrow \text{Id} \\ & W & & & W \end{array}$$

Asociatividad

Nuetro

Inversos

Nota. También decimos que  $W$  es un  $H$ -grupo commutativo si además

$$\begin{array}{ccc} W \times W & \xrightarrow{C} & W \times W \\ \mu \searrow & & \swarrow \mu \\ & W & \end{array}$$

es un diagrama comutativo módulo homotopías donde  $C(x, y) = (y, x)$ .

La siguiente proposición aclara el motivo para definir un  $H$ -grupo:

*Proposición 9.* Si  $(W, \mu)$  es un  $H$ -grupo, entonces  $[X, W]$  es un grupo con operación  $[f] *_{\mu} [g] := [f *_{\mu} g] = [\mu \circ (f, g)]$ .

*Proof.* Si aplico la proposición 2 a la asociatividad de la definición de  $H$ -grupo, obtengo:

$$\mu \circ (\mu \times \text{Id}_W) \circ (f, g, h) \simeq \mu \circ (\text{Id}_W \times \mu) \circ (f, g, h)$$

y así

$$\begin{aligned} (f *_{\mu} g) *_{\mu} h &= \mu \circ (f *_{\mu} g, h) = \mu \circ (\mu(f, g), h) = \mu \circ (\mu \times \text{Id}_W) \circ (f, g, h) \\ &\simeq \mu \circ (\text{Id}_W \times \mu) \circ (f, g, h) = \mu \circ (f, \mu(g, h)) = \mu \circ (f, g *_{\mu} h) \\ &\simeq f *_{\mu} (g *_{\mu} h). \end{aligned}$$

Por lo tanto  $([f] *_{\mu} [g]) *_{\mu} [h] = [f] *_{\mu} ([g] *_{\mu} [h])$ . Las otras propiedades de grupo se prueban de manera equivalente: aplica la proposición 2 a cada equivalencia de la definición de  $H$ -grupo. Entonces omito la verificación.  $\square$

El ejemplo más importante de  $H$ -grupo para calcular el grupo fundamental es  $\Omega X$ . Defino  $\mu(\alpha, \beta) = \alpha * \beta$  y  $\lambda(\alpha) = \bar{\alpha}$  que ya sabemos que están bien definidas (ie,  $\alpha * \beta$  y  $\bar{\alpha}$  son lazos).

Las propiedades de  $H$ -grupo se siguen inmediatamente de que  $\pi_1(X, x_0)$  es un grupo con las operaciones  $[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta]$  y  $[\alpha]^{-1} = [\bar{\alpha}]$ . Lo único que falta es probar que efectivamente  $\mu : \Omega X \times \Omega X \rightarrow \Omega X$  y  $\lambda : \Omega X \rightarrow \Omega X$  son funciones continuas:

**Ejercicio 14.** Sea  $\Omega X$  el espacio de lazos de un espacio basado  $(X, x_0)$ , equipada con la topología compacto-abierta. Entonces las funciones

$$\mu : \Omega X \times \Omega X \longrightarrow \Omega X \quad \text{y} \quad \lambda : \Omega X \longrightarrow \Omega X$$

definidas por  $\mu(\alpha, \beta) = \alpha * \beta$  y  $\lambda(\alpha) = \bar{\alpha}$  son funciones continuas. En particular  $\Omega X$  es un  $H$ -grupo.

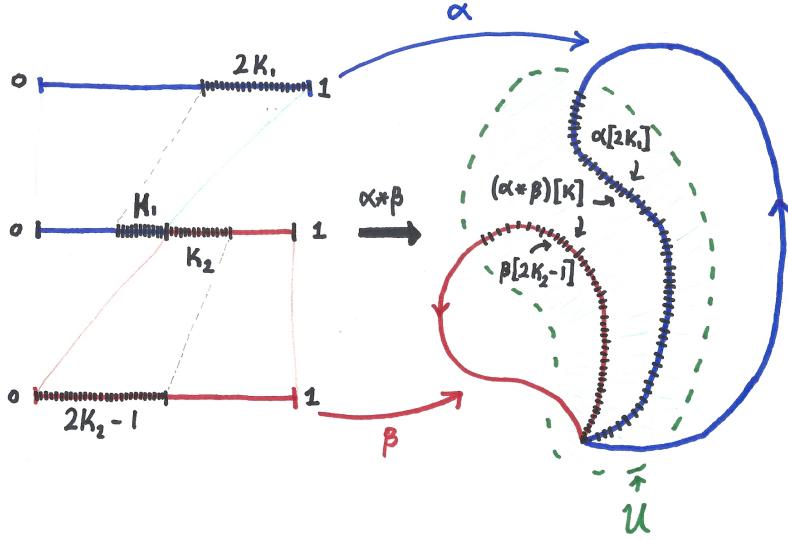


Figure 1.7: La multiplicación en  $\Omega X$  es continua.

*Proof.* Recuerda que la topología compacto-abierta tiene como subbase a todos los conjuntos de la forma

$$B(K, U) := \{\alpha \in \Omega X \mid \alpha[K] \subseteq U\}$$

donde  $K \subseteq I$  es compacto y  $U \subseteq X$  es abierto. A  $K$  la puedo separar como la unión de los dos compactos  $K_1 := K \cap [0, \frac{1}{2}]$  y  $K_2 = K \cap [\frac{1}{2}, 1]$  ( $K_i$  es compacto por ser subespacio cerrado de un compacto). Entonces  $K = K_1 \cup K_2$  y  $B(K, U) = B(K_1, U) \cap B(K_2, U)$  porque  $\alpha[K_1], \alpha[K_2] \subseteq U$  si y sólo si  $\alpha[K_1] \cup \alpha[K_2] = \alpha[K] \subseteq U$ .

Por lo tanto para probar continuidad basta verificar que  $\mu^{-1}[B(K, U)]$  y  $\lambda^{-1}[B(K, U)]$  son abiertos en  $\Omega X \times \Omega X$  y  $\Omega X$  respectivamente, para todo compacto  $K \subseteq I$  y abierto  $U \subseteq X$ .

Sea  $K \subseteq I$  compacto y  $U \subseteq X$  abierto. Afirmo que:

$$\mu^{-1}[B(K, U)] = B(2K_1, U) \times B(2K_2 - 1, U) \quad \text{y} \quad \lambda^{-1}[B(K, U)] = B(1 - K, U)$$

donde  $2K_1$  es la imagen de  $K_1$  bajo la función continua  $x \mapsto 2x$ ; observa que  $2K_1$  es compacto. De manera similar defino  $2K_2 - 1$  y  $1 - K$ .

Para la primera igualdad observa que:

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) \in \mu^{-1}[B(K, U)] &\iff \mu(\alpha, \beta)[K] = (\alpha * \beta)[K] = (\alpha * \beta)[K_1] \cup (\alpha * \beta)[K_2] \subseteq U \\ &\iff (\alpha * \beta)[K_1] \subseteq U \quad \text{y} \quad (\alpha * \beta)[K_2] \subseteq U. \end{aligned}$$

Ahora si  $s \in K_1$  entonces  $(\alpha * \beta)(s) = \alpha(2s)$  y así  $\alpha[2K_1] = (\alpha * \beta)[K_1]$ . Por lo tanto

$$(\alpha * \beta)[K_1] = \alpha[2K_1] \subseteq U \iff \alpha \in B(2K_1, U),$$

y similarmente:

$$(\alpha * \beta)[K_2] = \beta[2K_2 - 1] \subseteq U \iff \beta \in B(2K_2 - 1, U),$$

Con esto concluyo que:

$$(\alpha, \beta) \in \mu^{-1}[B(K, U)] \iff (\alpha, \beta) \in B(2K_1, U) \times B(2K_2 - 1, U)$$

y así  $\mu^{-1}[B(K, U)] = B(2K_1, U) \times B(2K_2 - 1, U)$  es abierto (por ser producto de subácticos).

Por último, como  $\lambda(\alpha)(s) = \bar{\alpha}(s) = \alpha(1 - s)$ , tengo que  $\alpha[1 - K] = \bar{\alpha}[K]$ . Análogamente concluyo que  $\alpha \in \lambda^{-1}[B(K, U)]$  si y sólo si  $\alpha \in B(1 - K, U)$  y así  $\lambda^{-1}[B(K, U)] = B(1 - K, U)$  es abierto.

Con esto termino la prueba. La figura 1.7 ilustra esta demostración. □

Si junto lo anterior con la proposición 9 he probado que

**Corolario 13.**

$$\pi_0(\Omega X, e_0) = [\mathbb{S}^0, \Omega X] \text{ es un grupo.}$$

Vale la pena mencionar cuando vale el regreso de la proposición 9:

Fijo  $(W, w_0)$  en la categoría  $\mathbf{Top}_*$ . La asociación  $(X, x_0) \mapsto \text{Map}_*(X, W)$  es claramente un funtor contravariante a la categoría de conjuntos porque  $\text{Map}_*[\cdot, W] = \text{Hom}(\cdot, W)$ . Recuerda que si  $f \in \text{Map}_*(X, Y)$  entonces  $f^* := \text{Map}_*(f, W) : \text{Hom}(Y, W) \rightarrow \text{Hom}(X, W)$  definido por  $f^*(h) = h \circ f$ .

Resulta que el funtor  $\text{Map}_*(\cdot, W)$  puede pasar a clases de equivalencia precisamente cuando  $W$  es un  $H$ -grupo. Con esto me refiero a que la asociación  $[\cdot, W] : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grupos}$  inducida por  $\text{Map}_*(\cdot, W) : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Conjuntos}$  es un funtor.

**Teorema 14.** *Sea  $(W, w_0)$  un espacio basado. Entonces:*

$$W \text{ es un } H\text{-grupo} \iff [\cdot, W] : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grupos} \text{ es un funtor contravariante.}$$

Existe una construcción dual a la de  $H$ -grupo que nos permite estudiar cuando  $[W, X]$  es un grupo, es decir cuando  $[W, \cdot]$  es un funtor a la categoría de grupos.

Lo que sigue es completamente análogo a la definición de  $H$ -grupo y todas las consecuencias de éste; basta cambiar la dirección de las flechas y cambiar productos por coproductos (ie. producto cuña, cf. lema 9). En particular la multiplicación  $\mu : W \times W \rightarrow W$  se convierte en  $\nu : W \rightarrow W \vee W$ .

**Definición 15.** Sea  $(W, w_0)$  un espacio basado y  $e_0 : W \rightarrow W$  la función constante  $w_0$ .  $(W, \nu, \lambda)$  es un  $H$ -cogrupo si  $W$  viene equipada con dos funciones continuas (basadas)  $\nu : W \rightarrow W \vee W$  y  $\lambda : W \rightarrow W$  que cumplen:

1. (Co-asociatividad)  $(\nu \vee \text{Id}_W) \circ \nu \simeq (\text{Id}_W \vee \nu) \circ \nu$ .
2. (Existencia de Co-neutro)  $(\text{Id}_W, e_0) \circ \nu \simeq \text{Id}_W \simeq (e_0, \text{Id}_W) \circ \nu$ .
3. (Existencia de co-inversos)  $(\text{Id}_W, \lambda) \circ \nu \simeq \text{Id}_W \simeq (\lambda, \text{Id}_W) \circ \nu$ .

Es decir los siguientes diagramas comutan módulo homotopías:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} W \vee W \vee W \xleftarrow{\text{Id} \vee \nu} W \vee W \\ \nu \vee \text{Id} \uparrow \quad \uparrow \nu \\ W \vee W \xleftarrow{\nu} W \end{array} & \begin{array}{c} W \xleftarrow{(\text{Id}, e_0)} W \vee W \xrightarrow{(e_0, \text{Id})} W \\ \text{Id} \searrow \quad \uparrow \nu \quad \swarrow \text{Id} \\ W \end{array} & \begin{array}{c} W \xleftarrow{(\text{Id}, \lambda)} W \vee W \xrightarrow{(\lambda, \text{Id})} W \\ \text{Id} \searrow \quad \uparrow \mu \quad \swarrow \text{Id} \\ W \end{array} \\ \text{Coasociatividad} & \text{Con-neutro} & \text{Co-inversos} \end{array}$$

Tengo un dual a la proposición 9:

*Proposición 10.* Si  $(W, \nu)$  es un  $H$ -cogrupo entonces  $[W, X]$  es un grupo con la operación  $[f] *_\nu [g] := [f *_\nu g] = [(f \vee g) \circ \nu]$ .

*Proof.* Esta prueba es el dual de la prueba de la proposición 9; sólo escribo la asociatividad. Sean  $f, g, h \in [W, X]$  entonces:

$$\begin{aligned} (f *_\nu g) *_\nu h &= ((f *_\nu g) \vee h) \circ \nu = \left( ((f \vee g) \circ \nu) \vee h \right) \circ \nu \\ &\simeq \left( f \vee ((g \vee h) \circ \nu) \right) \circ \nu = (f \vee (g *_\nu h)) \circ \nu \\ &\simeq f *_\nu (g *_\nu h) \end{aligned}$$

donde la homotopía la obtengo al aplicar la proposición 2 a la composición de la función  $f \vee g \vee h$  con ambas funciones que aparecen en la parte de co-asociatividad en la definición de  $H$ -cogrupo.  $\square$

También tengo un dual del teorema 14:

**Teorema 15.** Sea  $(W, w_0)$  un espacio basado. Entonces:

$$W \text{ es un } H\text{-cogrupo} \iff [W, \cdot] : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grupos} \text{ es un functor covariante.}$$

Como había un ejemplo natural de  $H$ -grupo, ie. el espacio de lazos, también hay un ejemplo natural de  $H$ -cogrupo: la suspensión reducida.

Para definir la  $\nu$  requerida en la definición de  $H$ -cogrupo, primero defino  $\nu : X \times I \rightarrow \mathcal{S}X \vee \mathcal{S}X \subset \mathcal{S}X \times \mathcal{S}X$  como

$$\nu(x, t) := \begin{cases} ([x, 2t], \star) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (\star, [x, 2t - 1]) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

donde  $\star \in \mathcal{S}X$  es el punto base canónico de la suspensión reducida.

Observa que cada componente de  $\nu$  es continua porque son composición de funciones continuas, por ejemplo  $(x, t) \mapsto (x, 2t) \mapsto [x, 2t] \mapsto ([x, 2t], \star)$ . Además estas dos funciones continuas coinciden en la intersección de sus dominios:

$$\nu(x, \frac{1}{2}) = ([x, 1], \star) = (\star, \star) = (\star, [x, 0]).$$

Por lo tanto  $\nu$  es continua.

También tengo que  $\nu$  se factoriza a través de  $B = (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (\{x_0\} \times I) \subset X \times I$  porque

$$\nu(x, 0) = ([x, 0], \star) = (\star, \star) = (\star, [x, 1]) = \nu(x, 1) \quad \forall x \in X$$

y

$$\nu(x_0, t) = \begin{cases} ([x_0, 2t], \star) = (\star, \star) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (\star, [x_0, 2t - 1]) = (\star, \star) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Por lo tanto existe una única función  $\bar{\nu} : (X \times I)/B = \mathcal{S}X \rightarrow \mathcal{S}X \vee \mathcal{S}X$  tal que:

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{S}X \vee \mathcal{S}X \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{\nu} & \\ \mathcal{S}X & & \end{array}$$

es un diagrama comutativo. Como  $\nu$  es continua y  $\pi$  una identificación,  $\bar{\nu}$  es continua.

Por otro lado, defino  $\lambda : \mathcal{S}X \rightarrow \mathcal{S}X$  como  $\lambda[x, s] = [x, 1 - s]$  que es continua porque es la composición de las funciones continuas  $(x, s) \mapsto (x, 1 - s) \mapsto [x, 1 - s]$ .

Por último nada más tengo que verificar las propiedades de  $H$ -cogrupo; sólo pruebo la co-asociatividad ya que las demás se demuestran de manera análoga.

Sea  $[x, t] \in \mathcal{S}X$  y calculo:

$$((\bar{\nu} \vee \text{Id}_{\mathcal{S}X}) \circ \bar{\nu})[x, t] = (\bar{\nu} \vee \text{Id}_{\mathcal{S}X})(\bar{\nu}[x, t]) = \begin{cases} (\bar{\nu} \vee \text{Id}_{\mathcal{S}X})([x, 2t], \star) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (\bar{\nu} \vee \text{Id}_{\mathcal{S}X})(\star, [x, 2t - 1]) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

donde  $([x, 2t], \star) \in \mathcal{S}X \times \{\star\} \subset \mathcal{S}X \vee \mathcal{S}X$  y así

$$(\bar{\nu} \vee \text{Id}_{\mathcal{S}X})([x, 2t], \star) = \bar{\nu}[x, 2t] = \nu(x, 2t) =$$

Por otro lado

$$((\text{Id}_{\mathcal{S}X} \vee \bar{\nu}) \circ \bar{\nu})[x, t] = (\text{Id}_{\mathcal{S}X} \vee \bar{\nu})(\bar{\nu}[x, t]) = \begin{cases} (\text{Id}_{\mathcal{S}X} \vee \bar{\nu})([x, 2t], \star) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (\text{Id}_{\mathcal{S}X} \vee \bar{\nu})(\star, [x, 2t - 1]) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

...

.

.

.

.

Con esto he probado que

*Proposición 11.*  $\mathcal{S}X$  es un  $H$ -cogrupo con las operaciones  $\nu : \mathcal{S}X \rightarrow \mathcal{S}X \vee \mathcal{S}X$  y  $\lambda : \mathcal{S}X \rightarrow \mathcal{S}X$ . En particular  $[\mathcal{S}X, Y]$  es un grupo con la operación  $[f] *_{\nu} [g] := [(f \vee g) \circ \bar{\nu}]$ .

Aplico el Teorema 15 a la suspensión para probar:

*Proposición 12.*

$$\pi_n(X, x_0) = [\mathbb{S}^n, X] = [\mathcal{S}(\mathbb{S}^{n-1}), X] \text{ es un grupo } \forall n \geq 1.$$

Junto con 13, concluyo que todo grupo fundamental, de cualquier dimensión es un grupo y además, este hecho se debe a las propiedades intrínsecas de las esferas y que  $\Omega X$  es un  $H$ -grupo.

Ahora que tengo una estructura natural de grupo para los conjuntos  $[\mathcal{S}X, Y]$  y  $[X, \Omega Y]$ , puedo comparar con el ejercicio 11: resulta que la biyección entre  $[\mathcal{S}X, Y]$  y  $[X, \Omega Y]$  es un isomorfismo de grupos:

**Teorema 16.** Sean  $[\mathcal{S}X, Y]$  y  $[X, \Omega Y]$  con su estructura natural de grupo (inducido por la estructura de  $H$ -cogrupo de  $\mathcal{S}X$  y  $H$ -grupo de  $\Omega Y$  respectivamente). La biyección natural  $\Phi : [\mathcal{S}X, Y] \rightarrow [X, \Omega Y]$  es un isomorfismo de grupos, es decir

$$[\mathcal{S}X, Y] \cong [X, \Omega Y].$$

*Proof.* Por el ejercicio 11 basta probar que  $\Phi$ , es un homomorfismo de grupos. Primero sean  $f, g : \mathcal{S}X \rightarrow Y$  y calculo

$$(f \cdot g)[x, t] := ((f \vee g) \circ \bar{n}u)[x, t] = \begin{cases} (f \vee g)([x, 2t], \star) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (f \vee g)(\star, [x, 2t - 1]) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

como  $([x, 2t], \star) \in \mathcal{S}X \times \{\star\}$  y  $(\star, [x, 2t - 1]) \in \{\star\} \times \mathcal{S}X$ , en el primer caso se evalúa con  $f$  y en el segundo caso se evalúa con  $g$ :

$$(f \cdot g)[x, t] = \begin{cases} f[x, 2t] & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g[x, 2t - 1] & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, como  $\Phi(f \cdot g)(x)(t) = (f \cdot g)[x, t]$

Ahora considero  $\Phi(f), \Phi(g) : X \rightarrow \Omega Y$  que están definidos como  $\Phi(f)(x)(t) = f[x, t]$  y  $\Phi(g)(x)(t) = g[x, t]$ . Por lo tanto:

$$\begin{aligned} (\Phi(f) * \Phi(g))(x)(t) &= \left( \mu(\Phi(f)(x), \Phi(g)(x)) \right)(t) = (\Phi(f)(x) * \Phi(g)(x))(t) \\ &= \begin{cases} \Phi(f)(x)(2t) = f[x, 2t] & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \Phi(g)(x)(2t - 1) = g[x, 2t - 1] & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Con esto concluyo que  $\Phi(f \cdot g) = \Phi(f) * \Phi(g)$  y la igualdad para clases de equivalencia es trivial. Por lo tanto  $\Phi$  es un homomorfismo de grupos.  $\square$

Este teorema me da una herramienta poderosa para caracterizar los grupos fundamentales de cualquier dimensión. Sigo los comentarios posteriores al corolario 12:

Aplico la fórmula para la suspensión de la esfera (corolario 12) y la propiedad adjunta de la suspensión y el espacio de lazos para escribir:

$$[\mathbb{S}^n, X] = [\mathcal{S}\mathbb{S}^{n-1}, X] \cong [\mathbb{S}^{n-1}, \Omega X] \quad \forall n \geq 1.$$

Inductivamente tengo:

$$[\mathbb{S}^n, X] \cong [\mathbb{S}^{n-1}, \Omega X] \cong \cdots \cong [\mathbb{S}^1, \Omega^{n-1} X] \cong [\mathbb{S}^0, \Omega^n X],$$

y así puedo concluir:

$$\pi_n(X, x_0) \cong \pi_0(\Omega^n X, \star).$$

En palabras esto quiere decir que todo grupo fundamental es el espacio de componentes conexas de algún espacio.

Esto es un resultado fuerte: me dice que calcular un grupo fundamental se reduce a calcular las componentes conexas del espacio  $\Omega^n X$ . En la práctica calcular su estructura de  $H$ -grupo (y así calcular la estructura de grupo de  $\pi_n(X, x_0)$ ) es complicado pero puedo clasificarlo como espacio topológico con el siguiente lema importante:

**Lema 17.** *Sean  $(X, x_0), (Y, y_0)$  y  $(Z, z_0)$  espacios basados con  $X$  y  $Z$  compactos y Hausdorff. Entonces:*

$$\text{Map}_*(X \wedge Z, Y) \approx \text{Map}_*(X, \text{Map}_*(Z, Y)),$$

*ambas con la topología compacto-abierta. Además, el homeomorfismo es natural.*

Si tomo  $X = \mathbb{S}^{n-1}$  y  $Z = \mathbb{S}^1$  (que son compactos y Hausdorff), entonces este lema dice:

$$\text{Map}_*(\mathbb{S}^n, Y) = \text{Map}_*(\mathbb{S}^{n-1} \wedge \mathbb{S}^1, Y) \approx \text{Map}_*(\mathbb{S}^{n-1}, \text{Map}_*(\mathbb{S}^1, Y)) = \text{Map}_*(\mathbb{S}^{n-1}, \Omega Y).$$

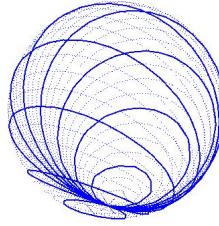
Inductivamente tengo que

$$\text{Map}_*(\mathbb{S}^n, Y) \approx \text{Map}_*(\mathbb{S}^{n-1}, \Omega Y) \approx \dots \approx \text{Map}_*(\mathbb{S}^1, \Omega^{n-1} Y) \approx \text{Map}_*(\mathbb{S}^0, \Omega^n Y). \quad (1.12)$$

Observa que el penúltimo término de (1.12) es exactamente  $\Omega(\Omega^{n-1} Y) = \Omega^n Y$ . Por lo tanto tenemos la siguiente definición - proposición:

$$\Omega^n Y := \text{Map}_*(\mathbb{S}^n, Y) \quad (1.13)$$

lo cual tiene sentido: para  $n = 2$ ,  $\Omega^2 Y = \{\sigma : I \rightarrow \Omega Y \mid \sigma(0) = e_0 = \sigma(1)\}$ , donde cada  $\sigma$  es una familia de lazos  $\{\sigma_t\}_{t \in I}$  que varía continuamente con  $t$ . Además debe empezar y terminar en un punto: el lazo constante  $e_0$ . Intuitivamente, esto significa que la familia de lazos barre una superficie 2-dimensional homeomorfa a  $\mathbb{S}^2$ :



y por esto tiene sentido definir  $\Omega^2 Y := \text{Map}_*(\mathbb{S}^2, Y)$ .

Otra forma de verificar (1.12) es con el siguiente ejercicio:

**Ejercicio 15.** Sea  $(Y, y_0)$  un espacio basado y  $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$ , entonces la biyección canónica:

$$\text{Map}_*(\mathbb{S}^0, Y) \xrightarrow{\psi} Y \quad \text{con} \quad \psi(f) = f(-1)$$

es un homeomorfismo, ie.  $\text{Map}_*(\mathbb{S}^0, Y) \approx Y$ .

*Proof.* A cada  $y \in Y$  le asocio la función  $f_y : \mathbb{S}^0 \rightarrow Y$  con valores  $f_y(1) = y_0$  y  $f_y(-1) = y$ . A la función  $y \mapsto f_y$  la denoto por  $\varphi$ . Demotraré que  $\varphi$  es la inversa de  $\psi$  y que ambas son continuas.

La primera propiedad es clara porque

$$\varphi(\psi(f))(-1) = \varphi(f(-1)) = f_{f(-1)}(-1) = f(-1) \quad \text{y} \quad \psi(\varphi(y)) = \psi(f_y) = f_y(-1) = y.$$

Ahora observa que para  $U \subseteq Y$  abierto,

$$\psi^{-1}[U] := \{f : \mathbb{S}^0 \rightarrow Y \mid f(-1) \in U\} = \{f : \mathbb{S}^0 \rightarrow Y \mid f[\{-1\}] \subseteq K\} = B(K, U) \subset \text{Map}_*(\mathbb{S}^0, Y)$$

donde  $K = \{-1\}$  es un subconjunto compacto de  $\mathbb{S}^0$ . Es decir que  $\psi^{-1}[U]$  es un abierto subásico de la topología compacto-abierta. Por lo tanto  $\psi$  es continua.

Además, si  $B(K, U) \subseteq \text{Map}_*(\mathbb{S}^0, Y)$  es un subásico. Aquí  $K \subseteq \mathbb{S}^0$  es compacto, en particular es uno de los cuatro conjuntos  $\emptyset, \{1\}, \{-1\}, \mathbb{S}^0$ . También  $U \subseteq Y$  es abierto. Por definición:

$$\varphi^{-1}[B(K, U)] = \{y \in Y \mid f_y[K] \subseteq U\}.$$

Calculo este conjunto por casos:

Para  $y_0 \in U$ , tengo

$$\varphi^{-1}[B(\emptyset, U)] = Y = \varphi^{-1}[B(\{1\}, U)] \quad , \quad \varphi^{-1}[B(\{-1\}, U)] = U = \varphi^{-1}[B(\mathbb{S}^0, U)],$$

y para  $y_0 \notin U$ , tengo

$$\varphi^{-1}[B(\emptyset, U)] = Y \quad , \quad \varphi^{-1}[B(\{-1\}, U)] = U \quad , \quad \varphi^{-1}[B(\{1\}, U)] = \emptyset = \varphi^{-1}[B(\mathbb{S}^0, U)].$$

Todos los casos dan conjuntos abiertos. Por lo tanto  $\varphi^{-1}[B(K, U)]$  es abierto para toda  $K$  y  $U$ , y así  $\varphi$  es continua. Esto termina la prueba.  $\square$

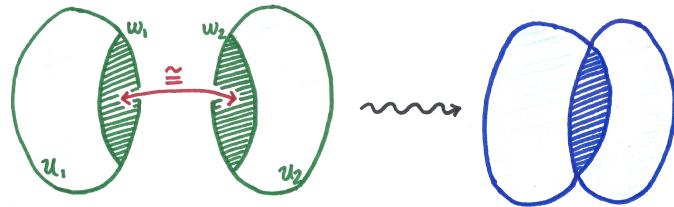
Este ejercicio y (1.13) nos implica que:

**Corolario 18.**

$$\pi_n(X, x_0) \cong \pi_0(\Omega^n X, x_0) \cong \pi_n(\text{Map}_*(\mathbb{S}^n, X))$$

## 1.11 Variedades

En esta sección, desarrollaré la teoría de espacios topológicos que localmente son euclídeos. La idea es pegar conjuntos abiertos de un  $\mathbb{R}^n$  mediante difeomorfismos (definiré este concepto más adelante): si  $U_1$  y  $U_2$  son conjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^n$  con subconjuntos abiertos  $W_i \subseteq U_i$  tales que hay un difeomorfismo  $f : W_1 \rightarrow W_2$ , entonces puedo identificar  $W_1$  con  $W_2$  para obtener un nuevo espacio:



Hago más preciso esta idea con la siguiente lista de definiciones:

**Definición 16.** Sea  $M$  un espacio paracompacto<sup>1</sup> (en particular es Hausdorff). Defino que  $M$  es un *variedad topológica* si para toda  $x \in M$ , existe una vecindad  $U \subseteq M$  alrededor de  $x$  y un homeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow V$  donde  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  es un conjunto abierto. A veces  $M$  se denota por  $M^n$  para determinar a qué espacio euclídeo se parece  $M$  localmente. La pareja  $(U, \varphi)$  es una *carta* de  $M$  alrededor de  $x$  y si  $\Phi = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$  es una familia de cartas de  $M$  tales que  $M = \bigcup U_\lambda$ , se dice que  $\Phi$  es un *atlas* de  $M$ .

La estructura diferenciable de  $\mathbb{R}^n$  la codifico en una variedad topológica a través del atlas:

**Definición 17.** Sea  $\Phi = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$  un atlas de una variedad topológica  $M$ . El atlas  $\Phi$  es un *atlas suave* (ie. de clase  $C^\infty$ ) si para cualesquiera  $\lambda, \mu \in \Lambda$  tales que  $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$  se cumple que

$$\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1} : \varphi_\mu[U_\lambda \cap U_\mu] \rightarrow \varphi_\lambda[U_\lambda \cap U_\mu]$$

es una función de clase  $C^\infty$ . La función  $\varphi_{\mu\lambda} := \varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1}$  se llama el *cambio de coordenadas* de la carta  $(U_\mu, \varphi_\mu)$  a la carta  $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$  (véase la figura ??). En otras palabras, el atlas  $\Phi$  es suave si todos sus cambios de coordenadas son suaves.

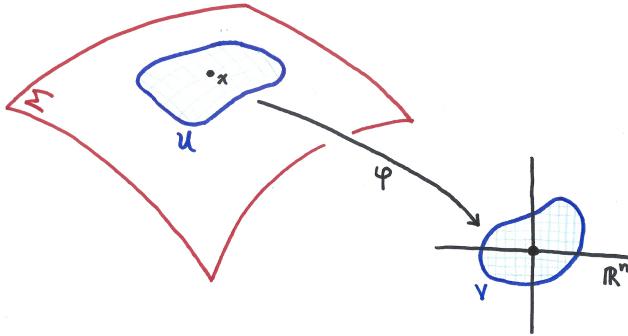
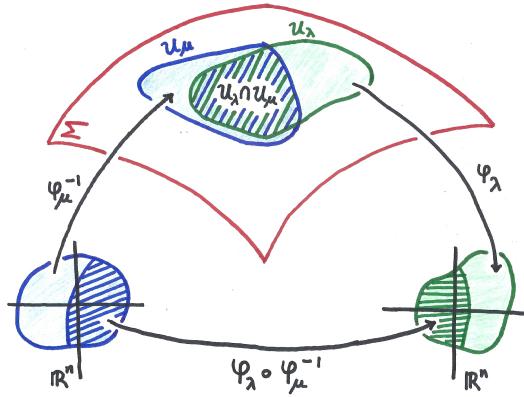


Figure 1.8: Representación gráfica de los cambios de coordenadas de un atlas.



Observa que estudiar la diferenciabilidad de  $\varphi_{\mu\lambda}$  tiene sentido porque su dominio  $\varphi_\mu[U_\lambda \cap U_\mu]$  y su contradominio  $\varphi_\lambda[U_\lambda \cap U_\mu]$  son subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 18.** Sea  $\Phi$  un atlas suave de una variedad topológica  $M$ . El atlas  $\Phi$  es una *estructura diferenciable* de  $M$  si  $\Phi$  es maximal, es decir para toda carta arbitraria  $(U, \psi)$  que cumple que

$$\varphi \circ \psi^{-1} \quad \text{y} \quad \psi \circ \varphi^{-1} \quad \text{son suaves} \quad \forall (V, \varphi) \in \Phi,$$

entonces necesariamente  $(U, \psi) \in \Phi$ .

La maximalidad de un atlas  $\Phi$  dice que toda carta  $(U, \psi)$  compatible con todas las cartas de  $\Phi$  (ie. que los cambios de coordenadas sean suaves) tiene que ser un elemento de  $\Phi$ . Intuitivamente, esto significa que a  $\Phi$ , ya se le ha agregado todas las posibles cartas compatibles. Observa que cualquier atlas  $\Phi$  se puede completar a un atlas maximal, simplemente agregandole todas las posibles cartas compatibles. En la práctica trabajaré con atlas pequeñas (finitas) y cuando hablo de la estructura diferenciable inducida por estos atlas, me refiero tácitamente al atlas maximal que genera el atlas pequeño.

**Definición 19.** Una *variedad diferenciable* es una pareja  $(M, \Phi)$  donde  $M$  es una variedad topológica y  $\Phi$  es una estructura diferenciable.

Ahora analizo unos ejemplos importantes de variedades diferenciables:

**Ejemplo 3.**  $(\mathbb{R}^n)$  Defino  $\iota = \{(\mathbb{R}^n, \text{Id})\}$  que claramente es un atlas suave porque  $\text{Id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un homeomorfismo (suave). Entonces si  $\iota'$  es el atlas maximal generado por  $\iota$  tengo que  $(\mathbb{R}^n, \iota')$  es una variedad diferenciable. A esta estructura diferenciable la llamo la *estructura diferenciable canónica* de  $\mathbb{R}^n$ .

---

<sup>1</sup>Un espacio  $X$  es paracompacto si toda cualquier cubierta abierta  $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$  de  $X$  admite un refinamiento localmente finita, ie. que para todo punto  $x \in X$ , existe una vecindad  $V \subseteq X$  de  $x$  que interseca sólo una cantidad finita de abiertos del refinamiento.

**Ejemplo 4.** ( $\mathbb{S}^n$ ) Primero observa que cualquier atlas de  $\mathbb{S}^n$  debe tener más de una carta porque si tuviera solamente una, ie.  $(\mathbb{S}^n, \varphi)$ , entonces  $\varphi$  sería un homeomorfismo entre  $\mathbb{S}^n$  y un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , pero esto no puede suceder porque  $\mathbb{S}^n$  es compacto. Por lo tanto cualquier atlas de  $\mathcal{S}^n$  debe tener al menos dos cartas. A continuación construyo dos atlas para  $\mathbb{S}^n$ :

Primero defino dos abiertos que cubren a  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Sean  $U_{\pm} := \mathbb{S}^n - \{0, \dots, 0, \pm 1\}$ , es decir  $U_+$  es la esfera menos el polo norte y  $U_-$  es la esfera menos el polo sur. Ahora defino:

$$\varphi_{\pm} : U_{\pm} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{con} \quad \varphi_{\pm}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left( \frac{x_1}{1 \mp x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 \mp x_{n+1}} \right) = \frac{1}{1 \mp x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n).$$

**Ejercicio 16.** El atlas  $\Phi = \{(U_+, \varphi_+), (U_-, \varphi_-)\}$  de  $\mathbb{S}^n$  genera una estructura diferenciable.

*Proof.* Escribo  $N_{\pm} = \{0, \dots, 0, \pm 1\}$  para los polos de  $\mathbb{S}^n$ . Primero verifico que  $\varphi_+$  y  $\varphi_-$  son homeomorfismos. Escribo  $\mathcal{P}_{\pm}$  como los planos en  $\mathbb{R}^{n+1}$  definidos por  $x_{n+1} = \pm 1$ ; estos planos son cerrados entonces  $V_{\pm} := \mathbb{R}^{n+1} - \mathcal{P}_{\pm}$  son abiertos tales que  $V_{\pm} \cap \mathbb{S}^n = U_{\pm}$ .

Ahora, las funciones  $\varphi_{\pm}$  son funciones racionales (cocientes de polinomios) donde el denominador se anula en  $\mathcal{P}_{\pm}$  así que  $\varphi_{\pm}$  es continua (y suave) sobre  $V_{\pm}$ . Por lo tanto  $\varphi_{\pm}$  es continua sobre  $U_{\pm}$ .

Por otro lado, escribo  $\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$  y defino  $\psi_{\pm} : \mathbb{R}^n \rightarrow U_{\pm}$  como

$$\psi_{\pm}(x_1, \dots, x_n) = \left( \frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{\|x\|^2 + 1}, \pm \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right) = \frac{1}{\|x\|^2 + 1}(2x_1, \dots, 2x_n, \pm(\|x\|^2 - 1)).$$

Primero observa que  $x \mapsto \|x\|^2$  es una función polinomial entonces es continua. Esto implica que cada coordenada de  $\psi_{\pm}$  es una función racional donde cada denominador nunca se anula porque  $\|x\|^2 + 1 > 0$ . Entonces  $\psi_{\pm}$  es una función continua; de hecho por la misma razón es una función suave sobre todo  $\mathbb{R}^n$ .

Ahora verifico que el contradominio de  $\psi$  es efectivamente  $U_{\pm}$ : observa que  $\|x\|^2 - 1 < \|x\|^2 + 1$  entonces el cociente  $(\|x\|^2 - 1)/(\|x\|^2 + 1)$  nunca puede ser 1. El cociente sólo puede ser  $-1$  si  $\|x\|^2 = 0$ , es decir  $x = 0$ . En este caso:  $\psi_+(0) = N_-$  y  $\psi_-(0) = N_+$  entonces puedo concluir que la última coordenada de  $\psi_{\pm}$  nunca es  $\pm 1$  y así el contradominio de  $\psi_{\pm}$  es un subconjunto de  $V_{\pm}$ .

Para ver que la imagen de  $\psi_{\pm}$  es  $U_{\pm}$  basta calcular la norma de  $\psi_{\pm}(x)$ . Escribo  $t = (\|x\|^2 + 1)^{-1}$  para simplificar las cuentas:

$$\begin{aligned} \|\psi_{\pm}(x)\|^2 &= \|(2tx_1, \dots, 2tx_n, t(\|x\|^2 - 1))\|^2 \\ &= t^2(\|x\|^2 - 1)^2 + 4t^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ &= t^2(\|x\|^4 - 2\|x\|^2 + 1 + 4\|x\|^2) \\ &= t^2(\|x\|^2 + 1)^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\varphi_{\pm}(x) \in U_{\pm}$  para toda  $x \in \mathbb{R}^n$ , y concluyo que  $\psi_{\pm} : \mathbb{R}^n \rightarrow U_{\pm}$  es una función continua.

Ahora verifico que  $\psi_{\pm}$  es el inverso de  $\varphi_{\pm}$ . Denoto  $s = (1 \mp x_{n+1})^{-1}$  para simplificar la notación y calculo:

$$\begin{aligned} \psi_{\pm}(\varphi_{\pm}(x_1, \dots, x_{n+1})) &= \psi_{\pm}((sx_1, \dots, sx_n)) = \psi_{\pm}(sx) \\ &= \frac{1}{\|sx\|^2 + 1}(2sx_1, \dots, 2sx_n, \pm(\|sx\|^2 - 1)) \end{aligned} \tag{1.14}$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{2sx_i}{\|sx\|^2 + 1} &= \frac{2sx_i}{s^2\|x\|^2 + 1} = \frac{2x_i}{s\|x\|^2 + s^{-1}} = \frac{2x_i}{s(1 - x_{n+1}^2) + s^{-1}} \\ &= \frac{2x_i}{s(1 - x_{n+1})(1 + x_{n+1}) + (1 \mp x_{n+1})} = \frac{2x_i}{(1 \pm x_{n+1}) + (1 \mp x_{n+1})} = \frac{2x_i}{2} \\ &= x_i \quad \forall i = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{1.15}$$

porque  $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$  implica que  $\|(x_1, \dots, x_n)\|^2 = 1 - x_{n+1}^2$ . Además:

$$\begin{aligned} \frac{\|sx\|^2 - 1}{\pm(\|sx\|^2 + 1)} &= \frac{s^2\|x^2\| - 1}{\pm s^2\|x\|^2 \pm 1} = \frac{\|x\|^2 - s^{-2}}{\pm\|x\|^2 \pm s^{-2}} = \frac{(1 - x_{n+1}^2) - (1 \mp x_{n+1})^2}{\pm(1 - x_{n+1}^2) \pm (1 \mp x_{n+1})^2} \\ &= \frac{1 - x_{n+1}^2 - 1 \pm 2x_{n+1} - x_{n+1}^2}{\pm 1 \mp x_{n+1}^2 \pm 1 - 2x_{n+1} \pm x_{n+1}^2} = \frac{\pm 2x_{n+1}(1 \mp x_{n+1})}{\pm 2(1 \mp x_{n+1})} \\ &= x_{n+1}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Por lo tanto si sustituyo (1.15) y (1.16) en (1.14) obtengo:

$$\psi_{\pm}(\varphi_{\pm}(x_1, \dots, x_{n+1})) = (x_1, \dots, x_{n+1}) \implies \psi_{\pm} \circ \varphi_{\pm} = \text{Id}_{\mathbb{R}^{n+1}}$$

Por otro lado si retomo la notación  $t = (\|x\|^2 + 1)^{-1}$  para  $x = (x_1, \dots, x_n)$  tengo:

$$\begin{aligned} \varphi_{\pm}(\psi_{\pm}(x)) &= \varphi_{\pm}(2tx_1, \dots, 2tx_n, \pm t(\|x\|^2 - 1)) = \left( \frac{2tx_i}{1 \mp (\pm t\|x\|^2 \mp t)} \right)_{i=1}^n \\ &= \left( \frac{2tx_i}{1 - t\|x\|^2 + t} \right)_{i=1}^n = \left( \frac{2x_i}{t^{-1} - \|x\|^2 + 1} \right)_{i=1}^n \\ &= \left( \frac{2x_i}{\|x\|^2 + 1 - \|x\|^2 + 1} \right)_{i=1}^n = \left( \frac{2x_i}{2} \right)_{i=1}^n \\ &= x \\ \therefore \varphi_{\pm} \circ \psi_{\pm} &= \text{Id}_{\mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

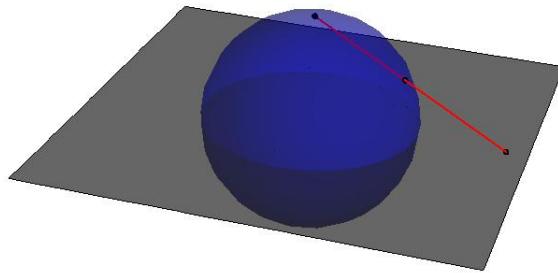
Resumo lo que he hecho:  $\varphi_{\pm} : U_{\pm} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\psi_{\pm} : \mathbb{R}^n \rightarrow U_{\pm}$  son funciones continuas y suaves (por ser racionales en cada coordenada) e inversos entre sí, es decir  $\varphi_{\pm}^{-1} = \psi_{\pm}$ .

Además, esto prueba que los cambios de coordenadas  $\varphi_+ \circ \varphi_-^{-1} = \varphi_+ \circ \psi_-$  y  $\varphi_- \circ \varphi_+^{-1} = \varphi_- \circ \psi_+$  son suaves porque son composición de funciones suaves. Observa que tácitamente estoy restringiendo las  $\psi_{\pm}$  a  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  para que los cambios de coordenadas estén bien definidos; esto no afecta la diferenciabilidad de éstas.

Con esto termino de probar que  $\Phi$  es un atlas suave y así genera un atlas maximal que es una estructura diferenciable de  $\mathbb{S}^n$ .  $\square$

A estas cartas se les llaman *proyecciones estereográficas*: en general la función  $\varphi_+$  le asigna a  $x \in \mathbb{S}^n$  el punto de intersección del subespacio  $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  con la recta que une el polo norte con  $y \in \mathbb{S}^n$ :

De hecho esta construcción es lo que me permitió darle una fórmula explícita a las funciones inversas de las proyecciones estereográficas: parametrizé el segmento de recta que empieza en el polo norte, y termina en un punto  $x \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , después calculé el valor del parámetro para que me de un punto sobre la esfera. Resumo este proceso en el siguiente dibujo:



**Ejemplo 5.** ( $\mathbb{S}^n$ ) En la proposición 8 de la sección 1.9 introduce las funciones  $\rho_{\pm}$  que relacionaban los hemisferios de la esfera con el disco como subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . Con estas funciones doy otro atlas para la esfera que resulta útil (cambiaré un poco la notación): sea  $\mathbb{D}_n \subset \mathbb{R}^n$  el disco unitario de radio 1 alrededor

del 0 y sea  $\overset{\circ}{\mathbb{D}}$  el interior del disco y defino  $V_i^\pm := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid \pm x_i > 0\}$  como los distintos hemisferios abiertos (de dimensión  $n$ ) de la esfera. Con esto escribo

$$h_i^\pm : V_i^\pm \longrightarrow \overset{\circ}{\mathbb{D}} \quad \text{con} \quad h_i^\pm(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1})$$

donde la notación  $\hat{x}_i$  significa que omito esa coordenada del vector, es decir  $(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$ . Aquí uso la letra  $h$  para denotar “hemisferio”.

Como todo elemento  $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$  tiene al menos una coordenada distinta de cero, por ejemplo  $x_i$ , entonces  $x \in V_i^+$  o  $x \in V_i^-$  y así  $\mathbb{S}^n = \cup V_i^\pm$  entonces  $\mathcal{H} = \{(h_i^+ V_i^+), (h_i^-, V_i^-)\}_{i=1}^{n+1}$  es un atlas con  $2(n+1)$  cartas. En efecto, cada  $h_i^\pm$  es un homeomorfismo porque las funciones:

$$\rho_i^\pm : \overset{\circ}{\mathbb{D}} \longrightarrow V_i^\pm \quad \text{con} \quad \rho_i^\pm(x_1, \dots, x_n) = \left( x_1, \dots, x_{i-1}, \pm \sqrt{1 - \sum x_k^2}, x_i, \dots, x_n \right)$$

es el inverso de  $h_i^\pm$  (ve la proposición 8 para ver porque  $\rho_i^\pm$ , y así  $h_i^\pm$ , es un homeomorfismo). En otras palabras,  $\rho_i^\pm$  inserta el término  $(\sum x_k^2)^{1/2}$  en la  $i$ -ésimo lugar para obtener un vector en  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Con esto tengo que  $\rho_i^\pm = (h_i^\pm)^{-1}$ .

El atlas  $\mathcal{H}$  es suave porque para  $i < j$  tengo:

$$\begin{aligned} h_i^\pm \circ (h_j^\pm)^{-1}(x) &= h_i^\pm \circ \rho_j^\pm(x_1, \dots, x_n) = h_i^+ \left( x_1, \dots, x_{j-1}, \pm \sqrt{1 - \sum x_k^2}, x_j, \dots, x_n \right) \\ &= (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \pm \sqrt{1 - \sum x_k^2}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

que es claramente una función suave porque  $\sum x_k^2 \leq 1$  ya que  $x$  es un elemento del disco unitario. Los otros casos  $j > i$ ,  $j = i$  o  $h_j^\mp$  son equivalentes o triviales. Por lo tanto todos los cambios de coordenadas son suaves y así  $\mathcal{H}$  es un atlas suave.

He dado dos atlas para  $\mathbb{S}^n$ ,  $\Phi$  y  $\mathcal{H}$ , pero resulta que definen la misma estructura diferenciable, entonces las variedades diferenciables  $(\mathbb{S}^n, \Phi)$  y  $(\mathbb{S}^n, \mathcal{H})$  son exactamente el mismo porque el atlas maximal que generan  $\Phi$  y  $\mathcal{H}$  son el mismo. Para probar esto, sólo hay que probar que los cambios de coordenadas  $\varphi_\pm \circ (h_i^\pm)^{-1}$  y  $h_i^\pm \circ \varphi_\pm^{-1}$  son suaves y así garantizamos que todas las cartas de  $\Phi$  y  $\mathcal{H}$  son elementos del atlas maximal que generan ambos.

**Ejercicio 17.** Los atlas  $\Phi$  y  $\mathcal{H}$  de  $\mathbb{S}^n$  son compatibles.

*Proof.* Debo probar que los cambios de coordenadas  $\varphi_\pm \circ (h_i^\pm)^{-1}$  y  $h_i^\pm \circ \varphi_\pm^{-1}$  son suaves; sólo me enfocaré en los casos cuando el signo de las cartas  $h_i^\pm$  es +, la prueba con el otro signo es análoga porque las reglas de correspondencia de  $h_i^+$  y  $h_i^-$  son exactamente iguales.

Ahora si  $i \neq n+1$ , entonces para toda  $x \in V_i^+$  tengo que  $\pm x_i > 0$  y así  $\pm x_{n+1} \neq 1$  porque si se da la igualdad tendré  $\|x\|^2 \geq x_i^2 + x_{n+1}^2 > 1$  lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $x \in U_\pm$  y así  $V_i^+ \subset U_+, U_-$  para toda  $i = 1, \dots, n$ . Si  $i = n+1$  entonces los polos  $N^+ \in V_{n+1}^+$  y  $N^- \notin V_{n+1}^+$ . Por lo tanto:

$$U_* \cap V_i^+ = \begin{cases} V_i^+ & \text{si } i = 1, \dots, n \\ V_{n+1}^+ & \text{si } * = -, \quad i = n+1 \\ V_{n+1}^+ - \{N^+\} & \text{si } * = +, \quad i = n+1 \end{cases}$$

Observa que el dominio de  $\varphi_\pm \circ (h_i^+)^{-1}$ , para  $i \neq n+1$ , es  $h_i^+[V_i^+] = \overset{\circ}{\mathbb{D}}$ , entonces para  $x = (x_1, \dots, x_n)$  en el interior del disco unitario tengo (escribo  $r = (1 - \sum x_k^2)^{1/2}$  para simplificar la notación)

$$\varphi_\pm \circ (h_i^+)^{-1}(x) = \varphi_\pm \circ \rho_i^+(x) = \varphi_\pm(x_1, \dots, x_{i-1}, r, x_i, \dots, x_n) = \left( \frac{x_1}{1 \mp x_n}, \dots, \frac{r}{1 \mp x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{1 \mp x_n} \right)$$

que es claramente suave porque  $1 > \|x\| \leq \mp x_n$ .

Si  $i = n+1$  tengo dos casos, el dominio de  $\varphi_- \circ (h_{n+1}^+)^{-1}$  sigue siendo el disco abierto unitario, entonces:

$$\varphi_- \circ (h_{n+1}^+)^{-1}(x) = \varphi_-(x_1, \dots, x_n, r) = \left( \frac{x_1}{1+r}, \dots, \frac{x_n}{1+r} \right),$$

pero siempre tengo que  $r > 0$  porque  $x$  está en el interior del disco unitario. Por lo tanto  $\varphi_- \circ (h_{n+1}^+)^{-1}$  es suave.

Por otro lado el dominio de  $\varphi_+ \circ (h_{n+1}^+)^{-1}$  es

$$h_{n+1}^+ [V_{n+1}^+ - \{N^+\}] = \mathring{\mathbb{D}} - \{h_{n+1}^+(N^+)\} = \mathring{\mathbb{D}} - \{(0, \dots, 0, \hat{1})\} = \mathring{\mathbb{D}} - \{0\},$$

entonces si  $x \neq 0$  tengo que  $r \neq 1$  y así

$$\varphi_+ \circ (h_{n+1}^+)^{-1}(x) = \varphi_+(x_1, \dots, x_n, r) = \left( \frac{x_1}{1-r}, \dots, \frac{x_n}{1-r} \right),$$

es suave porque los denominadores nunca se anulan. Con esto concluyo que todos los cambios de coordenadas  $\varphi_\pm \circ (h_i^+)^{-1}$  son suaves.

Para ver la diferenciabilidad de los cambios de coordenadas  $h_i^+ \circ \varphi_\pm^{-1}$  veré que estas funciones son restricciones de funciones suaves definidos sobre todo  $\mathbb{R}^n$ .

Sea  $x \in \mathbb{R}^n$ . Como  $\varphi_\pm^{-1} = \psi_\pm$  es una función suave, y proyectar sobre un subespacio  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  (ie. olvidar la  $i$ -ésima coordenada) es suave, la composición:

$$x \mapsto \left( \frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{\|x\|^2 + 1}, \pm \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right) \mapsto \left( \frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}, \dots, \widehat{\frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}}, \dots, \frac{2x_n}{\|x\|^2 + 1}, \pm \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right)$$

es suave (observa que no hay problema si  $i = n+1$  como en el caso anterior). Por lo tanto, si restringo esta composición a  $\varphi_\pm[U_\pm \cap V_i^+] \subset \mathbb{R}^n$  obtengo el cambio de coordenadas  $h_i^+ \circ \varphi_\pm^{-1} = h_i^+ \circ \psi_\pm$  que, por lo tanto, es suave.

Con todo esto concluyo que todos los posibles cambios de coordenadas entre los atlas  $\Phi$  y  $\mathcal{H}$  son suaves. Por lo tanto ambos atlas generan el mismo atlas maximal y así la misma estructura diferenciable de  $\mathbb{S}^n$ , es decir  $\Phi$  y  $\mathcal{H}$  son compatibles.  $\square$

**Ejemplo 6.** ( $\mathbb{R}$ ) Defino el atlas  $\Theta$  con única carta  $(\mathbb{R}, x \mapsto x^3)$ . Claramente es un atlas porque  $x \mapsto x^3$  es un homeomorfismo (con inverso  $x \mapsto x^{1/3}$  que es continua). Además  $\Theta$  es suave porque nada más tiene una carta. A diferencia del ejemplo 3 (con  $n = 1$ ), este atlas no es compatible con el atlas canónico  $\iota$  de  $\mathbb{R}$ :

**Ejercicio 18.** Los atlas  $\iota$  y  $\Theta$  de  $\mathbb{R}$  no son compatibles, es decir algún cambio de coordenadas no es una función suave.

*Proof.* Denoto  $f$  como la función  $x \mapsto x^3$ , es decir  $(\mathbb{R}, f)$  es la carta de  $\Theta$ . Ahora,  $f^{-1}$  no es una función suave en  $x = 0$  porque su derivada:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

no está bien definida en  $x = 0$  porque se hace arbitrariamente grande alrededor del 0, es decir  $(f^{-1})'(x) \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow 0$ . Por lo tanto el cambio de coordenadas  $\text{Id}_{\mathbb{R}} \circ f^{-1} = f^{-1}$ , que está definido sobre  $f^{-1}[\mathbb{R} \cap \mathbb{R}] = \mathbb{R}$ , no es suave sobre todo su dominio.

Esto quiere decir que la carta  $(\mathbb{R}, f)$  no está en el atlas maximal generado por el atlas canónico  $\iota$  y así las estructuras diferenciables de las variedades  $(\mathbb{R}, \iota)$  y  $(\mathbb{R}, \Theta)$  no son la misma.  $\square$

El atlas  $\mathcal{H}$  de la esfera me permite definirle una estructura diferenciable sobre el espacio proyectivo real:

**Definición 20.** El *espacio proyectivo real* de dimensión  $n$ , denotado por  $\mathbb{R}P^n$  es el espacio cociente:

$$\mathbb{R}P^n := \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}/\sim$$

donde  $x \sim y$  si existe un escalar  $\lambda > 0$  tal que  $x = \lambda y$ . A la proyección canónica, la denoto por  $p : (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}P^n$ .

Observa que toda  $x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  cumple  $[x] = [\|x\|^{-1}x]$ , donde  $\hat{x} := \|x\|^{-1}x$  es un elemento de  $\mathbb{S}^n$ . Por lo tanto  $[x_1] \neq [x_2]$  implica  $[\|x_1\|^{-1}x_1] \neq [\|x_2\|^{-1}x_2]$  y en particular  $\hat{x}_1 \neq \hat{x}_2$ . Como  $\mathbb{S}^n$  es Hausdorff, existen vecindades  $U_1$  y  $U_2$  que separan los  $\hat{x}_1$  y  $\hat{x}_2$  y así  $V_i = \{[z] \mid \hat{z} \in U_i\}$  son abiertos de  $\mathbb{R}P^n$  que separan a  $[x_1]$  de  $[x_2]$ : claramente  $p[V_i]$  es el cono abierto generado por todas las rectas que pasan por el origen y pasan por  $V_i$  y si  $[z] \in V_1 \cap V_2$  entonces  $\hat{z} \in U_1 \cap U_2 = \emptyset$  por lo tanto  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ .

El proceso de tomar cocientes la podemos separar en dos: la idea es que estamos contrayendo todas las rectas que pasan por el origen a puntos. Como cada recta de estas tienen dos vectores directores unitarios, podemos primero contraer cada recta a dos puntos sobre la esfera  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  y después identificar ambos vectores directores. Si  $x$  es un vector unitario director de una recta, entonces  $-x$  es el otro vector director unitario.

Estas ideas sugieren que el espacio proyectivo real de dimensión  $n$  es la esfera  $\mathbb{S}^n$  módulo antípodas, es decir  $x \sim -x$ . De hecho, esto es verdadero:

**Ejercicio 19.** A la esfera  $\mathbb{S}^n$  le defino la relación de equivalencia  $x \sim -x$  donde relaciono cada punto con su antípoda. En este caso se cumple que:

$$\mathbb{R}P^n \approx \mathbb{S}^n / \sim$$

*Proof.* Considera la restricción  $\hat{\nu} := \nu|_{\mathbb{S}^n} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  de la proyección canónica  $\nu : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ . Claramente es una función sobre porque  $[x] = [\|x\|^{-1}x] \in \mathbb{R}P^n$ , además

$$\hat{\nu}(x) = \hat{\nu}(y) \iff \exists \lambda \neq 0 \text{ tal que } \lambda x = y \iff x \sim y$$

donde la última equivalencia se cumple porque  $x, y \in \mathbb{S}^n$  y necesariamente  $\lambda = \pm 1$ . Por lo tanto  $\hat{\nu}$  se factoriza a través de la proyección  $q : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n / \sim$ , es decir existe una única función continua biyectiva  $\varphi$  tal que hace comutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \xrightarrow{\hat{\nu}} & \mathbb{R}P^n \\ q \downarrow & \nearrow \varphi & \\ \mathbb{S}^n / \sim & & \end{array}$$

Como  $\mathbb{S}^n$  es compacto y  $\mathbb{R}P^n$  es Hausdorff,  $\varphi$  es un homeomorfismo.  $\square$

Esta nueva descripción del espacio proyectivo nos permite darle una estructura diferenciable a  $\mathbb{R}P^n$  con el atlas  $\mathcal{H}$  de  $\mathbb{S}^n$ .

**Ejemplo 7.** Los dos hemisferios  $V_i^+$  y  $V_i^-$  se identifican bajo el cociente  $\mathbb{S}^n / \sim$  porque  $x \in V_i^+ \iff -x \in V_i^-$ . Por lo tanto  $q[V_i^+] = q[V_i^-] =: V_i$  es un abierto del espacio proyectivo. Como las  $V_i^\pm$  cubrían a  $\mathbb{S}^n$ , entonces las  $V_i$  cubren a  $\mathbb{R}P^n$ .

Para toda  $x \in \mathbb{R}P^n$  tengo que  $q^{-1}[x] = \{x, -x\}$  lo cual implica que  $q$  es inyectiva restringido a un conjunto  $V \subseteq \mathbb{S}^n$  si y sólo si existen  $x \in V \implies -x \notin V$ . Las  $V_i^\pm$  cumplen esto ya que

$$x \in V_i^\pm \implies m \pm x_i > 0 \implies \mp x_i < 0 \implies -x \notin V_i^\mp$$

Entonces la restricción  $q_i := q|_{V_i^+}$  tiene inverso izquierdo. Lo llamo  $\tilde{g}_i$ .

Para cada  $V_i \subset \mathbb{R}P^n$  defino la carta  $(V_i, h_i)$  como:

$$\begin{array}{ccc} V_i^+ & \xrightarrow{h_i^+} & \overset{\circ}{\mathbb{D}} \\ \tilde{g}_i \uparrow & \nearrow h_i & \\ V_i & & \end{array}$$

Claramente  $h_i$  es un homeomorfismo. El atlas  $\mathfrak{h} = \{(V_i, h_i)\}_{i=1}^n$  de  $\mathbb{R}P^n$  es una estructura diferenciable porque  $\mathcal{H}$  es una estructura diferenciable sobre  $\mathbb{S}^n$ .

Una manera de construir nuevas variedades diferenciables es con el producto cartesiano:

**Proposición 13.** Sean  $M$  y  $N$  variedades suaves de dimensión  $m$  y  $n$  respectivamente. Si  $M$  tiene el atlas  $\mathcal{M} = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$  y  $N$  tiene el atlas  $\mathcal{N} = \{(V_\omega, \psi_\omega)\}_{\omega \in \Omega}$  entonces  $M \times N$  es una variedad suave de dimensión  $n + m$  con atlas

$$\mathcal{M} \times \mathcal{N} := \{(U_\lambda \times V_\omega, \varphi_\lambda \times \psi_\omega)\}_{(\lambda, \omega) \in \Lambda \times \Omega}$$

Otra manera de construir variedades es tomar subconjuntos abiertos de variedades:

**Ejercicio 20.** Sea  $M$  una variedad suave de dimensión  $m$  con atlas  $\mathfrak{A} = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ . Todo subconjunto abierto  $U$  de  $M$  también es una variedad suave con el atlas  $\mathfrak{A}_U = \{(U_\lambda \cap U, (\varphi_\lambda)|_U)\}_{\lambda \in \Lambda}$ .

*Proof.* Como cada  $\varphi_\lambda : U_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un homeomorfismo sobre su imagen, entonces la restricción  $(\varphi_\lambda)|_U : U_\lambda \cap U \rightarrow \varphi_\lambda[U_\lambda \cap U]$  es un homeomorfismo. Como la familia  $\{U_\lambda\}$  es una cubierta abierta de  $M$ , la familia  $\{U_\lambda \cap U\}$  de abiertos cubren a  $U$ . Por lo tanto  $\mathfrak{A}_U$  es un atlas.

Ahora considera un cambio de coordenadas arbitrario

$$f = (\varphi_\lambda)|_U \circ (\varphi_\mu)|_U^{-1} : (\varphi_\mu)|_U[U_\lambda \cap U_\mu \cap U] \longrightarrow (\varphi_\lambda)|_U[U_\lambda \cap U_\mu \cap U]$$

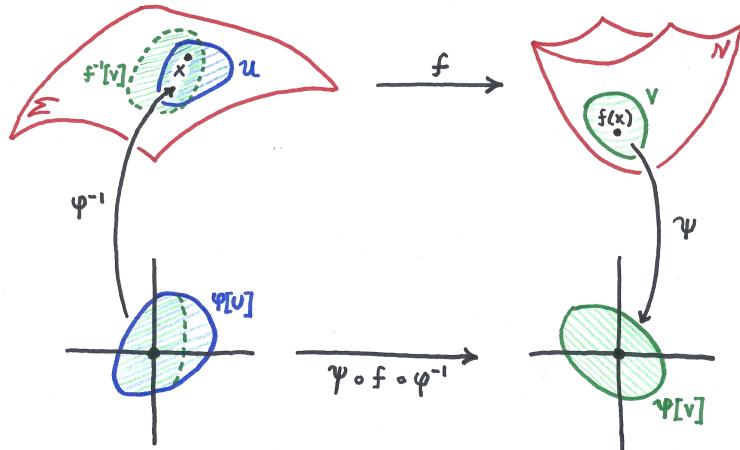
y observa que es igual a la función  $(\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1})|_U$  que es la restricción de un cambio de coordenadas del atlas  $f\mathfrak{A}$ . Como éste es suave, el cambio de coordenada  $f$  del atlas  $\mathfrak{A}_U$  también es suave. Por lo tanto  $\mathfrak{A}_U$  es un atlas diferenciable sobre  $U$ .  $\square$

Ahora defino los morfismos entre variedades suaves:

**Definición 21.** Sean  $M^m$  y  $N^n$  variedades suaves y  $f : M \rightarrow N$  una función continua. La función  $f$  es *suave* si para toda  $x \in M$  hay una carta  $(U, \varphi)$  de  $M$  alrededor de  $x$  y una carta  $(V, \psi)$  de  $N$  alrededor de  $f(x)$  tal que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi[U \cap f^{-1}[V]] \longrightarrow \psi[V]$$

es una función suave en  $\mathbb{R}^m$ .



Claramente la categoría  $\mathbf{Var}^\infty$  de variedades suaves es una categoría con las funciones suaves como morfismos. Un isomorfismo en esta categoría se llama *difeomorfismo* y si existe un difeomorfismo entre dos variedades  $M$  y  $N$  lo denoto por  $M \cong N$ .

**Ejercicio 21.** Las variedades suaves  $\mathbb{R}_t := (\mathbb{R}, t)$  y  $\mathbb{R}_\Theta := (\mathbb{R}, \Theta)$  son difeomorfos.

*Proof.* Defino  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como  $f(x) = x^{1/3}$  y  $g(x) = x^3$ . Observa que  $(\mathbb{R}, g)$  es la única carta de  $\Theta$ , entonces denotaré por  $g_\Theta$  como la carta y  $g$  como la función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  apesar de que sean la misma función. Claramente  $f \circ g = \text{Id}_\mathbb{R} = g \circ f$  y el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}_t & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}_\Theta & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}_t & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}_\Theta \\ \downarrow \text{Id} & & \downarrow g_\Theta & & \downarrow \text{Id} & & \downarrow g_\Theta \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{g_\Theta \circ f \circ \text{Id}^{-1}} & \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{Id} \circ g \circ g_\Theta^{-1}} & \mathbb{R} & \xrightarrow{g_\Theta \circ f \circ \text{Id}^{-1}} & \mathbb{R} \end{array}$$

es commutativo. Los dos cambios de coordenadas son claramente suaves porque

$$g \circ f \circ \text{Id}^{-1} = \text{Id} = \text{Id} \circ g \circ g_{\Theta}^{-1}$$

Por lo tanto  $f$  y  $g$  son funciones suaves tales que  $f \circ g = \text{Id} = g \circ f$  entonces  $R_\iota$  y  $\mathbb{R}_\Theta$  son difeomorfos.  $\square$

Es importante notar que la clase de variedades suaves con funciones suaves como morfismos forma una categoría que llamo **Variedades**. Esto se debe a que la identidad  $\text{Id} : M \rightarrow M$  siempre es suave y la composición de dos funciones suaves es suave. Al conjunto de morfismos entre dos objetos en **variedades** la llamo

$$C^\infty(M, N) = \left\{ M \xrightarrow{f} N \mid f \text{ es suave} \right\}.$$

En particular el conjunto  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  nos dice mucho sobre las propiedades de  $M$ . Como  $R$  es una variedad suave,  $C^\infty(\cdot, \mathbb{R})$  es un funtor contravariante a la categoría de  $\mathbb{R}$ -álgebra. En efecto:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad y \quad (fg)(x) := f(x)g(x)$$

le definen una estructura de anillo commutativo con 1 a  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  y además, el subanillo de las funciones constantes es isomorfo a  $\mathbb{R}$  y así  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  es un  $\mathbb{R}$ -álgebra.

$C^\infty(M, \mathbb{R})$  también tiene estructura de  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial, entonces podemos definir su espacio dual:

$$C^\infty(M, \mathbb{R})^* := \left\{ C^\infty(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{v} \mathbb{R} \mid v \text{ es lineal} \right\}$$

Una vez mencionado esto, defino:

**Definición 22.** Una *derivación* en  $x \in M$  es un funcional lineal  $d : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f \mapsto df$  que cumple la regla de Liebniz:  $d(fg) = g(x)df + f(x)dg$ . El conjunto de todas las derivaciones en  $x$  se llama el *espacio tangente* de  $M$  en  $x$ :

$$T_x M := \left\{ d \in C^\infty(M, \mathbb{R})^* \mid d(fg) = g(x)df + f(x)dg \quad \forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \right\}$$

Observa que  $T_x M$  es un subespacio vectorial de  $C^\infty(M, \mathbb{R})^*$  porque si  $d, d' \in T_x M$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$  es un escalar entonces

$$\begin{aligned} (d + \lambda d')(fg) &= d(fg) + \lambda d'(fg) \\ &= g(x)df + f(x)dg + \lambda g(x)d'f + \lambda f(x)d'g \\ &= g(x)(df + \lambda d'f) + f(x)(dg + \lambda d'g) \\ &= g(x)(d + \lambda d')(f) + f(x)(d + \lambda d')(g) \end{aligned}$$

y  $T_x M$  es cerrado bajo combinaciones lineales. Además es claro que el funcional lineal 0 cumple la regla de Leibniz.

Tomar derivadas parciales es el primer ejemplo de una derivación: Sea  $M$  una variedad suave y  $x \in M$ . Si  $(U, \varphi)$  una carta alrededor de  $x$  entonces  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  y así es de la forma  $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$  donde  $x_i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ . Con esto defino el siguiente funcional lineal:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x (f) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(x))$$

donde la segunda derivada es la usual de  $\mathbb{R}^n$ . El funcional lineal  $\partial/\partial x_i|_x$  es una derivación porque la derivada usual es lineal y como toda carta se puede expresar con  $n$  coordenadas, entonces

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_x \right\}$$

es una base de  $T_x M$ .

Si considero la categoría de variedades suaves basadas, denotado por **Variedades**<sub>\*</sub>, parece que  $(M, x) \mapsto T_x M$  es un funtor a la categoría de espacios vectoriales sobre  $\mathbb{R}$ , pero para probar esto necesito saber cómo transforma este funtor a las funciones suaves  $f : (M, x) \rightarrow (N, y)$ .

**Definición 23.** Sea  $F : (M, x) \rightarrow (N, y)$  una función suave entre variedades suaves basadas. Entonces el diferencial de  $F$  en  $x$  lo defino como la función:

$$D_x F : T_x M \longrightarrow T_y N \quad \text{con} \quad (D_x F(d))(f) = d(f \circ F)$$

**Ejercicio 22.** Para toda  $x \in M$ ,  $D_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  es lineal.

*Proof.* Sean  $d, d' \in T_x M$  derivaciones y  $\lambda \in \mathbb{R}$  un escalar. Entonces para toda  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned} D_x F(d + \lambda d')(f) &= (d + \lambda d')(f \circ F) = d(f \circ F) + \lambda d'(f \circ F) = D_x F(d)(f) + \lambda D_x F(d')(f) \\ \therefore D_x F(d + \lambda d') &= D_x F(d) + \lambda D_x F(d') \end{aligned}$$

entonces  $D_x F$  es una transformación lineal.  $\square$

Ahora defino lo necesario para estudiar las 'inclusiones' en la categoría de las variedades suaves:

**Definición 24.** Sea  $M$  de dimensión  $m$  y  $N \subseteq M$  un subespacio de  $M$ . Entonces  $N$  es una *subvariedad* de dimensión  $n \leq m$  si para toda  $x \in N$  existe una carta  $(U, \varphi)$  de  $M$  alrededor de  $x$  tal que:

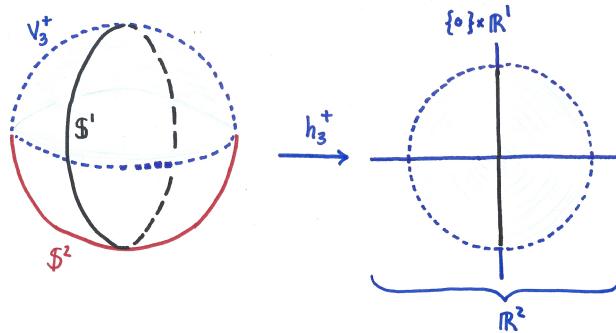
$$\varphi[U \cap N] = \varphi[U] \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^m$$

donde  $0 \in \mathbb{R}^{m-n}$ .

El siguiente ejemplo ilustra bien esta definición: Si hago  $\mathbb{S}^1 = (\cos 2\pi t, 0, \sin 2\pi t) \subset \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  (mediante el difeomorfismo  $e^{2\pi i t} \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, 0)$ ), entonces las únicas cartas que intersectan a  $\mathbb{S}^1$  son  $V_1^\pm$  y  $V_2^\pm$ , entonces (por ejemplo):

$$\begin{aligned} h_i^\pm[V_i^\pm \cap \mathbb{S}^1] &= \left\{ \begin{array}{ll} (x_2, x_3) = (\sin 2\pi t, 0) & , \quad t \in [0, 1] \quad \text{si } i = 1 \\ (x_1, x_3) = (\cos 2\pi t, 0) & , \quad t \in [0, 1] \quad \text{si } i = 2 \end{array} \right\} \\ &= (-1, 1) \times \{0\} \\ &= \overset{\circ}{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{R}^1 \times \{0\}) \\ &= h_i^\pm[V_i^\pm] \cap (\mathbb{R}^1 \times \{0\}) \quad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

es decir que  $\mathbb{S}^1$  es una subvariedad de  $\mathbb{S}^2$ . Similarmente  $\mathbb{S}^n$  es una subvariedad de  $\mathbb{S}^m$  para toda  $n \leq m$ . El siguiente dibujo ilustra este ejemplo:



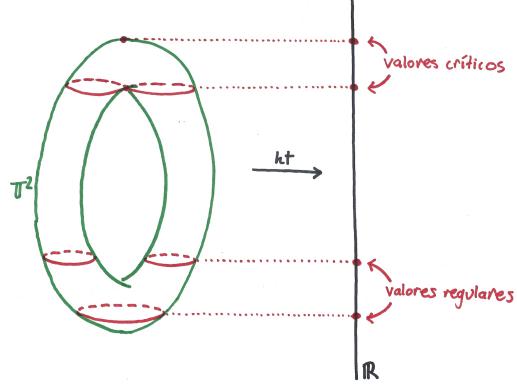
Esto sugiere la descripción: una subvariedad  $N$  vive en  $M$  como  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$  vive en  $\mathbb{R}^m$ .

Además si  $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  es el atlas suave de  $M$ , entonces  $N$  tiene estructura diferenciable con el atlas restringido

$$\mathfrak{A}|_N := \{(U_\alpha \cap N, (\varphi_\alpha)|_{U_\alpha \cap N})\}_{\alpha \in A}.$$

Con el atlas  $\mathfrak{A}|_N$ , la inclusión  $\iota : N \rightarrow M$  se vuelve suave. Este tipo de inclusión se generaliza. Si una variedad  $N'$  es difeomorfa una subvariedad  $N \subseteq M$  (equipada de su atlas  $\mathfrak{A}|_N$ ), mediante un difeomorfismo  $f$ , entonces la función  $\iota' := \iota \circ f$  la puedo pensar como una "inclusión".

Figure 1.9: Los valores regulares y las fibras de la función altura  $ht : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .



**Definición 25.** Una función suave  $f : N \rightarrow M$  es un *encaje* si la imagen  $f[N] \subseteq M$  es una subvariedad de  $M$  y además  $N \cong f[N]$ . En este caso lo denoto por  $N \hookrightarrow M$ .

Por lo tanto para todo encaje  $f$  existe una factorización  $f = \iota \circ f'$  donde  $f'$  es el difeomorfismo  $N \rightarrow f[N]$  y  $\iota : f[N] \rightarrow M$  es la inclusión. En palabras esto quiere decir que un encaje  $N \hookrightarrow M$  es una transformación que te permite ver a  $N$  como subvariedad de  $M$ .

Parece que la definición de encaje es muy restrictiva pero Whitney probó que:

**Teorema 19.** (Whitney) *Toda variedad suave de dimensión  $m$  se puede encajar en  $\mathbb{R}^{2m}$ , es decir para toda variedad  $M^m$ , existe  $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m}$ .*

Este teorema es muy fuerte por varias razones. Primero, esto significa que cualquier variedad la podemos identificar con una subvariedad de un espacio euclídeo. Segundo, la dimensión de este espacio euclídeo se puede minimizar a dos veces la dimensión de la variedad original. Por ejemplo  $\mathbb{RP}^2 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^3$  porque la imagen tendría que autointersección (y así fallaría la inyectividad). Entonces  $2m$  es la mínima dimensión necesaria para poder encajar cualquier variedad en un espacio euclídeo.

**Definición 26.** Sea  $f : M \rightarrow N$  una función suave. Un punto  $y \in N$  es un *valor regular* si para todo elemento  $x \in f^{-1}[\{y\}]$  el diferencial  $D_x f$  es sobrejetivo. Si esto no se cumple, entonces  $y$  es un *valor crítico*.

La importancia de los valores regulares se muestra con el siguiente teorema:

**Teorema 20.** *Sea  $f : M^m \rightarrow N^n$  una función suave y  $y \in N$  un valor regular. Entonces  $L = f^{-1}[\{y\}] \subseteq M$  es una variedad de dimensión  $m - n$ .*

Este teorema y la definición de valor regular se muestra en la figura ??:

El famoso Teorema de Sard dice que casi todo valor  $y \in N$  es regular: si  $C \subset N$  es el conjunto de puntos críticos, ie no-regular, de una función suave  $f : M \rightarrow N$ , entonces para toda carta  $(U, \varphi)$  de  $N$  que intersecta  $C$ , el teorema de Sard dice que  $\varphi[U \cap C] \subset \mathbb{R}^n$  es de medida cero.

Con esto defino que cualquier subconjunto  $X \subseteq N$  de una variedad es de medida cero si bajo cualquier carta, su imagen en  $\mathbb{R}^m$  es de medida cero. Así enunció el teorema de Sard:

**Teorema 21.** (Sard) *Sea  $f : M \rightarrow N$  una función suave. El conjunto de valores críticos es de medida cero. En particular el conjunto de valores regulares es denso en  $N$ .*

Una consecuencia importante de este teorema es que se puede calcular el grupo de homotopía:

$$\pi_m(\mathbb{S}^n, 1) = 0 \quad \forall m < n \tag{1.17}$$

Si  $[\alpha] \in \pi_m(\mathbb{S}^n, 1)$ , claramente  $\alpha$  no tiene que ser suave, pero si lo fuera, Sard dice que  $\alpha : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^n$  tiene un valor regular  $y \in \mathbb{S}^n$ . Ahora si  $x \in \alpha^{-1}[\{y\}]$  entonces  $d_x \alpha : T_x \mathbb{S}^m \rightarrow T_y \mathbb{S}^n$  es sobre, pero esto nunca puede pasar porque  $T_x \mathbb{S}^m \cong \mathbb{R}^m$  y  $n > m$ . Por lo tanto  $f^{-1}[\{y\}] = \emptyset$ , es decir que  $\alpha[\mathbb{S}^m] \subseteq \mathbb{S}^n - \{y\} \subset \mathbb{S}^n$ .

Co-restrinjo  $\alpha : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$  a  $\alpha' : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^n - \{y\}$ . Como  $\mathbb{S}^n - \{y\} \cong \mathbb{R}^n$  mediante la proyección estereográfica, entonces  $\alpha' \simeq \text{cte}$ . Además, como  $\alpha$  y  $\alpha'$  tienen la misma regla de correspondencia:

$$\alpha = \iota \circ \alpha \simeq \iota \circ \text{cte} = \text{cte}$$

donde  $\iota : \mathbb{S}^n - \{y\} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$  es la inclusión. Por lo tanto  $[\alpha] = 0$ .

Acabo de probar que si toda clase de equivalencia  $[\alpha] \in \pi_m(\mathbb{S}^n, 1)$  tiene un representante  $\alpha : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^n$  suave, entonces  $\pi_m(\mathbb{S}^n, 1) = 0$ . En otras palabras la ecuación (1.17) se sigue de:

**Teorema 22.** *Sea  $f : M \rightarrow N$  una función continua (o basada) entre variedades suaves. Entonces existe una  $f' : M \rightarrow N$  suave tal que  $f \simeq f'$ .*

Otra consecuencia importante del teorema de Sard requiere de orientación. Primero defino orientación para espacios vectoriales y luego lo defino para variedades mediante los espacios tangentes.

Sea  $V$  un espacio vectorial real de dimensión  $n$  y denoto por  $\mathfrak{B}$  como el conjunto de todas las bases de  $V$ . Observa que  $\mathfrak{B}$  es isomorfo al espacio de matrices invertibles  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ . Defino sobre  $\mathfrak{B}$  la siguiente relación:

$$\{v_1, \dots, v_n\} \sim \{w_1, \dots, w_n\} \iff \text{la matriz de cambio de base tiene determinante positivo.}$$

**Ejercicio 23.** La relación  $\sim$  definido sobre  $\mathfrak{B}$  es de equivalencia.

*Proof.* Primero comento que  $\mathfrak{B}$  está en biyección con las matrices invertibles: si  $\beta = \{v_1, \dots, v_n\} \in \mathfrak{B}$  con  $v_j = (v_{1j}, \dots, v_{nj}) \in V$ , denoto por  $(v_{ij})$  a la matriz que obtengo de tomar a  $v_j$  como columnas. Por lo tanto:

$$\Phi : \mathfrak{B} \longrightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R}) \quad \text{con} \quad f(\beta) = (v_{ij})$$

es una biyección. Por lo tanto identificaré  $\mathfrak{B}$  con  $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$  (de hecho existe una estructura de grupo sobre  $\mathfrak{B}$  que hace que  $\Phi$  sea un isomorfismo de grupos).

Observa que  $H = \text{GL}^+(n, \mathbb{R}) = \{A \in G \mid \det A > 0\}$  es un subgrupo de  $G$  entonces la función  $(A, \beta) \mapsto A\beta = A(v_{ij})$  es una acción de grupo. En efecto:  $\text{Id}\beta = \text{Id}(v_{ij}) = (v_{ij}) = \beta$  y  $(AB)\beta = (AB)(v_{ij}) = A(B(v_{ij})) = A(B\beta)$ .

Además  $\sim$  es la relación de equivalencia que define esta acción: sean  $\beta = (v_{ij})$  y  $\gamma = (w_{ij})$  dos bases y  $Q$  su matriz de cambio de base, ie.  $Q\beta = \gamma$ . Entonces:

$$\beta \sim \gamma \iff \det Q > 0 \iff Q \in H \iff \gamma \in \mathcal{O}(\beta)$$

donde  $\mathcal{O}(\beta)$  denota la órbita de  $\beta$ . Por lo tanto  $\sim$  es una relación de equivalencia ya que está inducida por una acción de grupo.  $\square$

**Ejercicio 24.** El espacio de clases  $\mathfrak{B}/\sim$  tiene dos elementos.

*Proof.* Uso la misma notación que el ejercicio pasado. Debo probar que sólo hay dos órbitas, es decir que toda matriz de  $G$  está relacionada con  $\text{Id}$  o con  $\text{Id}^-$  que defino como

$$\text{Id}^- := \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Sea  $\beta = (v_{ij}) \in \mathfrak{B}$  una base arbitraria con  $\Delta = \det(v_{ij})$  y sea  $A = (v_{ij})^{-1}$ . Entonces  $A(v_{ij}) = \text{Id}$  y similarmente si multiplico  $\text{Id}^-$  por la derecha a ambos lados, obtengo  $A'(v_{ij}) = \text{Id}^-$  donde  $A' := \text{Id}^- A$  y  $\det A' = \det(\text{Id}^-) \Delta = -\Delta$ .

Estas dos igualdades quieren decir que  $A$  es la matriz de cambio de base de  $(v_{ij})$  a  $\text{Id}$ , y  $A'$  es la matriz de cambio de base de  $(v_{ij})$  a  $\text{Id}^-$ . Por lo tanto si  $\Delta > 0$  entonces aplica la primera frase y  $(v_{ij}) \sim \text{Id}$ ; si  $\Delta < 0$ , entonces  $\det A' > 0$  y  $(v_{ij}) \sim \text{Id}^-$ . En símbolos: para toda  $\beta \in \mathfrak{B}$

$$[\beta] = \begin{cases} [\text{Id}] & \text{si } \Delta > 0 \\ [\text{Id}^-] & \text{si } \Delta < 0 \end{cases}$$

y así concluyo que  $\mathfrak{B}/\sim = \{[\text{Id}], [\text{Id}^-]\}$ .  $\square$

Para fines prácticos denoto  $\mathfrak{B}/\sim = \{1, -1\}$

**Definición 27.** Sea  $V$  un espacio vectorial real de dimensión  $n$ . Una *orientación* de  $V$  es la elección de un elemento de  $\mathfrak{B}/\sim = \{1, -1\}$ .

**Definición 28.** Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales reales de dimensión  $n$  con orientaciones  $[\beta]$  y  $[\gamma]$  (donde  $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$  y  $\gamma$  son bases de  $V$  y  $W$  respectivamente). Una transformación lineal  $T : V \rightarrow W$  *preserva orientación* si

$$T(\beta) = \{T(v_1), \dots, T(v_n)\} \sim \gamma$$

es decir que la imagen de  $\beta$  tiene la misma orientación que  $\gamma$ .

Con estas dos definiciones puedo generalizar orientación a una variedad:

**Definición 29.** Sea  $M$  una variedad suave. Una *orientación* de  $M$  es una familia  $\mathfrak{O} = \{\mathfrak{o}_x\}_{x \in M}$  donde cada  $\mathfrak{o}_x$  es una orientación de  $T_x M$  tal que para toda  $x \in M$  existe una carta  $(U, \varphi)$  de  $M$  alrededor de  $x$  tal que  $D_x \varphi : T_x M \rightarrow T_{\varphi(x)} \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$  preserva orientación donde  $\mathbb{R}^n$  está orientado canónicamente. Una variedad junto con una orientación se llama *variedad orientada* y se denota como la pareja  $(M, \mathfrak{O})$ .

Una vez definido orientación puedo seguir con otra aplicación del teorema de Sard:

Quiero analizar la ecuación (1.17) cuando  $n = m$ . Tomo  $[\alpha] \in \pi_n(\mathbb{S}^n, 1)$  con  $\alpha : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  suave (estoy usando el teorema 22) y  $y \in \mathbb{S}^n$  un valor regular. Por el teorema (20) tengo que  $M_y = f^{-1}[\{y\}]$  es una subvariedad de  $\mathbb{S}^n$  de dimensión 0. Observa que  $M$  es compacto (por ser un subconjunto cerrado de un compacto), entonces  $M_y = \{y_1, \dots, y_k\}$  es finito.

Se puede definir una función  $\text{grad} : C^\infty(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n) \rightarrow \mathbb{Z}$  de la siguiente manera: para  $\alpha : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ , toma  $y \in \mathbb{S}^n$  un valor regular. Para cada  $x \in M_y = f^{-1}[y]$  calculo

$$\text{grad}_x(\alpha) := \begin{cases} +1 & \text{si } D_x \alpha \text{ preserva orientación} \\ -1 & \text{si } D_x \alpha \text{ no preserva orientación} \end{cases}$$

y defino:

$$\text{grad}(\alpha) = \sum_{x \in f^{-1}[y]} \text{grad}_x(\alpha)$$

Para probar que  $\text{grad}$  está bien definida necesito probar que no depende del valor regular  $y$  que eligí.

**Ejemplo 8.** Sea  $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  definido por  $z \mapsto z^3$ , claramente es suave. Si encajo  $\mathbb{S}^1$  en  $\mathbb{R}^2$  como  $z = x + iy = (x, y)$ , entonces  $\alpha$  es la restricción de  $f(x, y) = (x + iy)^3 = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$ , definido sobre todo  $\mathbb{R}^2$ , al círculo unitario. Entonces tengo que

$$D_z \alpha = D_{(x,y)} f = 3 \begin{pmatrix} x^2 - y^2 & -2xy \\ 2xy & x^2 - y^2 \end{pmatrix} = 3z^2$$

cuyo determinante es

$$\Delta = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 > 0 \quad \forall x + iy \in \mathbb{S}^1.$$

Esto quiere decir que  $D_{(x,y)} \alpha$  preserva orientación en cada punto de  $\mathbb{S}^1$ . Por lo tanto en la fórmula de  $\text{grad}(\alpha)$  aparecen puros  $+1$ 's, es decir  $\text{grad}(\alpha) = \#(\alpha^{-1}[z])$

Además  $D_z \alpha$  es claramente sobre  $(3z^2)$  es una rotación seguida de una expansión; ambas son funciones biyectivas del plano). Por lo tanto todo  $z \in \mathbb{S}^1$  es un punto regular.

Por la fórmula de Moivre, sabemos calcular los tres elementos de  $x \in \alpha^{-1}[z]$ , de hecho para cada  $z_0 \in \mathbb{S}^1$  fija,  $\alpha^{-1}[z_0]$  es simplemente las raíces del polinomio  $z^3 - z_0$  y por el teorema fundamental del álgebra tiene 3 raíces (contando multiplicidad). Por la fórmula de Moivre, sabemos que son tres raíces distintas:

$$\alpha^{-1}[z] = \left\{ e^{2\pi it/3}, e^{2\pi i(t+1)/3}, e^{2\pi i(t+2)/3} \right\}.$$

Por lo tanto el grado de  $\alpha$  está bien definido para cualquier valor regular y vale  $\text{grad}(\alpha) = 3$ . Esto sugiere la idea de que  $\alpha$  enrollar el círculo tres veces:

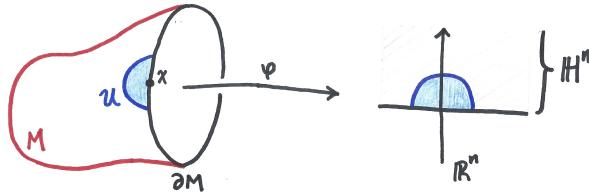
**Teorema 23. (Hopf)** La función  $g : \pi_n(\mathbb{S}^n, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$  es un isomorfismo de grupos, es decir:

$$\pi_n(\mathbb{S}^n, 1) \cong \mathbb{Z}$$

### 1.11.1 Variedades con frontera

Es útil introducir variedades con frontera, especialmente para la sección 1.13. La definición es casi idéntica a la definición usual de variedad, pero antes de empezar sólo recuerdo que el semiplano  $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n$  se define como  $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$ .

**Definición 30.** Sea  $M$  un espacio topológico paracompacto.  $M$  es una *variedad con frontera* si para todo  $x \in M$  existe una vecindad abierta  $U$  de  $x$  y una función continua  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{H}^n$  que es un homeomorfismo sobre su imagen. La *frontera* de  $M$  se define como  $\partial M := \{x \in M \mid \exists(U, \varphi) \text{ tal que } \varphi(x) = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)\}$



Ojo: probar que  $\partial M$  está bien definido es muy complicado

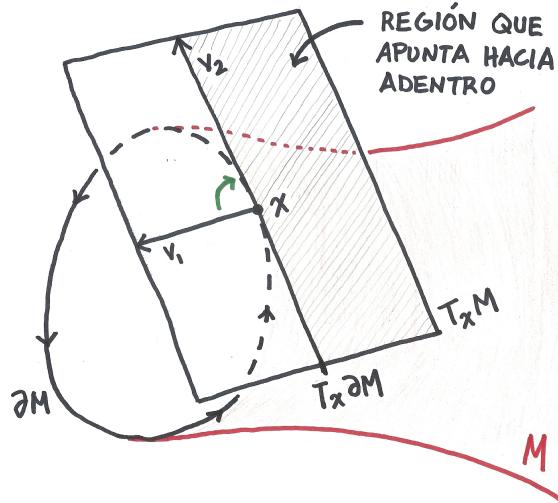
*Nota.* De ahora en adelante “variedad” siempre significa una variedad sin frontera como en la definición original y “variedad con frontera” siempre se refiere a la definición anterior.

La frontera  $\partial M$  de una variedad con frontera  $M^n$  es naturalmente una variedad de dimensión  $n - 1$ , entonces viene equipado de un espacio tangente  $T_x \partial M$  para cada  $x \in \partial M$ . Además,  $x \in \partial M \subset M$  también tiene asociado el espacio tangente  $T_x M$ . Por lo tanto  $T_x \partial M$  es un subespacio de  $T_x M$  de codimensión 1 y así, divide el espacio tangente en dos semiplanos.

Dado un vector  $v \in T_x M - T_x \partial M$ , éste puede estar en sólo uno de estos semiplanos. Decimos que  $v$  *apunta hacia adentro* si la variedad  $M$  está en la dirección de  $v$  y decimos que  $v$  *apunta hacia afuera* en el otro caso (ve la siguiente figura).

La orientación de una variedad se puede traducir a una variedad con frontera. Sea  $M$  una variedad con frontera y supongo que tiene una orientación  $\Omega_M := \{\sigma_x\}_{x \in M}$ . Entonces puedo definir una orientación para  $\partial M$  de la siguiente manera:

Para  $x \in \partial M \subset M$ , tomo la orientación  $\sigma_x = [\beta]$  donde  $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$  es una base de  $T_x M$  de tal manera que  $v_1$  es un vector que apunta hacia afuera. Entonces defino la orientación  $\sigma'_x \in \Omega_{\partial M}$  como  $\sigma'_x = [\{v_2, \dots, v_n\}]$ .



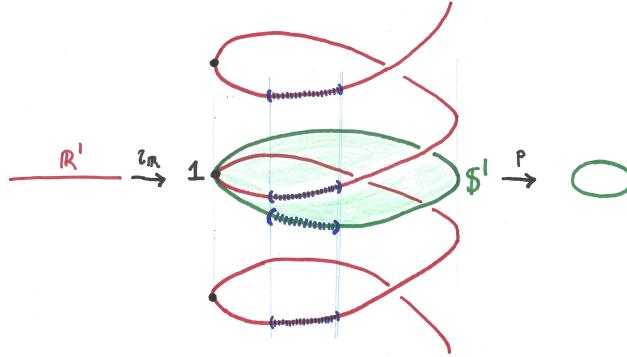
## 1.12 Cubrientes

Para calcular grupos de homotopías, es muy útil la idea de cubrientes. Empiezo con un ejemplo:

Considera el mapeo exponencial  $\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ , que hace  $t \mapsto e^{2\pi it} = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$  (estoy identificando  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$  con  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ ). Como  $\mathbb{R}$  se puede encajar en  $\mathbb{R}^3$  como  $\iota(t) = (\cos 2\pi it, \sin 2\pi it, t)$  entonces el mapeo exponencial  $\epsilon$  lo puedo pensar como la composición del encaje  $\iota$  seguida de la restricción de la proyección  $p : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2)$  en  $\mathbb{R}^3$  porque:

$$(p \circ \iota)(t) = p(\iota(t)) = p(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \quad \therefore \epsilon = p \circ \iota.$$

El siguiente dibujo ilustra esta construcción:



Para resumir: encajo  $\iota : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  y  $\jmath : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  mediante:

$$\iota(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t) \quad y \quad \jmath(e^{i\theta}) = (\cos \theta, \sin \theta, 0).$$

Identifico  $\mathbb{R} = \iota[\mathbb{R}]$  y  $\mathbb{S}^1 = \jmath[\mathbb{S}^1]$ . Si  $\bar{p} = p|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  es la restricción de la proyección  $p : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2)$  en  $\mathbb{R}^3$ , entonces claramente  $\epsilon = \bar{p}$ .

Esta función cumple una propiedad muy importante:

**Ejercicio 25.** Para toda  $x \in \mathbb{S}^1$ , existe una vecindad abierta  $U \subseteq \mathbb{S}^1$  de  $x$  tal que  $\epsilon^{-1}[U] = \bigcup U_n$  con  $U_n \cap U_m = \emptyset$  donde  $\epsilon_n := \epsilon|_{U_n} : U_n \rightarrow U$  es un homeomorfismo.

*Proof.* Veo a  $\mathbb{S}^1$  encajado en el plano complejo y sea  $e^\vartheta \in \mathbb{S}^1$ . Sin pérdida de generalidad puedo asumir que  $e^\vartheta \neq -1$  porque de otra manera nada más encajo  $\mathbb{S}^1$  como  $-\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ .

Observa que  $e^\vartheta \in \mathbb{C} - \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$  entonces la rama principal del argumento está bien definida y  $\arg(e^\vartheta) = \vartheta \in (-\pi, \pi)$  donde  $\theta = \vartheta + 2\pi n$  para alguna  $n \in \mathbb{Z}$  (aquí  $\arg$  es una función continua).

De esta manera para cada  $z \in \mathbb{S}^1 - \{-1\}$  hay un único  $\vartheta \in (-\pi, \pi)$  tal que  $z = e^\vartheta$ , ie.  $\arg(z) = \vartheta$ . Con esto puedo definir una función continua  $\delta : \mathbb{S}^1 - \{-1\} \rightarrow (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  como

$$\delta(z) = \delta(e^\vartheta) = \frac{\vartheta}{2\pi}.$$

Claramente es continua y además es el inverso de la restricción  $\bar{\epsilon} := \epsilon|_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$  porque si  $t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , o equivalentemente  $2\pi t \in (-\pi, \pi)$ , y si  $z = e^\vartheta \in \mathbb{S}^1 - \{-1\}$  entonces:

$$\delta(\bar{\epsilon}(t)) = \delta(e^{2\pi t}) = \frac{2\pi t}{2\pi} = t \quad y \quad \bar{\epsilon}(\delta(e^\vartheta)) = \bar{\epsilon}\left(\frac{\vartheta}{2\pi}\right) = e^{2\pi \frac{\vartheta}{2\pi}} = e^\vartheta.$$

Por lo tanto  $\mathbb{S}^1 - \{-1\} \approx (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  mediante la restricción de  $\epsilon$ .

Ahora escribo  $U = \mathbb{S}^1 - \{-1\}$  como la vecindad abierta de algún elemento  $z \neq -1$  arbitrario de  $\mathbb{S}^1$ . Observa que

$$\epsilon^{-1}[U] = \{t \in \mathbb{R} \mid e^{2\pi t} \neq -1\} = \{t \in \mathbb{R} \mid t \notin (\frac{1}{2} + \mathbb{Z})\} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$$

donde  $\frac{1}{2} + \mathbb{Z} = \{\frac{1}{2} + n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ; escribo  $U_n := (-\frac{1}{2} + n, \frac{1}{2} + n)$ . Claramente las  $U_n$ 's son disjuntas porque cada una pertenece a un elemento distinto de la partición  $\{[n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}]\}_{n \in \mathbb{Z}}$  de  $\mathbb{R}$ .

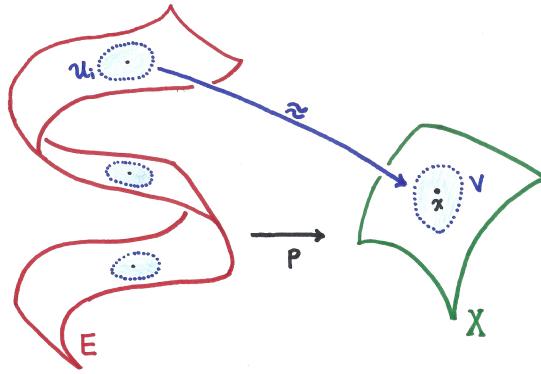
Además sea  $\varphi_{-n} : U_n \rightarrow (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  la traslación  $\varphi_{-n}(t) = t - n$ . Claramente es un homeomorfismo porque es la restricción de un homeomorfismo con el codominio igual a su imagen. Por lo tanto

$$\epsilon_n := \epsilon|_{U_n} = \bar{\epsilon} \circ \varphi_{-n} \quad \text{porque} \quad \bar{\epsilon}(\varphi_{-n}(t)) = \bar{\epsilon}(t - n) = e^{2\pi(t-n)} = e^{2\pi t} = \epsilon_n(t).$$

Esto quiere decir que  $\epsilon_n : U_n \rightarrow U$  es un homeomorfismo por ser la composición de homeomorfismos.  $\square$

Defino explícitamente esta propiedad:

**Definición 31.** Sean  $E$  y  $X$  espacios topológicos y  $p : E \rightarrow X$  una función continua. La terna  $(E, p, X)$  es un *cubriente* si toda  $x \in X$  tiene una vecindad abierta  $V \subseteq X$  tal que su preimagen es una unión disjunta de abiertos de  $E$ , ie.  $p^{-1}[V] = \bigsqcup U_j$ , tal que la restricción  $p|_{U_j} : U_j \rightarrow V$  es un homeomorfismo.



Cada ingrediente de la definición tiene un nombre:  $E$  es el *espacio total*,  $X$  es el *espacio base*, la función  $p : E \rightarrow X$  es una *aplicación cubriente*, las componentes conexas  $U_i$  de  $p^{-1}[V]$  se llaman *hojas*. Además, para un punto  $x \in X$  su imagen inversa  $E_x := p^{-1}[x]$  se llama la *fibras* de  $p$  sobre  $x$ . A veces diré que la función  $p : E \rightarrow X$  es un cubriente para referirme al cubriente  $(E, p, X)$ ; esto es porque la notación de función ya muestra los tres elementos de la definición de cubriente.

Las fibras de un cubriente son discretas:

*Proposición 14.* Sea  $p : E \rightarrow X$  un cubriente,  $x \in X$  y  $E_x \subset E$  la fibra de  $p$  sobre  $x$ . La topología de  $E_x$  como subespacio de  $E$  es la topología discreta.

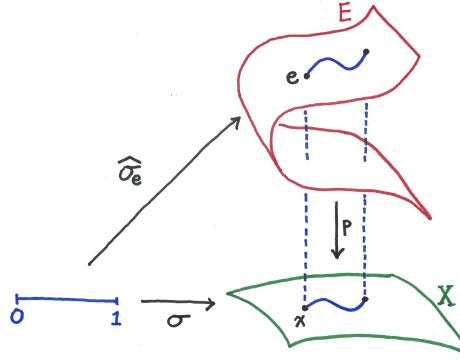
*Proof.* Sea  $V \subset X$  una vecindad de  $x$  tal que  $p^{-1}[V] = \bigsqcup U_j$  con  $p|_{U_j}$  es un homeomorfismo sobre su imagen. Ahora, si  $e \in E_x$  entonces está en un único  $U_j$ . Por lo tanto si  $e' \in E_x \cap U_j$  entonces  $p(e) = p(e')$ , pero  $p|_{U_j}$  es inyectivo entonces  $e = e'$ . Con esto concluyo que los singuletes  $\{e\} = E_x \cap U_j$  son abiertos y que  $E_x$  es un espacio discreto.  $\square$

**Ejemplo 9.** Todo homeomorfismo es un cubriente. Por el ejercicio 25, la exponencial  $\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  es un cubriente.

Cubrientes cumplen una propiedad fundamental para el estudio de grupos de homotopías:

**Teorema 24. (Levantamiento de trayectorias)** Sea  $p : E \rightarrow X$  un cubriente y  $\sigma : I \rightarrow X$  una trayectoria que empieza en  $x = \sigma(0)$ . Para toda  $e \in E_x$  existe una única trayectoria  $\hat{\sigma}_e : I \rightarrow E$  que extiende a  $\sigma$ , es decir  $p \circ \hat{\sigma}_e = \sigma$ .

*Proof.* Por la definición de cubriente, toda  $\sigma(s) \in X$ , tiene una vecindad  $V_s \subseteq X$  tal que la restricción de la aplicación cubriente  $p$  a cada componente conexa de  $p^{-1}[V]$  es un homeomorfismo. Como la imagen de  $\sigma$  es compacto, existen  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{n-1} < s_n = 1$  tal que  $\{V_{s_k}\}_{k=0, \dots, n}$  es una cubierta de la trayectoria. Observa que dos abiertos consecutivos  $V_{s_{k-1}}$  y  $V_{s_k}$  deben intersectarse porque si son disjuntas,  $\{V_{s_{k-1}}, V_{s_k}\}$  sería una desconexión de conjunto conexo  $\sigma[s_{k-1}, s_k]$ .



Ahora, si elijo un  $e \in E_x$ , entonces existe un único componente  $U_0$  de  $p^{-1}[V_{s_0}]$  tal que  $e \in U_0$ . Además, como  $p|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_{s_0}$  es un homeomorfismo, entonces defino

$$\hat{\sigma}_e^0 : [0, s_1] \longrightarrow V_{s_0}E \quad \text{con} \quad \hat{\sigma}_e^0(s) = (p|_{U_0})^{-1}(\sigma(s))$$

Observa que  $p(\hat{\sigma}_e^0(s_1)) = \sigma(s_1) \in V_{s_1}$ , entonces se determina un único componente  $U_1$  de  $p^{-1}[V_{s_1}]$  tal que  $\hat{\sigma}_e^0(s_1) \in U_1$ . De la misma manera,  $p|_{U_1}$  es un homeomorfismo y defino

$$\hat{\sigma}_e^1 : [s_1, s_2] \longrightarrow V_{s_1}E \quad \text{con} \quad \hat{\sigma}_e^1(s) = (p|_{U_1})^{-1}(\sigma(s)).$$

De manera inductiva defino las (únicas)  $n$  funciones continuas  $\hat{\sigma}_e^k : [s_k, s_{k+1}] \rightarrow U_k$  que coinciden en sus intersecciones. Entonces existe una única función continua  $\hat{\sigma}_e : I \rightarrow \bigcup U_k \subseteq E$  que se restringe a cada  $\hat{\sigma}_e^k$ .

Por último, para toda  $s \in I$ , existe una  $k$  tal que  $s \in [s_k, s_{k+1}]$  entonces:

$$(p \circ \hat{\sigma}_e)(s) = p(\hat{\sigma}_e^k(s)) = p(p|_{U_k})^{-1}(\sigma(s)) = \sigma(s)$$

y la trayectoria  $\hat{\sigma}_e$  es la buscada.  $\square$

Se puede generalizar el concepto de un cubriente:

**Definición 32.** Una función continua  $p : E \rightarrow X$  es una *fibración* si dadas funciones  $g, f : Y \rightarrow E$  y una homotopía  $H : Y \times I \rightarrow X$  entre  $p \circ f : Y \rightarrow X$  y  $p \circ g : Y \rightarrow X$ , existe una única homotopía  $\hat{H} : Y \times I \rightarrow E$  entre  $f$  y  $g$  que extiende a  $H$ , es decir se tiene el siguiente diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow (\text{Id}, 0) & \nearrow \hat{H} & \downarrow p \\ Y \times I & \xrightarrow{H} & X \end{array} \quad p \circ \hat{H} = H.$$

**Teorema 25.** Todo cubriente  $p : E \rightarrow X$  es una fibración.

En el caso del teorema del levantamiento, la elección de  $e \in E$  es equivalente a tomar  $Y = \{e\}$ .

Ahora me enfoco en usar los cubrientes para calcular los grupos fundamentales:

**Proposición 15.** Sea  $p : E \rightarrow X$  un cubriente con  $(X, x)$  un espacio basado y  $e \in E_x$ . Entonces el morfismo inducido  $(p\#) : \pi_n(E, e) \rightarrow \pi_n(X, x)$  es un monomorfismo de grupos para toda  $n$ .

*Proof.* Sea  $[\alpha] \in \pi_n(E, e)$  (en particular  $\alpha : \mathbb{S}^n \rightarrow E$ ) tal que  $(p\#)[\alpha] = [p \circ \alpha] = 1$ , es decir que  $p \circ \alpha \simeq \text{cte}_x : \mathbb{S}^n \rightarrow \{x\} \subset X$ . Sea  $H : I \times I \rightarrow E$  tal homotopía con  $H_0(t) = \text{cte}_x(t) = x$  y  $H_1(t) = (p \circ \alpha)(t)$ .

Por el teorema 25,  $p : E \rightarrow X$  es una fibración y si tomo  $Y = I$  entonces existe una homotopía  $\hat{H} : I \times I \rightarrow E$  entre  $\alpha$  y el lazo constante  $\text{cte}_e(s) = e \in E$  (que es el que cumple  $p \circ \text{cte}_e = \text{cte}_x$ ). Por lo tanto  $(p\#)[\alpha] = [p \circ \alpha] = [\text{cte}_e] = 1 \in \pi_n(E, e)$  y  $p\#$  es un monomorfismo.  $\square$

Ahora si restrinjo al caso  $n > 1$  el morfismo  $(p_{\#}) : \pi_n(E) \rightarrow \pi_n(X, x)$  es un isomorfismo! Esto sucede porque bajo ciertas condiciones, cualquier función continua  $f : Y \rightarrow X$ , en particular  $Y = \mathbb{S}^n$ , se factoriza a través del cubriente  $p : E \rightarrow X$ :

**Teorema 26.** *Sea  $p : E \rightarrow X$  un cubriente visto en  $\mathbf{Top}_*$  con  $(E, e)$  y  $(X, x)$  tal que  $e \in E_x$ . Si  $(Y, y)$  es conexo y localmente conectable por trayectorias y  $f : Y \rightarrow X$  es basada, entonces:*

$$\begin{array}{ccc} E & & \\ \exists! \widehat{f} \nearrow \curvearrowright & \downarrow p & \iff f_{\#}[\pi_1(Y)] \subseteq p_{\#}[\pi_1(E)] \\ Y \xrightarrow{f} X & & \end{array}$$

**Ejercicio 26.** Prueba “ $\implies$ ” del teorema 26.

*Proof.* Sea  $f_{\#}[\alpha] = [f \circ \alpha] \in f_{\#}[\pi_1(Y)] \subseteq \pi_1(X)$  con  $\alpha : I \rightarrow Y$  un lazo y sea  $\widehat{f} : Y \rightarrow E$  la función basada garantizada por la hipótesis. Observa que  $\widehat{f}_{\#}[\alpha] = [\widehat{f} \circ \alpha] \in \pi_1(E)$ . Como  $X \mapsto \pi_1(X)$  es functorial, entonces  $p_{\#} \circ \widehat{f}_{\#} = f_{\#}$ . En particular  $f_{\#}[\alpha] = p_{\#}(\widehat{f}_{\#}[\alpha]) \in p_{\#}[\pi_1(E)]$ .

□

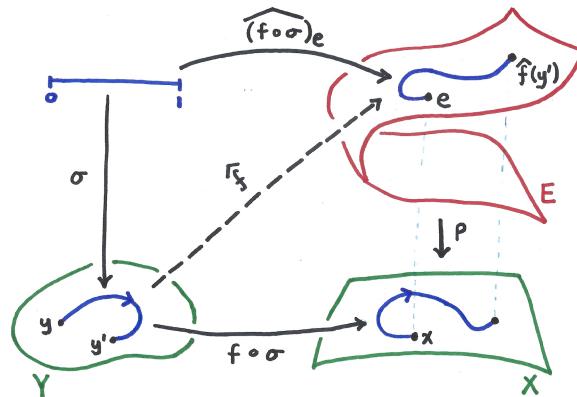
*Nota.* Para la ida no se requirió que  $Y$  fuese conexa y localmente conectable por trayectorias.

El regreso de del teorema 26 se hace de la siguiente manera:

Sea  $\sigma : I \rightarrow Y$  una trayectoria que empieza en  $\sigma(0) = y$  y termina en  $\sigma(1) = y'$ . Entonces  $f_*(\sigma) := f \circ \sigma : I \rightarrow X$  es una trayectoria y por el teorema del levantamiento existe una única trayectoria  $\widehat{f}_*(\sigma)_e : I \rightarrow E$  que extiende a  $f_*(\sigma)$ . Con esto defino:

$$\widehat{f} : Y \longrightarrow E \quad \text{con} \quad \widehat{f}(y') = \widehat{f}_*(\sigma)(1)$$

Ve:



Observa que  $\widehat{f}$  está bien definido porque si  $\tau : I \rightarrow Y$  es otra trayectoria que empieza en  $y$  y termina en  $y'$ .....

**Corolario 27.** *Sea  $p : E \rightarrow X$  un cubriente. Entonces para toda  $n > 1$ , el monomorfismo  $p_{\#} : \pi_n(E) \rightarrow \pi_n(X)$  es un isomorfismo, en símbolos:*

$$p : E \rightarrow X \quad \text{es un cubriente} \quad \implies \quad \pi_n(E) \cong \pi_n(X) \quad (n > 1).$$

*Proof.* Nada más tengo que probar que  $p_{\#}$  es sobre. Observa que  $\mathbb{S}^n$  es conexa y localmente conectable por trayectorias. Además  $\pi_1(\mathbb{S}^n) = 0$  por la ecuación (1.17) entonces para toda  $\alpha : \mathbb{S}^n \rightarrow X$  tengo  $\alpha_{\#}[\pi_1(\mathbb{S}^n)] = 0 \subset p_{\#}[\pi_1(E)]$ , por el teorema 26 existe un  $\widehat{\alpha} : \mathbb{S}^n \rightarrow E$  que extiende  $\alpha$ . Claramente

$$p_{\#}[\widehat{\alpha}] = [p \circ \widehat{\alpha}] = [\alpha]$$

y  $p_{\#}$  es sobre. □

**Ejemplo 10.**  $\pi_n(\mathbb{S}^1) = 0$  para toda  $n > 1$  porque la exponencial  $\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  es un cubriente y  $\mathbb{R}$  es contraible.

El único grupo de homotopía que falta calcularle a  $\mathbb{S}^1$  es  $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ . Para esto desarrolle la teoría de acciones de grupos.

### 1.12.1 Acciones de grupos

En esta parte generalizo las acciones de grupos a espacios topológicos.

**Definición 33.** Sea  $G$  un grupo topológico con neutro  $1 \in G$  y  $X$  un espacio topológico. Una *acción izquierda* de  $G$  en  $X$  es una función continua  $G \times X \rightarrow X$  con  $(g, x) \mapsto gx$  que cumple dos propiedades:

- (i)  $1x = x$  para toda  $x \in X$ .
- (ii)  $(gg')x = g(g'x)$  para todas  $g, g' \in G$ .

En general una acción de grupo se define sin topologías pero este caso es un caso particular de la definición anterior si  $G$  y  $X$  tienen la topología discreta.

**Ejemplo 11.** Si  $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$  y  $X = \mathbb{R}^n$  entonces la multiplicación de matrices  $(A, x) \mapsto Ax$  es una acción de grupo.

**Ejercicio 27.** Sea  $X^n = X \times \cdots \times X$  y  $G = S_n$  el grupo simétrico (de permutaciones de un conjunto con  $n$  elementos). Entonces  $X^n \times S_n \rightarrow X^n$  definido por

$$((x_1, \dots, x_n), \sigma) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

es una acción derecha de  $S_n$  sobre  $X^n$ .

*Proof.* Primero observa que el neutro  $1 \in S_n$  es la identidad, entonces

$$(x_1, \dots, x_n)1 = (x_{1(1)}, \dots, x_{1(n)}) = (x_1, \dots, x_n).$$

Ahora sea  $\sigma, \tau \in S_n$ . Entonces

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n)(\sigma\tau) &= (x_{(\sigma\tau)(1)}, \dots, x_{(\sigma\tau)(n)}) = (x_{\sigma(\tau(1))}, \dots, x_{\sigma(\tau(n))}) = (x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)})\sigma \\ &= ((x_1, \dots, x_n)\sigma)\tau. \end{aligned}$$

Esta prueba muestra que esta acción no es izquierda porque tendría  $(\sigma\tau)x = \tau(\sigma(x))$ , es decir que la segunda propiedad de acción izquierda no se cumple porque se invierte el orden de las acciones.

Nada más falta probar que  $X^n \times S_n \rightarrow X^n$  es continua. Sea  $U_1 \times \cdots \times U_n \subseteq X^n$  un abierto arbitrario, es decir  $U_i \subseteq X$  es abierto para toda  $i = 1, \dots, n$ . Entonces  $((x_1, \dots, x_n), \sigma)$  está en la preimagen de la acción si  $x_{\sigma(i)} \in U_i$  para toda  $i$ , pero esto es equivalente a que

$$x_i \in U_{\sigma^{-1}(i)} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

La equivalencia se da porque si  $x_i \in U_i$  para toda  $i$ , entonces  $x_{\tau(i)} \in U_{\tau(i)}$  para toda permutación  $\tau$ ; en particular  $\tau = \sigma^{-1}$ .

Por lo tanto la preimagen de  $U$  en  $X \times S_n$  es:

$$\bigcup_{\sigma \in S_n} ((U_{\sigma^{-1}(1)} \times \cdots \times U_{\sigma^{-1}(n)}) \times \{\sigma\})$$

que es abierto ya que  $\{\sigma\} \subset S_n$  es abierto porque  $S_n$  tiene la topología discreta.  $\square$

**Definición 34.** Sea  $G \times X \rightarrow X$  una acción izquierda de un grupo  $G$  y  $x \in X$  un elemento arbitrario. El *grupo de isotropía* de  $x$  es el conjunto de elementos de  $G$  que fijan a  $x$  bajo la acción, es decir:

$$G_x := \{g \in G \mid gx = x\}.$$

**Ejercicio 28.** El grupo de isotropía de  $x$  siempre es un subgrupo.

*Proof.* Si  $1 \in G$  es el neutro, entonces por definición  $1x = x$ , entonces  $1 \in G_x$ . Ahora sean  $g, h \in G_x$ , en particular  $hx = x$ . Esto implica que

$$(gh^{-1})x = g(h^{-1}x) = g(h^{-1}(hx)) = g((h^{-1}h)x) = g(1x) = gx = x.$$

Por lo tanto  $gh^{-1} \in G_x$  y  $G_x$  es un subgrupo de  $G$ .  $\square$

**Definición 35.** Sea  $G \times X \rightarrow X$  una acción izquierda de un grupo  $G$  y  $x \in X$  un elemento arbitrario. La órbita de  $x$  es el subconjunto de  $X$  definido por

$$\mathcal{O}(x) := \{gx \in X \mid g \in G\}.$$

Resulta que las órbitas de una acción de grupos sobre  $X$  partitionan a  $X$ :

**Ejercicio 29.** La relación

$$x \sim y \iff \exists g \in G \text{ tal que } gx = y \iff y \in \mathcal{O}(x)$$

definida sobre  $X$  es una relación de equivalencia.

*Proof.* Pruebo algo equivalente:  $\{\mathcal{O}(x)\}_{x \in X}$  es una partición de  $X$ . Si  $x \in X$ , entonces  $1x = x$  y así  $x \in \mathcal{O}(x)$ . Por lo tanto

$$X = \bigcup_{x \in X} \mathcal{O}(x). \quad (1.18)$$

Ahora sean  $x, y \in X$  tales que  $\mathcal{O}(x) \cap \mathcal{O}(y) \neq \emptyset$ ; sea  $z \in X$  un elemento en esta intersección. Esto implica que existen  $g, h \in G$  tal que  $gz = x$  y  $hz = y$ . Por lo tanto

$$(hg^{-1})x = (hg^{-1})(gz) = (hg^{-1}g)z = (h1)z = h(z) = hz = y$$

y así  $y \in \mathcal{O}(x)$ . Con esto tengo que  $g'y \in \mathcal{O}(x)$  implica  $g'y = (g'hs^{-1})x$  y  $g'y \in \mathcal{O}(x)$  entonces  $\mathcal{O}(y) \subseteq \mathcal{O}(x)$ . De manera análoga tengo que  $\mathcal{O}(x) \subseteq \mathcal{O}(y)$ .

Por lo tanto si  $\mathcal{O}(x) \cap \mathcal{O}(y)$  se intersectan, entonces son iguales. Por lo tanto la unión en la ecuación (1.18) es disjunta y así  $\{\mathcal{O}(x)\}_{x \in X}$  es una partición en  $X$ . Esto significa que la relación inducida  $x \sim y \iff y \in \mathcal{O}(x)$  es una relación de equivalencia.  $\square$

**Definición 36.** Sea  $G \times X \rightarrow X$  una acción de grupos entonces el espacio de cocientes módulo la relación de equivalencia  $x \sim y \iff y \in \mathcal{O}(x)$  se llama el *espacio de órbitas* y viene equipada de la topología cociente; se denota por  $X/G$ .

*Nota.* Las fibras de la identificación  $\nu : X \rightarrow X/G$  son las órbitas  $\nu^{-1}[x] = \mathcal{O}(x)$ .

Para calcular las órbitas de una acción  $G \times X \rightarrow X$  restringo la acción a  $G \times \{x\} \rightarrow X$ , entonces la imagen es exactamente la órbita de  $x$ . Como  $G \approx G \times \{x\}$ , la restricción de la acción se puede ver como la función continua:

$$\alpha_x : G \longrightarrow \mathcal{O}(x), \quad \alpha_x(g) = gx.$$

Además  $\alpha_x(g) = \alpha_x(h) \iff gx = hx \iff gh^{-1} \in G_x$ . Por lo tanto se factoriza a través de la identificación  $\nu : G \rightarrow G/G_x$ . Por lo tanto el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\alpha_x} & \mathcal{O}(x) \\ \nu \downarrow & \nearrow \bar{\alpha}_x & \\ G/G_x & & \end{array} \quad \alpha_x = \bar{\alpha}_x \circ \nu.$$

Está definida por  $\alpha_x(gG_x) = \alpha_x(g) = gx$ . Como  $\alpha_x$  es continua,  $\bar{\alpha}_x$  es continua. Claramente es sobreyectiva porque  $\mathcal{O}(x)$  es por definición la imagen de  $\alpha_x$ . Además:

**Ejercicio 30.**  $\bar{\alpha}_x : (G/G_x) \rightarrow \mathcal{O}(x)$  es inyectiva. Por lo tanto es una función continua y biyectiva.

*Proof.* Como  $\bar{\alpha}_x(gG_x) = \alpha_x(g) = gx$ , entonces

$$\bar{\alpha}_x(gG_x) = \bar{\alpha}_x(hG_x) \iff \alpha_x(g) = \alpha_x(h) \iff gx = hx \iff (gh^{-1})x = x \iff gh^{-1} \in G_x$$

dice que  $\alpha_x$  está bien definida y es inyectiva. Además es sobreyectiva porque  $\mathcal{O}(x)$  se define como la imagen de  $\alpha_x$ . Por lo tanto  $\alpha_x$  es biyectiva.

Por último,  $\alpha_x = \bar{\alpha}_x \circ \nu$  donde  $\nu : G_x \rightarrow G/G_x$  es la identificación inducida por  $\alpha_x$ , entonces, como  $\alpha_x$  es continua,  $\bar{\alpha}_x$  es continua.  $\square$

*Nota.* Si  $X$  es Hausdorff y  $G$  es compacto (y por lo tanto también  $G/G_x$ ), entonces por el resultado anterior  $\bar{\alpha}_x$  es un homeomorfismo, ie  $(G/G_x) \approx \mathcal{O}(x)$ .

**Definición 37.** Una acción  $G \times X \rightarrow X$  de grupos es *libre* si  $gx = x \implies g = 1$  o equivalentemente  $G_x = 1$ . Es *transitiva* si para cualesquiera  $x, y \in X$  existe un  $g \in G$  tal que  $xg = y$  o equivalentemente  $X = \mathcal{O}(x)$ .

Si  $G \times X \rightarrow X$  es una acción libre, la nota anterior dice que si  $G$  es compacto y  $X$  hausdorff, entonces  $G \approx \mathcal{O}(x)$ . Observa que este homeomorfismo depende de que  $x \in X$  elegimos. Por lo tanto  $\mathcal{O}(x)$  no hereda una estructura de grupo topológico. Pero las fibras de la identificación  $X \rightarrow X/G$  son  $\mathcal{O}(x) \approx G$ . Por lo tanto si  $G$  tiene la topología discreta, entonces  $\nu : X \rightarrow X/G$  es casi un cubriente; necesitamos que las fibras se vean así localmente.

**Definición 38.** Sea  $G$  un grupo discreto. Una acción  $G \times X \rightarrow X$  es *propiamente discontinua* si para toda  $x \in X$  tiene una vecindad abierta  $U \subseteq X$  tal que

$$gU \cap U = \emptyset \quad \forall g \neq 1$$

donde  $gU$  es la imagen de la restricción de la acción a  $G \times U$ .

**Ejercicio 31.** Sea  $G$  un grupo discreto y  $\alpha : G \times X \rightarrow X$  una acción de grupos. Entonces:

$$\alpha \text{ es propiamente discontinua} \implies \alpha \text{ es libre.}$$

*Proof.* Sea  $x \in X$  y  $U \subseteq X$  una vecindad garantizada por la definición de propiamente discontinua. Ahora sea  $g \in G$  tal que  $gx = x$ . Entonces  $gU = U \implies U \cap gU \neq \emptyset$  por lo tanto necesariamente  $g = 1$  y  $\alpha$  es una acción libre.  $\square$

La importancia de acciones propiamente discontinuas lo muestra el siguiente teorema:

**Teorema 28.** La identificación  $X \rightarrow X/G$  es un cubriente cuando la acción es propiamente discontinua:

$$G \times X \rightarrow X \text{ es propiamente discontinua} \implies \nu : X \rightarrow X/G \text{ es un cubriente.}$$

**Ejemplo 12.** Considera la acción de  $G = \mathbb{Z}_2$  sobre  $X = \mathbb{S}^n$  definida como  $(\pm 1, x) \mapsto \pm x$ . Esta acción es libre porque en  $\mathbb{S}^n$ , siempre se cumple que  $-x \neq x$ . Además,  $\mathbb{S}^n$  es Hausdorff y  $G$  es compacto (por ser finito y discreto), entonces el teorema anterior aplica:

$$\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^2 \text{ es un cubriente.}$$

Los espacios cubrientes nos permiten estudiar los grupos fundamentales porque para todo cubriente existe una acción de grupo especial:

**Definición 39.** Sean  $p : E \rightarrow X$  un cubriente,  $x \in X$  fijo y  $E_x$  la fibra de  $p$  sobre  $x$ . El grupo fundamental  $\pi_1(X, x)$  actúa sobre la fibra  $E_x$  de la siguiente manera:

$$E_x \times \pi_1(X) \rightarrow E_x \quad , \quad (e, [\sigma]) \mapsto \hat{\sigma}_e(1)$$

donde  $\hat{\sigma}_e : I \rightarrow E$  es el levantamiento de  $\sigma$  a  $E$  garantizado por el teorema 24.

**Ejercicio 32.** Sea  $p : E \rightarrow X$  un cubriente. Si  $E$  es conectable por trayectorias entonces la acción  $E_x \times \pi(X) \rightarrow E_x$  es transitiva.

*Proof.* Sean  $e, e' \in E_x$ . Como  $E$  es conectable por trayectorias, existe un  $\tau : I \rightarrow E$  tal que  $\tau(0) = e$  y  $\tau(1) = e'$ . Entonces  $\sigma := p \circ \tau$  es un lazo en  $X$  porque

$$\sigma(0) = p(\tau(0)) = p(e) = x = p(e') = p(\tau(1)) = \sigma(1).$$

Por lo tanto si elijo  $e \in E$ , el lazo  $\sigma$  se levanta a una única trayectoria  $\widehat{\sigma}_e$  tal que  $\widehat{\sigma}_e(0) = e$  y  $p \circ \widehat{\sigma}_e = \sigma$ . Pero  $\tau$  también cumple estas propiedades ( $\sigma = p \circ \tau$  por definición y  $\tau(0) = e$ ). Por la unicidad del levantamiento tengo que  $\widehat{\sigma}_e = \tau$ , por lo tanto:

$$e[p \circ \tau] = e[\sigma] = \widehat{\sigma}_e(1) = \tau(1) = e'$$

y la acción es transitiva.  $\square$

**Ejercicio 33.** Sean  $p : E \rightarrow X$  un cubriente y  $p_{\#} : \pi_1(E, e) \rightarrow \pi_1(X, x)$  el homomorfismo inducido donde  $x \in X$  es fija y  $e \in E_x$ . Si denoto  $G = \pi_1(X, x)$ , el grupo de isotropía de  $e$  bajo la acción inducida por el cubriente es:

$$G_e = p_{\#}[\pi_1(E, e)].$$

*Proof.*

( $\subseteq$ ) Sea  $[\sigma] \in G_e$  con  $\sigma : I \rightarrow X$  un lazo y  $\widehat{\sigma}_e : I \rightarrow E$  su levantamiento, en particular  $\widehat{\sigma}_e(0) = e$ . Como  $[\sigma] \in G_e$ , entonces:

$$e[\sigma] = \widehat{\sigma}_e(1) = e$$

y así  $\widehat{\sigma}_e$  es un lazo en  $E$ , ie.  $[\widehat{\sigma}_e] \in \pi_1(E)$ . por último, como  $\widehat{\sigma}_e$  es el levantamiento de  $\sigma$ , entonces  $p \circ \widehat{\sigma}_e = \sigma$  y así:

$$p_{\#}[\widehat{\sigma}_e] = [p \circ \widehat{\sigma}_e] = [\sigma].$$

Por lo tanto  $[\sigma] \in p_{\#}[\pi_1(E)]$ .

( $\supseteq$ ) Sea  $p_{\#}[\sigma] = [p \circ \sigma] \in p_{\#}[\pi_1(E)]$  donde  $[\sigma] \in \pi_1(E, e)$ , ie.  $\sigma(0) = e = \sigma(1)$ . Si escribo  $\tau := p \circ \sigma$  para el lazo en  $X$ , su levantamiento es  $\widehat{\tau}_e$  donde  $p \circ \widehat{\tau}_e = \tau$  y  $\widehat{\tau}_e(0) = e$ . Observa que  $\sigma$  también cumple estas dos propiedades entonces la unicidad del levantamiento dice que  $\widehat{\tau}_e = \sigma$ . Por lo tanto:

$$e[p \circ \sigma] = e[\tau] = \widehat{\tau}_e(1) = \sigma(1) = e \implies [p \circ \sigma] \in G_e.$$

$\square$

Si aplico estos dos resultados al ejemplo 12 puedo calcular el grupo fundamental del espacio proyectivo:

*Proposición 16.* Para toda  $n > 1$ ,  $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2$ .

*Proof.* Por el ejemplo 12, la identificación  $p : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  es un cubriente inducido por la acción de  $\mathbb{Z}_2$  sobre  $\mathbb{S}^n$ . Si escribo  $G = \pi_1(\mathbb{R}P^n)$  entonces  $G$  actúa sobre las fibras  $E_{[x]} = \{x, -x\}$ .

Por el ejercicio 32, como  $\mathbb{S}^n$  es conectable por trayectorias, esta acción es transitiva y así  $\mathcal{O}([x]) = E_{[x]}$ . El ejercicio 30 garantiza que  $G/G_e$  y  $E_{[x]}$  están en biyección, es decir el grupo  $G/G_e$  tiene dos elementos; por lo tanto es isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ . Por último, el ejercicio 33 dice que  $G_e = p_{\#}[\pi_1(\mathbb{S}^n)] = p_{\#}[1] = 1$  (donde  $\pi_1(\mathbb{S}^n) = 1$  por la fórmula 1.17) entonces  $G/G_e \cong G$  y concluyo que  $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$ .  $\square$

Ya tengo la herramienta necesaria para poder calcular el último grupo fundamental de  $\mathbb{S}^1$  que falta calcular:

Por el ejercicio 25, la exponencial  $\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  es un cubriente, entonces hay acción  $\alpha$  sobre la fibra  $\mathbb{R}_1 = \epsilon^{-1}(1) = \mathbb{Z}$  asociada al cubriente. Además esta acción es transitiva por el ejercicio 32 y así  $\mathcal{O}(n) = \mathbb{Z}$  para toda  $n \in \mathbb{Z}$ .

Si escribo  $G = \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$  entonces  $\alpha_n : G \rightarrow \mathcal{O}(n) = \mathbb{Z}$ , induce una biyección continua  $\bar{\alpha}_n : (G/G_n) \rightarrow \mathbb{Z}$ . Observa que  $\mathbb{R}$  es contraible, entonces el ejercicio 23 garantiza que  $G_n = \epsilon_{\#}[\pi_1(\mathbb{R}, 0)] = \epsilon_{\#}[1] = 1$ . Por lo tanto  $G \cong G/G_n$  y  $\bar{\alpha}_n : G \rightarrow \mathbb{Z}$  es una biyección continua para toda  $n$ . En general  $\bar{\alpha}_n$  está definido por  $\bar{\alpha}_n[\sigma] = n[\sigma] = \widehat{\sigma}_n(1)$ . Resulta que:

**Ejercicio 34.**  $\bar{a}_0 : G \rightarrow \mathbb{Z}$  es un homomorfismo de grupos.

*Proof.* Sean  $[\sigma], [\tau] \in G$ . Primero calculo (usando las propiedades de acciones de grupo):

$$\bar{a}_0[\sigma * \tau] = 0 \cdot [\sigma * \tau] = (0 \cdot [\sigma]) \cdot [\tau] = \hat{\sigma}_0(1) \cdot [\tau] = \hat{\tau}_n(1)$$

donde  $n = \bar{a}_0[\sigma] = \hat{\sigma}_0(1) \in \mathbb{Z}$ . La imagen de  $\hat{\tau}_n : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  es simplemente la imagen de  $\hat{\tau}_0$  trasladado por  $n$ , en particular

$$\hat{\tau}_n(1) = n + \hat{\tau}_0(1) = \hat{\sigma}_0(1) + \hat{\tau}_0(1) = \bar{a}_0[\sigma] + \bar{a}_0[\tau]$$

Más formalmente, el lazo  $\hat{\tau}'_0 := n + \hat{\tau}_0$  también cumple las propiedades de ser un levantamiento de  $\tau$  que inicia en  $n$ .  $\square$

Por lo tanto he demostrado que

*Proposición 17.*  $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ .

Los cubrientes forman una categoría:

**Definición 40.** Sea  $X$  un espacio topológico fijo. La categoría de cubrientes sobre  $X$ , denotado por  $\mathbf{Cub}(X)$ , tiene como objetos los cubrientes  $(E, p, X)$  y morfismos las funciones continuas  $f : (E, p, X) \rightarrow (E', p', X)$  que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & X & \end{array}$$

**Teorema 29.** Sea  $X$  un espacio conexo, localmente conectable por trayectorias y semilocalmente 1-conexo (alrededor de cada punto existe una vecindad  $U \subseteq X$  cuya inclusión  $\iota : U \rightarrow X$  induce el morfismo cero, es decir  $\iota_\# = 0$ ). Existe una biyección

$$\mathbf{Cub}(X) \longleftrightarrow \{H \leq \pi_1(X)\}_{gHg^{-1}}$$

**Ejemplo 13.** Si  $n > 1$ ,  $\mathbf{Cub}(\mathbb{S}^n) = \{\text{Id}\}$  porque  $\pi_1(\mathbb{S}^n) = 0$ .

## 1.13 Cobordismo

### 1.13.1 Conos

**Definición 41.** El *cono* de un espacio  $X$  se define como:

$$CX := (X \times I) /_{X \times \{1\}}$$

Si el espacio es basado, ie  $(X, x)$ , entonces su cono se define como

$$C(X, x) := (X \times I) /_{(X \times \{1\}) \cup (\{x\} \times I)}$$

Ve la figura ??.

*Nota.* Observa que el cono viene equipado de una inclusión natural  $\iota : X \hookrightarrow CX$  con la regla  $x \mapsto [x, 0]$ .

**Ejercicio 35.** El cono de cualquier espacio  $X$  es contraíble.

*Proof.* Demostraré que  $\text{Id}_{CX} \simeq \text{cte}_*$  donde  $* = [x, 1] \in CX$ . Defino la homotopía  $H : (X \times I) \times I \rightarrow CX$  con

$$H((x, s), t) = [x, t + (1 - t)s].$$

Claramente  $H_0 = \text{Id}$  y  $H_1 = \text{cte}_*$ . Además  $H((x, 1), t) = [x, 1]$  para toda  $x$ . Por lo tanto  $H$  se factoriza a través de  $X \times \{1\}$ :

$$\begin{array}{ccc} (X \times I) \times I & \xrightarrow{H} & CX \\ \nu \downarrow & \nearrow \bar{H} & \\ CX \times I & & \end{array}$$

También  $\bar{H}_0 = \text{Id}_{CX}$  y  $\bar{H}_1 = \text{cte}_*$ .  $\bar{H}$  es continua porque  $H$  es continua. Por lo tanto  $\bar{H}$  es una homotopía y  $\text{Id}_{CX} \simeq \text{cte}_*$ .  $\square$

**Lema 30.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua.  $f$  es contraible si y sólo si  $f$  se extiende a  $CX$ , es decir:

$$f \simeq \text{cte} \iff \begin{array}{ccc} CX & & \\ \uparrow \iota & \nearrow \hat{f} & \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

*Proof.* ( $\implies$ ) Supongo que  $f \simeq \text{cte}$  mediante la homotopía  $H : X \times I \rightarrow Y$ . Como  $H_1(x) = H(x, 1) = \text{cte}(x) = y_0 \in Y$ , entonces  $H$  se factoriza a través de  $(X \times I) /_{(X \times \{1\})} = CX$ :

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{H} & Y \\ \downarrow \nu & \nearrow \bar{H} & \\ CX & & \end{array}$$

Aquí  $\bar{H}$  es continua porque  $H$  es continua y  $\nu$  es una identificación.

Como  $H_0 = f$ , entonces  $\bar{H}$  restringido a  $X \times \{0\}$  es  $f$ , o equivalentemente  $\bar{H} \circ \iota = f$ . Por lo tanto  $\bar{H}$  es la extensión de  $f$  buscada.

( $\Leftarrow$ ) Sea  $\hat{f} : CX \rightarrow Y$  una extensión de  $f$  y defino  $H = \hat{f} \circ \nu$ . Observa que

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= \hat{f}[x, 0] = \hat{f}(\iota(x)) = f(x) \\ H(x, 1) &= \hat{f}(\ast) = y_0 \end{aligned}$$

donde  $\ast = [x, 1] \in CX$ . Por lo tanto si  $\text{cte}$  es la función constante  $y_0$ , entonces  $f \simeq \text{cte}$ .

□

**Ejercicio 36.** Si  $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$  es basado, entonces  $f \simeq \text{cte}_y$  si y sólo si  $f$  se extiende a un  $\hat{f} : C(X, x) \rightarrow (Y, y)$ .

*Proof.* ( $\implies$ ) Supongo que  $f \simeq \text{cte}_y$  mediante la homotopía basada  $H : (X, x) \times I \rightarrow (Y, y)$ . Como  $H_1(x') = H(x', 1) = \text{cte}_y(x') = y$  y  $H_1(x, t) = y$  para toda  $x' \in X$  y  $t \in I$ ,  $H$  se factoriza a través de  $(X \times \{1\}) \cup (\{x\} \times I)$ :

$$\begin{array}{ccc} (X, x) \times I & \xrightarrow{H} & (Y, y) \\ \downarrow \nu & \nearrow \bar{H} & \\ C(X, x) & & \end{array}$$

Aquí  $\bar{H}$  es continua porque  $H$  es continua y  $\nu$  es una identificación.

Como  $H_0 = f$ , entonces  $\bar{H}$  restringido a  $X \times \{0\}$  es  $f$ , o equivalentemente  $\bar{H} \circ \iota = f$ . Por lo tanto  $\bar{H}$  es la extensión de  $f$  buscada.

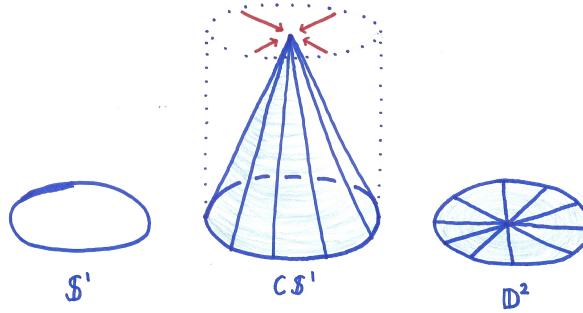
( $\Leftarrow$ ) Sea  $\hat{f} : C(X, x) \rightarrow (Y, y)$  una extensión de  $f$  y defino  $H = \hat{f} \circ \nu$ . Observa que

$$\begin{aligned} H(x', 0) &= \hat{f}[x', 0] = \hat{f}(\iota(x')) = f(x') \quad \forall x' \in X \\ H(x', 1) &= \hat{f}(\ast) = y_0 \quad \forall x' \in X \\ H(x, t) &= y \quad \forall t \in I \end{aligned}$$

donde  $\ast = [x', 1] \in CX$ . Por lo tanto  $H$  es una homotopía basada, es decir  $f \simeq \text{cte}_y$ .

□

**Ejemplo 14.**  $C\mathbb{S}^1 \approx \mathbb{D}^2$



### 1.13.2 Clases de cobordismo

Recuerda que si  $N$  es una variedad suave, entonces  $N \times I$  es una variedad suave con frontera  $\partial N \sqcup \partial N$ . En particular

$$\partial(\mathbb{S}^n \times I) = (\mathbb{S}^n \times \{0\}) \cup (\mathbb{S}^n \times \{1\}) = \mathbb{S}^n \sqcup \mathbb{S}^n.$$

Por lo tanto una homotopía  $H : \mathbb{S}^n \times I \rightarrow X$  entre dos funciones  $\alpha, \beta : \mathbb{S}^n \rightarrow X$  se cumple

$$H|_{\mathbb{S}^n \times \{0\}} = \alpha \quad \text{y} \quad H|_{\mathbb{S}^n \times \{1\}} = \beta,$$

donde podemos ver a los conjuntos  $\mathbb{S}^n \times \{0\}$  y  $\mathbb{S}^n \times \{1\}$  como la frontera de la variedad  $\mathbb{S}^n \times I$ . En otras palabras puedo decir que  $\alpha$  y  $\beta$  están relacionados porque existe una variedad (ie.  $\mathbb{S}^n \times I$ ) que tiene como frontera los dominios de  $\alpha$  y  $\beta$ , y una función  $H$  definida sobre esa variedad que se restringe a  $\alpha$  y a  $\beta$ .

Hago más precisa esta idea:

**Definición 42.** Sea  $X$  un espacio topológico. Si  $M^n$  es una variedad suave y compacta, la pareja  $(M, f)$  es simplemente una función continua  $f : M \rightarrow X$  donde  $M$  es considerada como subvariedad de algún espacio euclídeo. La *relación de cobordismo* es la siguiente relación de equivalencia sobre tales parejas:

$$(M^n, f) \sim (N^n, g) \iff \exists F : W^{n+1} \rightarrow X; \text{ continua tal que } \begin{cases} (i) & \partial W \cong M \sqcup N \\ (ii) & F|_M = f \text{ y } F|_N = g \end{cases}$$

donde  $W$  es una variedad suave, compacta, con frontera y de dimensión  $n + 1$ .

Observa que sí es una relación de equivalencia. Claramente es simétrica por definición. Es reflexiva porque  $(M, f) \sim (M, f)$  mediante la variedad  $W = M \times I$ , que tiene frontera  $\partial W = M \sqcup M$ , y la función  $F : W \rightarrow X$  definida por  $F(x, t) = f(x)$ . La transitividad es difícil de probar porque requiere un resultado muy fuerte de topología diferencial.

Sean  $(M, f) \sim (N, g)$  y  $(N, g) \sim (L, h)$  mediante  $F : W \rightarrow X$  y  $G : V \rightarrow X$  respectivamente. Lo ideal es “pegar”  $W$  y  $V$  a lo largo de  $N$ :

para obtener la variedad suave  $(W \cup V)/_N =: Y$ , y así poder definir

$$H : Y \rightarrow X \quad \text{con} \quad Y(x) = \begin{cases} F(x) & \text{si } x \in W \\ G(x) & \text{si } x \in V \end{cases}$$

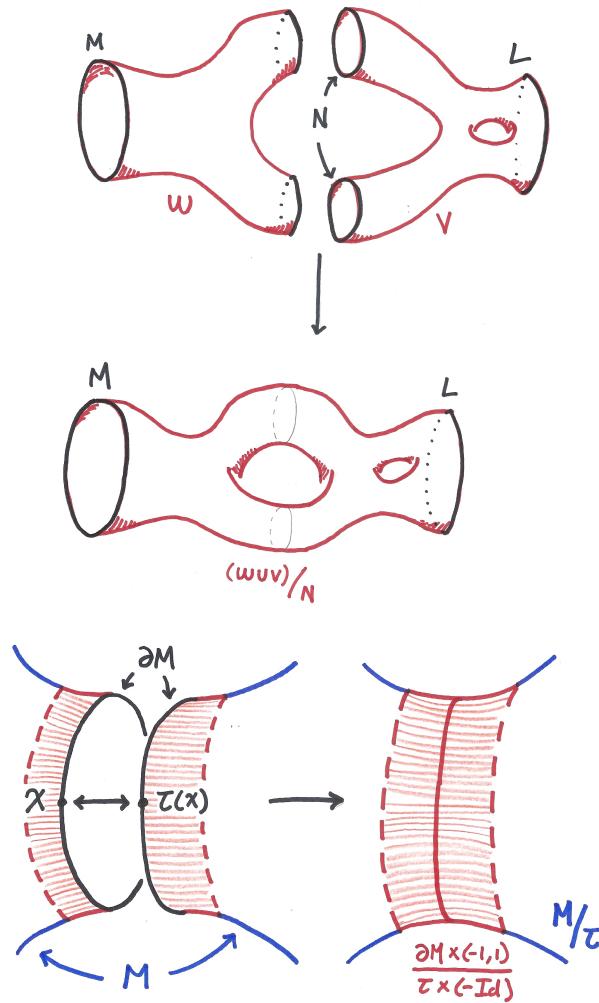
que claramente implica que  $(M, f) \sim (L, h)$ . Lo único que faltaría probar es que  $Y$  es una variedad suave, pero esto es consecuencia de los siguientes dos teoremas:

**Teorema 31.** *Toda variedad suave  $M$  con frontera tiene un collar, es decir existe un encaje  $(\partial M \times [0, 1]) \hookrightarrow M$ .*

**Teorema 32.** *Sea  $M$  una variedad suave con frontera,  $\kappa : (\partial M \times [0, 1]) \rightarrow M$  un collar y  $\tau : \partial M \rightarrow \partial M$  una función suave libre de puntos fijos tal que  $\tau \circ \tau = Id$ . Entonces el espacio cociente  $M/\tau := M/x \sim \tau(x)$  tiene una única estructura diferenciable tal que la inclusión  $M - \partial M \subset M/\tau$  y la función*

$$\hat{\kappa} : \frac{\partial M \times (-1, 1)}{\tau \times (-Id)} \rightarrow \frac{M}{\tau} \quad \text{con} \quad \hat{\kappa}[x, t] = \begin{cases} \kappa(x, t) & \text{si } t \geq 0 \\ \kappa(\tau(x), -t) & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

son encajes.



En palabras, este último teorema dice que un collar permite identificar la frontera mediante una involución sin puntos fijos de tal manera que el resto de la variedad (ie.  $M - \partial M$ ) no cambia y que los collares se pegan para dar un abierto de la variedad.

*Nota.* Para la transitividad, estoy usando como variedad a  $W \sqcup V$  y como involución  $\tau : N \rightarrow N$  que simplemente cambia de copia de  $N$  (observa que este no tiene puntos fijos porque el dominio y el contradominio de  $\tau$  son copias distintas de  $N$  como subvariedad de  $W \sqcup V$ ).

**Definición 43.** Al conjunto de clases de equivalencia  $[M, f]$  donde  $M$  es cerrada de dimensión  $n$  y  $f : M \rightarrow X$ , se denota  $\eta_n(X)$ . Es un grupo abeliano con la suma

$$[M, f] + [N, g] := [M \sqcup N, f \sqcup g]$$

y neutro  $0 = [\mathbb{S}^n, \text{cte}]$ .

En efecto,  $(M \sqcup \mathbb{S}^n, f \sqcup \text{cte}) \sim (M, f)$  mediante la variedad  $(M \times I) \sqcup \mathbb{D}^{n+1}$ , que tiene frontera  $M \sqcup (M \sqcup \mathbb{S}^n)$ , y la función

$$F(x) = \begin{cases} f(y) & \text{si } x = (y, t) \in M \times I \\ \text{cte} & \text{si } x \in \mathbb{D}^{n+1} \end{cases}.$$

*Nota.* Para evitar problemas conjuntistas, estoy asumiendo que todas las  $n$ -variedades cerradas están encajadas en  $\mathbb{R}^{2n}$ .

**Ejercicio 37.** Todo elemento de  $\eta_n(X)$  es su propio inverso, es decir  $-[M, f] = [M, f]$ .

*Proof.* Observa que  $[M, f] + [M, f] = [M \sqcup M, f \sqcup f]$ . Ahora considera la variedad  $N = (M \times I) \sqcup \mathbb{D}^{n+1}$  de dimensión  $n+1$ . Ahora defino  $F : N \rightarrow X$  como

$$F(x) = \begin{cases} f(y) & \text{si } x = (y, t) \in M \times I \\ \text{cte} & \text{si } x \in \mathbb{D}^{n+1} \end{cases}.$$

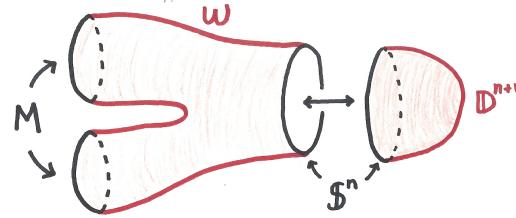
Claramente es continua porque  $F = (f \circ p) \sqcup \text{cte}$  donde  $f \circ p$  es la composición  $M \times I \xrightarrow{p} M \xrightarrow{f} X$ . Además  $\partial N = (M \sqcup M) \sqcup \mathbb{S}^n$  y por último  $F|_{M \sqcup M} = f \sqcup f$  y  $F|_{\mathbb{S}^n} = \text{cte}$  porque  $M \sqcup M \subset (M \times I)$  y  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{D}^{n+1}$  donde  $F$  vale, por definición,  $f \sqcup f$  y  $\text{cte}$  respectivamente.

Por lo tanto  $[M \sqcup M, f \sqcup f] \sim [\mathbb{S}^n, \text{cte}] = 0$  y así  $-[M, f] = [M, f]$ .  $\square$

*Proposición 18.* En  $\eta_n(X)$ ,  $[M, f] = 0$  si y sólo si existe una  $(n+1)$ -variedad compacta  $N$  y una función continua  $F : N \rightarrow X$  tal que  $\partial N \cong M$  y  $F|_M = f$ .

*Proof.*

( $\Rightarrow$ ) Por hipótesis existe una variedad  $W^{n+1}$  compacta y una función continua  $F : W \rightarrow X$  tal que  $\partial W \cong M \sqcup \mathbb{S}^n$ ,  $F|_M = f$  y  $F|_{\mathbb{S}^n} = \text{cte}$ . Como  $\partial \mathbb{D}^{n+1} = \mathbb{S}^n$  entonces mediante un collar puedo pegar  $\mathbb{D}^{n+1}$  y  $W$  a lo largo de  $\mathbb{S}^n$ . A esta nueva variedad la llamo  $N$ , es decir  $N = (W \cup \mathbb{D}^{n+1})/\mathbb{S}^n$ . También defino  $G : N \rightarrow X$  como  $G = F \sqcup \text{cte}$ . Como  $G|_{\mathbb{S}^n} = \text{cte} = F|_{\mathbb{S}^n}$  entonces  $G$  pasa al cociente y es continua. Claramente  $G|_M = F|_M = f$ .



( $\Leftarrow$ ) Sea  $N$  la variedad garantizada por hipótesis y defino  $W = N \sqcup \mathbb{D}^{n+1}$  junto con  $G : W \rightarrow X$  como  $G = F \sqcup \text{cte}$ . Observa que  $\partial W = \partial N \sqcup \partial \mathbb{D}^{n+1} \cong M \sqcup \mathbb{S}^n$ . Además:

$$\begin{aligned} G|_M &= G|_{\partial N} = F|_{\partial N} = F|_M = f \\ G|_{\mathbb{S}^n} &= G|_{\partial \mathbb{D}^{n+1}} = (G|_{\mathbb{D}^{n+1}})|_{\partial \mathbb{D}^{n+1}} = (\text{cte})|_{\partial \mathbb{D}^{n+1}} = \text{cte}. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $[M, f] = [\mathbb{S}^n, \text{cte}] = 0$ .  $\square$

Observa que si  $\varphi : X \rightarrow Y$  es continua, entonces éste induce un morfismo de grupos  $\varphi_* : \eta_n(X) \rightarrow \eta_n(Y)$  definido por  $\varphi_*[M, f] \mapsto [M, \varphi \circ f]$ . Entonces  $\eta_n : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ab}$  es un functor:

**Ejercicio 38.** La asignación  $X \mapsto \eta_n(X)$  es functorial, es decir  $\text{Id}_* = \text{Id}$  y  $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$ .

*Proof.* Sean  $[M, f] \in \eta_n(X)$  y  $\varphi : X \rightarrow Y$ ,  $\psi : Y \rightarrow Z$  funciones continuas.

$$(\text{Id}_X)_*[M, f] = [M, \text{Id}_X \circ f] = [M, f] \implies (\text{Id}_X)_* = \text{Id}_{\eta_n(X)}.$$

Además:

$$(\varphi \circ \psi)_*[M, f] = [M, (\varphi \circ \psi) \circ f] = [M, \varphi \circ (\psi \circ f)] = \varphi_*[M, \psi \circ f] = \varphi_*(\psi_*[M, f])$$

Por lo tanto  $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$  y acabo.  $\square$

*Nota.* Este último ejercicio prueba que  $X \mapsto \eta_n(X)$  es un funtor entonces preserva isomorfismos, es decir:

$$X \approx Y \implies \eta_n(X) \cong \eta_n(Y)$$

o en otras palabras,  $\eta_n$  es un invariante topológico.

De hecho,  $\eta_n$  es más que un invariante topológico, es un invariante homotópico. Para probar esto necesito:

*Proposición 19.* Sean  $\varphi, \psi : X \rightarrow Y$  funciones continuas. Entonces  $\varphi \simeq \psi \implies \varphi_* = \psi_*$ .

*Proof.* Sea  $[M, f] \in \eta_n(X)$ , entonces  $\varphi_*[M, f] = [M, \varphi \circ f]$  y  $\psi_*[M, \psi \circ f]$ . Por hipótesis  $\varphi \simeq \psi$  mediante alguna homotopía  $H : X \times I \rightarrow Y$  (en particular  $H_0 = \varphi$  y  $H_1 = \psi$ ). Ahora considera  $F : M \times I \rightarrow Y$  definido por la composición

$$M \times I \xrightarrow{f \times \text{Id}} X \times I \xrightarrow{H} Y .$$

Observa que  $F(x, 0) = H(f(x), 0) = \varphi(f(x))$  y  $F(x, 1) = H(f(x), 1) = \psi(f(x))$ , es decir:

$$F|_{M \times \{0\}} = \varphi \circ f \quad y \quad F|_{M \times \{1\}} = \psi \circ f.$$

Como  $\partial(M \times I) = (M \times \{0\}) \sqcup (M \times \{1\}) = M \sqcup M$  y  $F$  es continua, entonces  $[M, \varphi \circ f] \sim [M, \psi \circ f]$  y así  $\varphi_*[M, f] = \psi_*[M, f]$  para toda  $[M, f] \in \eta_n(X)$ .  $\square$

**Ejercicio 39.** Para toda  $n$ , se tiene que  $X \simeq Y \implies \eta_n(X) \cong \eta_n(Y)$ , es decir que  $\eta_n$  es un invariante homotópico.

*Proof.* Por hipótesis existen  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  continuas tales que  $f \circ g \simeq \text{Id}_Y$  y  $g \circ f \simeq \text{Id}_X$ . La proposición pasada y el ejercicio 38 garantizan que:

$$\text{Id}_{\eta_n(Y)} = (\text{Id}_Y)_* = (f \circ g)_* = f_* \circ g_* \quad y \quad \text{Id}_{\eta_n(X)} = (\text{Id}_X)_* = (g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

lo cual implica que  $f_* : \eta_n(X) \rightarrow \eta_n(Y)$  y  $g_* : \eta_n(Y) \rightarrow \eta_n(X)$  son isomorfismos. Por lo tanto  $\eta_n(X) \cong \eta_n(Y)$ .  $\square$

Esta idea se puede generalizar. En lugar de tomar  $M^n$  sin frontera para las clases  $[M, f]$ , puedo tomar  $M$  con frontera tal que  $f[\partial M] \subseteq A$  donde  $A \subseteq X$  es un conjunto cerrado fijo. Estas clases se denotan por  $\eta_n(X, A)$ . Estos grupos son importantes porque forman una sucesión exacta larga:

$$\cdots \longrightarrow \eta_n(A) \longrightarrow \eta_n(X) \longrightarrow \eta_n(X, A) \xrightarrow{\delta} \eta_{n-1}(A) \longrightarrow \eta_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

donde  $\delta[M, f] = [\partial M, f|_{\partial M}]$ . Los grupos  $\eta_n(X, A)$  cumplen la propiedad de *escisión*:

**Teorema 33.** Sea  $U \subset A \subseteq X$  tal que  $\bar{U} \subseteq \bar{A}$ . Entonces la inclusión  $\iota : (X - U, A - U) \hookrightarrow (X, A)$  induce un isomorfismo  $\eta_n(X - U, A - U) \cong \eta_n(X, A)$ .

En general si  $h_*(X, A) = \{h_n(X, A)\}_{n=0}^\infty$  es una familia de grupos abelianos tales que  $(X, A) \mapsto h_N(X, A)$  es functorial, existe una sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow h_n(A) \longrightarrow h_n(X) \longrightarrow h_n(X, A) \longrightarrow h_{n-1}(A) \longrightarrow h_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

y cada  $h_n$  cumple la propiedad de escisión, se dice que  $h_*(X, A)$  es una teoría de homología.

Ahora calculo  $\eta_n$  de un punto. Para esto, denoto  $\eta_n := \eta_n(\{x\})$ . Observa que los elementos de  $\eta_n$  son de la forma  $[M, \text{cte}]$ . Por lo tanto  $[M] = [N]$  si y sólo si existe una variedad  $W^{n+1}$  y una función  $F : W \rightarrow \{x\}$  continua (ie.  $F = \text{cte}$ ) tal que  $\partial W = M \sqcup N$ . Como  $F$  es necesariamente constante, dos elementos  $[M, \text{cte}]$  y  $[N, \text{cte}]$  de  $\eta_n$  son iguales si son frontera de una variedad de dimensión  $n+1$ . Vale la pena mencionar que si  $M = \partial N$  entonces  $[M, \text{cte}] = 0 = [\mathbb{S}^n, \text{cte}]$ ; nada más toma  $W = N \sqcup \mathbb{D}^{n+1}$ .

Como todas las funciones en este caso son constantes, denotaré a la clase  $[M, \text{cte}] \in \eta_n$  simplemente por  $[M]$  y se llama la *clase de bordismo* de  $M$ . Calcular las clases de bordismo de variedades de dimensión cero es sencillo:

**Ejercicio 40.** La función  $\Phi : \eta_0 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  definido por  $[M] \mapsto \#M \bmod 2$  es un isomorfismo.

*Proof.* Primero observa que para todo elemento  $[M] \in \eta_0$ ,  $M$  es compacto, entonces  $M$  es un conjunto finito de puntos. Así tiene sentido definir  $\Phi$ .

Para probar que  $\Phi$  está bien definido, supongo que  $[M] = [N]$  para variedades cerradas  $M = \{x_1, \dots, x_m\}$  y  $N = \{y_1, \dots, y_n\}$ . Esto quiere decir que hay una 1-variedad  $W$  tal que  $\partial W = M \sqcup N$ . Como  $W$  es una 1-variedad, entonces necesariamente es la unión disjunta de intervalos (ie. trayectorias) y de círculos. Como  $\partial \mathbb{S}^1 = \emptyset$ , puedo asumir que  $W$  es simplemente la unión disjunta de trayectorias.

La frontera de una trayectoria es la unión disjunta de su punto inicial y su punto final (ya que por suposición esta trayectoria no puede ser un lazo). Por lo tanto por cada pareja de puntos en  $M \sqcup N$  hay una trayectoria (que es una componente de  $W$ ) que las une. Además esta trayectoria es única ya que si hay dos trayectorias que tienen el mismo punto inicial (o final), este punto deja de ser parte de la frontera.

Con esto puedo concluir que las componentes de  $W$  inducen un apareamiento entre los elementos de  $M \sqcup N$  sin dejar un punto libre (ya que de lo contrario  $W$  no sería de dimensión 1). Por lo tanto  $M \sqcup N$ , que tiene  $n+m$  elementos, tiene una cantidad par de puntos. Por lo tanto  $n$  y  $m$  necesariamente tienen la misma paridad, o en otras palabras  $m \equiv n \bmod 2$ . Con esto concluyo que  $\Phi[M] = \Phi[N]$  y  $\Phi$  está bien definido.

Observa que

$$\Phi([M] + [N]) = \Phi[M \sqcup N] = \#(M \sqcup N) = \#M + \#N = \Phi[M] + \Phi[N]$$

entonces al reducir módulo 2 obtengo que  $\Phi$  es un homomorfismo de grupos.

Claramente es sobre porque

$$\begin{aligned}\Phi[\{x_0\}] &= \#\{x_0\} \equiv 1 \bmod 2 \\ \Phi[\{x_0, x_1\}] &= \#\{x_0, x_1\} = 2 \equiv 0 \bmod 2.\end{aligned}$$

Por último, si  $\Phi[M] = 0$  entonces  $\#M$  es par, es decir  $M$  es un conjunto par de puntos, digamos  $2n$ . Si  $W = I \sqcup \dots \sqcup I$  es la unión disjunta de  $n$  intervalos entonces  $M$  es difeomorfo a

$$\partial W = \bigsqcup_{j=1}^n \partial I = \bigsqcup_{j=1}^n \{0, 1\}$$

y así  $M$  es la frontera de una 1-variedad. Por lo tanto  $[M] = 0$  y  $\ker \Phi = 0$ .

Con esto he probado que  $\Phi$  es un isomorfismo y que  $\eta_0 \cong \mathbb{Z}_2$ .  $\square$

Para calcular  $\eta_1$ , sólo basta recordar la clasificación de variedades cerradas de dimensión 1: si  $[M] \in \eta_1$  entonces  $M \cong \mathbb{S}^1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{S}^1$  y así  $[M] = [\mathbb{S}^1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{S}^1] = [\mathbb{S}^1] + \dots + [\mathbb{S}^1] = 0 + \dots + 0 = 0$  para toda  $[M] \in \eta_1$ . Por lo tanto  $\eta_1 = 0$ .

Para dimensión 2, uso la clasificación de superficies cerradas: para toda  $[M] \in \eta_2$  tengo que  $M$  es una suma conexa de toros o una suma conexa de planos proyectivos. En el primer caso,  $M$  es la frontera de ls suma conexa de toros rellena y así  $[M] = 0$ . Por lo tanto  $\eta_2 = \mathbb{Z}_2$ , generado por  $[\mathbb{R}P^2]$ .

En general,

$$\eta_* := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \eta_n$$

es un grupo abeliano graduado con graduación  $\eta_n \times \eta_m \rightarrow \eta_{n+m}$  definido por  $([M], [N]) \mapsto [M \times N]$ .

**Teorema 34.** (Thom) Sean  $\{x_2, x_4, x_5, \dots\}$  variables independientes con subíndices  $n \neq 2^m - 1$  para toda  $m$ . Entonces  $\eta_* \cong \mathbb{Z}_2[x_2, x_4, x_5, \dots]$  donde el isomorfismo se puede tomar de tal manera que la imagen de  $x_n$  es un elemento de  $\eta_n$  y que  $x_{2n} \mapsto [\mathbb{R}P^{2n}]$ .

De este teorema se tiene inmediatamente que  $\eta_3 = 0$  porque no hay un polinomio  $\pm x_2 \pm x_4 \pm x_5 \pm \dots$  que corresponda a un  $[M] \in \eta_3$  donde  $M$  es de dimensión 3.

**Ejercicio 41.**  $\eta_4 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ .

*Proof.*  $\square$

### 1.13.3 Cobordismo con Orientación

Hay una teoría similar al cobordismo si incluimos orientación:

**Definición 44.** Sobre el conjunto de parejas  $((M, \mathfrak{O}_M), f)$ , donde  $M$  es una variedad cerrada con orientación  $\mathfrak{O}_M$  y  $f : M \rightarrow X$  es una función continua, defino la siguiente relación de equivalencia:  $((M^n, \mathfrak{O}_M), f) \sim ((N^n, \mathfrak{O}_N), g)$  si y sólo si

$$\exists F : W^{n+1} \rightarrow X; \text{ continua tal que } \begin{cases} (i) & (\partial W, \mathfrak{O}_{\partial W}) \cong (M, \mathfrak{O}_M) \sqcup (N, \mathfrak{O}_N) \\ (ii) & F|_M = f \text{ y } F|_N = g \end{cases}$$

donde  $W$  es una variedad suave, compacta, con frontera y el difeomorfismo entre las fronteras preserva las orientaciones.

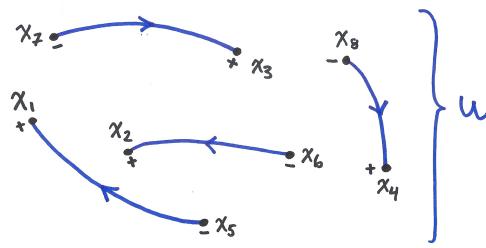
De la misma manera que definí  $\eta_n$ , defino  $\Omega_n$  como las clases  $[(M, \mathfrak{O}_M), f]$  sobre  $X = \{x\}$ . En este caso,  $\Omega_0$  también son 0-variedades compactas, ie. conjuntos finitos pero como también están orientadas, cada punto viene con un signo. Por ejemplo si  $M = \{x_1, x_2\}$  entonces una orientación de  $M$  puede ser  $(M, \mathfrak{O}_M) = \{(x_1, -1), (x_2, +1)\}$ .

Más precisamente, si  $M = \{x_1, \dots, x_n\}$  es una variedad compacta de dimensión 0, una orientación  $\mathfrak{O}_M$  es un conjunto  $\{\mathfrak{o}_1, \dots, \mathfrak{o}_n\}$  donde  $\mathfrak{o}_j \in \{-1, +1\}$ . Entonces la variedad orientada se escribe como  $(M, \mathfrak{O}_M) = \{(x_j, \mathfrak{o}_j)\}$ . Por lo tanto puedo reordenar los elementos de  $M$  tal que aparecen primero los que tienen orientación positiva. Es decir, puedo escribir  $M = \{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+m'}\}$  donde  $\mathfrak{o}_j = +1$  para  $j \in \{1, \dots, m\}$  y  $\mathfrak{o}_{m+j} = -1$  para  $j \in \{1, \dots, m'\}$ .

Ahora me pregunto cuando  $(M, \mathfrak{O}_M)$  es la frontera de una 1-variedad orientada  $(W, \mathfrak{O}_W)$ . Primero observa que toda 1-variedad compacta es la unión disjunta (finita) de intervalos/trayectorias y círculos, pero como sólo me interesa la frontera de  $W$  y  $\partial \mathbb{S}^1 = \emptyset$ , puedo considerar solamente las  $W$  cuyas componentes son únicamente intervalos/trayectorias (sin ser lazos). Además puedo asumir que  $W$  está encajado en algún  $\mathbb{R}^N$  entonces sí puedo asumir que los componentes de  $W$  efectivamente son trayectorias, ie. imágenes suaves del intervalo  $[0, 1]$ .

En este caso,  $\partial W$  es la unión disjunta de los puntos iniciales y finales de cada componente de  $W$ . Además ningún punto en  $\partial W$  puede estar en dos trayectorias distintas ya que sucede uno de dos casos prohibidos: las trayectorias se intersectan y producen una variedad no diferenciable; el punto es inicial de una trayectoria y final de otra trayectoria que se pegan suavemente, pero en este caso este punto no está en  $\partial W$ . Por lo tanto cada pareja de elementos distintos de  $\partial W$  están conectados por una única trayectoria en  $\mathbb{R}^N$  que es una componente abierta de  $W$ . Además, una orientación de  $W$  induce una orientación en  $\partial W$ : simplemente le asigna un  $-1$  a los puntos iniciales y un  $+1$  a los puntos finales. Para aclarar esta discusión, considera la figura 1.10 donde la frontera de  $W$  es

Figure 1.10:



$$(\partial W, \mathfrak{O}_{\partial W}) = \{(x_1, +1), (x_2, +1), (x_3, +1), (x_4, +1), (x_5, -1), (x_6, -1), (x_7, -1), (x_8, -1)\}$$

Observa que si  $(M, \mathfrak{O}_M)$  es la frontera de la 1-variedad orientada  $(W, \mathfrak{O}_W)$  entonces  $M$  tiene la misma cantidad de puntos orientados positivamente que de puntos orientados negativamente; ya que las trayectorias inducen una biyección entre los puntos iniciales (ie. los puntos orientados negativamente) y los puntos finales (ie. los puntos orientados positivamente). En particular tengo:

*Proposición 20.* Si  $(M, \mathfrak{O}_M)$  es una 0-variedad cerrada tal que  $(M, \mathfrak{O}_M) \cong (\partial W, \mathfrak{O}_{\partial W})$ , donde el difeomorfismo preserva orientación, entonces

$$\#\{x \in M \mid \mathfrak{o}_x = +1\} = \#\{x \in M \mid \mathfrak{o}_x = -1\}.$$

Más generalmente tengo:

**Ejercicio 42.** Para cada 0-variedad orientada  $(M, \mathfrak{O}_M)$  donde  $M = \{x_1, \dots, x_n\}$  y  $\mathfrak{O}_M = \{\mathfrak{o}_1, \dots, \mathfrak{o}_n\}$  (con cada  $\mathfrak{o}_j \in \{-1, 1\}$ ), defino la función  $\Phi : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{Z}$  como

$$\Phi[M, \mathfrak{O}_M] = \sum_{j=1}^n \mathfrak{o}_j.$$

Prueba que  $\Phi$  es un isomorfismo, y en particular  $\Omega_0 \cong \mathbb{Z}$ .

*Proof.* Primero pruebo que  $\Phi$  está bien definido. Sean  $[M, \mathfrak{O}_M] = [N, \mathfrak{O}_N]$ , entonces  $M \sqcup N$  es la frontera de una 1-variedad orientada  $(W, \mathfrak{O}_W)$ . Como en la discusión anterior, escribo  $M \sqcup N = \{x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_{s+s'}\}$  donde la orientación de  $x_j$  es positiva para  $j \in \{1, \dots, s\}$  y negativa para el resto. Por la proposición 20, sé que  $s = s'$ .

Por otro lado supongo que  $M$  tiene  $m$  puntos orientados positivamente y  $m'$  puntos orientados negativamente, en particular  $\Phi[M, \mathfrak{O}_M] = m - m'$ . Similarmente también supongo que  $\Phi[N, \mathfrak{O}_N] = n - n'$  (con la misma notación, es decir  $N$  tiene  $n$  puntos positivos y  $n'$  puntos negativos). Claramente la cantidad de puntos en  $M \sqcup N$  orientados positivamente es  $s = m + n$ . Similarmente  $s' = m' + n'$ . Por lo tanto si sustituyo esto en la fórmula garantizada por la proposición 20, obtengo que

$$s = s' \implies m + n = m' + n' \implies m - m' = n - n' \implies \Phi[M, \mathfrak{O}_M] = \Phi[N, \mathfrak{O}_N]$$

y concluyo que  $\Phi$  está bien definida.

Ahora supongo que  $\Phi[M, \mathfrak{O}_M] = m - m' = n - n' = \Phi[N, \mathfrak{O}_N]$ , entonces  $m + n = m' + n'$  y así  $M \sqcup N$  tiene la misma cantidad de puntos orientados positivamente que de puntos orientados negativamente. Entonces existe una biyección

$$\{x \in M \sqcup N \mid \mathfrak{o}_x = +1\} \longleftrightarrow \{x \in M \sqcup N \mid \mathfrak{o}_x = -1\}.$$

Por lo tanto con esta asociación puedo construir trayectorias que inicia en un punto orientado negativamente y terminan en el punto orientado positivamente que está asociado al punto inicial. De esta manera la unión disjunta de estas trayectorias está orientada y la orientación que induce sobre su frontera, ie.  $M \sqcup N$ , es exactamente la orientación de  $M \sqcup N$ .

Por lo tanto  $M \sqcup N$  es la frontera de una 1-variedad compacta orientada y así  $[M, \mathfrak{O}_M] = [N, \mathfrak{O}_N]$  y  $\Phi$  es inyectiva.

$\Phi$  es claramente sobreyectiva porque

$$\begin{aligned} \Phi[\{(x_1, +1), \dots, (x_1, +1)\}] &= 1 + \dots + 1 = n \\ \Phi[\{(x_1, -1), \dots, (x_1, -1)\}] &= -1 - \dots - 1 = -n \\ \Phi[\{(x_1, +1), (x_2, -1)\}] &= 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

□

# Chapter 2

## Homología

### 2.1 Complejos Simpliciales

#### 2.1.1 Complejos simpliciales geométricos

**Definición 45.** Un subconjunto  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^n$  es *afín-independiente* (AI) si el conjunto de diferencias  $\{a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$  es linealmente independiente en  $\mathbb{R}^n$ .

En palabras esto significa que un conjunto  $\{a_0, \dots, a_n\}$  es AI si el conjunto  $\{a_1, \dots, a_n\}$  bajo la traslación  $a_0 \mapsto 0$ , es linealmente independiente. En particular, si  $\{a_1, \dots, a_n\}$  es linealmente independiente en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\{0, a_1, \dots, a_n\}$  es AI.

Observa que en la definición de AI, puedo tomar cualquier espacio ambiente  $\mathbb{R}^N$  con la condición  $N \geq n$ .

**Ejercicio 43.** Prueba que  $\{a_0, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^n$  es AI si y sólo si para todas  $\lambda_i$ 's tales que  $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 0$  se cumple que  $\sum \lambda_i a_i = 0 \implies \lambda_i = 0$  para toda  $i \in \{0, \dots, n\}$ .

*Proof.* Sea  $\{a_0, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^n$

( $\implies$ ) Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tales que  $\sum \lambda_i = 0$  y supongo que  $\sum \lambda_i a_i = 0$ . Entonces

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_0) = -a_0 \sum_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = -a_0(-\lambda_0) - \lambda_0 a_0 = 0.$$

Como  $\{a_0, \dots, a_n\}$  es AI,  $\{a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$  es linealmente independiente y así concluyo que  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ . Por último, sustituyo esto en  $\sum \lambda_i = 0$  para concluir que también  $\lambda_0 = 0$ .

( $\iff$ ) Sea  $\sum \mu_i (a_i - a_0) = 0$  una combinación lineal. Entonces

$$\sum_{i=1}^n \mu_i a_i = a_0 \sum_{i=1}^n \mu_i. \tag{2.1}$$

Ahora defino  $\lambda_i := \mu_i$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$  y defino  $\lambda_0 = -\mu_1 - \dots - \mu_n$ . Observa que  $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 0$  por definición. Además la ecuación (2.1) se convierte en:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = a_0(-\lambda_0) \implies \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i = 0.$$

Por hipótesis esto implica que  $\lambda_i = 0$  para toda  $i \in \{0, \dots, n\}$ . En particular  $\mu_1 = \dots = \mu_n = 0$  y  $\{a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$  es linealmente independiente. Por lo tanto  $\{a_0, \dots, a_n\}$  es AI.

□

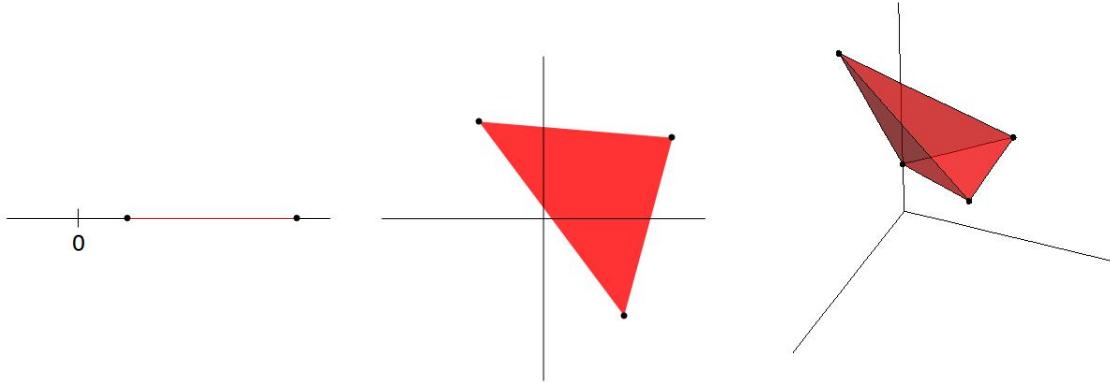
Este ejercicio dice que la condición AI es casi equivalente a la independencia lineal, la única restricción es que los coeficientes de la combinación lineal (igualada a cero) deben sumar 0. Esta condición adicional literalmente “traslada” la condición de independencia lineal al punto  $a_0$ .

**Definición 46.** Un *n-simplejo geométrico* en  $\mathbb{R}^N$  (en particular  $N \geq n$ ) es un subconjunto  $\sigma_n \subset \mathbb{R}^N$  de la forma:

$$\sigma_n = \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i \mid \{a_0, \dots, a_n\} \text{ es AI, } \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

y se denota como  $\sigma_n = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$  (ve la figura 2.1).

Figure 2.1: Ejemplos de *n*-simplejos geométricos de dimensión 1,2 y 3



*Nota.* Esta definición es exactamente la definición de la cerradura convexa del conjunto  $\{a_0, \dots, a_n\}$ , ie.  $\text{Conv}(a_0, \dots, a_n) = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$ .

Recuerda que la cerradura convexa de un conjunto  $X \subset \mathbb{R}^N$  (en este caso tomo  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  finito) es la intersección de todos los conjuntos convexos que lo contienen. Más precisamente si escribo  $\mathfrak{C} = \{Y \subseteq \mathbb{R}^N \mid Y \text{ es convexo y } X \subseteq Y\}$ , entonces

$$\text{Conv}(X) = \bigcap_{Y \in \mathfrak{C}} Y. \quad (2.2)$$

Es sencillo probar (2.2): primero observa que  $\text{Conv}(X)$  es un conjunto convexo porque si  $\lambda = \sum \lambda_i x_i, \mu = \sum \mu_i x_i \in \text{Conv}(X)$  entonces

$$t\lambda + (1-t)\mu = \sum_{i=1}^n (t\lambda_i + (1-t)\mu_i)x_i \in \text{Conv}(X) \quad \forall t \in [0, 1]$$

ya que

$$\sum_{i=1}^n t\lambda_i + (1-t)\mu_i = t \sum_{i=1}^n \lambda_i + (1-t) \sum_{i=1}^n \mu_i = t + (1-t) = 1.$$

Por lo tanto  $\text{Conv}(X) \in \mathfrak{C}$  y la contención  $\supseteq$  de (2.2) se cumple. Para la otra contención considera  $Y \in \mathfrak{C}$  y observa que si  $\sum \lambda_i x_i \in \text{Conv}(X)$  entonces  $\sum \lambda_i x_i \in Y$  porque  $x_1, \dots, x_n \in Y$ ,  $\sum \lambda_i = 1$  y  $Y$  es convexo; por lo tanto  $\text{Conv}(X) \subseteq Y$  para toda  $Y \in \mathfrak{C}$ .

Por último, la intersección de conjuntos convexos es convexo (razón: si  $x, y \in \bigcap Y_i$  con  $Y_i$  convexo, entonces la recta  $\mathcal{L}$  que un  $x, y$  está contenido en cada  $Y_i$  y así  $\mathcal{L} \subseteq \bigcap Y_i$ ), entonces he probado que:

*Proposición 21.* El *n*-simplejo geométrico  $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$  es el conjunto convexo más pequeño que contiene al conjunto  $\{a_0, \dots, a_n\}$ , en general:

$$\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle = \text{Conv}(a_0, \dots, a_n) = \bigcap_{Y \in \mathfrak{C}} Y$$

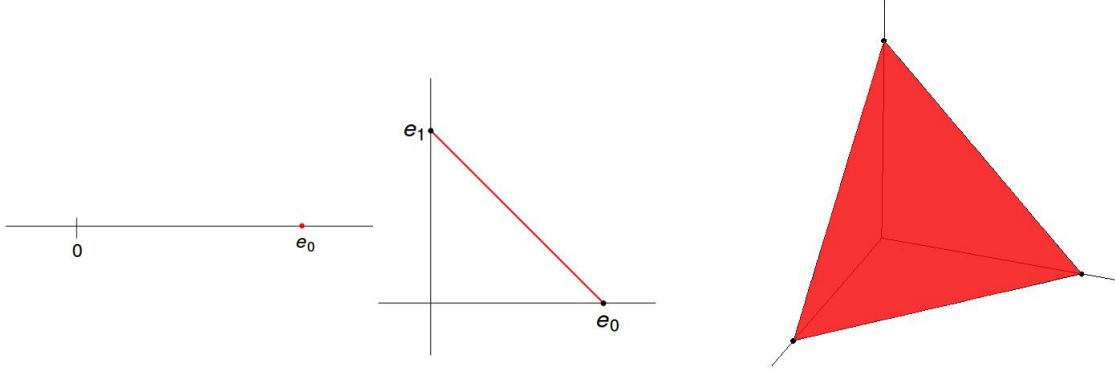
donde  $\mathfrak{C}$  es la familia de conjuntos convexos  $Y$  que contienen a  $\{a_0, \dots, a_n\}$ .

Hay una clase de  $n$ -simplejos muy importantes:

**Definición 47.** El  $n$ -simplejo geométrico *estándar*, denotado por  $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , es el  $n$ -simplejo generado por la base canónica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , ie.  $\Delta^n := \langle e_0, \dots, e_n \rangle$ .

Ve la figura 2.2 para los primeros ejemplos.

Figure 2.2: Ejemplos de  $n$ -simplejos geométricos estándares de dimensión 0,1 y 2



Observa que podemos encajar  $\Delta^n$  en  $\mathbb{R}^n$  en lugar de  $\mathbb{R}^{n+1}$  como  $\Delta^n = \langle 0, e_1, \dots, e_n \rangle$ ; en este caso  $\Delta^n = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum \lambda_i \leq 1, \lambda_i \geq 0\}$ . Estas dos maneras de definir los simplejos estándares son equivalentes entonces usaré ambas descripciones intercambiablemente.

Los  $n$ -simplejos geométricos estándares nos permite clasificar topológicamente todos los  $n$ -simplejos geométricos mediante la siguiente proposición:

*Proposición 22.* Sean  $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$  y  $\tau = \langle b_0, \dots, b_n \rangle$  dos  $n$ -simplejos en  $\mathbb{R}^N$ . Entonces  $\sigma \approx \tau$  donde el homeomorfismo sólo depende de los vértices. En este caso se dice que  $\sigma$  y  $\tau$  son *afinamente homeomorfos*.

**Ejercicio 44.** La función  $f : \sigma \rightarrow \tau$  definida por  $f(\sum \lambda_i a_i) = \sum \lambda_i b_i$  es un homeomorfismo.<sup>1</sup>

*Proof.* Primero observa que si  $x = \sum \lambda_i a_i \in \sigma$ , entonces  $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_n$  y así:

$$\begin{aligned} x &= \lambda_0 a_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = a_0(1 + \sum_{i=1}^n (-\lambda_i)) + \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = a_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_0) \\ \therefore x - a_0 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_0) \end{aligned}$$

Ahora defino  $T_{a_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  como la traslación  $x \mapsto x - a_0$ . Por lo tanto  $T_{a_0}[\sigma] = \langle 0, a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0 \rangle$  donde  $A = \{a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$  es una base. Después defino  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  como la transformación lineal que cambia la base  $A$  en la base  $B = \{b_1 - b_0, \dots, b_n - b_0\}$ , en particular  $F(a_i - a_0) = b_i - b_0$ . Por último sea  $T_{-b_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la traslación  $x \mapsto x + b_0$ . Claramente cada una de estas tres funciones son homeomorfismos entonces su composición es un homeomorfismo de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ .

Para  $x = \sum \lambda_i a_i \in \sigma$  calculo:

$$\begin{aligned} (T_{-b_0} \circ F \circ T_{a_0})(x) &= (T_{-b_0} \circ F)(x - a_0) = (T_{-b_0} \circ F) \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_0) \right) \\ &= T_{-b_0} \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i (b_i - b_0) \right) = b_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i (b_i - b_0) = \sum_{i=0}^n \lambda_i b_i = f(x) \\ \therefore (T_{-b_0} \circ F \circ T_{a_0})|_\sigma &= f \end{aligned}$$

<sup>1</sup>En clase probamos esto usando el hecho que los  $n$ -simplejos geométricos son compactos (cf. ejercicio 45), pero modifiqué esta prueba para no usar la compacidad para poder demostrar el ejercicio 45 con este ejercicio y así evitar un círculo lógico.

y así  $f$  es casi un homeomorfismo, lo único que hace falta calcular es la imagen de  $f$ . Pero esto es sencillo:

$$\text{Im}(f) = \{f(\sum \lambda_i a_i) \mid \sum \lambda_i a_i \in \sigma\} = \{\sum \lambda_i b_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1\} = \tau.$$

Por lo tanto:

$$(T_{-b_0} \circ F \circ T_{a_0})|_\sigma = f : \sigma \rightarrow \tau$$

es un homeomorfismo por ser restricción del homeomorfismo  $T_{-b_0} \circ F \circ T_{a_0}$  (co-restringido a su imagen).  $\square$

Un corolario inmediato de este ejercicio es que todo  $n$ -simplejo geométrico  $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$  es homeomorfo al complejo geométrico estándar  $\Delta^n$ . Por lo tanto la topología de  $\Delta^n$  completamente determina la topología de los  $n$ -simplejos geométricos:

**Ejercicio 45.** Todo  $n$ -simplejo geométrico  $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$  es cerrado, convexo y compacto como subespacio de  $\mathbb{R}^N$ .

*Proof.* Como  $\sigma = \text{Conv}(a_0, \dots, a_n)$  (por la proposición 21), entonces  $\sigma$  es convexo.

Para probar compacidad, basta probar que los  $n$ -simplejos geométricos estándares son compactos ya que todo  $n$ -simplejo geométrico es homeomorfo a  $\Delta^n$  (cf. ejercicio 44).

Sea  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$  el plano definido por  $x_1 + \dots + x_n = 1$  y  $C \subset \mathbb{R}^n$  el primer cuadrante, ie.  $C = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0\}$ . Observa que ambos conjuntos son cerrados. Ahora pruebo que:

$$\Delta^n = \langle 0, e_1, \dots, e_n \rangle = \mathcal{P} \cap C$$

y así  $\Delta^n$  es cerrado.

- ( $\subseteq$ ) Sea  $x = \sum \lambda_i e_i$  donde  $0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$  y  $\lambda_i \geq 0$ . Como  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es la base estándar, entonces  $x = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  y claramente se cumple que  $x \in \mathcal{P} \cap C$ .
- ( $\supseteq$ ) Sea  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{P} \cap C$ , entonces  $x_1 + \dots + x_n = 1$  y  $x_i \geq 0$ . Si tomo  $\lambda_i = x_i$  entonces  $x = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum \lambda_i e_i \in \Delta^n$ .

Por último observa que si  $x = \sum \lambda_i e_i \in \Delta^n$  entonces:

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|\lambda_i e_i\| = \sum_{i=1}^n |\lambda_i| = \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

ya que  $0 \leq \lambda_i$ . Por lo tanto  $\Delta^n$  es un conjunto cerrado y acotado en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\Delta^n$  es compacto.  $\square$

**Definición 48.** Sea  $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$  un  $n$ -simplejo geométrico y  $m \leq n$ . Una  $m$ -cara  $\tau$  de  $\sigma$  es el  $m$ -simplejo geométrico asociado a algún subconjunto  $\{a_{i_0}, \dots, a_{i_m}\}$  de  $\{a_0, \dots, a_n\}$ , es decir  $\tau = \langle a_{i_0}, \dots, a_{i_m} \rangle \subseteq \sigma$ .

**Definición 49.** El *baricentro* de un  $n$ -simplejo geométrico  $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$  es el punto

$$\mathbf{b}(\sigma) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n a_i$$

Observa que el baricentro  $\mathbf{b}(\sigma)$  es un elemento de  $\sigma$  porque  $\sum \frac{1}{n+1} = 1$ .

Los  $n$ -simplejos por sí solos no son muy interesantes topológicamente (acabamos de clasificarlos todos!), pero forman parte de una construcción muy importante:

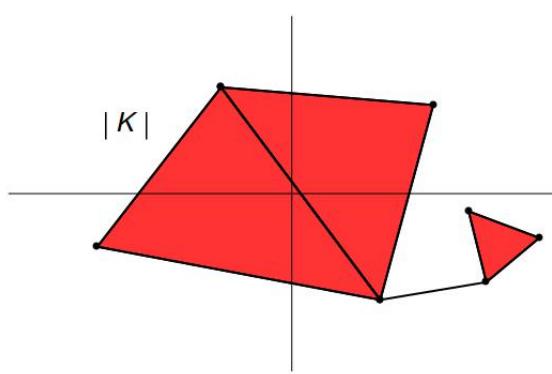
**Definición 50.** Un *complejo simplicial geométrico* en  $\mathbb{R}^N$  es una familia finita  $K$  de simplejos geométricos (de dimensión  $\leq N$ ) que cumple dos propiedades:

- (i)  $K$  contiene todas las caras de todos sus elementos, es decir si  $\sigma \in K$  y  $\tau \subset \sigma$  es una cara, entonces  $\tau \in K$ .
- (ii) La intersección de cualesquiera dos  $\sigma, \tau \in K$  es una cara común de  $\sigma$  y  $\tau$  (también incluyo el caso cuando la intersección es vacía).

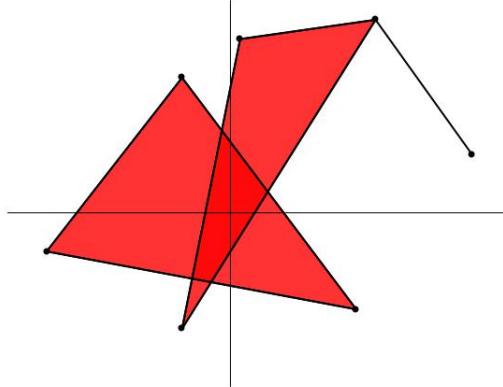
Intuitivamente, la primera propiedad nada más garantiza que estás trabajando con todos los posibles sub-simplejos del complejo. La segunda condición te dice que los simplejos se pegan bien, es decir a lo largo de caras (que por la primera propiedad son elementos de  $K$ ).

Para visualizar un complejo simplicial geométrico  $K$ , dibjuamos su “realización geométrica”  $|K| := \{x \in \mathbb{R}^N \mid \exists \sigma \in K \text{ tal que } x \in \sigma\} = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ .

(a) Sí es complejo simplicial geométrico.



(b) No es complejo simplicial geométrico.



Esta construcción se puede generalizar considerablemente.

### 2.1.2 Complejos simpliciales abstractos

**Definición 51.** Une *complejo simplicial* (abstracto)  $K$  es una familia de subconjuntos finitos no vacíos de un conjunto  $V_K$ , cuyos elementos se llaman *vértices*, que satisface:

- (i)  $K$  contiene todos los singuletes de  $V_K$ , es decir  $v \in V_k \implies \{v\} \in K$ .
- (ii)  $K$  es cerrado bajo subconjuntos, es decir si  $L \in K$  y  $L' \subseteq L$  entonces  $L' \in K$ .

Esta definición efectivamente generaliza la definición de complejo simplicial geométrico; la idea es que para pasar de complejos simpliciales geométricos a complejos simpliciales abstractos basta tomar los “vértices” de los simplejos geométricos en lugar de todas las combinaciones convexas de ellas.

**Ejercicio 46.** Todo complejo simplicial geométrico determina un complejo simplicial abstracto.

*Proof.* Sea  $K = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  un complejo simplicial geométrico con  $\sigma_i = \langle a_0^i, \dots, a_{n_i}^i \rangle$ ; los veo encajados en algún  $\mathbb{R}^N$ , ie.  $a_j^i \in \mathbb{R}^N$  para toda  $i \in \{1, \dots, n\}$  y para toda  $j \in \{0, \dots, n_i\}$ . Para cada simplejo  $\sigma_i \in K$  defino el conjunto de sus vértices como  $\sigma'_i = \{a_0^i, \dots, a_{n_i}^i\}$ .

En general escribo el conjunto de vértices como

$$V := \bigcup_{i=1}^n \sigma'_i = \{a_j^i\}_{i,j} \subset \mathbb{R}^N$$

y defino  $K' = \{\sigma'_i\}_{i=1}^n$ .

Ahora pruebo que  $K'$  cumple las dos propiedades de ser un complejo simplicial abstracto. Primero observa que para un vértice arbitrario  $a_j^i \in V$ , el simplejo  $\langle a_j^i \rangle$  es una 0-cara del simplejo geométrico  $\sigma_i = \langle a_0^i, \dots, a_{n_i}^i \rangle$  entonces por definición el 0-simplejo geométrico  $\langle a_j^i \rangle$  es un elemento de  $K$ , ie.  $\langle a_j^i \rangle = \sigma_l$  para alguna  $l \in \{1, \dots, n\}$ . Por lo tanto  $\sigma'_l = \{a_j^i\} \in K'$ .

Para probar la segunda propiedad sea  $L = \sigma'_i = \{a_0^i, \dots, a_{n_i}^i\} \in K'$  y sea  $L' \subseteq L$ . Entonces  $L'$  genera una cara del simplejo geométrico  $\sigma_i$ . Por definición, el simplejo generado por  $L'$  es un elemento de  $K$ , ie.  $L$  genera a algún  $\sigma_k \in K$ . Por lo tanto  $L' = \sigma'_k \in K'$  y termino.  $\square$

Cada complejo simplicial  $K$  tiene una realización topológica, ie. tiene asociado canónicamente un espacio topológico que se denota por  $|K|$ .

**Definición 52.** Sea  $K$  un complejo simplicial con conjunto de vértices  $V_K$ , entonces se define:

$$|K| := \left\{ \sigma : V_K \rightarrow I \subset \mathbb{R} : \sigma^{-1}(0, 1] \in K, \sum_{v \in V_K} \sigma(v) = 1 \right\} \subset \{f : V_K \rightarrow \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^{V_K}$$

que tiene una métrica definida por:

$$d : |K| \times |K| \rightarrow \mathbb{R} , \quad d(\sigma, \tau) = \sqrt{\sum_{v \in V_K} (\sigma(v) - \tau(v))^2}.$$

El espacio topológico inducido por esta métrica se denota por  $|K|_d$ .

Observa que las sumas en la definición anterior están bien definidas porque para  $\sigma \in |K|$  se tiene que  $\sigma(v) \neq 0$  para sólo una cantidad finita de vértices ya que por definición  $\{v \in V_K \mid \sigma(v) \neq 0\} = \sigma^{-1}(0, 1] \in K$  y los elementos de  $K$  son conjuntos finitos.

*Nota.* El conjunto  $\sigma^{-1}(0, 1]$  es exactamente el soporte de la función  $\sigma$ , ie.

$$\sigma^{-1}(0, 1] = \text{Sop}(\sigma) := \{v \in V_K \mid \sigma(v) \neq 0\}.$$

Entonces usaré ambas descripciones intercambiablemente.

**Ejercicio 47.**  $d$  es una métrica sobre  $|K|$ .

*Proof.* Sean  $\sigma, \sigma' \in |K|$ . Pruebo que  $d$  cumple las tres propiedades de ser una métrica.

1. Si  $d(\sigma, \sigma') = 0$  entonces  $\sum(\sigma(v) - \sigma'(v))^2 = 0$  y como cada sumando es no-negativo, necesariamente se tiene que  $\sigma(v) - \sigma'(v) = 0$  para toda  $v \in V_K$ . Por lo tanto  $\sigma = \sigma'$  como funciones. Para la otra dirección,  $\sigma = \sigma'$  implica que  $(\sigma(v) - \sigma'(v))^2 = 0$  para toda  $v \in V_K$  y así  $d(\sigma, \sigma') = \sum 0 = 0$ .
2. Como  $(\sigma(v) - \sigma'(v))^2 = (\sigma'(v) - \sigma(v))^2$  para toda  $v$ , puedo sumar sobre  $V_K$  y obtengo que  $d(\sigma, \sigma') = d(\sigma', \sigma)$ .
3. La desigualdad del triángulo se cumple por la misma razón que se cumple con la métrica euclídea: sean  $\sigma, \sigma', \sigma'' \in |K|$  y  $L := \sigma^{-1}(0, 1] \cup (\sigma')^{-1}(0, 1] \cup (\sigma'')^{-1}(0, 1]$  que es finito porque es la unión finita de elementos de  $K$ ; sea  $N = \#(L)$  y  $L = \{v_1, \dots, v_N\}$  una enumeración. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} d(\sigma, \sigma'') &= \sqrt{\sum_{i=1}^N (\sigma(v_i) - \sigma''(v_i))^2} \\ &= \|(\sigma(v_1) - \sigma''(v_1), \dots, \sigma(v_N) - \sigma''(v_N))\| \\ &= \|(\sigma(v_1), \dots, \sigma(v_N)) - (\sigma''(v_1), \dots, \sigma''(v_N))\| \end{aligned}$$

donde la última expresión es la distancia usual euclídea entre los puntos  $(\sigma(v_1), \dots, \sigma(v_N))$  y  $(\sigma''(v_1), \dots, \sigma''(v_N))$  de  $\mathbb{R}^N$ . Aquí se vale la desigualdad del triángulo entonces:

$$\begin{aligned} d(\sigma, \sigma'') &\leq \|(\sigma(v_1), \dots, \sigma(v_N)) - (\sigma'(v_1), \dots, \sigma'(v_N))\| + \\ &\quad \|(\sigma'(v_1), \dots, \sigma'(v_N)) - (\sigma''(v_1), \dots, \sigma''(v_N))\| \\ &\leq \|(\sigma(v_1) - \sigma'(v_1), \dots, \sigma(v_N) - \sigma'(v_N))\| + \|(\sigma'(v_1) - \sigma''(v_1), \dots, \sigma(v_N) - \sigma''(v_N))\| \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^N (\sigma(v_i) - \sigma'(v_i))^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^N (\sigma'(v_i) - \sigma''(v_i))^2} \\ &\leq d(\sigma, \sigma') + d(\sigma', \sigma''). \end{aligned}$$

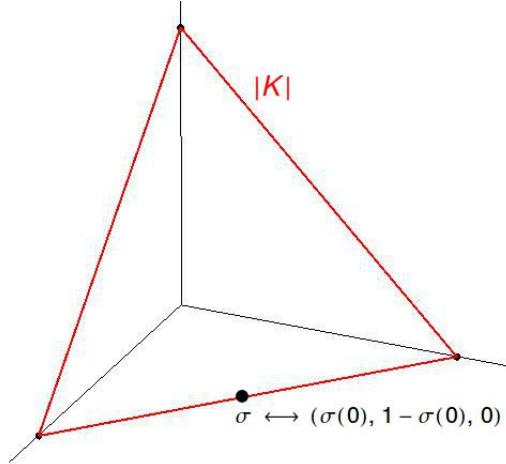
□

Aunque la definición de  $|K|$  parece complicada, sí concuerda con la intuición, especialmente cuando  $V_K$  es finito. Por ejemplo:

**Ejemplo 15.** Sea  $V_K = \{0, e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2$  y  $K = \{\{0\}, \{e_1\}, \{e_2\}, \{0, e_1\}, \{0, e_2\}, \{e_1, e_2\}\}$ . Como  $V_K$  es finito (con tres elementos), entonces una función  $\sigma : V_K \rightarrow I$  la puedo representar como una terna  $\sigma = (\sigma(0), \sigma(e_1), \sigma(e_2))$ . Como  $V_K \notin K$  entonces al menos una coordenada de  $\sigma$  debe ser 0. Por lo tanto, la segunda propiedad que cumple  $\sigma$ , (ie. la suma de las tres coordenadas da 1) me permite describir completamente  $|K|$ . Por ejemplo si  $\sigma(0) = 0$  entonces  $\sigma(e_1) = 1 - \sigma(e_2)$ , por lo tanto cualquier  $\sigma \in |K|$  que cumple que  $\sigma(0) = 0$  está completamente determinado por un parámetro  $t = \sigma(e_1) \in I$ , es decir  $\sigma = (0, t, 1-t)$ . De esta manera tengo que:

$$|K| = \{(0, t, 1-t) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{(t, 0, 1-t) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{(t, 1-t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

que es la orilla de  $\Delta^2 \subset \mathbb{R}^3$ . También observa que la métrica  $d$  de  $|K|$  coincide con la métrica usual de  $\mathbb{R}^3$



ya que los sumandos  $\sigma(v) - \tau(v)$  dentro del radical son simplemente las diferencias de las coordenadas de  $\sigma$  y  $\tau$  vistas como puntos en  $\mathbb{R}^3$ .

Como el caso finito es sencillo, formalizo este caso:

**Definición 53.** Sea  $K$  un complejo simplicial y  $L \in K$ , entonces

$$|L| := \{\sigma \in |K| : \sigma^{-1}(0, 1] \subseteq L\} = \{\sigma \in |K| : \text{Sop}(\sigma) \subseteq L\}.$$

La importancia de analizar  $|L|$  para  $L \in K$  es evidente del siguiente ejercicio:

**Ejercicio 48.** Sea  $L = \{v_0, \dots, v_n\} \in K$ , la función

$$\varphi : |L|_d \rightarrow \Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{definida por} \quad \sigma \mapsto (\sigma(v_0), \dots, \sigma(v_n))$$

es una isometría. En particular  $|L|_d \approx \Delta^n$  es un homeomorfismo.

*Proof.* Primero verifico que  $\Delta^n \approx |\Delta^n|_d$  (donde la topología usual de  $\Delta^n$  es la de subespacio de  $\mathbb{R}^n$ ).

Como  $L$  es finito cada  $\varphi$  está bien definida. Para ver que  $\varphi$  preserva la métrica, tomo  $\sigma, \tau \in |L|$  arbitrarios y calculo:

$$d_{\Delta^n}(\varphi(\sigma), \varphi(\tau)) = d_{\mathbb{R}^{n+1}}(\sigma(v_0), \dots, \sigma(v_n)), (\tau(v_0), \dots, \tau(v_n))) = \sqrt{\sum_{i=0}^n (\sigma(v_i) - \tau(v_i))^2}$$

Observa que  $V_L = L$  entonces la suma dentro del radical es la suma de  $(\sigma(v) - \tau(v))^2$  sobre  $v \in V_L$ . Por lo tanto

$$d_{\Delta^n}(\varphi(\sigma), \varphi(\tau)) = \sqrt{\sum_{v \in V_L} (\sigma(v) - \tau(v))^2} = d_{|L|}(\sigma, \tau)$$

y  $\varphi$  preserva la métrica. En particular es continua e inyectiva.

Ahora considera la función

$$\psi : \Delta^n \rightarrow |K|_d \quad \text{definida por} \quad (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \mapsto \psi(\lambda_0, \dots, \lambda_n)(v) = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } v = v_i \in L \\ 0 & \text{si } v \notin L \end{cases}$$

Está bien definida porque los elementos  $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \Delta^n$  cumplen  $\sum \lambda_i = 1$  y  $\lambda_i \geq 0$ , además de que  $\psi(\lambda) = \psi(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in |K|$  es cero fuera de  $L$ , ie.  $\psi(\sigma)|_{V_K - L} = 0$  o equivalentemente  $\text{Sop}(\varphi(\lambda)) \subseteq L$ . En particular  $\text{Im}(\psi) \subseteq |L|$ , entonces puedo suponer que  $\psi$  tiene como contradominio a  $|L|_d$ , es decir  $\psi : \Delta^n \rightarrow |L|_d$ .

Por definición:

$$\begin{aligned} d_{|K|}(\varphi(\lambda), \varphi(\mu)) &= \sqrt{\sum_{v \in V_K} (\varphi(\lambda)(v) - \varphi(\mu)(v))^2} = \sqrt{\sum_{v \in L} (\varphi(\lambda)(v) - \varphi(\mu)(v))^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=0}^n (\varphi(\lambda)(v_i) - \varphi(\mu)(v_i))^2} = \sqrt{\sum_{i=0}^n (\lambda_i - \mu_i)^2} \\ &= d_{\mathbb{R}^{n+1}}((\lambda_0, \dots, \lambda_n), (\mu_0, \dots, \mu_n)) \\ &= d_{\Delta^n}(\lambda, \mu). \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\psi$  preserva la métrica. En particular es continua e inyectiva.

Por último observa que:

$$\begin{aligned} \psi(\varphi(\sigma))(v_i) &= \psi(\sigma(v_0), \dots, \sigma(v_n))(v_i) = \sigma(v_i) \implies \psi(\varphi(\sigma)) = \sigma \\ \varphi(\psi(\lambda)) &= (\psi(\lambda)(v_0), \dots, \psi(\lambda)(v_n)) = (\lambda_0, \dots, \lambda_n)\lambda. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{\Delta^n}$  y  $\psi \circ \varphi = \text{Id}_{|L|_d}$ .

Para terminar resumo lo que tengo: hay dos funciones  $\varphi : |L|_d \rightarrow \Delta^n$  y  $\psi : \Delta^n \rightarrow |L|_d$  que son inversas entre sí. Además cada una preserva la métrica. Por lo tanto ambas son isometrías.  $\square$

*Nota.* Observa que  $|K|$  es la unión de todos los subespacios  $|L|$ , entonces el ejercicio anterior prueba que:

$$|K| = \bigcup_{L \in K} |L| \approx \bigcup \Delta^n,$$

es decir que la realización topológica de un complejo simplicial es una unión de simplejos geométricos estándares.

El ejercicio 48 y la nota anterior nos permite definirle una topología a  $|K|$  sin mencionar métricas:

**Definición 54.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Para cada  $L \in K$ , asígnale a  $|L|$  la topología inducida por el homeomorfismo  $|L| \approx \Delta^n$ . Entonces la *topología coherente* de  $|K|$  está definido por:

$$U \subseteq |K| \text{ es abierto} \iff U \cap |L| \text{ es abierto } \forall L \in K$$

*Nota.* De ahora en adelante,  $|K|$  se refiere a la realización topológica del complejo simplicial  $K$  con la topología coherente y  $|K|_d$  a la realización topológica con la topología inducida por la métrica  $d$  del ejercicio 47.

*Nota.* Vale la pena mencionar que una función  $f : |K| \rightarrow X$  es continua si y sólo si  $f|_{|L|} : |L| \rightarrow X$  es continua para toda  $L \in K$ . Esto quiere decir que  $\text{Id} : |K| \rightarrow |K|_d$  es continua porque  $\text{Id}|_{|L|} : |L| \rightarrow |L|_d$  es continua por definición de la topología de  $|L|$  (como  $|L| \approx \Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , la métrica  $d$  restringida a  $|L|$  coincide exactamente con la euclídea de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ). Por lo tanto la topología coherente es más fina que la topología inducida por la métrica  $d$ , es decir tiene más abiertos.

**Definición 55.** Un complejo simplicial  $K$  es *localmente finito* si para cada  $v \in V_K$  sólo hay una cantidad finita de  $L \in K$  tales que  $v \in L$ , es decir que el conjunto  $\{L \in K \mid v \in L\}$  es finito para todo vértice  $v$ .

La importancia de esta condición se muestra en el siguiente teorema:

**Teorema 35.** *Sea  $K$  un complejo simplicial. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1.  $K$  es localmente finito.
2.  $|K|$  es compacto.
3.  $Id : |K| \rightarrow |K|_d$  es un homeomorfismo, es decir que la topología coherente coincide con la topología inducida por la métrica  $d$ .
4.  $|K|$  es metrizable.
5.  $|K|$  satisface el primer axioma de numerabilidad, ie. todo punto  $\sigma \in |K|$  tiene una base local numerable.

**Definición 56.** Sean  $K$  y  $L$  complejos simpliciales. Un morfismo de complejos simpliciales  $f : K \rightarrow L$  es una función  $f : V_K \rightarrow V_L$  entre los vértices tal que

$$\{v_0, \dots, v_n\} \in K \implies \{f(v_0), \dots, f(v_n)\} \in L.$$

Además, para cada morfismo  $f : K \rightarrow L$  existe una función  $|f| : |K| \rightarrow |L|$  definida por:

$$|f|(\sigma) : V_L \longrightarrow I \quad \text{con} \quad |f|(\sigma)(u) = \sum_{v \in f^{-1}[\{u\}]} \sigma(v)$$

**Ejercicio 49.** La función inducida  $|f|$  está bien definida, es decir para toda  $\sigma \in |K|$  se tiene que  $|f|(\sigma) \in |L|$ .

*Proof.* Sea  $\sigma \in |K|$ , en particular

$$\sum_{v \in V_K} \sigma(v) = 1 \quad \text{y} \quad \sigma^{-1}(0, 1] = \text{Sop}(\sigma) = \{v_0, \dots, v_n\} \in K$$

Como  $V_K = \cup_{u \in V_L} f^{-1}[u]$  entonces:

$$\sum_{u \in V_L} |f|(\sigma)(u) = \sum_{\tau \in L} \sum_{v \in f^{-1}[u]} \sigma(v) = \sum_{v \in V_K} \sigma(v) = 1 \tag{2.3}$$

porque  $\sigma \in |K|$ .

Ahora sólo falta verificar que  $\text{Sop}(|f|(\sigma)) \in L$ . Como  $f$  es un mapeo simplicial entonces:

$$\text{Sop}(\sigma) = \{v_0, \dots, v_n\} \in K \implies \{f(v_0), \dots, f(v_n)\} \in L.$$

Si pruebo que  $\text{Sop}(|f|(\sigma)) = \{f(v_0), \dots, f(v_n)\}$  entonces por lo anterior y la fórmula (2.3) tendrá que  $|f|(\sigma) \in |L|$  para toda  $\sigma \in |K|$ .

Pruebo la igualdad que me falta:

$\subseteq$ ) Sea  $u \in \text{Sop}(|f|(\sigma)) \subseteq V_L$ , entonces:

$$0 < |f|(\sigma)(u) = \sum_{v \in f^{-1}[u]} \sigma(v) \implies \exists v' \in f^{-1}[u] \text{ tal que } \sigma(v') > 0$$

porque todos los sumandos son no negativos. Esto implica que  $v' = v_i \in \text{Sop}(\sigma) = \{v_0, \dots, v_n\}$  para alguna  $i$ . Por lo tanto  $f(v') = f(v_i) = u \in \{f(v_0), \dots, f(v_n)\}$ .

$\supseteq$ ) Considera  $u \in \{f(v_0), \dots, f(v_n)\}$ . Entonces

$$|f|(\sigma)(u) = |f|(\sigma)(f(v_i)) = \sum_{v \in f^{-1}[f(v_i)]} \sigma(v) = \sigma(v_i) + \sum_{v \neq v_i} \sigma(v) > 0$$

porque  $v_i \in f^{-1}[f(v_i)]$  y además  $v_i \in \text{Sop}(\sigma)$  lo cual implica que  $\sigma(v_i) > 0$ . Por lo tanto

$$|f|(\sigma)(u) > 0 \implies u \in \text{Sop}(|f|(\sigma)).$$

Con esto concluyo que  $\text{Sop}(|f|(\sigma)) = \{f(v_0), \dots, f(v_n)\}$  y acabo.  $\square$

**Ejercicio 50.** La función inducida  $|f| : |K| \rightarrow |L|$  es continua con respecto a la topología coherente.

*Proof.*

□

*Nota.* Los dos ejercicios anteriores nos muestra que la asignación  $K \mapsto |K|$  y  $f \mapsto |f|$  es un funtor entre la categoría de complejos simpliciales y **Top**.

Una construcción importante que se puede hacer para cualquier complejo simplicial es la subdivisión baricéntrica:

**Definición 57.** Sea  $K$  un complejo simplicial. La *subdivisión baricéntrica* de  $K$  es un complejo simplicial denotado por  $\text{sd}(K)$  cuyos vértices es todo  $K$ , i.e  $V_{\text{sd}(K)} = K$ , y los  $n$ -simplejos de  $\text{sd}(K)$  son conjuntos finitos totalmente ordenados  $\{\sigma_0, \sigma_1 \dots, \sigma_n\} \subseteq K$  tales que  $\sigma_0 \subsetneq \sigma_1 \subsetneq \dots \subsetneq \sigma_n$ .

Se llama subdivisión baricéntrica porque intuitivamente el conjunto de vértices  $V_{\text{sd}(K)}$  se puede pensar como asignar a cada  $\sigma \in K$  su baricentro  $b(\sigma)$ . El siguiente dibujo aclara esta intuición:

Una de las propiedades más importantes de la subdivisión baricéntrica es:

**Ejercicio 51.**  $|\text{sd}(K)| \approx |K|$

*Proof.*

□

Este resultado significa que podemos iterar el proceso de subdivisión baricéntrica sin cambiar de espacio topológico asociado. Si definimos inductivamente

$$\text{sd}^n(K) := \text{sd}(\text{sd}^{n-1}(K))$$

entonces tendremos que  $|\text{sd}^n(K)| \approx |K|$  para toda  $n$ . Esto significa que topológicamente no importa que trabajes con un complejo simplicial o con una (y por lo tanto todas) subdivisión de él.

La subdivisión baricéntrica nos da una definición de orden en los complejos simpliciales:

**Definición 58.** Un complejo simplicial  $K$  está ordenado si el conjunto de vértices  $V_K$  tiene un orden parcial tal que cada simplejo  $\sigma \in K$  está totalmente ordenado.

Por ejemplo  $\text{sd}(K)$  siempre es un complejo simplicial ordenado.

### 2.1.3 Triangulaciones y nervios

**Definición 59.** Un espacio  $X$  es *triangulable* si existe un complejo simplicial  $K$  tal que  $|K| \approx X$ .

**Ejercicio 52.** Sea  $V_K = \{0, e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2$  y  $K = \{\{0\}, \{e_1\}, \{e_2\}, \{0, e_1\}, \{0, e_2\}, \{e_1, e_2\}\}$  (cf. ejemplo 15). Prueba que  $|K| \approx \mathbb{S}^1$ , es decir que  $\mathbb{S}^1$  es triangulable.

*Proof.* Sabemos que:

$$|K| = \bigcup_{L \in K} |L|,$$

pero varios de estos uniendo son redundantes, por ejemplo:

$$|\{v_0\}| = |\{\sigma \in |K| : \text{Sop}(\sigma) \subseteq \{v_0\} \subseteq \{v_0, v_1\}\}| \subseteq |\{\sigma \in |K| : \text{Sop}(\sigma) \subseteq \{v_0, v_1\}\}| = |\{v_0, v_1\}|.$$

En general la realización geométrica de todo 0-simplejo de  $K$  está contenido en la realización geométrica de un 1-simplejo. Por lo tanto:

$$|K| = |\{v_0, v_1\}| \cup |\{v_0, v_2\}| \cup |\{v_1, v_2\}|.$$

Por otro lado, como el conjunto de vértices de  $K$  tiene 3 elementos, por definición tenemos que  $|K| \subset \mathbb{R}^3$  y cada elemento  $\sigma \in |K|$  se escribe como  $\sigma = (\sigma(v_0), \sigma(v_1), \sigma(v_2))$ . De esta manera podemos describir los elementos de  $|\{v_i, v_j\}|$  como

$$|\{v_0, v_1\}| = \{(\sigma(v_0), \sigma(v_1), \sigma(v_2)) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \sigma(v_i), \sigma(v_2) = 0, \sigma(v_0) + \sigma(v_1) = 1\} = \{(t, 1-t, 0)\}_{t \in I}.$$

Análogamente:

$$|\{v_0, v_2\}| = \{(t, 0, 1-t)\}_{t \in I} \quad \text{y} \quad |\{v_1, v_2\}| = \{(0, t, 1-t)\}_{t \in I},$$

y así

$$|K| = \{(t, 1-t, 0)\}_{t \in I} \cup \{(t, 0, 1-t)\}_{t \in I} \cup \{(0, t, 1-t)\}_{t \in I}.$$

Para dar un homeomorfismo entre  $|K|$  y  $\mathbb{S}^1$ , daré una composición de tres homeomorfismos:

1. Sea  $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la proyección  $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ . Claramente  $p|_{|K|}$  es continua y su imagen es:

$$\begin{aligned} p[|K|] &= p[\{(t, 1-t, 0)\}_{t \in I}] \cup p[\{(t, 0, 1-t)\}_{t \in I}] \cup p[\{(0, t, 1-t)\}_{t \in I}] \\ &= \{(t, 1-t)\}_{t \in I} \cup \{(t, 0)\}_{t \in I} \cup \{(0, t)\}_{t \in I}. \end{aligned}$$

La función  $p|_{|K|}$  tiene una inversa obvia: para cada pedazo de  $p[|K|]$  define

$$\begin{aligned} q_1 : \{(t, 1-t)\}_{t \in I} &\longrightarrow \{(t, 1-t, 0)\}_{t \in I} \quad \text{con} \quad (t, 1-t) \mapsto (t, 1-t, 0) \\ q_2 : \{(t, 0)\}_{t \in I} &\longrightarrow \{(t, 0, 1-t)\}_{t \in I} \quad \text{con} \quad (t, 0) \mapsto (t, 0, 1-t) \\ q_3 : \{(0, t)\}_{t \in I} &\longrightarrow \{(0, t, 1-t)\}_{t \in I} \quad \text{con} \quad (0, t) \mapsto (0, t, 1-t) \end{aligned}$$

que son claramente continuas (como restricciones de funciones continuas  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ). Además las podemos pegar porque coinciden en las intersecciones de los dominios:

$$q_1(0, 1) = (0, 1, 0) = q_3(0, 1) , \quad q_1(1, 0) = (1, 0, 0) = q_2(1, 0) , \quad q_2(0, 0) = (0, 0, 1) = q_3(0, 0).$$

Por lo tanto la función  $q : p[|K|] \rightarrow |K|$ , que se obtiene al pegar  $q_1, q_2$  y  $q_3$  es continua y por construcción es la inversa de  $p|_{|K|}$ . Por lo tanto  $p|_{|K|}$  es un homeomorfismo. Observa también que la imagen de  $p|_{|K|}$  es exactamente la frontera de  $\Delta^2 \subset \mathbb{R}^2$ , ie.  $p[|K|] = \partial\Delta^2$

2. Observa que el punto  $(1/3, 1/3) \in \Delta^2$  está en el interior (porque  $1/3 + 1/3 \neq 1$ ) de  $\Delta^2$  ie.  $(1/3, 1/3 \notin \partial\Delta^2)$ , entonces aplico la traslación  $(x, y) \mapsto (x - 1/3, y - 1/3)$  para llevar el punto  $(1/3, 1/3)$  al origen. Esta traslación es claramente un homeomorfismo. A la traslación de  $\partial\Delta^2$  la denoto por  $\tau := \partial\Delta^2 - 1/3$ .

3. El último homeomorfismo es la restricción de normalizar:

$$u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \quad \text{definido por} \quad (x, y) \mapsto \frac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

En coordenadas polares, esta función hace  $(\theta, r) \mapsto (\theta, 1)$ , entonces sólo depende del “argumento” del vector  $(x, y)$ .

Claramente es sobre porque  $u|_{\mathbb{S}^1} = \text{Id}_{\mathbb{S}^1}$ . Además,  $u|_\tau$  es inyectiva. Para ver esto basta observar que cada rayo que inicia en el origen intersecta a  $\tau$  en un sólo punto, o de otra manera: para cada argumento  $\theta$  hay un solo vector  $(x, y) \in \tau$  con argumento igual a  $\theta$ .

Por lo tanto  $u|_\tau : \tau \rightarrow \mathbb{S}^1$  es una función continua y biyectiva. Como  $\tau$  es compacto (por ser frontera de un 2-simplejo que es compacto) y  $\mathbb{S}^1$  es Hausdorff, entonces  $u|_\tau$  es un homeomorfismo.

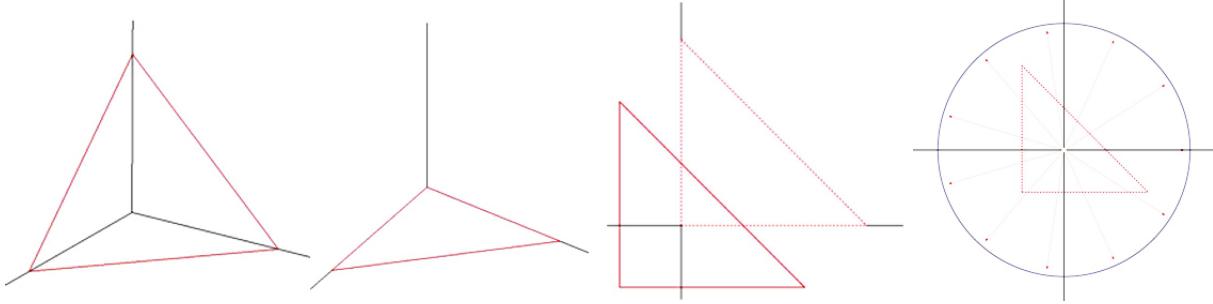
El siguiente dibujo ilustra los tres pasos:

Para terminar, simplemente compone los tres homeomorfismos anteriores

$$|K| \longrightarrow \partial\Delta^2 \longrightarrow \partial\Delta^2 - \frac{1}{3} \xrightarrow{u} \mathbb{S}^1$$

para concluir que  $|K| \approx \mathbb{S}^1$ .

□



Este ejercicio se generaliza a variedades:

**Teorema 36.** *Toda variedad suave es triangulable.*

*Nota.* Una consecuencia de este teorema es:

$$n < m \implies \pi_n(\mathbb{S}^m) = 0 \quad (2.4)$$

Para ver esto sea  $[\alpha] \in \pi_n(\mathbb{S}^m)$ , es decir  $\alpha : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^m$  es continua. Como las esferas son triangulables, existen complejos simpliciales  $K$  y  $L$  tales que  $|K| \approx \mathbb{S}^n$  y  $|L| \approx \mathbb{S}^m$  donde las dimensiones de  $K$  y  $L$  son  $n$  y  $m$  respectivamente.

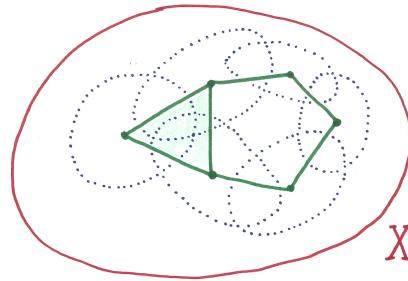
Ahora, si  $f : K \rightarrow L$  es un morfismo simplicial entonces un simplejo de dimensión máxima  $\{v_0, \dots, v_n\} \in K$  se manda, bajo  $f$ , al simplejo  $\{f(v_0), \dots, f(v_n)\} \in L$  que tiene a lo más  $n$  elementos. Por lo tanto  $f[K] \subset L$  es un subcomplejo simplicial de dimensión a lo más  $n < m$ , es decir  $f[K] \neq L$  y así  $|f|[\mathbb{S}^n] \neq [\mathbb{S}^m]$ .

Por lo tanto si cada función continua  $\alpha : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^m$  es homotópica a una función de la forma  $|f|$  para algún morfismo simplicial  $f$ , entonces tendríamos que  $[\alpha] = 1$  y así  $\pi_n(\mathbb{S}^m) = 0$  cuando  $n < m$ .

Ahora doy un ejemplo de un complejo simplicial abstracto:

**Definición 60.** (Alexandrov y Čech) Sean  $X$  un espacio topológico y  $\mathcal{C} = \{C_j\}_{j \in J}$  una familia de subespacios (en general se toma una cubierta abierta). El *nervio* de  $\mathcal{C}$ , denotado por  $\mathcal{NC}$  es el complejo simplicial con vértices  $V_{\mathcal{NC}} = J$ , el conjunto de índices, y  $n$ -simplejos de la forma  $L = \{j_0, \dots, j_n\}$  donde  $C_{j_0} \cap \dots \cap C_{j_n} \neq \emptyset$ .

Por ejemplo, un sub-complejo simplicial de un nervio se puede ver como:



**Definición 61.** Una función continua  $f : X \rightarrow Y$  es una *equivalencia homotópica débil* si para toda  $x \in X$  y para toda  $n > 0$ ,  $f_{\#} : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, f(x))$  es un isomorfismo y si además para  $n = 0$ ,  $f_{\#}$  es una función biyectiva.

Claramente tenemos que si  $X \simeq Y$  entonces existe una equivalencia homotópica débil entre  $X$  y  $Y$  (cf. el corolario ??), pero en ciertos casos, la equivalencia homotópica débil implica equivalencia homotópica:

**Teorema 37.** (S.H.C. Whitehead) *Si  $X$  y  $Y$  son espacios triangulados entonces si  $f : X \rightarrow Y$  es una equivalencia homotópica débil, se cumple que  $X \simeq Y$ .*

La noción de equivalencia homotópica débil y la de nervios nos permite estudiar, bajo ciertas condiciones, las propiedades de un espacio. Los siguientes teoremas (sin pruebas) ilustran estas relaciones.

**Teorema 38.** Sea  $\mathfrak{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  una cubierta abierta de  $X$  puntualmente finita (ie. para toda  $x \in X$  solamente existe una cantidad finita de  $U_\lambda \in \mathfrak{U}$  tales que  $x \in U_\lambda$ ). Si toda intersección finita  $U_{\lambda_1} \cap \dots \cap U_{\lambda_n} \neq \emptyset$  cumple que  $\pi_n(U_{\lambda_1} \cap \dots \cap U_{\lambda_n}, x) = 0$  entonces existe una equivalencia homotópica débil  $f : |\mathcal{N}\mathfrak{U}| \rightarrow X$ .

**Teorema 39.** Si  $X$  es un espacio para compacto equipado de una cubierta abierta  $\mathfrak{U}$  localmente finita tal que toda intersección finita no vacía de la cubierta es contraible, entonces  $\mathcal{N}\mathfrak{U} \simeq X$ .

**Teorema 40.** Sea  $M^n$  una variedad suave y  $\mathfrak{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  una cubierta localmente finita<sup>2</sup> tal que cada intersección finita de  $n$  elementos de la cubierta cumplen  $U_{\lambda_1} \cap \dots \cap U_{\lambda_n} \approx \mathbb{R}^n$ , entonces  $\mathcal{N}\mathfrak{U} \simeq M$

## 2.1.4 Homología Simplicial

Primero estudio la orientación de los complejos simpliciales.

**Definición 62.** Sea  $K$  un complejo simplicial y  $\sigma \in K$  un  $n$ -simplejo. Además sea  $\Sigma = \Sigma(\sigma)$  el conjunto de funciones biyectivas  $\underline{n} \rightarrow \sigma$ , donde  $\underline{n} = \{0, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$ . Entonces hay una relación de equivalencia:

$$f \simeq g \iff g^{-1}f \in S_{n+1} \text{ es una permutación par.}$$

**Ejercicio 53.** Prueba que solamente hay dos clases de equivalencia que son  $[f]$  y  $[\bar{f}]$  donde  $\bar{f} = \tau \circ f$  donde  $\tau \in S_{n+1}$  es la permutación que transpone el 0 y el 1 y fija a los demás.

*Proof.* Sea  $A_{n+1}$  el grupo alternante, ie. las permutaciones pares del grupo simétrico  $S_{n+1}$ . Defino la siguiente acción derecha:

$$\Sigma \times A_{n+1} \rightarrow \Sigma \text{ con } (f, \alpha) \mapsto f \circ \alpha.$$

Claramente es una acción derecha porque  $(f, 1) \mapsto f \circ 1 = f$  y

$$\begin{aligned} ((f, \alpha), \beta) &\mapsto (f \circ \alpha, \beta) = (f \circ \alpha) \circ \beta = f \circ (\alpha \circ \beta) \\ \therefore (f\alpha)\beta &= f(\alpha\beta). \end{aligned}$$

Ahora sea  $f \in \Sigma$ . Calculo su grupo de isotropía:

$$(A_{n+1})_f = \{\alpha \in A_{n+1} \mid f \circ \alpha = f\} = \{1\}.$$

Esto es porque si  $\alpha \in A_{n+1}$  mueve un elemento entonces  $f \circ \alpha$  y  $f$  difieren en ese elemento. Más precisamente, si  $\alpha \neq 1$ , existen  $i \neq j \in \underline{n}$  tal que  $\alpha(i) = j$  y por lo tanto  $(f \circ \alpha)(i) = f(\alpha(i)) = f(j) \neq f(i)$ , ie.  $f \circ \alpha \neq f$ , porque  $f$  es biyectiva. Este argumento prueba que la acción de  $A_{n+1}$  sobre  $\Sigma$  es libre.

Por el ejercicio 30, hay una biyección (de hecho un homeomorfismo porque  $\Sigma$  y  $A_{n+1}$  son finitos con la topología discreta) entre

$$\mathcal{O}(f) \longleftrightarrow \frac{A_{n+1}}{(A_{n+1})_f} = \frac{A_{n+1}}{1} \cong A_{n+1}$$

Esto quiere decir que todas las órbitas de la acción tienen  $(n+1)!/2$  elementos<sup>3</sup>. Además observa que:

$$\mathcal{O}(f) = \{g \in \Sigma \mid \exists \alpha \in A_{n+1} \text{ tal que } g \circ \alpha = f\} = \{g \in \Sigma \mid \exists \alpha \in A_{n+1} \text{ tal que } \alpha = g^{-1}f\} = [f] \in \Sigma/\sim$$

Ahora,  $\Sigma$  tiene  $(n+1)!$  elementos por ser el conjunto de funciones biyectivas entre dos conjuntos con  $n+1$  elementos. Como las órbitas forman una partición de  $\Sigma$  y cada órbita tienen la mitad de los elementos de  $\Sigma$ , sólo puede haber dos órbitas. Sea  $f \in \Sigma$  arbitrario, pruebo que  $\Sigma/\sim = \{[f], [\bar{f}]\}$ , es decir que  $f \not\simeq \bar{f}$ .

Observa que:

$$f \circ \bar{f}^{-1} = f \circ (\tau \circ f)^{-1} = f \circ (f^{-1} \circ \tau^{-1}) = \tau^{-1} = \tau.$$

Como  $\tau$  es una transposición, es una permutación impar. Por lo tanto  $f \not\simeq \bar{f}$  y acabo.  $\square$

<sup>2</sup>Como  $M$  es una variedad suave, admite una métrica Riemanniana y en este caso los elementos de la cubierta se pueden tomar fuertemente conexos, ie. para todas  $x, y \in U_\lambda$  existe una única geodésica que une  $x$  con  $y$ .

<sup>3</sup>Esto se sigue del teorema de Langrange y de que  $(S_{n+1} : A_{n+1}) = 2$ . La función  $S_{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}_2$  que le asocia a una permutación  $\alpha \in S_{n+1}$  su signo  $\alpha \mapsto \text{sgn}(\alpha) \in \{-1, 1\}$ , es un epimorfismo de grupos con kernel  $A_{n+1}$  lo cual implica que  $S_{n+1}/A_{n+1} \cong \mathbb{Z}_2$ . Por el teorema de Lagrange  $\#(S_{n+1}) = (S_{n+1} : A_{n+1})\#(A_{n+1}) \implies \frac{1}{2}\#(S_{n+1}) = \frac{1}{2}(n+1)! = \#(A_{n+1})$ .

En la prueba del ejercicio anterior se vió que  $\Sigma(\sigma)/\sim$  tiene naturalmente una estructura de grupo isomorfa a  $\mathbb{Z}_2$  bajo el isomorfismo (continuo)  $[f] \mapsto 1$  y  $[\bar{f}] \mapsto -1$ . Entonces,  $\Sigma(\sigma)/\sim \cong \{1, -1\}$ .

**Definición 63.** Sea  $K$  un complejo simplicial y  $\sigma \in K$  un  $n$ -simplejo. Una *orientación* de  $\sigma$  es la pareja  $(\sigma, \mathbf{o}_\sigma)$  donde  $\mathbf{o}_\sigma \in \Sigma(\sigma)/\sim = \{1, -1\}$ . En general, si vamos a denotar  $\pm[\sigma] := (\sigma, \pm)$  y si ya tenemos una orientación para  $\sigma$ , ie. un ordenamiento  $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$  entonces denotamos  $[\sigma] = [v_0, \dots, v_n]$ .

En variedades triangulables, las orientaciones de los complejos simpliciales que realizan a la variedad cumplen varias propiedades importantes.

Sea  $M^n$  una variedad compacta de dimensión  $n$  con triangulación  $M \approx |K|$ . Entonces cada simplejo de  $K$  es cara de un  $n$ -simplejo y además cada  $(n-1)$ -simplejo es cara de exactamente dos  $n$ -simplejos. Estas dos propiedades permiten definir orientación de complejos simpliciales que realizan variedades compactas.

**Definición 64.** Sea  $M^n$  una variedad suave y compacta tal que  $M \approx |K|$  para algún complejo simplicial  $K$ . Una *orientación* de  $K$  es una elección de una orientación para cada  $n$ -simplejo  $\sigma \in K$ , que cumple que las dos orientaciones inducidas en cada  $(n-1)$ -simplejo de  $K$  son distintas.

Más precisamente, cada  $(n-1)$ -simplejo  $\sigma \in K$  es cara de exactamente dos  $n$ -simplejos  $\tau, \tau' \in K$ . Entonces las orientaciones  $\mathbf{o}_\tau$  y  $\mathbf{o}_{\tau'}$  deben ser distintas, ie.  $\mathbf{o}_\tau = -\mathbf{o}_{\tau'}$ .

**Ejemplo 16.** Toma  $K = \{\{e_0\}, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_0, e_1\}, \{e_1, e_2\}, \{e_0, e_2\}, \{e_0, e_1, e_2\}\}$ , el complejo simplicial inducido por  $\Delta^2$ . Si orientamos  $\Delta^2$  como  $[\Delta^2] = [e_0, e_1, e_2]$ . Esto induce una orientación en cada 1-cara:

Observa que las 1-caras (orientadas) las podemos reescribir como:

$$[e_0, e_1] = [e_0, e_1, \hat{e}_2], \quad [e_1, e_2] = [\hat{e}_0, e_1, e_2] \quad \text{y} \quad [e_2, e_0] = -[e_0, \hat{e}_1, e_2]$$

donde la notación  $\hat{e}_i$  significa omitir ese elemento de la lista. Esto nos sugiere que el “borde” o la frontera de  $\Delta^2$  la podemos escribir como la siguiente suma formal:

$$[\hat{e}_0, e_1, e_2] - [e_0, \hat{e}_1, e_2] + [e_0, e_1, \hat{e}_2]$$

o en general como

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i [e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n] \tag{2.5}$$

Un ejemplo que ilustra esta idea mejor es el siguiente:

**Ejemplo 17.** Considera el conjunto de vértices  $V_K = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$  (por ejemplo los vértices de  $\Delta^3$ ). Construye  $K$  de la siguiente manera: no hay 3-simplejos; los 2-simplejos son  $[v_0, v_1, v_2]$ ,  $[v_1, v_3, v_2]$ ,  $[v_0, v_2, v_3]$  y  $[v_0, v_3, v_1]$ ; y toma todos los subconjuntos de estos 2-simplejos como los 1-simplejos y 0-simplejos que faltan (los que necesita la definición de complejo simplicial abstracto).

La realización geométrica es un tetraedro (como  $\Delta^3$ ) sin relleno y orientado de la siguiente manera:

Ahora calculamos la frontera de la misma manera que en (2.5):

$$\begin{cases} [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1] \\ [v_3, v_2] - [v_1, v_2] + [v_1, v_3] \\ [v_3, v_1] - [v_0, v_1] + [v_0, v_3] \end{cases} = [v_3, v_2] + [v_1, v_3] + [v_2, v_3] + [v_3, v_1] = 0.$$

El hecho que el resultado dio 0 es porque  $K$  es la frontera de otro simplejo, en particular  $[v_0, v_1, v_2, v_3]$ .

He estado sumando y restando complejos simpliciales sin ninguna formalidad pero esto no es grave porque siempre existe la herramienta de grupos libres o en este caso particular,  $R$ -módulos libres:

**Definición 65.** Sea  $R$  un anillo comutativo con  $1$  y  $X$  un conjunto. El  $R$ -módulo libre generado por  $X$  se define como

$$R\langle X \rangle := \{f : X \rightarrow R \mid f(x) \neq 0 \text{ para una cantidad finita de } x \in X\}.$$

Las operaciones son las naturales:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{y} \quad (rf)(x) = rf(x).$$

*Nota.* A cada elemento  $x \in X$ , le podemos asociar de manera canónica un elemento de  $R\langle X \rangle$ : la función:

$$x(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y \end{cases}.$$

A veces a esta función si le llama la función característica de  $x$  y se denota  $\chi_x$ . En el caso particular de los espacios vectoriales se usa la delta de Kronecker  $\delta_{ij}$ .

Por otro lado, para toda  $f \in R\langle X \rangle$ ,  $\text{Sop}(f) = \{x_1, \dots, x_n\}$  es finito, entonces claramente

$$f = \sum_{i=1}^n f(x_i)x_i = \sum_{x \in X} f(x)\chi_x.$$

Esta es una representación canónica porque sólo depende de  $f$ .

Los  $R$ -módulos libres cumplen una propiedad muy importante:

**Ejercicio 54.** Sea  $M$  un  $R$ -módulo y  $f : X \rightarrow R$  una función. Entonces existe un único morfismo de  $R$ -módulos  $\hat{f} : R\langle X \rangle \rightarrow M$  tal que hace commutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & R\langle X \rangle & \\ x \mapsto \chi_x \nearrow & \downarrow \hat{f} & \\ X & \xrightarrow{f} & M \end{array} \quad (2.6)$$

*Proof.* Sea

$$g = \sum_{x \in X} g(x)\chi_x \in R\langle X \rangle = \{f : X \rightarrow R \mid \text{Sop}(f) \text{ es finito}\}$$

un elemento arbitrario donde  $\chi_x \in R\langle X \rangle$  es la función definida por  $\chi_x(x) = 1$  y  $\chi_x(x') = 0$  para toda  $x' \neq x$ . Define:

$$\hat{f} : R\langle X \rangle \longrightarrow M \quad \text{con} \quad g = \sum_{x \in X} g(x)\chi_x \mapsto \sum_{x \in X} g(x)f(x).$$

Como  $g(x) \in R$  y  $f(x) \in M$ ,  $\hat{f}$  está bien definida. Ahora observa que  $\hat{f}$  es un morfismo de  $R$ -módulos:

$$\begin{aligned} \hat{f}(g + g') &= \sum_{x \in X} (g + g')(x)f(x) = \sum_{x \in X} (g(x) + g'(x))f(x) = \sum_{x \in X} g(x)f(x) + \sum_{x \in X} g'(x)f(x) \\ &= \hat{f}(g) + \hat{f}(g'), \\ \hat{f}(rg) &= \sum_{x \in X} (rg)(x)f(x) = \sum_{x \in X} rg(x)f(x) = r \sum_{x \in X} g(x)f(x) \\ &= r\hat{f}(g). \end{aligned}$$

También tenemos que:

$$\hat{f}(\chi_x) = \sum_{x' \in X} \chi_x(x')f(x') = \chi_x(x)f(x) = 1f(x) = f(x)$$

Por lo tanto  $\hat{f}$  es la composición  $x \mapsto \chi_x \mapsto \hat{f}(\chi_x)$ , es decir, el diagrama (2.6) commuta. Ya probé la existencia.

Para la unicidad, supongo que existe un morfismo  $R$ -módulos  $F : R\langle X \rangle \rightarrow M$  que haga commutar el diagrama, es decir que  $F(\chi_x) = f(x)$ . Entonces, como  $F$  es morfismo:

$$F(g) = F\left(\sum_{x \in X} g(x)\chi_x\right) = \sum_{x \in X} g(x)F(\chi_x) = \sum_{x \in X} g(x)f(x) = \hat{f}(g).$$

Por lo tanto  $F = \hat{f}$  y la extensión es única.  $\square$

Vamos a construir el  $R$ -módulo libre generado por simplejos de la siguiente manera:

Recuerda que cada  $n$ -simplejo  $\sigma \in K$  tiene una de dos orientaciones que denotamos como  $(\sigma, +1)$  y  $(\sigma, -1)$ . Con esto definimos el conjunto de  $n$ -simplejos con orientación como

$$S_n^{\mathcal{O}}(K) := \{(\sigma, \pm 1) \mid \sigma \text{ es un } n\text{-simplejo}\}.$$

La “O” górica en el superíndice significa orientación. En general voy a omitir la  $K$  de la notación y escribiré  $S_n^{\mathcal{O}}$ . Vamos a trabajar con  $R\langle S_n^{\mathcal{O}} \rangle$ , el  $R$ -módulo libre generado por los  $n$ -simplejos orientados.

La fórmula (2.5) se extiende a todo  $R\langle S_n^{\mathcal{O}} \rangle$  por el ejercicio 54:

**Definición 66.** El morfismo frontera  $\partial_n : R\langle S_n^{\mathcal{O}} \rangle \longrightarrow R\langle S_{n-1}^{\mathcal{O}} \rangle$  se define sobre elementos de  $S_n^{\mathcal{O}}$  como:

$$\partial_n[v_0, \dots, v_n] := \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n].$$

Los elementos de  $\ker(\partial_n)$  se llaman *n-ciclos*.

**Ejercicio 55.** Para toda  $n \geq 1$ , se cumple que  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ , en particular  $\text{Im}(\partial_n) \subseteq \ker(\partial_{n-1})$ .

*Proof.* Sea  $[v_0, \dots, v_n] \in S_n^{\mathcal{O}}$ . Entonces:

$$\partial_{n-1}(\partial_n[v_0, \dots, v_n]) = \partial_{n-1}\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]\right) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_{n-1}[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] \quad (2.7)$$

Ahora analizo el término  $\partial_{n-1}[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ . Observa que

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] &= [\hat{v}_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] + \dots + (-1)^{i-1}[v_0, \dots, \widehat{v_{i-1}}, \hat{v}_i, \dots, v_n] \\ &\quad + (-1)^i[v_0, \dots, \hat{v}_i, \widehat{v_{i+1}}, \dots, v_n] + \dots + (-1)^{n-1}[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \widehat{v_n}] \end{aligned}$$

Juntando esto en notación de suma, tenemos:

$$\partial_{n-1}[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] + \sum_{k=i+1}^n (-1)^{k-1} [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_k, \dots, v_n]$$

donde el exponente de  $(-1)$  en la segunda suma es  $k-1$  en lugar de  $k$  porque el  $k$ -ésimo sumando de la segunda suma es el  $(k-1)$ -ésimo sumando de todo  $\partial_{n-1}[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$  (ya que  $k > i$  y se eliminó el término  $i$ -ésimo). Sustituyo en la fórmula (2.7):

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}(\partial_n[v_0, \dots, v_n]) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \left( \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=i+1}^n (-1)^{k-1} [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_k, \dots, v_n] \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] \\ &\quad + \sum_{i=0}^n \sum_{j=i+1}^n (-1)^{i+j-1} [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n] \end{aligned}$$

De esta expresión se vuelve claro que un sumando arbitrario  $[v_0, \dots, \widehat{v_k}, \dots, \widehat{v_l}, \dots, v_n]$  aparece dos veces con signo contrario: en el primer sumando cuando  $k = j$  y  $l = i$  con signo  $(-1)^{i+j}$  y en el segundo sumando cuando  $k = i$  y  $l = j$  con signo  $(-1)^{i+j-1}$ .

Por lo tanto cada sumando de la primera suma, de la ecuación anterior, se cancela con un sumando de la segunda suma. Así podemos concluir que toda la suma vale 0, ie.  $\partial_{n-1}(\partial_n[v_0, \dots, v_n]) = 0$  para todo elemento de  $S_n^{\mathfrak{D}}$ .

Ahora  $\partial_{n-1} \circ \partial$  se extiende a  $R\langle S_n^{\mathfrak{D}} \rangle$  como:

$$(\partial_{n-1} \circ \partial_n) \left( \sum_{\sigma \in S_n^{\mathfrak{D}}} r_{\sigma} \sigma \right) = \sum r_{\sigma} (\partial_{n-1} \circ \partial_n)(\sigma) = \sum r_{\sigma} 0 = 0$$

y así podemos concluir que  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$  como morfismo de  $R$ -módulos.  $\square$

Queremos poder operar los  $n$ -simplejos orientados de tal manera que si sumamos un  $n$ -simplejo y él mismo con la orientación puesta, queremos que el resultado sea 0. Para garantizar esto hay que hacer un cociente:

**Definición 67.** Sea  $K$  un complejo simplicial y  $N = \langle (\sigma, +1) + (\sigma, -1) \rangle_{\sigma \in S_n^{\mathfrak{D}}}$  el submódulo de  $R\langle S_n^{\mathfrak{D}}(K) \rangle$  generado por las sumas de  $n$ -simplejos con ambas orientaciones. Entonces definimos:

$$C_n(K; R) := \frac{R\langle S_n^{\mathfrak{D}} \rangle}{N}.$$

Los elementos de  $C_n(K; R)$  se llaman *n-cadenas orientadas*.

En general, y al igual que  $S_n^{\mathfrak{D}}$ , suprimo la  $R$  en la notación.

Observa que el morfismo frontera pasa a este cociente porque si  $[\sigma] = [v_0, v_1, \dots, v_n]$  entonces:

$$\partial_n([\sigma] - [\sigma]) = \partial_n([v_0, v_1, \dots, v_n] + [v_1, v_0, \dots, v_n]) = \partial_n([v_0, v_1, \dots, v_n]) + \partial_n([v_1, v_0, \dots, v_n])$$

es una suma de la forma  $\sum[\tau] - [\tau] = 0$ . Por lo tanto,  $\partial_n$  se factoriza a través de  $C_n(K)$ ; esta nueva función la llamamos y denotamos igual:

$$\begin{array}{ccc} R\langle S_n^{\mathfrak{D}} \rangle & \xrightarrow{\partial_n} & R\langle S_{n-1}^{\mathfrak{D}} \rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_n(K) & \dashrightarrow_{\partial_n} & C_{n-1}(K) \end{array}$$

Gracias al ejercicio 55 tenemos que  $\text{Im}(\partial_{n+1}) \subseteq \ker(\partial_n)$  entonces tiene sentido definir:

**Definición 68.** La  $n$ -homología de  $K$  con coeficientes en un anillo  $R$ , comunitativo con 1, se define como el cociente:

$$H_n(K; R) := \frac{\ker(\partial_n)}{\text{Im}(\partial_{n+1})}$$

Por ejemplo:

**Ejercicio 56.** Sea  $K$  el complejo simplicial con vértices  $V_K = \{v_0, v_1, v_2\}$  y  $K = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_1, v_2\}\}$ . Entonces

$$H_n(K; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0, 1 \\ 0 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

*Proof.*  $\square$

Otra manera de definir  $n$ -cadenas es usando la idea de complejos simpliciales ordenados (cf. definición 58):

**Definición 69.** Sea  $K$  un complejo simplicial ordenado, entonces definimos:

$$C_n^<(K; R) := R\langle(v_0, \dots, v_n) \mid v_0 < \dots < v_n, \{v_0, \dots, v_n\} \in K\rangle$$

Los morfismos  $\partial_n$  se definen exactamente igual que antes.

*Proposición 23.* Para cada  $n$ , el morfismo  $\beta_n : C_n^<(K) \rightarrow C_n(K)$  que hace  $(v_0, \dots, v_n) \mapsto \overline{[v_0, \dots, v_n]}$ , donde  $\overline{\cdot}$  se refiere a la clase en el cociente de  $R\langle S_n^{\mathcal{D}} \rangle$  y  $[\cdot]$  se refiere a la clase de orientación en  $S_n^{\mathcal{D}}$ , es un isomorfismo y hace commutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} C_n^<(K) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}^<(K) \\ \downarrow \beta_n & & \downarrow \beta_{n-1} \\ C_n(K) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(K) \end{array}$$

### 2.1.5 Complejos de cadena

En esta parte vamos a introducir una herramienta algebraica muy importante. Fijemos un anillo  $R$  conmutativo con 1 y trabajaremos en la categoría de  $R$ -módulos (aunque se pueda generalizar a cualquier categoría abeliana).

**Definición 70.** Un *complejo de cadenas*, denotado por  $\mathcal{C}_\bullet$  es una familia de  $R$ -módulos  $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  junto con una familia de morfismos  $\{\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}\}$ , llamados *diferenciales*, que cumplen  $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$  para toda  $n \in \mathbb{Z}$ . Diagramáticamente, esto se escribe como:

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots .$$

Un *morfismo de complejos de cadenas*  $\varphi : \mathcal{C}_\bullet \rightarrow \mathcal{C}'_\bullet$  es una familia de morfismos  $\{\varphi_n : C_n \rightarrow C'_n\}$  tales que hacen commutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow \varphi_{n+1} & & \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_{n-1} \\ \cdots & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{\partial'_n} & C'_{n-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

La  $n$ -homología de un complejo de cadenas  $\mathcal{C}_\bullet$  se define como el cociente

$$H_n(\mathcal{C}_\bullet) := \frac{\ker(\partial_n)}{\text{Im}(\partial_{n+1})}.$$

*Nota.* La homología de las cadenas de complejos está bien definida porque  $\partial_{n+1} \circ \partial_n = 0$  implica que  $\text{Im}(\partial_{n+1}) \subseteq \ker(\partial_n)$ .

**Ejemplo 18.** Gracias al ejercicio 55, tenemos que las  $n$ -cadenas orientadas de un complejo simplicial  $K$  forman un complejo de cadenas  $C_\bullet(K; R)$  que diagramáticamente se ve como:

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(K) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K) \longrightarrow \cdots .$$

Observa que  $C_n(K) = 0$  para  $n < 0$ .

Por la misma razón,  $C_\bullet^<(K)$  es un complejo de cadenas.

**Ejercicio 57.** Un morfismo  $\varphi : \mathcal{C}_\bullet \rightarrow \mathcal{C}_\bullet$  induce un homomorfismo  $H_n(\varphi) : H_n(\mathcal{C}_\bullet) \rightarrow H_n(\mathcal{C}'_\bullet)$ .

*Proof.* Sea  $n \in \mathbb{Z}$  y considera el morfismo de  $R$ -módulos  $\varphi_n : C_n \rightarrow C'_n$  que da la definición de  $\varphi : \mathcal{C}_\bullet \rightarrow \mathcal{C}'_\bullet$ . También sea  $x \in \ker \partial_n \subseteq C_n$ . Como  $\varphi$  es un morfismo de cadenas, entonces:

$$0 = \varphi_{n-1}(0) = \varphi_{n-1}(\partial_n(x)) = \partial'_n(\varphi_n(x)) \implies \varphi_n(x) \in \ker \partial'_n.$$

Esto implica que  $\varphi_n|_{\ker \partial_n} : \ker \partial_n \rightarrow \ker \partial'_n$  está bien definida.

Ahora considera  $[x], [x'] \in H_n(\mathcal{C}_\bullet)$  tales que  $[x] = [x']$  o equivalentemente  $x - x' \in \text{Im} \partial_{n+1}$ . Entonces existe una  $y \in C_{n+1}$  tal que  $\partial_{n+1}(y) = x - x'$ . Como  $\varphi$  es un morfismo de complejos de cadena, tenemos que

$$\varphi_n(x) - \varphi_n(x') = \varphi_n(x - x') = \varphi_n(\partial_{n+1}y) = \partial'_{n+1}(\varphi_{n+1}(y)) \implies \varphi_n(x) - \varphi_n(x') \in \text{Im} \partial'_{n+1}.$$

Por lo tanto  $[\varphi_n(x)] = [\varphi_n(x')]$  en  $H_n(\mathcal{C}'_\bullet)$  y así la función:

$$H_n(\varphi) : H_n(\mathcal{C}_\bullet) \longrightarrow H_n(\mathcal{C}'_\bullet) \quad \text{definido por} \quad [x] \mapsto [\varphi_n(x)]$$

está bien definida. Como  $\varphi_n$  es un morfismo de  $R$ -módulos, entonces  $H_n(\varphi)$  es un morfismo de  $R$ -módulos gracias a la regla de correspondencia de  $H_n(\varphi)$ .  $\square$

*Nota.* Observa que la proposición 23 nos dice que  $\beta = \{\beta_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  (definiendo  $\beta_n = 0$  cuando  $n < 0$ ) es un morfismo de cadenas. Como cada  $\beta_n$  es un isomorfismo,  $\beta$  induce un isomorfismo a nivel de homologías, i.e.  $H_n(\beta) : H_n(C'_\bullet(K)) \rightarrow H_n(C_\bullet(K))$  es un isomorfismo. De hecho,  $C'_\bullet(K) \cong C_\bullet(K)$  como cadenas.

**Definición 71.** Sea  $f : K \rightarrow L$  un morfismo de complejos simpliciales.  $f$  induce un morfismo de complejos  $\{f_n : C_n(K) \rightarrow C_n(L)\}$  definido por

$$f_n([v_0, \dots, v_n]) := \begin{cases} \overline{[f(v_0), \dots, f(v_n)]} & \text{si } f|_{\{v_0, \dots, v_n\}} \text{ es inyectiva} \\ 0 & \text{si } f|_{\{v_0, \dots, v_n\}} \text{ no es inyectiva} \end{cases}$$

**Definición 72.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Define  $\mathcal{C}_n(K) = R\langle (v_0, \dots, v_n) \mid \{v_0, \dots, v_n\} \in K \rangle$  y considera el complejo de cadenas  $\mathcal{C}_\bullet$  definido por

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{C}_{n+1}(K) \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathcal{C}_n(K) \xrightarrow{\partial_n} \mathcal{C}_{n-1}(K) \longrightarrow \cdots,$$

donde las diferenciales están definidos de la manera usual:

$$\partial_n(v_0, \dots, v_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n).$$

Además, si  $f : K \rightarrow L$  es un morfismo de complejos simpliciales entonces éste induce un morfismo de complejos de cadenas  $f_\# : \mathcal{C}_\bullet(K) \rightarrow \mathcal{C}_\bullet(L)$  definido por

$$f_\#(v_0, \dots, v_n) = (f(v_0), \dots, f(v_n)).$$

**Ejercicio 58.**  $f_\#$  es un morfismo de complejos de cadenas.

*Proof.* Para cada  $n \geq 0$  denoto por  $(f_\#)_n : \mathcal{C}_n(K) \rightarrow \mathcal{C}_n(L)$  al morfismo de  $R$ -módulos que es la extensión de  $(f_\#)_n : \{(v_0, \dots, v_n) \mid \{v_0, \dots, v_n\} \in K\} \rightarrow \{(u_0, \dots, u_m) \mid \{u_0, \dots, u_m\} \in L\}$  al  $R$ -módulo  $\mathcal{C}_n(K)$ . Para probar que  $f_\#$  es un morfismo de cadenas, nada más hay que probar que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_n(K) & \xrightarrow{\partial_n} & \mathcal{C}_{n-1}(K) \\ \downarrow (f_\#)_n & & \downarrow (f_\#)_{n-1} \\ \mathcal{C}_n(L) & \xrightarrow{\partial_n} & \mathcal{C}_{n-1}(L) \end{array}$$

o equivalentemente  $(f_\#)_{n-1} \circ \partial_n = \partial_n \circ (f_\#)_n$ . Como en la prueba del ejercicio 55, basta probar la conmutatividad del diagrama en los elementos de la base:

Sea  $(v_0, \dots, v_n) \in \mathcal{C}_n(K)$ , entonces:

$$\begin{aligned}
(f_\#)_{n-1}(\partial_n(v_0, \dots, v_n)) &= (f_\#)_{n-1}\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i(v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n)\right) \\
&= \sum_{i=0}^n (-1)^i(f_\#)_{n-1}(v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n) \\
&= \sum_{i=0}^n (-1)^i(f(v_0), \dots, \widehat{f(v_i)}, \dots, f(v_n)) \\
&= \partial_n(f(v_0), \dots, f(v_n)) \\
&= \partial_n((f_\#)_n(v_0, \dots, v_n)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que  $(f_\#)_{n-1} \circ \partial_n = \partial_n \circ (f_\#)_n$  y acabamos.  $\square$

*Nota.* Este último ejercicio, junto con el ejercicio 57, implican que  $f_\#$  induce un morfismo  $H_n(f_\#) : H_n(\mathcal{C}_\bullet(K)) \rightarrow H_n(\mathcal{C}_\bullet(L))$ .

La diferencia entre los complejos de cadenas  $C_\bullet(K)$  y  $\mathcal{C}_\bullet(K)$  desaparece a nivel de homología:

*Proposición 24.*  $H_n(C_\bullet(K)) \cong H_n(\mathcal{C}_\bullet(K))$

Toda la idea de definir homología simplicial es para poder definir homología de espacio topológicos (triangulables). Para un espacio triangulable  $X$ , ie.  $X \approx |K|$ , lo ideal sería definir  $H_n(X; R) := H_n(K; R)$ , pero para que esto esté bien definido necesitamos la propiedad de la *invariancia topológica de la homología simplicial*:

$$|K| \approx X \approx |L| \text{ son dos triangulaciones} \implies H_n(K; R) \cong H_n(L; R).$$

Poincaré propuso un plan para probarlo:

1. Si  $K \cong L$ , como complejos simpliciales, entonces  $H_n(K; R) \cong H_n(L; R)$ .
2. Si  $K'$  es una subdivisión de  $K$ , entonces  $H_n(K; R) \cong H_n(K'; R)$ .
3. (Haupvermutung) Si  $K$  y  $L$  son complejos simpliciales tales que  $|K| \approx |L|$  entonces existen  $K'$  y  $L'$  subdivisiones de  $K$  y  $L$  respectivamente tales que  $K' \cong L'$ .

Resultó que el paso 3, llamado Hauptvermutung, no es cierto; Milnor probó que es falso en 1961. Pero la propiedad de invariancia topológica de la homología simplicial (ITHS) sí es cierta; Alexander lo probó con un método distinto al de Poincaré en 1915.

El primer paso no es difícil probar:

**Ejercicio 59.**  $K \cong L \implies H_n(K; R) \cong H_n(L; R)$

*Proof.* Supongamos que  $K \cong L$  mediante el isomorfismo de complejos simpliciales  $f : K \rightarrow L$ . Por el ejercicio 58  $f_\# : \mathcal{C}_\bullet(K) \rightarrow \mathcal{C}_\bullet(L)$  es un morfismo de complejos de cadenas. De hecho  $f_\#$  es un isomorfismo de complejos de cadenas porque  $(f^{-1})_\#$  es su inverso, en efecto:

$$(f_\#)_n((f_\#)^{-1}_n(v_0, \dots, v_n)) = (f_\#)_n(f^{-1}(v_0), \dots, f^{-1}(v_n)) = (f(f^{-1}(v_0)), \dots, f(f^{-1}(v_n))) = (v_0, \dots, v_n)$$

para toda  $(v_0, \dots, v_n)$  en la base de  $\mathcal{C}_n(K)$ . Sucede exactamente lo mismo para  $(f_\#)^{-1}_n \circ (f_\#)_n = \text{Id}$ . Por lo tanto  $\mathcal{C}_\bullet(K) \cong \mathcal{C}_\bullet(L)$  como complejos de cadenas. Como la homología de un complejo de cadenas depende solamente de la clase de isomorfismo del complejo (cf. ejercicio 57) entonces podemos concluir que  $H_n(\mathcal{C}_\bullet(K); R) \cong H_n(\mathcal{C}_\bullet(L); R)$ . Por último, la proposición 24 tenemos que:

$$H_n(C_\bullet(K)) \cong H_n(\mathcal{C}_\bullet(K)) \cong H_n(\mathcal{C}_\bullet(L)) \cong H_n(C_\bullet(L)).$$

$\square$

Una vez establecido ITHS, podemos definir:

**Definición 73.** La homología de un espacio traingulable  $X$  se define como  $H_n(X; R) := H_n(K; R)$  donde  $X \approx |K|$ .

Vietoris dio una definición diferente para espacios métricos en los 1920's y Čech dió la siguiente definición en 1932:

**Definición 74.** Sea  $X$  un espacio topológico y toma un conjunto  $\mathcal{U}$  “suficientemente grande” de cubiertas abiertas de  $X$ , ordenados mediante refinamiento. Entonces la homología de  $X$  se define como:

$$H_n(X; R) := \varprojlim_{\mathcal{U} \in \mathcal{U}} H_n(\mathcal{N}\mathcal{U}; R)$$

En el caso de variedades, la homología es más sencilla. Sea  $M^n$  una variedad orientada y compacta con una triangulación  $T$ , ie.  $|T| \approx M$ . Como  $M$  está orientado, cada  $n$ -simplejo  $\sigma \in T$  tiene una orientación fija:  $[\sigma]$ . La  $n$ -cadena:

$$\mathfrak{C} = \sum_{\sigma \in S_n^{\mathcal{D}}(T)} [\sigma]$$

está bien bien definida porque  $M$  es compacto (cf. teorema 35), es decir la suma siempre es finita. Además, por definición de orientación de una triangulación de  $M$ , tenemos que

$$\partial_n(\mathfrak{C}) = \partial_n \left( \sum_{\sigma \in S_n^{\mathcal{D}}(T)} [\sigma] \right) = \sum_{\sigma \in S_n^{\mathcal{D}}(T)} \partial_n[\sigma] = 0$$

porque cada  $(n-1)$ -simplejo aparece dos veces con la orientación opuesta. Por lo tanto  $\mathfrak{C} \in \ker \partial_n$  y así tenemos que

$$[\mathfrak{C}] \in H_n(M; \mathbb{Z}).$$

A este elemento de la homología se le llama la *clase fundamental* de  $M$ .

Si  $M$  no está orientada, entonces sólo podemos garantizar que  $\partial_n(\mathfrak{C}) \equiv 0 \pmod{2}$ . Entonces solamente tenemos que  $[\mathfrak{C}] \in H_n(M; \mathbb{Z}_2)$ .

## 2.2 Homología Singular

En esta sección introduzco otro tipo de homología que resultará ser la más manejable que la homología simplicial y que nos dará más resultados topológicos.

### 2.2.1 Complejos de cadena y sus homologías

Primera considera un complejo simplicial  $K$  y  $C_n^<(K)$ , las  $n$ -cadenas ordenadas. Si  $v \in V_K$  es un vértice, entonces por definición  $\{v\} \in K$ . A este vértice le corresponde de manera canónica un  $\tilde{v} \in |K|$  definido por:

$$\tilde{v} : V_k \longrightarrow I \quad \text{con} \quad \tilde{v}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u = v \\ 0 & \text{si } u \neq v \end{cases}.$$

Esto es muy similar a las funciones características de los módulos libres. Esta observación nos lleva a definir una función  $\Delta^n \rightarrow |K|$  de la siguiente manera:

**Definición 75.** Sea  $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  el  $n$ -simplejo geométrico estándar y  $s = \{v_0, \dots, v_n\} \in K$  un  $n$ -simplejo de  $K$ , entonces define

$$\sigma_s : \Delta^n \longrightarrow |K| \quad \text{con} \quad \sigma_s(t_0, \dots, t_n) := \sum_{i=0}^n t_i \tilde{v}_i$$

La función  $\sigma_s$  está bien definido, ie.  $\sigma_s(t_0, \dots, t_n) \in |s| \subseteq |K|$ , gracias al siguiente lema:

**Lema 41.** Sean  $K$  un complejo simplicial y  $s = \{v_0, \dots, v_n\} \in K$  un  $n$ -simplejo. Entonces cualquier combinación lineal convexa de elementos de  $|s|$  es un elemento de  $|s|$ , es decir: si  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in |s|$  y  $\lambda_0, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  son tales que  $\sum \lambda_i = 1$  entonces  $\sum \lambda_i \alpha_i \in |s|$ .

*Proof.* Observa que la suma  $\gamma := \sum \lambda_i \alpha_i$  tiene sentido porque  $|k| \subset \mathbb{R}^{V_K}$  que es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial. Como cada  $\alpha_i$  es una función con valores no-negativos y cada escalar  $\lambda_i$  es no-negativo, entonces  $\gamma(v) = 0$  si y sólo si  $\alpha_i(v) = 0$  para toda  $i$ , es decir  $\text{Sop}(\gamma) = \cap \text{Sop}(\alpha_i) \subseteq s$  porque por hipótesis  $\text{Sop}(\alpha_i) \subseteq s$ .

Además tenemos que:

$$\sum_{v \in V_K} \gamma(v) = \sum_{i=0}^n \gamma(v_i) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \lambda_j \alpha_j(v_i) = \sum_{j=0}^n \left( \lambda_j \sum_{i=0}^n \alpha_j(v_i) \right) = \sum_{j=0}^n \lambda_j = 1$$

porque  $\sum_i \alpha_j(v_i) = 1$  porque  $\alpha_i \in |s|$ . Por lo tanto  $\gamma \in |s|$ .  $\square$

*Nota.* Si  $(v_0, \dots, v_n) \in C_n^<(K)$  entonces  $\sigma_{(v_0, \dots, v_n)} : \Delta^n \rightarrow |K|$  es un encaje, pero si  $[v_0, \dots, v_n] \in C_n(K)$  entonces  $\sigma_{[v_0, \dots, v_n]}$  no necesariamente es un encaje.

Como vamos a estar trabajando con funciones continuas  $\Delta^n \rightarrow |K|$ , introduzco una notación más concisa:

**Definición 76.** Sea  $X$  un espacio topológico, denotamos

$$\mathcal{S}_n(X) := \text{Map}(\Delta^n, X) = \{f : \Delta^n \rightarrow X \mid f \text{ es continua}\}.$$

Con esta notación, tenemos que  $(v_0, \dots, v_n) \mapsto \sigma_{(v_0, \dots, v_n)}$  es una función y por la propiedad universal de los módulos libres se extiende a  $C_n^<(K)$ , entonces tenemos:

$$\begin{array}{ccc} C_n^<(K) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}^<(K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{S}_n |K| & \dashrightarrow & \mathcal{S}_{n-1} |K|. \end{array}$$

El siguiente paso es definir un análogo de las funciones frontera para  $\mathcal{S}_n |K|$ . Para esto requerimos las funciones *cara*:

$$F_n^i : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n \quad \text{definido por} \quad F_n^i(t_0, \dots, t_{n-1}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}).$$

En palabras,  $F_n^i$  manda  $\Delta^{n-1}$  a la  $(n-1)$ -cara opuesta al vértice  $e_i$  de  $\Delta^n$ . En general, las funciones  $F_n^i$  se pueden definir así:

$$F_n^i(e_j) = \begin{cases} e_j & \text{si } j < i \\ e_{j+1} & \text{si } j \geq i \end{cases}.$$

El siguiente dibujo ilustra el caso de  $n = 2$ :

Observa que para un  $(n-1)$ -simplejo  $(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n)$  de  $K$ , entonces

$$\sigma_{(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n)} = \sigma_{(v_0, \dots, v_n)} \circ F_n^i. \quad (2.8)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \sigma_{(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n)}(t_0, \dots, t_{n-1}) &= t_0 \tilde{v}_0 + \dots + t_{i-1} \tilde{v}_{i-1} + t_i \tilde{v}_{i+1} + \dots + t_{n-1} \tilde{v}_n \\ &= t_0 \tilde{v}_0 + \dots + t_{i-1} \tilde{v}_{i-1} + 0 \tilde{v}_i + t_i \tilde{v}_{i+1} + \dots + t_{n-1} \tilde{v}_n \\ &= \sigma_{(v_0, \dots, v_n)}((t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1})) \\ &= \sigma_{(v_0, \dots, v_n)}(F_n^i(t_0, \dots, t_{n-1})). \end{aligned}$$

La fórmula (2.8) sugiere de manera inmediata cómo definir una función frontera para  $\mathcal{S}_n |K|$ :

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (\sigma \circ F_n^i).$$

De hecho es muy fácil generalizarlo a cualquier espacio topológico.

**Definición 77.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $n \geq 0$ . Los elementos de  $\mathcal{S}_n(X)$  se llaman *n-simplejos singulares*. Definimos  $S_n(X; R) := R\langle \mathcal{S}_n(X) \rangle$  y

$$\partial_n : S_n(X; R) \longrightarrow S_{n-1}(X; R) \quad \text{con} \quad \partial_n(f) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (f \circ F_n^i).$$

Si  $n < 0$  escribimos  $S_n(X; R) = 0$ .

Para probar que:

$$\cdots \longrightarrow S_{n+1}(X; R) \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X; R) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X; R) \longrightarrow \cdots$$

es un complejo de cadenas necesitamos

**Ejercicio 60.** Para toda  $j < i$  se cumple  $F_n^i \circ F_{n-1}^j = F_n^j \circ F_{n-1}^i$ .

*Proof.*

□

De este ejercicio se sigue que

**Ejercicio 61.** Para toda  $n \geq 1$  se cumple  $\partial_{n+1} \circ \partial_n$ , en particular  $\text{Im}(\partial_{n+1}) \subseteq \ker \partial_n$ .

*Proof.*

□

Por lo tanto  $S_\bullet(X; R)$  es un complejo de cadenas. Gracias a esto podemos definir:

**Definición 78.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $S_\bullet(X; R)$  su *complejo singular*. Definimos  $Z_n(X; R) := \ker(\partial_n)$ , cuyos elementos se llaman *n-ciclos*, definimos  $B_n(X; R) := \text{Im}(\partial_{n+1})$ , cuyos elementos se llaman *n-fronteras* y definimos la *homología singular* de  $X$  como:

$$H_n(X; R) := \frac{Z_n(X; R)}{B_n(X; R)}$$

La asignación  $X \mapsto S_\bullet(X; R)$  es un funtor entre espacios topológicos y complejos de cadenas de  $R$ -módulos:

**Definición 79.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua. Entonces  $f$  induce un morfismo de complejos de cadenas  $f_\# : S_\bullet(X; R) \rightarrow S_\bullet(Y; R)$  definido de la siguiente manera: para cada  $n$  define  $(f_\#)_n : S_n(X; R) \rightarrow S_n(Y; R)$  como  $(f_\#)_n(\sigma) = f \circ \sigma$  donde  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$  y extiende por linealidad.

*Nota.* En general voy a suprimir el subíndice  $n$ , es decir voy a escribir  $f_\# = (f_\#)_n$ . Esto es porque la regla de correspondencia no depende de  $n$ , simplemente es una composición.

Para probar que  $f_\#$  es efectivamente un morfismo de complejos de cadena, hay que probar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} S_n(X; R) & \xrightarrow{\partial_n} & S_{n-1}(X; R) \\ f_\# \downarrow & & \downarrow f_\# \\ S_n(Y; R) & \xrightarrow{\partial_n} & S_{n-1}(Y; R) \end{array}$$

Pero esto se verifica inmediatamente:

$$f_\#(\partial_n(\sigma)) = f_\# \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i (\sigma \circ F_n^i) \right) = \sum_{i=0}^n (-1)^i f \circ (\sigma \circ F_n^i) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (f_\#(\sigma) \circ F_n^i) = \partial_n(f_\#(\sigma)).$$

Ahora, el ejercicio 57 nos dice que  $f_\#$  induce un morfismo de  $R$ -módulos  $H_n(f_\#) : H_n(X; R) \rightarrow H_n(Y; R)$ . Por lo tanto:

$$X \mapsto H_n(X; R) \quad \text{con} \quad (X \xrightarrow{f} Y) \mapsto H_n(f_\#)$$

es un funtor. Esto significa que la homología es un invariante topológico:

*Proposición 25.*

$$X \approx Y \implies H_n(X; R) \cong H_n(Y; R) \quad \forall n \geq 0.$$

La homología singular generaliza la homología simplicial:

**Teorema 42.** *Sea  $K$  un complejo simplicial. Entonces  $H_n(K; R) \cong H_n(|K|; R)$ , donde la primera homología es la simplicial y la segunda es la singular aplicado al espacio  $|K|$ . Este isomorfismo está inducido por*

$$C_n^<(K) \longrightarrow S_n(|K|; R) \quad \text{definido por} \quad (v_0, \dots, v_n) \mapsto \sigma(v_0, \dots, v_n).$$

Para probar este teorema tendríamos que probar que los complejos  $C_n^<(K)$  y  $S_n(|K|)$  son homotópicos (cf. definición ??).

Ahora calculamos las homologías en ciertos casos particulares para ilustrar lo manejable que es esta definición a diferencia de la homología simplicial.

*Proposición 26.*

$$H_n(\{p\}; R) \cong \begin{cases} R & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

*Proof.* Consideramos  $S_\bullet(\{p\}; R)$ , el complejo singular del espacio  $\{p\}$ :

$$\cdots \longrightarrow S_n(\{p\}; R) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(\{p\}; R) \longrightarrow \cdots \longrightarrow S_0(\{p\}; R) \longrightarrow 0$$

Como  $S_n(\{p\}) = \{\text{cte}\}$  para toda  $n$ , entonces

$$S_n(\{p\}; R) = R\langle \text{cte} \rangle \cong R \quad \forall n \geq 0$$

bajo el isomorfismo  $r\text{cte} \mapsto r$ .

Por otro lado, para  $n > 0$  claramente tenemos que  $\text{cte} = \text{cte} \circ F_n^i$ , entonces:

$$\partial_n(\text{cte}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (\text{cte} \circ F_n^i) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{cte} = \begin{cases} \text{cte} & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

porque la suma anterior es una suma alternada con  $n+1$  términos. Por lo tanto  $\partial_n : R\langle \text{cte} \rangle \rightarrow R\langle \text{cte} \rangle$  es un isomorfismo si  $n$  es par (ya que hace  $\text{cte} \mapsto \text{cte}$ ) y  $\partial_n = 0$  para  $n$  impar. De aquí podemos concluir que para  $n > 0$ :

$$Z_n(\{p\}; R) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ S_n(\{p\}; R) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad \text{y} \quad B_n(\{p\}; R) = \begin{cases} S_n(\{p\}; R) & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases},$$

la última igualdad se da porque  $n+1$  es par cuando  $n$  es impar y  $n+1$  es impar cuando  $n$  es par. Tomando cocientes concluimos que

$$H_n(\{p\}; R) = \left\{ \begin{array}{ll} 0/0 & \text{si } n \text{ es par} \\ S_n(\{p\}; R)/S_n(\{p\}; R) & \text{si } n \text{ es impar} \end{array} \right\} = 0 \quad (\forall n > 0)$$

Para  $n = 0$ , simplemente sustituimos  $S_1(\{p\}; R) \cong S_0(\{p\}; R) \cong R$  en el complejo singular  $S_\bullet(\{p\}; R)$ :

$$\cdots \longrightarrow R \xrightarrow{\partial_1} R \xrightarrow{0} 0$$

y así  $Z_0(\{p\}; R) = \ker 0 = R$ . Ya teníamos que  $B_0(\{p\}; R) = \text{Im}(\partial_1) = 0$  entonces  $H_0(\{p\}; R) = R/0 \cong R$ .  $\square$

*Proposición 27.* Si  $X$  es un espacio conectable por trayectorias, entonces  $H_0(X; R) \cong R$ .

*Proof.* Observa que  $S_0(X) = \text{Map}[\Delta^0, X] = X$  porque  $\Delta^0 = \{e_0\}$  y toda función  $\{e_0\} \rightarrow X$  está completamente determinado por su imagen. Por lo tanto

$$S_0(X; R) = R\langle X \rangle = \left\{ \sum_{x \in X} r_x x \mid r_x \in R, r_x \neq 0 \text{ para solamente una cantidad finita de } x \in X \right\}$$

Ahora considera el siguiente morfismo de  $R$ -módulos:

$$\varepsilon : S_0(X; R) \longrightarrow R \quad \text{definido por} \quad \sum_{x \in X} r_x x \mapsto \sum_{x \in X} r_x,$$

que es claramente sobreyectiva. Observa que si  $\sum_\sigma r_\sigma \sigma \in S_1(X; R)$ , donde  $\sigma : \Delta^1 \rightarrow X$ , entonces:

$$\begin{aligned} \partial_1 \left( \sum_{\sigma \in S_1(X)} r_\sigma \sigma \right) &= \sum_{\sigma} r_\sigma \partial_1(\sigma) \\ &= \sum_{\sigma} r_\sigma (\sigma(e_1) - \sigma(e_0)) \\ &= \sum_{\sigma} r_\sigma \sigma(e_1) - \sum_{\sigma} r_\sigma \sigma(e_0) \\ \therefore (\varepsilon \circ \partial_1) \left( \sum_{\sigma} r_\sigma \sigma \right) &= \varepsilon \left( \sum_{\sigma} r_\sigma \sigma(e_1) \right) - \varepsilon \left( \sum_{\sigma} r_\sigma \sigma(e_0) \right) \\ &= \sum_{\sigma} r_\sigma - \sum_{\sigma} r_\sigma = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\text{Im}(\partial_1) \subseteq \ker(\varepsilon)$  y así podemos “aumentar” el complejo  $S_\bullet(X; R)$  al complejo:

$$\cdots \longrightarrow S_1(X; R) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X; R) \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

Observa que si  $\text{Im}(\partial_1) = \ker(\varepsilon)$  entonces tendremos que:

$$R = \text{Im}(\varepsilon) \cong \frac{S_0(X; R)}{\ker(\varepsilon)} \cong \frac{S_0(X; R)}{\text{Im}(\partial_1)} \stackrel{\text{def}}{=} H_0(X; R)$$

ya que  $\partial_0 = 0$  y así  $\ker(\partial_0) = S_0(X; R)$ . Por lo tanto solamente hace falta probar que  $\ker(\varepsilon) \subseteq \text{Im}(\partial_1)$  para terminar la demostración.

Sea  $\sum r_x x \in \ker(\varepsilon) \subseteq S_0(X; R)$ , es decir  $\sum r_x = 0$ , y sea  $x_0 \in X$ . Observa que una trayectoria  $\alpha : I \rightarrow X$  que empieza en  $x_0$  y termina en un  $x \in X$  arbitrario lo podemos ver como un elemento de  $S_1(X; R)$ . Más precisamente: para toda  $x \in X$  define  $\alpha_x : \Delta^1 \rightarrow X$  la composición  $I \approx \Delta^1 \xrightarrow{\alpha} X$ . Por lo tanto para cada  $x \in X$  y para cada trayectoria  $\alpha$  que empieza en  $x_0$  y termina en  $x$ , tenemos que  $\alpha_x \in S_1(X; R)$ .

Ahora define  $\sigma = \sum_{x \in X} r_x \alpha_x$  (que está bien definida porque  $r_x \neq 0$  para solamente una cantidad finita de  $x \in X$ ). Calculo:

$$\begin{aligned} \partial_1(\sigma) &= \sum_{x \in X} r_x \partial_1(\alpha_x) = \sum_{x \in X} r_x (\alpha_x(e_1) - \alpha_x(e_0)) = \sum_{x \in X} r_x (x - x_0) = \sum_{x \in X} r_x x - x_0 \sum_{x \in X} r_x \xrightarrow{0} 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\sum r_x x \in \text{Im}(\partial_1)$ , concluimos que  $\text{Im}(\partial_1) = \ker(\varepsilon)$  y terminamos.  $\square$

Una propiedad importante de la homología es que abre sumas directas. Más precisamente, si  $\{C_\bullet^\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  es una familia de complejos de cadenas, entonces  $C_\bullet := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C_\bullet^\lambda$  es un complejo de cadena con diferenciales

$\oplus_{\lambda \in \Lambda} \partial_n^\lambda$ . Este diferencial es canónico porque para toda  $\lambda \in \Lambda$  tenemos morfismos  $d_n^\lambda$  definidos por la composición

$$\begin{array}{ccc} C_n^\lambda & \xrightarrow{\quad} & \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C_n^\lambda \\ \partial_n \downarrow & \searrow d_n^\lambda & \downarrow \oplus \partial_n^\lambda \\ C_{n-1}^\lambda & \xrightarrow{\quad} & \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C_{n-1}^\lambda \end{array}$$

que por la propiedad universal de la suma directa se factorizan a través de  $\oplus_{\lambda \in \Lambda} \partial_n^\lambda$ . Por lo tanto hay una manera canónica de definir la suma directa de una familia  $\{C_\bullet^\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  complejos de cadena con diferenciales  $\partial_n^\lambda : C_n^\lambda \rightarrow C_{n-1}^\lambda$ :

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C_{n+1}^\lambda \xrightarrow{\oplus_{\lambda} \partial_{n+1}^\lambda} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C_n^\lambda \xrightarrow{\oplus_{\lambda} \partial_n^\lambda} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C_{n-1}^\lambda \longrightarrow \cdots$$

**Ejercicio 62.** Sea  $C_\bullet = \oplus_{\lambda \in \Lambda} C_\bullet^\lambda$  la suma directa de los complejos de cadena  $C_\bullet$ . Entonces la homología abre sumas:

$$H_n(C_\bullet; R) = H_n(\oplus C_n^\lambda; R) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(C_\bullet^\lambda; R)$$

*Proof.* Probaré que  $H_n(C_\bullet; R)$  cumple la propiedad universal de la suma directa. Primero observa que para toda  $n \in \mathbb{Z}$ , la inclusión canónica  $i_n^\mu : C_n^\mu \rightarrow \oplus_{\lambda} C_n^\lambda$  forma parte de un morfismo de cadenas  $i^\mu : C_\bullet^\mu \rightarrow C_\bullet$ . En efecto, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} C_n^\mu & \xrightarrow{\partial_n^\mu} & C_{n-1}^\mu \\ i_n^\mu \downarrow & & \downarrow i_{n-1}^\mu \\ \oplus_{\lambda} C_n^\lambda & \xrightarrow{\oplus_{\lambda} \partial_n^\lambda} & \oplus_{\lambda} C_{n-1}^\lambda \end{array}$$

comuta porque el morfismo  $\oplus_{\lambda} \partial_n^\lambda$  es el dado por la propiedad universal de la suma directa; está inducido por la familia  $\{i_{n-1}^\lambda \circ \partial_n^\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  (esto ya lo argumenté antes de empezar el ejercicio).

Por el ejercicio 57 el morfismo  $i^\mu : C_\bullet^\mu \rightarrow C_\bullet$  induce un morfismo

$$H_n(i^\mu) : H_n(C_\bullet^\mu; R) \longrightarrow H_n(C_\bullet; R) \quad \text{definido por} \quad H_n(i^\mu)[x] = [i_n^\mu(x)].$$

Por lo tanto  $H_n(C_\bullet; R)$  viene equipado con la familia de morfismos  $\{H_n(i^\lambda) : H_n(C_\bullet^\lambda; R) \rightarrow H_n(C_\bullet; R)\}_{\lambda \in \Lambda}$ . Ahora falta probar que esta familia cumple la propiedad universal de la suma directa:

Sea  $M$  un  $R$ -módulo equipado con una familia de morfismos  $\{f_\lambda : H_n(C_\bullet^\lambda; R) \rightarrow M\}_{\lambda \in \Lambda}$ . Para cada  $\lambda \in \Lambda$  defino el morfismo:

$$\begin{array}{ccc} H_n(C_\bullet^\lambda) & \xrightarrow{f_\lambda} & M \\ & \searrow H_n(i^\lambda) & \nearrow \Phi \\ & H_n(C_\bullet; R) & \end{array} \tag{2.9}$$

de la siguiente manera: si  $[x] \in H_n(C_\bullet; R)$  entonces

$$x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda \in \ker(\oplus_{\lambda} \partial_n^\lambda) = \oplus \ker(\partial_n^\lambda) \subseteq \oplus_{\lambda} C_n^\lambda$$

donde las  $x_\lambda \in \ker(\partial_n^\lambda) \subseteq C_n^\lambda$  y  $x_\lambda \neq 0$  para solamente una cantidad finita de índices  $\lambda \in \Lambda$ . Por lo tanto  $\sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda[x_\lambda] \in M$  porque la suma es finita y porque  $[x_\lambda] \in H_n(C_\bullet^\lambda; R)$ . De esta manera podemos definir:

$$\Phi[x] = \Phi \left[ \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda \right] := \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda[x_\lambda].$$

Claramente hace commutar el diagrama (2.9) porque si  $[x] \in H_n(C_\bullet^\lambda; R)$  entonces  $x \in \ker(\partial_n^\lambda \subseteq C_n^\lambda)$  y así  $i_n^\lambda(x) \in \oplus C_n^\lambda$  es la suma  $\sum_{\mu \in \Lambda} x_\mu$  donde  $x_\mu = 0$  para toda  $\mu \neq \lambda$  y donde  $x_\lambda = x$ . Esto quiere decir

que  $\sum_{\mu \in \Lambda} f_\mu[x_\mu] = f_\lambda[x_\lambda] = f_\lambda[x]$  y así

$$\Phi[H_n(\iota^\lambda)[x]] = \Phi\left[\sum_{\mu \in \Lambda} x_\mu\right] = f_\lambda[x]$$

También es claro que es un morfismo de  $R$ -módulos porque está definido como la suma de morfismos de  $R$ -módulos:

$$\begin{aligned}\Phi[x] + \Phi[y] &= \Phi\left[\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda\right] + \Phi\left[\sum_{\lambda \in \Lambda} y_\lambda\right] = \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda[x_\lambda] + \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda[y_\lambda] = \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda[x_\lambda + y_\lambda] = \Phi\left[\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda + y_\lambda\right] \\ &= \Phi([x] + [y]),\end{aligned}$$

porque  $x_\lambda, y_\lambda, x_\lambda + y_\lambda \in \ker(\partial_n^\lambda)$  y  $f_\lambda$  es un morfismo de  $R$ -módulos. También:

$$\Phi(r[x]) = \Phi[rx] = \Phi\left[\sum_{\lambda \in \Lambda} rx_\lambda\right] = \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda[rx_\lambda] = \sum_{\lambda \in \Lambda} rf_\lambda[x_\lambda] = r \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda[x_\lambda] = r\Phi[x].$$

Lo único que hace falta probar es que  $\Phi$  está bien definida. Sean  $[x] = [x'] \in H_n(C_\bullet; R)$ , es decir  $x, x' \in \ker(\oplus_\lambda \partial_n^\lambda) = \oplus \ker(\partial_n^\lambda)$  y  $x - x' \in \text{Im}(\oplus_\lambda \partial_{n+1}^\lambda) = \oplus_\lambda \text{Im} \partial_{n+1}^\lambda$ . Por lo tanto

$$x - x' = \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda - \sum_{\lambda \in \Lambda} x'_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x_\lambda - x'_\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \partial_{n+1}^\lambda(y_\lambda)$$

para algunas  $y_\lambda \in C_{n+1}^\lambda$ . Por lo tanto, para toda  $\lambda \in \Lambda$ ,  $x_\lambda - x'_\lambda = \partial_{n+1}^\lambda(y_\lambda)$  porque las representaciones en las sumas directas son únicas. En homología esto significa que  $[x_\lambda] = [x'_\lambda]$  en  $H_n(C_\bullet^\lambda; R)$  y así  $f_\lambda[x_\lambda] = f_\lambda[x'_\lambda]$  para toda  $\lambda$ . Por lo tanto:

$$\Phi[x] = \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda[x_\lambda] = \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda[x'_\lambda] = \Phi[x']$$

y  $\Phi$  está bien definida.  $\square$

Una consecuencia de esta propiedad de la homología es que siempre podemos reducir el cálculo de la homología de un espacio a calcular las homologías de sus componentes conectables por trayectorias:

*Proposición 28.* Sea  $X$  un espacio y  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  la familia de sus componentes conectables por trayectorias. Entonces la familia de inclusiones  $\iota^\lambda : X_\lambda \rightarrow X$  inducen un isomorfismo:

$$H_n(X; R) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(X_\lambda; R).$$

*Proof.* Sabemos que para toda  $\lambda \in \Lambda$  la inclusión  $\iota^\lambda : X_\lambda \rightarrow X$  induce un morfismo de complejos de cadena  $\iota_\#^\lambda : S_\bullet(X_\lambda; R) \rightarrow S_\bullet(X; R)$ . Por lo la propiedad universal de la suma directa, existe un (único) morfismo  $\Phi := \oplus \iota_\#^\lambda$  tal que

$$\begin{array}{ccc} S_\bullet(X_\lambda; R) & \hookrightarrow & \oplus_\lambda S_\bullet(X_\lambda; R) \\ & \searrow^{\iota_\#^\lambda} & \downarrow \Phi \\ & & S_\bullet(X; R) \end{array}$$

es un diagrama comutativo. Como  $\oplus_\lambda S_n(X_\lambda; R)$  es una suma directa de  $R$ -módulos libres, cada uno con base  $S_n(X_\lambda)$ , entonces él mismo es un  $R$ -módulo libre con base  $\sqcup_\lambda S_n(X_\lambda)$ . Por lo tanto

$$S_n(X; R) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} S_n(X_\lambda; R) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{2.10}$$

si hay una biyección  $\sqcup_\lambda S_n(X_\lambda) \leftrightarrow S_n(X)$ . Resulta que esta biyección está inducida por  $\Phi$ .

Sabemos que  $\iota_\#^\lambda$  se puede restringir a  $\iota_\#^\lambda : S_n(X_\lambda) \rightarrow S_n(X)$ , entonces podemos considerar la unión disjunta de estas funciones:

$$f : \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_n(X_\lambda) \longrightarrow S_n(X) \quad \text{definido por} \quad \sigma \mapsto \iota_\#^\lambda(\sigma) = \iota^\lambda \circ \sigma \quad \text{si } \sigma \in S_n(X_\lambda).$$

1. ( $f$  es inyectiva) Sean  $\sigma, \tau \in \sqcup_\lambda S_n(X_\lambda)$ . Si ambos están en la misma componente, ie.  $\sigma, \tau \in S_n(X_\lambda)$  entonces

$$f(\sigma) = f(\tau) \implies \iota^\lambda \circ \sigma = \iota^\lambda \circ \tau \implies \sigma = \tau$$

porque  $\iota^\lambda$  es cancelable por la izquierda.

Ahora, supongamos que  $\sigma$  y  $\tau$  están en componentes distintas y  $(\iota^\lambda \circ \sigma) = (\iota^\mu \circ \tau)$ . Como  $\text{Im}(\iota^\lambda \circ \sigma) \subseteq X_\lambda$  y  $\text{Im}(\iota^\mu \circ \tau) \subseteq X_\mu$  tenemos que

$$\text{Im}(\iota^\lambda \circ \sigma) \subseteq X_\lambda \cap X_\mu = \emptyset!$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto sólo puede suceder el primer caso donde ya probamos que se cumple la inyectividad.

2. ( $f$  es sobreyectiva) Sea  $\sigma \in S_n(X)$ . Como  $\sigma$  es continua y  $\Delta^n$  es conectable por trayectorias, entonces  $\sigma[\Delta^n] = \text{Im}(\sigma)$  es conectable por trayectorias. Por lo tanto existe una  $\lambda \in \Lambda$  tal que  $\text{Im}(\sigma) \subseteq X_\lambda$  y  $\sigma$  se factoriza a través de la inclusión  $\iota^\lambda$ , ie.  $\sigma = \iota^\lambda \circ \sigma'$  donde  $\sigma'$  es la corestricción de  $\sigma$  al contradominio  $X_\lambda$ . Así  $f(\sigma') = \iota^\lambda \circ \sigma' = \sigma$  y  $f$  es sobre.

De esto concluimos que  $f$  es biyectiva y verificamos la fórmula (2.10).

Tomando homología y aplicando el ejercicio 62 concluimos que:

$$H_n((X; R)) \cong H_n(\sqcup_\lambda S_n(X_\lambda; R)) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(S_\bullet(X_\lambda; R)) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(X_\lambda; R).$$

□

Con este resultado y la proposición 27 podemos calcular la 0-homología de cualquier espacio:

*Proposición 29.* Sea  $X$  un espacio y  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  la familia de sus componentes conectables por trayectorias. Entonces:

$$H_0(X; R) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_0(X_\lambda; R) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R.$$

En palabras esto quiere decir que  $H_0$  cuenta las componentes de  $X$ .

## 2.2.2 Homología singular relativa

Como con los grupos fundamentales, se puede definir una homología relativa. Hay dos maneras de hacerlo.

Si  $A \subseteq X$  es un subespacio, entonces la inclusión  $\iota : A \rightarrow X$  induce un morfismo  $\iota_\# : S_\bullet(A; R) \rightarrow S_\bullet(X; R)$  y así podemos pensar que  $S_\bullet(A; R)$  es un subcomplejo de  $S_\bullet(X; R)$ . Más precisamente, para cada  $n$ ,  $S_n(A; R)$  es un submódulo de  $S_n(X; R)$ , entonces podemos tomar cocientes para obtener:

$$\begin{array}{ccc} S_n(A; R) & \xrightarrow{\partial_n} & S_{n-1}(A; R) \\ \downarrow \iota_\# & & \downarrow \iota_\# \\ S_n(X; R) & \xrightarrow{\partial_n} & S_{n-1}(X; R) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_n(X; R)/S_n(A; R) & \xrightarrow{\bar{\partial}_n} & S_{n-1}(X; R)/S_{n-1}(A; R) \end{array}$$

donde  $\bar{\partial}_n$  es el morfismo inducido por  $\partial_n$ . Esto nos lleva a definir:

**Definición 80.** Para cada subespacio  $A \subseteq X$ , define el complejo  $S_\bullet(X, A; R)$  con:

$$S_n(X, A; R) := \frac{S_n(X; R)}{S_n(A; R)} \quad \text{y} \quad \bar{\partial}_n : S_n(X, A; R) \longrightarrow S_{n-1}(X, A; R).$$

La *homología de  $X$  relativa a  $A$*  se define de la misma manera:

$$H_n(X, A; R) := H_n(S_\bullet(X, A; R)) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\ker(\bar{\partial}_n)}{\text{Im}(\bar{\partial}_{n+1})}.$$

Otra manera de definir la homología relativa es de manera análoga al grupo fundamental relativo:

**Definición 81.** Sea  $A \subseteq X$  y escribe:

$$Z_n(X, A; R) = \{\sigma \in S_n(X; R) \mid \partial_n(\sigma) \in S_{n-1}(A; R)\}$$

$$B_n(X, A; R) = \{\sigma \in S_n(X; R) \mid \sigma = \partial_{n+1}(\tau) + \iota_{\#}(\delta), \text{ donde } \tau \in S_{n+1}(X; R), \delta \in S_n(A; R)\}$$

Entonces la *homología de  $X$  relativa a  $A$*  se define como el cociente

$$H_n(X, A; R) := \frac{Z_n(X, A; R)}{B_n(X, A; R)}$$

Observa que si  $\sigma = \partial_{n+1}(\tau) + \iota_{\#}(\delta) \in B_n(X, A; R)$  entonces

$$\partial_n(\sigma) = \underbrace{\partial_n(\partial_{n+1}(\tau))}_{0} + \partial_n(\iota_{\#}(\delta)) \in S_{n-1}(A; R)$$

y por lo tanto  $\sigma \in Z_n(X, A; R)$ . Esto significa que el cociente  $Z_n(X, A; R)/B_n(X, A; R)$  está bien definido.

**Ejercicio 63.** Ambas definiciones de la homología relativa son equivalentes.

*Proof.* Observa que  $Z_n(X, A; R)$  es un submódulo de  $S_n(X, R)$  porque si  $\sigma, \tau \in Z_n(X, A; R)$  entonces

$$\begin{aligned} \partial_n(\sigma - \tau) &= \partial_n(\sigma) - \partial_n(\tau) \in S_{n-1}(A; R) \implies \sigma - \tau \in Z_n(X, A; R) \\ \partial_n(r\sigma) &= r\partial_n(\sigma) \in S_{n-1}(A; R) \quad \forall r \in R \implies r\sigma \in Z_n(X, A; R). \end{aligned}$$

Ahora defino  $\Phi : Z_n(X, A; R) \rightarrow S_n(X; R)/S_n(A; R)$  como la restricción de la proyección  $S_n(X; R) \twoheadrightarrow S_n(X; R)/S_n(A; R)$ . Claramente es un morfismo de  $R$ -módulos.

Primero pruebo que  $\Phi$  es sobre. Sea  $[\sigma] \in S_n(X; R)/S_n(A; R)$  y tomo la clase lateral  $\Sigma := \sigma + S_n(A; R) \subseteq S_n(X; R)$ . Todo elemento de  $\sigma' \in \Sigma$  es de la forma  $\sigma' = \sigma + \tau$  donde  $\tau \in S_n(A; R)$ . Entonces

$$\partial_n(\sigma') = \partial_n(\sigma + \tau) = \partial_n(\sigma) + \partial_n(\tau) \implies \partial_n(\sigma' - \sigma) \in S_n(A; R).$$

Ahora observa que  $[\sigma] = [\sigma' - \sigma]$  porque □

Como en el caso de **Top**, los morfismos  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  inducen morfismos en homología: como  $f[A] \subseteq B$ , entonces  $f_{\#}[S_{\bullet}(A; R)] \subseteq S_{\bullet}(B; R)$  y así  $f$  pasa al cociente, ie. tenemos

$$\bar{f}_{\#} : \frac{S_{\bullet}(X; R)}{S_{\bullet}(A; R)} \longrightarrow \frac{S_{\bullet}(Y; R)}{S_{\bullet}(B; R)}.$$

Esto claramente es un morfismo de complejos de cadena, entonces  $\bar{f}_{\#}$  induce un morfismo  $H_n(\bar{f}_{\#})$  en homologías. Podemos concluir lo mismo ahora usando la definición 81:

Sea  $\sigma \in Z_n(X, A; R)$ , ie.  $\partial_n(\sigma) \in S_{n-1}(A'; R)$ . Entonces  $f_{\#}(\sigma) \in S_n(Y; R)$  y

$$\partial_n(f_{\#}(\sigma)) = f_{\#}(\partial_n(\sigma)) \in S_{n-1}(B; R) \implies f_{\#}(\sigma) \in Z_n(Y, B; R).$$

En particular si  $\sigma \in B_n(X, A; R)$  entonces  $\sigma = \partial_N(\tau) + \delta$  para alguna  $\delta \in S_n(A)$  y alguna  $\tau \in S_{n+1}(X)$ . De esta manera:

$$f_{\#}(\sigma) = f_{\#}(\partial_{n+1}(\tau)) + f_{\#}(\delta) = \partial_{n+1}(f_{\#}(\tau)) + f_{\#}(\delta) \in B_n(Y, B; R).$$

Por lo tanto  $f_{\#}[B_n(X, A; R)] \subseteq B_n(Y, B; R)$  y pasa al cociente:

$$\bar{f}_{\#} : \frac{Z_n(X, A; R)}{B_n(X, A; R)} \longrightarrow \frac{Z_n(Y, B; R)}{B_n(Y, B; R)}.$$

La homología relativa también abre sumas directas:

*Proposición 30.* Sean  $A \subseteq X$  y  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  la familia de componentes (conectables por trayectorias) de  $X$ ; escribo  $A_\lambda := X_\lambda \cap A$ . La familia de inclusiones  $\{\iota_\lambda : (X_\lambda, A_\lambda) \rightarrow (X, A)\}_{\lambda \in \Lambda}$  inducen un isomorfismo

$$H_n(X, A; R) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(X_\lambda, A_\lambda; R).$$

*Proof.* Las inclusiones  $\iota^\lambda$  inducen morfismos  $\iota_\#^\lambda$  que hacen commutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X_\lambda & \xrightarrow{\iota^\lambda} & X \\ \uparrow & \uparrow \rightsquigarrow & \uparrow \\ A_\lambda & \hookrightarrow & A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} S_n(X_\lambda; R) & \xrightarrow{\iota_\#^\lambda} & S_n(X; R) \\ \uparrow & & \uparrow \\ S_n(A_\lambda; R) & \hookrightarrow & S_n(A; R) \end{array}$$

Como el segundo diagrama es comunitativo,  $\iota_\#^\lambda$  pasa al cociente, ie.

$$j^\lambda := \overline{\iota_\#^\lambda} : \frac{S_n(X_\lambda; R)}{S_n(A_\lambda; R)} \longrightarrow \frac{S_n(X; R)}{S_n(A; R)}.$$

Por lo tanto tenemos una familia de morfismos

$$\{j^\lambda : S_n(X_\lambda, A_\lambda; R) \longrightarrow S_n(X, A; R)\}_{\lambda \in \Lambda}.$$

Por la propiedad universal de la suma directa, existe un (único) morfismo

$$\Phi := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} j^\lambda : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} S_n(X_\lambda, A_\lambda; R) \longrightarrow S_n(X, A; R).$$

Para ver que  $\Phi$  es un isomorfismo basta verificar que induce una biyección entre las bases de  $\bigoplus S_n(X_\lambda, A_\lambda; R)$  y  $S_n(X, A; R)$ . Esto se sigue inmediatamente del siguiente ejercicio:

**Ejercicio 64.** La función

$$\Phi : \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \{\sigma \in S_n(X_\lambda) \mid \text{Im}(\sigma) \not\subseteq A_\lambda\} \longrightarrow \{\sigma \in S_n(X) \mid \text{Im}(\sigma) \not\subseteq A\} \quad \text{definido por } \sigma \mapsto \iota^\lambda \circ \sigma$$

es una biyección.

Primero escribo:

$$M_\lambda := \{\sigma \in S_n(X_\lambda) \mid \text{Im}(\sigma) \not\subseteq A_\lambda\} \quad \text{y} \quad N := \{\sigma \in S_n(X) \mid \text{Im}(\sigma) \not\subseteq A\},$$

entonces  $\Phi : \sqcup M_\lambda \rightarrow N$ . Primero veo que está bien definida. Sea  $\sigma \in \sqcup M_\lambda$ , es decir  $\sigma \in M_\lambda$  para alguna  $\lambda \in \Lambda$ . Entonces  $\text{Im}(\sigma) \not\subseteq A_\lambda$ , es decir existe un elemento  $x \in \text{Im}(\sigma)$  tal que  $x \notin A_\lambda = X_\lambda \cap A$ , ie.  $x \in (X_\lambda)^c \cup A^c$ . Hay dos casos:

Si  $x \notin A$  entonces  $\text{Im}(\sigma) \not\subseteq A$  y bajo la inclusión  $\iota^\lambda : X_\lambda \rightarrow X$  tenemos que  $\text{Im}(\Phi(\sigma)) = \text{Im}(\iota^\lambda \circ \sigma) = \text{Im}(\sigma) \not\subseteq A$  lo cual implica que  $\Phi(\sigma) \in N$ .

El segundo caso:  $x \notin X_\lambda$  no puede suceder, porque  $x \in \text{Im}(\sigma)$  y  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X_\lambda$  tiene como contradominio a  $X_\lambda$ , ie.  $\text{Im}(\sigma) \subseteq X_\lambda$ . Por lo tanto nada más puede suceder el primer caso donde ya probamos que  $\Phi$  está bien definida.

La prueba de que  $\Phi$  es una biyección es exactamente análogo a la prueba de la proposición 28:

- ( $\Phi$  es inyectiva) Sean  $\sigma, \tau \in \sqcup M_\lambda$ . Si ambos están en el mismo uniendo, ie.  $\sigma, \tau \in M_\lambda$  para alguna  $\lambda \in \Lambda$ , entonces

$$\Phi(\sigma) = \Phi(\tau) \implies \iota^\lambda \circ \sigma = \iota^\lambda \circ \tau \implies \sigma = \tau$$

porque  $\iota^\lambda$  es cancelable por la izquierda (por ser inyectivo).

Ahora, supongamos que  $\sigma$  y  $\tau$  están en uniendos distintos y  $(\iota^\lambda \circ \sigma) = (\iota^\mu \circ \tau)$ . Como  $\text{Im}(\iota^\lambda \circ \sigma) \subseteq X_\lambda$  y  $\text{Im}(\iota^\mu \circ \tau) \subseteq X_\mu$  tenemos que

$$\text{Im}(\iota^\lambda \circ \sigma) \subseteq X_\lambda \cap X_\mu = \emptyset$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto sólo puede suceder el primer caso donde ya probamos que se cumple la inyectividad.

2. ( $\Phi$  es sobreyectiva) Sea  $\sigma \in N$ . Como  $\sigma$  es continua y  $\Delta^n$  es conectable por trayectorias, entonces  $\sigma[\Delta^n] = \text{Im}(\sigma)$  es conectable por trayectorias. Por lo tanto existe una  $\lambda \in \Lambda$  tal que  $\text{Im}(\sigma) \subseteq X_\lambda$  y  $\sigma$  se factoriza a través de la inclusión  $\iota^\lambda$ , ie.  $\sigma = \iota^\lambda \circ \sigma'$  donde  $\sigma'$  es la corestricción de  $\sigma$  al contradominio  $X_\lambda$ . Así  $\Phi(\sigma') = \iota^\lambda \circ \sigma' = \sigma$  y  $f$  es sobre.

□

Como en el caso de la homología usual, podemos calcular la 0-homología relativa:

*Proposición 31.* Sea  $X$  un espacio conectable por trayectorias y  $A \subseteq X$  un subespacio no vacío, entonces:  $H_0(X, A; R) = 0$ .

*Proof.* Como  $\partial_0 = 0$  y  $S_{-1}(A; R) = 0$ , entonces

$$Z_0(X, A; R) = \{\sigma \in S_0(X; R) \mid \partial_0(\sigma) = 0\} = S_0(X; R).$$

Por otro lado sea  $\tau = \sum_{x \in X} r_x x \in S_0(X; R)$  y  $a_0 \in A$  un punto arbitrario (aquí estamos usando que  $A \neq \emptyset$ ). Como  $X$  es conectable por trayectorias, para toda  $x \in X$  existe una trayectoria  $\sigma_x : \Delta^1 \rightarrow X$  que empieza en  $a_0$  y termina en  $x$ , ie.  $\sigma_x(e_0) = a_0$  y  $\sigma_x(e_1) = x$ . Ahora calculo la frontera de la 1-cadena  $\sigma := \sum_{x \in X} r_x \sigma_x$ .

$$\begin{aligned} \partial_1 \left( \sum r_x \sigma_x \right) &= \sum r_x \partial_1(\sigma_x) = \sum r_x (x - a_0) = \sum r_x x - \sum r_x a_0 = \tau - r a_0 \\ \therefore \tau &= \partial_1 \left( \sum r_x \sigma_x \right) + r a_0 \in B_0(X, A; R) \end{aligned}$$

porque  $r \in R$  y  $a_0 \in A$  implican que  $r a_0 \in S_0(A; R)$ .

Por lo tanto  $S_0(X; R) \subseteq B_0(X, A; R)$ . Esto junto con  $B_0(X, A; R) \subseteq Z_0(X, A; R) = S_0(X; R)$  podemos concluir que  $B_0(X, A; R) = Z_0(X, A; R)$  y así:

$$H_0(X, A; R) = \frac{Z_0(X, A; R)}{B_0(X, A; R)} = 0.$$

□

*Nota.* Observa que una función continua  $f : X \rightarrow Y$  es equivalente al morfismo basado  $f : (X, \emptyset) \rightarrow (Y, \emptyset)$ , entonces cuando  $A = \emptyset$  tenemos:

$$H_n(X, \emptyset; R) = H_n(X; R),$$

en particular, la homología relativa generaliza la homología usual. En lenguaje más técnico, el funtor  $X \mapsto (X, \emptyset)$  es una inclusión.

Si juntamos las proposiciones podemos calcular  $H_0(X, A; R)$ . Solamente dependen de las componentes de  $X$  que intersectan a  $A$ :

**Corolario 43.** *Sea  $A \subseteq X$  y  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  las componentes conectables por trayectorias de  $X$ . Si  $\Lambda'$  es el conjunto de índices donde  $A$  intersecta a  $X_\lambda$ , ie.  $\Lambda' := \{\lambda \in \Lambda \mid A_\lambda \neq \emptyset\}$  entonces*

$$H_0(X, A; R) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda'} \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda'}$$

Ahora veremos uno de los teoremas más útiles para calcular homologías. Para el siguiente teorema vamos a fijar un anillo  $R$ . Más formalmente, fijamos la categoría  $\text{Mod}_R$  y trabajamos con complejos sobre esa categoría. Por esto voy a omitir la  $R$  de la notación; por ejemplo  $H_n(X, A) = H_n(X, A; R)$ .

**Teorema 44.** *Sean  $A \subseteq X$ ,  $\iota : A \hookrightarrow X$  la inclusión y  $j : (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$ . Existen una sucesión exacta larga:*

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{H_n(\iota)} H_n(X) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, A) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{H_{n-1}(\iota)} H_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \quad (2.11)$$

donde  $d_n$  se define como  $d_n[\sigma] = [\partial_n(\sigma)]$ . A veces se llaman morfismos de conexión.

*Proof.* Primero observa que el morfismo de conexión está bien definida: tomamos

$$[\sigma] = [\sigma'] \in \frac{Z_n(X, A)}{B_n(X, A)} \implies \sigma \in Z_n(X, A) \text{ y } \partial_n(\sigma) \in S_{n-1}(A).$$

Como  $\sigma - \sigma' \in B_n(X, A)$ , entonces existen  $\tau \in S_{n+1}(X)$  y  $\delta \in S_n(A)$  tales que

$$\begin{aligned} \sigma - \sigma' &= \partial_{n+1}(\tau) + \delta \implies \partial_n(\sigma - \sigma') = \underbrace{\partial_n(\partial_{n+1}(\tau))}_{0} + \partial_n(\delta) \in \text{Im}(\partial_n) \\ \therefore \partial_n(\sigma) - \partial_n(\sigma') &\in B_n(X, A) \implies d_n[\sigma] = [\partial_n(\sigma)] = [\partial_n(\sigma')] = d_n[\sigma'] \end{aligned}$$

y así  $d_n$  está bien definida.

Hay que probar exactitud en tres lugares:

- (Exactitud en  $H_n(X, A)$ ) Sea  $[\sigma] \in H_n(X)$ . Como  $j_\# : S_\bullet(X) \rightarrow S_\bullet(X, A)$  es un morfismo de complejos de cadena, entonces

$$d_n(H_n(j)[\sigma]) = d_n[j_\#(\sigma)] = [(\partial_n \circ j_\#)(\sigma)] = [(j_\# \circ \partial_n)(\sigma)] = 0$$

porque  $\sigma \in Z_n(X) = \ker \partial_n$ . Por lo tanto  $\text{Im}(H_n(j_\#)) \subseteq \ker(d_n)$ .

Para la otra contención sea  $[\sigma] \in \ker(d_n) \subseteq H_n(X, A)$ , es decir  $d_n[\sigma] = 0$ . Por definición, esto significa que  $\partial_n(\sigma) \in \text{Im}(\partial_n) \subseteq S_{n-1}(A)$ . Por lo tanto existe un  $\tau \in S_n(A)$  tal que

$$\partial_n(\sigma) = \partial_n(\tau) \implies \partial_n(\sigma - \tau) = 0 \implies \sigma - \tau \in Z_n(X) \implies [\sigma - \tau] \in H_n(X)$$

Como  $\tau \in S_n(A) \subseteq B_n(X, A)$ , entonces  $[\sigma] = [\sigma - \tau] = [j_\#(\sigma - \tau)] = H_n(j)(\sigma - \tau)$  y así  $[\sigma] \in \text{Im}(H_n(j))$ .

- (Exactitud en  $H_n(X)$ ) Sea  $[\sigma] \in H_n(A)$ , entonces

$$(H_n(j) \circ H_n(i))[\sigma] = [(j_\# \circ i_\#)(\sigma)] = 0$$

ya que  $\sigma \in S_n(A) \subseteq B_n(X, A)$ . Por lo tanto  $\text{Im}((H_n(i))) \subseteq \ker(H_n(j))$ . Para la otra contención, sea  $[\sigma] \in H_n(X)$  tal que  $H_n(j)[\sigma] = [j_\#(\sigma)] = 0$ , es decir  $j_\#(\sigma) \in B_n(X, A)$ . Por lo tanto existe un  $\delta \in S_n(A)$  y un  $\tau \in S_{n+1}(X)$  tal que  $j_\#(\sigma) = \partial_{n+1}(\tau) + i_\#(\delta)$ . Despejamos:

$$\sigma - i_\#(\delta) = \partial_{n+1}(\tau) \implies \sigma - i_\#(\delta) \in \text{Im}(\partial_{n+1}) = B_n(X) \implies [\sigma] = [i_\#(\delta)] = H_n(i)(\delta).$$

Por lo tanto  $[\sigma] \in \text{Im}(H_n(i))$  y concluimos la otra contención.

- (Exactitud en  $H_{n-1}(A)$ )

**Ejercicio 65.** La sucesión larga de homologías (2.11) es exacta en  $H_{n-1}(A)$ .

*Proof.* Para la primera contención, sea  $[\sigma] \in H_n(X, A)$ , en particular  $\partial_n(\sigma) \in S_{n-1}(A)$ . Entonces

$$H_{n-1}(i)(d_n[\sigma]) = H_{n-1}(i)[\partial_n(\sigma)] = [i_\#(\partial_n(\sigma))] = [(\iota \circ \partial_n)(\sigma)] = [\partial_n(\sigma)] = 0.$$

Por lo tanto  $\text{Im}(d_n) \subseteq \ker(H_{n-1}(i))$ .

Para la otra contención, considera  $[\sigma] \in \ker(H_{n-1}(i))$ , ie.  $H_{n-1}(i)[\sigma] = [i_\#(\sigma)] = [\iota \circ \sigma] = [0]$ . Esto implica que  $\iota \circ \sigma \in B_{n-1}(X)$ , es decir que existe un  $\tau \in S_n(X)$  tal que  $\partial_n(\tau) = i_\#(\sigma)$ . Como  $j_\#$  es un morfismo de complejos de cadena, entonces:

$$\partial_n(j_\#(\tau)) = j_\#(\partial_n(\tau)) = j_\#(i_\#(\sigma)) = \bar{0} \in \frac{S_n(X)}{S_n(A)}$$

gracias a la exactitud de la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow S_{n-1}(A) \xrightarrow{i_\#} S_{n-1}(X) \xrightarrow{j_\#} \frac{S_{n-1}(X)}{S_{n-1}(A)} = S_{n-1}(X, A) \longrightarrow 0$$

y a que  $\sigma \in Z_{n-1}(A) \subseteq S_{n-1}(A)$ . Por lo tanto  $j_\#(\tau) \in Z_n(X, A)$  y así:

$$d_n[j_\#\tau] = [\partial_n(j_\#(\tau))] = [j^\#(\tau)]$$

□

□

## 2.3 Invariancia homotópica de la homología singular

Primero fijo un anillo  $R$  para no tener que escribirlo repetidamente. El propósito de esta sección es probar que si dos espacios son homotópicos, entonces sus homologías coinciden.

**Teorema 45.**  $X \simeq Y \implies H_n(X) \cong H_n(Y)$

Claramente esto se sigue de que el funtor  $X \rightarrow H_n(X)$  se factoriza a través de clases de homotopía, es decir:

**Teorema 46.** Si  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : X \rightarrow Y$  son funciones continuas homotópicas, entonces inducen el mismo morfismo en homología, es decir:

$$f \simeq g \implies H_n(f) = H_n(g) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Sea  $F : X \times I \rightarrow Y$  la homotopía entre  $f$  y  $g$ . Entonces  $F_0 = f$  y  $F_1 = g$ , o equivalentemente:

$$f = F \circ \lambda^0, \quad f = F \circ \lambda^1 \quad \text{donde} \quad \lambda^i : X \hookrightarrow X \times \{i\} \subset X \times I.$$

Observa que  $H_n(f) = H_n(F \circ \lambda^0) = H_n(F) \circ H_n(\lambda^0)$ , entonces:

$$H_n(\lambda^0) = H_n(\lambda^1) \implies H_n(F) \circ H_n(\lambda^0) = H_n(F) \circ H_n(\lambda^1) \implies H_n(f) = H_n(g).$$

Por lo tanto probar el teorema se reduce a probar que  $H_n(\lambda^0) = H_n(\lambda^1)$ . Sabemos que  $H_n(\lambda^1) = H_n(\lambda^0)$  si para toda  $[\sigma] \in H_n(X)$  se tiene que  $H_n(\lambda^0)[\sigma] - H_n(\lambda^1)[\sigma] = 0 \in H_n(X \times I)$  o equivalentemente

$$0 = [\lambda_\#^0(\sigma)] - [\lambda_\#^1(\sigma)] = [\lambda_\#^0(\sigma) - \lambda_\#^1(\sigma)] \iff (\lambda_\#^0 - \lambda_\#^1)(\sigma) \in B_n(X \times I) \quad \forall \sigma \in S_n(X).$$

La forma de probar esto es encontrar una familia de morfismos  $\{T_n^X : S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(X \times I)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  que cumplen

$$\lambda_\#^1 - \lambda_\#^0 = \partial'_{n+1} \circ T_n + T_{n-1} \circ \partial_n \quad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{2.12}$$

donde

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & S_{n+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & S_n(X) & \xrightarrow{\partial_n} & S_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow \lambda_{n+1}^i & \nearrow T_n^X & \downarrow \lambda_n^i & \nearrow T_{n-1}^X & \downarrow \lambda_{n-1}^i \\ \cdots & \longrightarrow & S_{n+1}(X \times I) & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & S_n(X \times I) & \xrightarrow{\partial'_n} & S_{n-1}(X \times I) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

En general esto se llama una homotopía entre complejos:

**Definición 82.** Sean  $\mathcal{C}_\bullet = (C_n, \partial_n)$  y  $\mathcal{D}_\bullet = (D_n, \partial_n)$  dos complejos de  $R$ -módulos y sean  $f, g : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  morfismos de complejos. Una *homotopía de complejos de cadena* es una familia de morfismo de  $R$ -módulos  $\mathfrak{T} = \{T_n : C_n \rightarrow D_{n+1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  que cumplen

$$f_n - g_n = \partial'_{n+1} \circ T_n + T_{n-1} \circ \partial_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Si dos morfismos son homotópicos, lo denotamos por  $f \simeq g$ , y si existe una homotopía entre dos complejos de cadena, decimos que son homotópicos y lo denotamos  $\mathcal{C}_\bullet \simeq \mathcal{D}_\bullet$ .

*Nota.* Si  $f \simeq g$  entonces  $H_n(f) = H_n(g)$  porque si  $[z] \in H_n(\mathcal{C}_\bullet)$  entonces

$$(H_n(f) - H_n(g))[z] = [(f_n - g_n)(z)] = [(\partial'_{n+1} \circ T_n)(z) + (T_{n-1} \circ \partial_n)(z)] = 0.$$

Por lo tanto dos morfismos de complejos de cadena que son homotópicos inducen el mismo morfismo en homologías.

Para probar (46), hay que probar que  $\lambda_\#^0 \simeq \lambda_\#^1$ , es decir hay que encontrar una familia  $\mathfrak{T} = \{T_n^X : S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(X \times I)\}$  que cumpla (2.12).

Para definir las  $T_n^X$ , en general si  $f : X \rightarrow Y$  es continua, entonces queremos que

$$\begin{array}{ccc} S_n(X) & \xrightarrow{T_n^X} & S_{n+1}(X \times I) \\ f_\# \downarrow & & \downarrow (f \times \text{Id})_\# \\ S_n(X) & \xrightarrow{T_n^Y} & S_{n+1}(Y \times I) \end{array}$$

sea comutativo. En particular para  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ , ie.  $\sigma \in S_n(X)$ , queremos que:

$$(\sigma \times \text{Id}_I)_\# \circ T_n^{\Delta^n} = T_n^X \circ \sigma_\#,$$

en particular, como  $\sigma_\#(\text{Id}_\Delta) = \sigma \circ \text{Id} = \sigma$ , tenemos que

$$T_n^X(\sigma) = T_n^X(\sigma_\#(\text{Id}_{\Delta^n})) = (\sigma \times \text{Id}_I)_\#(T_n^{\Delta^n}(\text{Id}_{\Delta^n})). \quad (2.13)$$

Por lo tanto definir  $T_n^X$  se reduce a definir  $T_n^{\Delta^n}(\text{Id}_{\Delta^n}) \in S_{n+1}(\Delta^n \times I)$ .

Para esto hay que hacer lo mismo que en (2.12): escribimos  $\delta^i : \Delta^n \rightarrow \Delta^n \times I$  como la inclusión  $\delta^i(x) = (x, i)$  y queremos una familia  $\mathfrak{T}^\Delta : \{T_m^{\Delta^n} : S_m(\Delta^n) \rightarrow S_{m+1}(\Delta^n \times I)\}$  de morfismos de  $R$ -módulos que sea una homotopía  $\delta_\#^0 \simeq \delta_\#^1$ , en particular:

$$\delta_\#^1(\text{Id}_{\Delta^n}) - \delta_\#^0(\text{Id}_{\Delta^n}) = (\partial'_{n+1} \circ T_n^{\Delta^n})(\text{Id}_{\Delta^n}) + (T_{n-1}^{\Delta^n} \circ \partial_n)(\text{Id}_{\Delta^n}) \quad (2.14)$$

donde  $m = n$  (ya que solamente necesitamos este caso). Primero evaluamos el segundo sumando.

Observa que los morfismos cara  $F_n^i : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$  satisfacen el diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} S_{n-1}(\Delta^{n-1}) & \xrightarrow{T_{n-1}^{\Delta^{n-1}}} & S_n(\Delta^{n-1} \times I) \\ f_\# \downarrow & & \downarrow (F_n^i \times \text{Id}_I)_\# \\ S_{n-1}(\Delta^n) & \xrightarrow{T_{n-1}^{\Delta^n}} & S_n(\Delta^n \times I) \end{array}$$

Este diagrama nos permite calcular:

$$\begin{aligned} (T_{n-1}^{\Delta^n} \circ \partial_n)(\text{Id}_{\Delta^n}) &= T_{n-1}^{\Delta^n} \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i (\text{Id}_{\Delta^n} \circ F_n^i) \right) = T_{n-1}^{\Delta^n} \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i F_n^i \right) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (T_{n-1}^{\Delta^n} \circ F_n^i) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i (F_n^i \times \text{Id})_\#(T_{n-1}^{\Delta^{n-1}}(\text{Id}_{\Delta^{n-1}})) \end{aligned}$$

Sustituimos en (2.14) para obtener:

$$\delta_\#^1(\text{Id}_{\Delta^n}) - \delta_\#^0(\text{Id}_{\Delta^n}) = \partial'_{n+1}(T_n^{\Delta^n}(\text{Id}_{\Delta^n})) + \sum_{i=0}^n (-1)^i (F_n^i \times \text{Id})_\#(T_{n-1}^{\Delta^{n-1}}(\text{Id}_{\Delta^{n-1}})). \quad (2.15)$$

Observa que el lado derecho depende de solamente  $T_n^{\Delta^n}(\text{Id}_{\Delta^n})$ . La idea es definirlo para forzar la igualdad anterior. Para esto, necesitamos una construcción nueva: agregar un vértice a un simplejo singular.

**Definición 83.** Sea  $\sigma : \Delta^n \rightarrow \mathbb{R}^N$  un  $n$ -simplejo singular con  $\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$ . Para  $v \in \mathbb{R}^N$  definimos:

$$v \cdot \sigma := \langle v, v_0, \dots, v_n \rangle \quad \text{donde} \quad (v \cdot \sigma)(e_i) = \begin{cases} v & \text{si } i = 0 \\ v_{i-1} & \text{si } i = 1, \dots, n \end{cases}$$

En general si  $\tau = \sum_\sigma r_\sigma \sigma$  es una  $n$ -cadena afín, entonces definimos

$$v \cdot \tau := \sum_\sigma r_\sigma (v \cdot \sigma).$$

**Ejemplo 19.**

Esta construcción cumple algunas propiedades importantes

**Lema 47.** *Las caras de  $v \cdot \sigma$  son*

$$(v \cdot \sigma)^{(i)} = \begin{cases} \sigma & \text{si } i = 0 \\ v \cdot \sigma^{(i)} & \text{si } i = 1, \dots, n \end{cases}$$

*Proof.* Para  $i = 0$ , tenemos:

$$(v \cdot \sigma)^{(0)}(e_j) = (v \cdot \sigma)(F_{n+1}^0(e_j)) = (v \cdot \sigma)(e_{j+1}) = v_j = \sigma(e_j),$$

por lo tanto  $(v \cdot \sigma)^{(0)} = \sigma$ .

Para  $i > 0$  tenemos

$$\begin{aligned} (v \cdot \sigma)^{(i)}(e_j) &= (v \cdot \sigma)(F_{n+1}^i(e_j)) = \begin{cases} (v \cdot \sigma)(e_j) & \text{si } j < i \\ (v \cdot \sigma)(e_{j+1}) & \text{si } j \geq i \end{cases} = \begin{cases} v & \text{si } j = 0 \\ v_{j-1} & \text{si } 0 < j < i \\ v_j & \text{si } j \geq i \end{cases} \\ &= (v \cdot \sigma^{(i)})(e_j), \end{aligned}$$

por lo tanto  $(v \cdot \sigma)^{(i)} = v \cdot \sigma^{(i)}$

□

**Lema 48.** *Sea  $\tau = \sum_\sigma r_\sigma \sigma$  una  $n$ -cadena afín, entonces:*

$$\partial_{n+1}(v \cdot \tau) = \tau - v \cdot \partial_n(\tau),$$

en particular, si  $\tau$  es un ciclo entonces  $\partial_{n+1}(v \cdot \tau) = \tau$ .

*Proof.* Simplemente hay que calcular:

$$\partial_{n+1}(v \cdot \tau) = \partial_{n+1} \left( \sum_\sigma r_\sigma (v \cdot \sigma) \right) = \sum_\sigma r_\sigma \partial_{n+1}(v \cdot \sigma) = \sum_\sigma r_\sigma \left( \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (v \cdot \sigma)^{(i)} \right).$$

Por el lema 47, la suma adentro del paréntesis es

$$\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (v \cdot \sigma)^{(i)} = \sigma - \sum_{i=0}^n (-1)^i v \cdot \sigma^{(i)} = \sigma - v \cdot \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma^{(i)} \right) = \sigma - v \cdot \partial_n(\sigma).$$

Si sustituimos en la igualdad anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} \partial_{n+1}(v \cdot \tau) &= \sum_\sigma r_\sigma (\sigma - v \cdot \partial_n(\sigma)) = \sum_\sigma r_\sigma \sigma - \sum_\sigma r_\sigma v \cdot \partial_n(\sigma) = \tau - v \cdot \left( \sum_\sigma r_\sigma \partial_n(\sigma) \right) \\ &= \tau - v \cdot \partial_n(\tau). \end{aligned}$$

□

Con esto definimos bien la familia

$$\mathcal{P}_0 := T_0^{\Delta^0}(Id_{\Delta^0}), \quad \mathcal{P}_1 := T_1^{\Delta^1}(Id_{\Delta^1}), \dots, \quad \mathcal{P}_n := T_n^{\Delta^n}(Id_{\Delta^n}), \dots$$

de simplejos para poder definir  $T_n^X$  como en (2.13).

**Definición 84.** Sea  $\mathfrak{b}_n := (\mathfrak{b}(\Delta^n), \frac{1}{2}) \in \Delta^n \times I$ , donde  $\mathfrak{b}(\Delta^n)$  es el baricentro de  $\Delta^n$ . Entonces definimos inductivamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0 &:= \mathfrak{b}_0 \cdot (\delta_\#^1(Id_{\Delta^0}) - \delta_\#^0(Id_{\Delta^0})) \\ \mathcal{P}_n &:= \mathfrak{b}_n \cdot \underbrace{\left( \delta_\#^1(Id_{\Delta^n}) - \delta_\#^0(Id_{\Delta^n}) - \sum_{i=0}^n (-1)^i (F_n^i \times Id_I)_\#(\mathcal{P}_{n-1}) \right)}_{\mathfrak{z}_n}. \end{aligned}$$

Ilustro los primeros simplejos:

Observa que  $\mathcal{P}_n$  se obtiene de agregarle un vértice  $\mathbf{b}_n$ , que está adentro de  $\mathfrak{z}_n$ . Intuitivamente esto produce un  $(n+1)$ -simplejo cuya frontera es  $\mathfrak{z}_n$  porque todas las aristas nuevas que se producen pasan por  $\mathfrak{z}_n$  de tal manera que las orientaciones se cancelan. Esto es una propiedad importante que cumple la familia  $\{\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \dots\}$ .

**Lema 49.**  $\partial_1(\mathcal{P}_0) = \delta_{\#}^1(\text{Id}_{\Delta^0}) - \delta_{\#}^0(\text{Id}_{\Delta^0})$  y en general  $\partial_{n+1}(\mathcal{P}_n) = \mathfrak{z}_n$  para  $n > 0$ .

*Proof.* La prueba va a ser por inducción y voy a abreviar  $\delta^i = \delta_{\#}^i(\text{Id}_{\Delta^n})$ . Para el caso  $n = 0$ , usamos el lema 48 para calcular:

$$\partial_1(\mathcal{P}_0) = \partial_n(\mathbf{b}_0 \cdot (\delta^1 - \delta^0)) = \delta^1 - \delta^0 - \underbrace{\mathbf{b}_0 \partial_0(\delta^1 - \delta^0)}_0 = \delta^1 - \delta^0.$$

En general, si  $\mathfrak{z}_n$  es un ciclo para toda  $n$ , entonces el lema 48 nos dice que:

$$\partial_{n+1}(\mathcal{P}_n) = \partial_{n+1}(\mathbf{b}_n \cdot \mathfrak{z}_n) = \mathfrak{z}_n - \underbrace{\mathbf{b}_n \partial_n(\mathfrak{z}_n)}_0 = \mathfrak{z}_n.$$

Por lo tanto el lema se reduce a probar que  $\mathfrak{z}_n$  es un ciclo, ie.  $\partial_n(\mathfrak{z}_n) = 0$ .

Ahora supongamos que el lema se cumple para  $n-1$ , es decir  $\partial_n(\mathcal{P}_{n-1}) = \mathfrak{z}_{n-1}$ . Entonces  $\partial_{n-1}(\mathfrak{z}_{n-1}) = \partial_{n-1}(\partial_n(\mathcal{P}_{n-1})) = 0$ . Por recursión podemos concluir que  $\mathfrak{z}_m$  es un ciclo para toda  $m < n$ . Con esto podemos calcular:

$$\begin{aligned} \partial_n(\mathfrak{z}_n) &= \partial_n \left( \delta_{\#}^1(\text{Id}_{\Delta^n}) - \delta_{\#}^0(\text{Id}_{\Delta^n}) - \sum_{i=0}^n (-1)^i (F_n^i \times \text{Id}_I)_{\#}(\mathcal{P}_{n-1}) \right) \\ &= \partial_n(\delta^1 - \delta^0) - \sum_{i=0}^n (-1)^i (F_n^i \times \text{Id}_I)_{\#}(\partial_n(\mathcal{P}_{n-1})) \end{aligned}$$

donde la suma del lado derecho vale:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (-1)^i (F_n^i \times \text{Id}_I)_{\#}(\mathfrak{z}_{n-1}) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i (F_n^i \times \text{Id}_I)_{\#} \left( \delta^1 - \delta^0 - \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j (F_{n-1}^j \times \text{Id}_I)_{\#}(\mathcal{P}_{n-2}) \right) \\ &= \left[ \sum_{i=0}^n (-1)^i (F_n^i \times \text{Id}_I)_{\#}(\delta^1 - \delta^0) \right] \\ &\quad + \left[ \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{i+j} ((F_n^i \circ F_{n-1}^j) \times \text{Id}_I)_{\#}(\partial_n(\mathcal{P}_{n-1})) \right] \end{aligned}$$

Como  $(F_n^i \times \text{Id}_I)_{\#} \circ \delta^* = \delta^* \circ f_n^i$ , entonces el primer sumando es simplemente  $\partial_n(\delta^1 - \delta^0)$ . El segundo sumando se anula por el ejercicio 60 y por la prueba del ejercicio 61. Sustituimos estos resultados en ?? para obtener:

$$\partial_n(\mathfrak{z}_n) = \partial_n(\delta^1 - \delta^0) - \partial_n(\delta^1 - \delta^0) + 0 = 0$$

y así  $\mathfrak{z}_n$  es un ciclo.  $\square$

Ya estamos en posición para probar el teorema de la invariancia de la homología singular; simplemente definimos  $T_n^{\Delta^n}(\text{Id}_{\Delta^n}) := \mathcal{P}_n$  como en (2.13).

*Proof.* (Teorema 46) Recuerda que nada más debemos probar que  $\lambda_{\#}^0 \simeq \lambda_{\#}^1$  como morfismos de complejos de cadenas. La homotopía está dada por la familia

$$T_n^X : S_n(X) \longrightarrow S_{n+1}(X) \quad \text{definida por} \quad \sigma \mapsto (\sigma \times \text{Id}_I)_{\#}(\mathcal{P}_n),$$

de morfismos de  $R$ -módulos. Calculamos:

$$\begin{aligned} (\partial'_{n+1} T_n^X + T_{n-1}^X \partial_n)(\sigma) &= \partial'_{n+1}((\sigma \times \text{Id}_I)_\#(\mathcal{P}_n)) + T_n^X \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma^{(i)} \right) \\ &= (\sigma \times \text{Id}_I)_\#(\partial'_{n+1}(\mathcal{P}_n)) + \sum_{i=0}^n (-1)^i T_{n-1}^X(\sigma^{(i)}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Como  $\partial'_{n+1}(\mathcal{P}_n) = \mathfrak{z}_n$  por el lema 49 y como

$$T_{n-1}^X(\sigma^{(i)}) = (\sigma^{(i)} \times \text{Id}_I)_\#(\mathcal{P}_{n-1}) = ((\sigma \circ F_n^i) \times \text{Id}_I)_\#(\mathcal{P}_{n-1}) = ((\sigma \times \text{Id}_I) \circ (F_n^i \times \text{Id}_I))(\mathcal{P}_{n-1}),$$

entonces (2.16) se reduce a:

$$\begin{aligned} (\partial'_{n+1} T_n^X + T_{n-1}^X \partial_n)(\sigma) &= (\sigma \times \text{Id}_I)_\#(\partial'_{n+1}(\mathcal{P}_n)) + \sum_{i=0}^n (-1)^i ((\sigma \times \text{Id}_I) \circ (F_n^i \times \text{Id}_I))(\mathcal{P}_{n-1}) \\ &= (\sigma \times \text{Id}_I)_\# \left( \mathfrak{z}_n + \sum_{i=0}^n (-1)^i (F_n^i \times \text{Id}_I)_\#(\mathcal{P}_{n-1}) \right) \\ &= (\sigma \times \text{Id}_I)_\#(\delta^1 - \delta^0) \end{aligned}$$

por definición de  $\mathfrak{z}_n$ . Por último

$$((\sigma \times \text{Id}_I) \circ \delta^*)(v) = (\sigma \times \text{Id}_I)(v, *) = (\sigma(v), *) = (\lambda^* \circ \sigma)(v) = \lambda_\#^*(\sigma)$$

Entonces concluimos que:

$$\partial'_{n+1} T_n^X + T_{n-1}^X \partial_n = \lambda_\#^1 - \lambda_\#^0$$

y así  $\lambda_\#^1 \simeq \lambda_\#^0$ . Por el argumento que sigue del enunciado del teorema 46 ya terminamos la prueba.  $\square$

**Ejercicio 66.** El teorema de la invariancia de la homología singular también se cumple para la homología relativa, es decir si  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  son funciones continuas tales que  $f \simeq g$  relativo a  $A$ , entonces  $H_n(f) = H_n(g)$  para toda  $n \in \mathbb{Z}$ .

*Proof.*  $\square$

## 2.4 El teorema de escisión

La idea general del teorema de escisión es que la homología de  $X$  relativo a  $A$  es lo mismo que si le quitamos a  $X$  un subconjunto  $U \subset A$  y calculamos la homología de  $X - U$  relativa a  $A - U$ . En palabras, la homología relativa a un subespacio no nota la diferencia si el quitas (ciertos) conjuntos contenidos en el subespacio.

**Teorema 50.** *Sea  $X$  un espacio y  $U \subset A \subseteq X$  tal que  $\bar{U} \subset \bar{A}$ . Entonces la inclusión  $j : (X - U, A - U) \hookrightarrow (X, A)$  induce un isomorfismo en homologías, es decir:*

$$H_n(j) : H_n(X - U, A - U) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A)$$

*es un isomorfismo.*

En este caso decimos que  $U$  se puede *escindir* de la pareja  $(X, A)$ .

La idea intuitiva es que si tenemos una cadena en  $X$  le podemos cortar los pedazos que están en  $U$  de tal manera que la homología relativa a  $A$  no se de cuenta.

Por ejemplo, supongamos que tenemos una cadena  $\tau = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$  como en el siguiente dibujo

Observa que la cadena  $\tau' = \sigma''_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \in S_n(X - U, A - U)$ , obtenida “cortando” la cadena  $\tau \in S_n(X, A)$  en el punto  $u \in \text{Im}(\sigma_1)$ , es una preimagen de  $[\tau] \in H_n(X, A)$  bajo  $H_n(j)$ . En efecto si identifico  $[\tau'] = [j_{\#}(\tau')] = H_n(j)[\tau']$  entonces

$$\tau - \tau' = \sigma_1 - \sigma'_1 - \sigma''_1 = \partial(\hat{\sigma}) - \sigma'_1 \in B_n(X, A) \implies [\tau] = [\tau'] \in H_n(X, A)$$

La idea del teorema de escisión es que esta elección de preimagen es única módulo clases de homología.

En lugar de probar el teorema de escisión como viene enunciado en el teorema 50, vamos a probar un teorema más general; a ambas las llamaremos igual.

Primero definimos un subcomplejo del complejo singular  $S_{\bullet}(X)$ . Sea  $\mathfrak{U} = \{U_j\}_{j \in J}$  una familia de subespacios tales que  $X = \cup_j \tilde{U}_j$  (por ejemplo  $\mathfrak{U}$  puedes ser una cubierta abierta). Definimos el complejo de cadenas  $S_{\bullet}^{\mathfrak{U}}(X)$  de la siguiente manera:

$$S_n^{\mathfrak{U}}(X) = \left\{ \tau = \sum_{\sigma \in S_n(X)} r_{\sigma} \sigma \in S_n(X) \mid \forall \sigma, \exists U_j \in \mathfrak{U} \text{ tal que } \text{Im}(\sigma) \subseteq U_j \right\}.$$

Por ejemplo:

Claramente es un  $R$ -submódulo de  $S_n(X)$ , entonces la inclusión  $\iota_{\bullet}^{\mathfrak{U}} : S_{\bullet}^{\mathfrak{U}} \hookrightarrow S_{\bullet}(X)$  es un morfismo de complejos de cadena. Estamos listos para enunciar el teorema de escisión general:

**Teorema 51.** *La inclusión  $\iota_{\bullet}^{\mathfrak{U}} : S_{\bullet}^{\mathfrak{U}}(X) \hookrightarrow S_{\bullet}(X)$  induce un isomorfismo en homologías, es decir:*

$$H_n(S_{\bullet}^{\mathfrak{U}}(X)) \cong H_n(S_n(X)) \stackrel{\text{def}}{=} H_n(X).$$

Para probar este teorema, nos vamos a basar en una propiedad importante de los complejos de cadena:

**Ejercicio 67.** Sea  $\varphi : \mathcal{C}_{\bullet} \rightarrow \mathcal{C}'_{\bullet}$  un morfismo de complejos de cadena. Si  $\varphi$  es una *equivalencia homotópica de cadenas* (es decir que existe un morfismo de complejos  $\psi : \mathcal{C}'_{\bullet} \rightarrow \mathcal{C}_{\bullet}$  tal que  $\psi \circ \varphi \simeq \text{Id}_{\mathcal{C}_{\bullet}}$  y  $\varphi \circ \psi \simeq \text{Id}_{\mathcal{C}'_{\bullet}}$ ), entonces  $H_n(\varphi) : H_n(\mathcal{C}_{\bullet}) \rightarrow H_n(\mathcal{C}'_{\bullet})$  es un isomorfismo de  $R$ -módulos.

*Proof.* Por el ejercicio 57, cada morfismo de complejos de cadena induce un morfismo en homologías, es decir  $\mathcal{C}_{\bullet} \mapsto H_n(\mathcal{C}_{\bullet})$  es un funtor. Supongamos que el teorema de la invariancia de la homología singular (cf. teorema 46) se vale en general (ie. si  $f \simeq g$  como morfismos de complejos de cadena entonces  $H_n(f) = H_n(g)$ ). Entonces, como  $H_n(-)$  es funtor, tendríamos que la hipótesis de que  $\varphi \circ \psi \simeq \text{Id}_{\mathcal{C}'_{\bullet}}$  y que  $\psi \circ \varphi \simeq \text{Id}_{\mathcal{C}_{\bullet}}$ , implica lo que queremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Id}_{H_n(\mathcal{C}_{\bullet})} = H_n(\text{Id}_{\mathcal{C}_{\bullet}}) = H_n(\psi \circ \varphi) = H_n(\psi) \circ H_n(\varphi) \\ \text{Id}_{H_n(\mathcal{C}'_{\bullet})} = H_n(\text{Id}_{\mathcal{C}'_{\bullet}}) = H_n(\varphi \circ \psi) = H_n(\varphi) \circ H_n(\psi) \end{array} \right\} \implies H_n(\varphi) \text{ es un isomorfismo.}$$

Por lo tanto el ejercicio se reduce a probar lo siguiente:

Si  $\varphi : \mathcal{C}_{\bullet} \rightarrow \mathcal{C}'_{\bullet}$  y  $\psi : \mathcal{C}'_{\bullet} \rightarrow \mathcal{C}_{\bullet}$  son morfismos de complejos de cadenas, entonces:

$$\varphi \simeq \psi \implies H_n(\varphi) = H_n(\psi) \tag{2.17}$$

Empezamos:

Si  $\varphi \simeq \psi$ , existe una familia  $\mathfrak{T} = \{T_n : C_n \rightarrow C'_{n+1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  de morfismos tales que cumple  $\varphi_n - \psi_n = \partial'_{n+1} T_n + T_{n-1} \partial_n$ , donde  $\varphi = (\varphi_n)$ . Por lo tanto si  $[z] \in H_n(\mathcal{C}_{\bullet})$  es arbitrario, donde  $z \in Z_n(\mathcal{C}_{\bullet}) = \ker(\partial_n)$ , entonces:

$$\begin{aligned} H_n(\varphi)[z] - H_n(\psi)[z] &= [\varphi_n(z)] - [\psi_n(z)] = [\varphi_n(z) - \psi_n(z)] = [\partial'_{n+1}(T_n(z)) + T_{n-1}(\partial_n(z))] \\ &\xrightarrow{0} = [\underbrace{\partial'_{n+1}(T_n(z))}_{0}] + [T_{n-1}(\partial_n(z))] = 0 \end{aligned}$$

porque  $\partial_n(z) = 0$  y  $T_{n-1}$  es un morfismo de  $R$ -módulos.  $\square$

Gracias a este ejercicio, simplemente hay que probar que la inclusión  $\iota := \iota_\bullet^\mathfrak{U}$  es una equivalencia homotópica de cadenas, es decir necesitamos encontrar un inverso homotópico de  $\iota$ . Más precisamente, necesitamos definir un morfismo  $S_\bullet \rightarrow S_\bullet^\mathfrak{U}$  (ie. una transformación natural entre los funtores  $S_\bullet(\cdot)$  y  $S_\bullet^\mathfrak{U}(\cdot)$ ) que compuesto con  $\iota$  sea homotópico a la identidad.

Antes que eso vamos a construir el morfismo de complejos de cadena que simplemente es hacer subdivisión baricéntrica; una aplicación repetida de este morfismo nos llevará a definir el morfismo  $S_\bullet \rightarrow S_\bullet^\mathfrak{U}$  que buscamos.

Para definir la subdivisión baricéntrica como un morfismo de complejos de cadena, vamos a seguir un método muy similar a la prueba de la invariancia homotópica de la homología singular (en particular en la construcción de la homotopía  $\lambda_\#^1 \simeq \lambda_\#^0$ ).

Definimos  $\text{sd}_\bullet^X : S_\bullet(X) \rightarrow S_\bullet(X)$  de la siguiente manera: queremos que sea un morfismo de cadenas entonces en particular queremos que

$$\begin{array}{ccc} S_n(\Delta^n) & \xrightarrow{\text{sd}_n^{\Delta^n}} & S_n(\Delta^n) \\ \sigma_\# \downarrow & & \downarrow (F_n^i)_\# \\ S_n(X) & \xrightarrow{\text{sd}_n^X} & S_n(X) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} S_n(\Delta^{n-1}) & \xrightarrow{\text{sd}_{n-1}^{\Delta^{n-1}}} & S_n(\Delta^{n-1}) \\ (F_n^i)_\# \downarrow & & \downarrow \sigma_\# \\ S_n(\Delta^n) & \xrightarrow{\text{sd}_n^{\Delta^n}} & S_n(\Delta^n) \end{array} \quad (2.18)$$

sean un diagrama comutativo, entonces para definir  $\text{sd}_n^X(\sigma)$  basta definir  $\Omega_n : \text{sd}_n^{\Delta^n}(\text{Id}_{\Delta^n})$  porque:

$$\text{sd}_n^X(\sigma) = \text{sd}_n^{\Delta^n}(\sigma_\#(\text{Id}_{\Delta^n})) = \sigma_\#(\text{sd}_n^{\Delta^n}(\text{Id}_{\Delta^n})) = \sigma_\#(\Omega_n)$$

Como  $\Omega_n$  es hacer la subdivisión baricéntrica normal de  $\Delta^n$ , entonces es simplemente agregar el baricentro  $\mathbf{b}_n := \mathbf{b}(\Delta^n)$  como vértice a la frontera de  $\Delta^n$ , o más precisamente, a la frontera de la imagen de  $\text{Id}_{\Delta^n}$ . Es decir, queremos definir  $\Omega_n = \mathbf{b}_n \cdot \text{sd}_{n-1}^{\Delta^n}(\partial_n(\text{Id}_{\Delta^n}))$ .

Podemos definir  $\Omega_n$  directamente por inducción para forzar las propiedades que queremos que tenga  $\text{sd}_n^X$ . Para  $n = 0$ , tenemos que  $\Omega_0 \in S_0(X)$  entonces necesariamente  $\Omega_0 = \text{Id}_{\Delta^0}$  porque está es la única función  $\Delta^0 \rightarrow \Delta^0$  que existe. En general tenemos:

$$\begin{aligned} \text{sd}_{n-1}^{\Delta^n}(\partial_n(\text{Id}_{\Delta^n})) &= \text{sd}_{n-1}^{\Delta^n} \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i F_n^i \right) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (F_n^i)_\# \underbrace{\left( \text{sd}_{n-1}^{\Delta^{n-1}}(\text{Id}_{\Delta^{n-1}}) \right)}_{\Omega_{n-1}} \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i (F_n^i)_\#(\Omega_{n-1}) \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos definir

$$\Omega_n := \mathbf{b}_n \cdot \underbrace{\left( \sum_{i=0}^n (-1)^i (F_n^i)_\#(\Omega_{n-1}) \right)}_{\mathfrak{z}_{n-1}}$$

Esta definición cumple una propiedad importante (casi idéntico al lema 49):

**Lema 52.**  $\partial_n(\Omega_n) = \mathfrak{z}_{n-1}$  para  $n > 0$ .

*Proof.* Claramente  $\partial_0(\Omega_0) = 0$  y también

$$\partial_1(\Omega_1) = \partial_1 \left( \mathbf{b}_1 \cdot (F_1^0)_\#(\Omega_0) - \mathbf{b}_1 \cdot (F_1^0)_\#(\Omega_0) \right) = \partial_1(\mathbf{b}_1 \cdot e_1 - \mathbf{b}_1 \cdot e_0) = e_1 - e_0 = \sum_{i=0}^1 (-1)^i (F_1^i)_\#(\Omega_0) = \mathfrak{z}_1.$$

Ahora por inducción, supongamos que  $\partial_n(\Omega_n) = \mathfrak{z}_{n-1}$ . Observa que  $\partial_{n-1}(\mathfrak{z}_{n-1}) = \partial_{n-1}(\partial_n(\Omega_n)) = 0$ ,

entonces:

$$\begin{aligned}
\partial_n(\mathfrak{z}_n) &= \partial_n \left( \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (F_{n+1}^i)_\# (\mathcal{Q}_n) \right) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (F_{n+1}^i)_\# (\partial_n(\mathcal{Q}_n)) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (F_{n+1}^i)_\# (\mathfrak{z}_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (F_{n+1}^i)_\# \left( \sum_{j=0}^n (-1)^j (F_n^j)_\# (\mathcal{Q}_{n-1}) \right) \\
&= \sum_i \sum_j (-1)^{i+j} (F_{n+1}^i \circ F_n^j)_\# (\mathcal{Q}_{n-1}) = 0
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se cumple por el ejercicio 60 (cf. el lema 49). Ahora, con el lema 48, podemos concluir que:

$$\partial_{n+1}(\mathcal{Q}_{n+1}) = \partial_{n+1}(\mathfrak{b}_{n+1} \cdot \mathfrak{z}_n) = \mathfrak{z}_n - \mathfrak{b}_{n+1} \cdot \cancel{\partial_n(\mathfrak{z}_n)}^0 = \mathfrak{z}_n.$$

□

Con esto ya podemos definir la subdivisión baricéntrica a nivel de complejos de cadena:

**Definición 85.** La subdivisión baricéntrica  $\text{sd}_\bullet^X : S_\bullet(X) \rightarrow S_\bullet^X$  de complejos de cadena se define como

$$\text{sd}_n^X : S_n(X) \longrightarrow S_n(X) \quad \text{con} \quad \sigma \mapsto \sigma_\#(\mathcal{Q}_n).$$

**Ejercicio 68.**  $\text{sd}_n^-$  es una transformación natural del funtor  $S_n(-) : \mathbf{Top} \rightarrow {}_R\mathbf{Mod}$  en si mismo.

*Proof.* Hay que probar que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
S_n(X) & \xrightarrow{\text{sd}_n^X} & S_n(X) \\
\downarrow f_\# & & \downarrow f_\# \\
S_n(Y) & \xrightarrow{\text{sd}_n^Y} & S_n(Y)
\end{array}$$

comutata para cualesquiera dos espacios  $X$  y  $Y$ , y cualquier función continua  $f : X \rightarrow Y$  entre ellos.

Sea  $\tau = \sum_\sigma r_\sigma \sigma \in S_n(X)$ , entonces:

$$\begin{aligned}
f_\#(\text{sd}_n^X(\tau)) &= f_\# \left( \text{sd}_n^X \left( \sum r_\sigma \sigma \right) \right) = f_\# \left( \sum r_\sigma \text{sd}_n^X(\sigma) \right) = \sum r_\sigma f_\#(\sigma_\#(\text{sd}_n^{\Delta^n}(\text{Id}_{\Delta^n}))) \\
&= \sum r_\sigma (f \circ \sigma)_\#(\text{sd}_n^{\Delta^n}(\text{Id}_{\Delta^n})).
\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\text{sd}_n^Y(f_\#(\tau)) &= \text{sd}_n^Y \left( f_\# \left( \sum r_\sigma \sigma \right) \right) = \text{sd}_n^Y \left( \sum r_\sigma f_\#(\sigma) \right) = \sum r_\sigma \text{sd}_n^Y(f \circ \sigma) \\
&= \sum r_\sigma (f \circ \sigma)_\#(\text{sd}_n^{\Delta^n}(\text{Id}_{\Delta^n})).
\end{aligned}$$

y así  $f_\#(\text{sd}_n^X(\tau)) = \text{sd}_n^Y(f_\#(\tau))$  para toda  $\tau$ . Por lo tanto,  $\text{sd}_n^- : S_n(-) \rightarrow S_n(-)$  es una transformación natural. □

**Lema 53.**  $\text{sd}_\bullet^X : S_\bullet(X) \rightarrow S_\bullet(X)$  es un morfismo de complejos de cadenas y  $\text{sd}_\bullet^X \simeq \text{Id}_{S_\bullet(X)}$

*Proof.* Primero probamos que es un morfismo de complejos de cadenas, es decir que para toda  $n$  el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
S_n(X) & \xrightarrow{\partial_n} & S_{n-1}(X) \\
\mathcal{D}_n := & \downarrow \text{sd}_n^X & \downarrow \text{sd}_{n-1}^X \\
S_n(X) & \xrightarrow{\partial_n} & S_{n-1}(X)
\end{array}$$

es commutativo; esto lo hacemos por inducción. El caso  $n = 0$  es trivial porque  $\partial_0 = 0$ . Para el caso general, sea  $\sigma \in S_n(X)$ , entonces

$$\partial_n(\text{sd}_n^X(\sigma)) = \partial_n(\sigma_{\#}(\Omega_n)) = \partial_n(\sigma_{\#}(\mathbf{b}_n \cdot \text{sd}_{n-1}^{\Delta^n}(\partial_n(\text{Id}_{\Delta^n})))) = \sigma_{\#}\left(\partial_n(\mathbf{b}_n \cdot \text{sd}_{n-1}^{\Delta^n}(\partial_n(\text{Id}_{\Delta^n}))))\right)$$

que por el lema 48 se hace:

$$\begin{aligned} \partial_n(\text{sd}_n^X(\sigma)) &= \sigma_{\#}(\text{sd}_{n-1}^{\Delta^n}(\partial_n(\text{Id}_{\Delta^n}))) - \mathbf{b}_n \cdot \partial_{n-1} \text{sd}_{n-1}^{\Delta^n}(\partial_n(\text{Id}_{\Delta^n})) \\ &= \sigma_{\#}(\text{sd}_{n-1}^{\Delta^n}(\partial_n(\text{Id}_{\Delta^n}))) - \mathbf{b}_n \cdot \text{sd}_{n-1}^{\Delta^n}(\partial_{n-1} \partial_n(\text{Id}_{\Delta^n}))^0 \\ &= \sigma_{\#}(\text{sd}_{n-1}^{\Delta^n}(\partial_n(\text{Id}_{\Delta^n}))). \end{aligned}$$

donde el intercambio de orden de  $\partial_{n-1}$  y  $\text{sd}_{n-1}^{\Delta^n}$  se vale por la hipótesis de inducción.

Como  $\text{sd}_{\bullet}^X$  es una transformación natural (ejercicio 68), entonces podemos intercambiar  $\sigma_{\#}$  con  $\text{sd}_{n-1}^{\Delta^n}$  para concluir:

$$\partial_n(\text{sd}_n^X(\sigma)) = \text{sd}_{n-1}^X(\sigma_{\#}(\partial_n(\text{Id}_{\Delta^n}))) = \text{sd}_{n-1}^X(\partial_n(\sigma_{\#}(\text{Id}_{\delta^n}))) = \text{sd}_{n-1}^X(\partial_n(\sigma))$$

y el diagrama  $\mathcal{D}_n$  es commutativo.

En lo que sigue omitiré muchos detalles porque son exactamente los mismos detalles, y pasos, que usamos en la prueba de la invariancia homotópica: simplemente hay que cambiar  $\lambda_{\#}^1$  por  $\text{sd}_{\bullet}^X$  y  $\lambda_{\#}^0$  por  $\mathcal{I} := \text{Id}_{S_{\bullet}(X)}$ . Incluso usaré la misma notación.

Ahora necesitamos una familia de morfismos  $\mathfrak{T} = \{T_n^X : S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(X)\}$  que sea la homotopía entre  $\text{sd}_{\bullet}^X$  y  $\mathcal{I}$ , es decir que  $\partial_{n+1}T_n^X + T_{n+1}^X\partial_n = \text{sd}_n^X - \mathcal{I}$ . Como queremos que  $T_n^X$  sea una transformación natural entre los funtores  $S_n(-)$  y  $S_{n+1}(-)$ , entonces basta definir:

$$T_n^X(\sigma) := \sigma_{\#}\left(\underbrace{T_n^{\Delta^n}(\text{Id}_{\Delta^n})}_{\mathcal{T}_n}\right) = \sigma_{\#}(\mathcal{T}_n)$$

donde las  $\mathcal{T}_n$  cumplen

$$\partial_{n+1}(\mathcal{T}_n) + \sum_{i=0}^n (-1)^i (F_n^i)_{\#}(\mathcal{T}_{n-1}) = \Omega_n - \text{Id}_{\Delta^0} \quad (2.19)$$

porque están definidas recursivamente como

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_0 &= \text{Id}_{\Delta^0} \\ \mathcal{T}_n &= \mathbf{b}_n \cdot \left( \Omega_n - \text{Id}_{\Delta^n} - \underbrace{\sum_{i=0}^n (-1)^i (F_n^i)_{\#}(\Omega_{n-1})}_{\mathfrak{z}_n} \right). \end{aligned}$$

que cumplen que  $\partial_{n+1}(\mathcal{T}_n) = \mathfrak{z}_n$ .

Gracias a esta propiedad la ecuación (2.19) se cumple y así  $\mathfrak{T}$  es una homotopía  $\text{sd}_{\bullet}^X \sim \mathcal{I}$ .  $\square$

Este lema es valioso, básicamente nos dice que podemos iterar la subdivisión baricéntrica sobre un complejo de cadenas sin alterar las homomologías, en efecto: si  $\text{sd}_{\bullet}^X \simeq \text{Id}$  entonces  $H_n(\text{sd}_{\bullet}^X) = H_n(\text{Id}) = \text{Id}$ . Esto sugiere una manera de construir una función  $S_{\bullet}(X) \rightarrow S_{\bullet}^{\mathfrak{U}}$  que sea el inverso homotópico de la inclusión  $\iota : S_{\bullet}^{\mathfrak{U}}(X) \rightarrow S_{\bullet}(X)$ : simplemente sigue subdividiendo una  $n$ -cadena hasta que todas sus caras sean suficientemente pequeñas para que lo que quede sea un elemento de  $S_n^{\mathfrak{U}}(X)$ .

Para formalizar esta noción de hacerse más pequeño, definimos:

**Definición 86.** Sea  $A$  un subespacio de un espacio métrico  $(X, d)$ . El *diámetro* de  $A$  se define como

$$\text{diam}(A) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

Además, si  $X$  es compacto y  $\mathfrak{U} := \{U_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$  es una cubierta abierta de  $X$ , existe una  $\varepsilon > 0$  tal que si  $\text{diam}(A) < \varepsilon$ , entonces  $A \subseteq U_{\lambda}$  para alguna  $\lambda \in \Lambda$ ; a esta  $\varepsilon$  se le llama el *número de Lebesgue* de  $\mathfrak{U}$ .

Si  $\sigma : \Delta^n \rightarrow \mathbb{R}^N$  es un simplejo afín, entonces su subdivisión baricéntrica contiene subsimplejos de diámetro menor o igual a  $(\frac{n}{n+1})\text{diam}(\sigma[\Delta^n])$ . Por lo tanto si subdividimos  $r$  veces el diámetro de sus subsimplejos es menor o igual a  $(\frac{n}{n+1})^r\text{diam}(\sigma[\Delta^n])$ .

Esto nos permite demostrar rigurosamente nuestra intuición de que existen una cantidad finita de pasos de subdivisión baricéntrica que meten a un simplejo a  $S_n^{\mathfrak{U}}(X)$ .

**Lema 54.** *Sea  $\mathfrak{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  una familia de subespacios de  $X$  tales que  $X = \cup \mathring{U}_\lambda$ , entonces*

$$\forall \sigma \in S_n(X) \quad \exists r \geq 0 \text{ tal que } (\text{sd}_n^X)^r(\Delta^n) \in S_n^{\mathfrak{U}}(X).$$

*Proof.* Observa que la cubierta abierta  $\{\mathring{U}_\lambda\}_\lambda$  induce la cubierta abierta  $\sigma^{-1}(\mathfrak{U}) = \{\sigma^{-1}[\mathring{U}_\lambda]\}$  de  $\Delta^n$ . Como éste es compacto, la cubierta  $\sigma^{-1}(\mathfrak{U})$  tiene un número de Lebesgue  $\varepsilon > 0$ , como  $(\frac{n}{n+1})^r \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$ , y  $\text{diam}(\Delta^n)$  es constante, entonces existe una  $r$  suficientemente grande tal que

$$\text{diam}((\text{sd}_n^{\mathbb{R}^N})^r(\Delta^n)) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^r \text{diam}(\sigma[\Delta^n]) < \varepsilon.$$

Esto quiere decir que los subcomplejos de  $(\text{sd}_n^{\mathbb{R}^N})^r(\Delta^n)$  tienen diámetro menor que  $\varepsilon$ .

Por lo tanto si  $\tau$  es un subsimplejo de  $(\text{sd}_n^X)^r(\sigma) = \sigma_{\#}(\text{sd}_n^{\mathbb{R}^N})^r(\Delta^n)$ , entonces  $\tau = \sigma \circ \tau'$  donde  $\tau'$  es un subsimplejo de  $(\text{sd}_n^{\mathbb{R}^N})^r(\Delta^n)$ , es decir que  $\text{diam}(\text{Im}(\tau')) < \varepsilon$  que implica que para todo sub simplejo  $\tau$  hay un  $U_\lambda$  tal que

$$\tau'[\Delta^n] \subseteq \sigma^{-1}[\mathring{U}_\lambda] \implies (\sigma \circ \tau')[\Delta^n] = \tau[\Delta^n] \subseteq \mathring{U}_\lambda \subset U_\lambda \implies (\text{sd}_n^X)^r(\sigma) \in S_n^{\mathfrak{U}}(X).$$

□

Este lema sugiere definir el mínimo número de subdivisiones necesarias para que un simplejo sea elemento de  $S_n^{\mathfrak{U}}(X)$ :

$$\mathfrak{r} : S_n(X) \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{con} \quad \sigma \mapsto \min \left\{ r \in \mathbb{N} \mid (\text{sd}_n^X)^r(\sigma) \in S_n^{\mathfrak{U}}(X) \right\}$$

Lo ideal sería definir  $\sigma \mapsto (\text{sd}_n^X)^{\mathfrak{r}(\sigma)}(\sigma)$  como el morfismo de cadenas  $S_{\bullet}(X) \rightarrow S_{\bullet}^{\mathfrak{U}}(X)$  que buscamos, pero no se puede hacer tan directamente:

**Ejercicio 69.** La función  $t_{\bullet} : S_{\bullet}(X) \rightarrow S_{\bullet}^{\mathfrak{U}}(X)$  definido por

$$t_n : S_n(X) \longrightarrow S_n^{\mathfrak{U}}(X) \quad \text{con} \quad \sigma \mapsto (\text{sd}_n^X)^{\mathfrak{r}(\sigma)}(\sigma)$$

no es una morfismo de complejos de cadena.

*Proof.* Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua arbitraria. Si  $t_{\bullet}$  fuese un morfismo de complejos de cadena, entonces tendríamos que

Esto se puede arreglar. Consideramos la homotopía  $\mathfrak{T} = \{T_n^X : S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(X)\}$  de la prueba del lema 53 y definimos:

$$R_n : S_n(X) \rightarrow S_n(X) \quad \text{con} \quad R_n(\sigma) := \sum_{i=0}^{\mathfrak{r}(\sigma)-1} T_n^X((\text{sd}_n^X)^i(\sigma)).$$

Observa que

$$R_{n-1}(\partial_n(\sigma)) = R_{n-1} \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma^{(i)} \right) = \sum_{i=0}^n (-1)^i R_{n-1}(\sigma^{(i)}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{j=0}^{\mathfrak{r}(\sigma^{(i)})-1} T_{n-1}^X((\text{sd}_{n-1}^X)^j(\sigma^{(i)})).$$

Por otro lado:

$$\partial_{n+1}(R_n(\sigma)) = \sum_{i=0}^{\mathfrak{r}(\sigma)-1} (\partial_{n+1} T_n^X)((\text{sd}_n^X)^i(\sigma)).$$

Recuerda que los morfismos  $T_n^X$  cumplen  $\partial_{n+1}T_n^X + T_{n-1}^X\partial_n = \text{sd}_n^X - \text{Id}$ , o equivalentemente  $\partial_{n+1}T_n^X = \text{sd}_n^X - \text{Id} - T_{n-1}^X\partial_n$ . Si sustituimos esto en la fórmula anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned}\partial_{n+1}(R_n(\sigma)) &= \sum_{i=0}^{\tau(\sigma)-1} (\text{sd}_n^X - \text{Id} - T_{n-1}^X\partial_n)((\text{sd}_n^X)^i(\sigma)) \\ &= \sum_{i=1}^{\tau(\sigma)} (\text{sd}_n^X)^i(\sigma) - \sum_{i=0}^{\tau(\sigma)-1} (\text{sd}_n^X)^i(\sigma) - \sum_{i=0}^{\tau(\sigma)-1} T_{n-1}^X(\partial_n(\text{sd}_n^X)^i)(\sigma) \\ &= (\text{sd}_n^X)^{\tau(\sigma)}(\sigma) - \sigma - \sum_{i=0}^{\tau(\sigma)-1} T_{n-1}^X(\partial_n(\text{sd}_n^X)^i)(\sigma)\end{aligned}$$

donde la última suma es:

$$\sum_{i=0}^{\tau(\sigma)-1} T_{n-1}^X(\partial_n(\text{sd}_n^X)^i)(\sigma) = \sum_{i=0}^{\tau(\sigma)-1} T_{n-1}^X((\text{sd}_{n-1}^X)^i\partial_n)(\sigma) = \sum_{i=0}^{\tau(\sigma)-1} \sum_{j=0}^n (-1)^j T_{n-1}^X((\text{sd}_{n-1}^X)^i(\sigma^{(i)}))$$

porque  $\text{sd}_n^X$  commuta con  $\partial_n$ .

Por lo tanto:

$$(\partial_{n+1}R_n + R_{n-1}\partial_n)(\sigma) = \sigma - \underbrace{\left[ (\text{sd}_n^X)^{\tau(\sigma)}(\sigma) + \sum_{j=0}^n (-1)^j \sum_{i=\tau(\sigma^{(i)})}^{\tau(\sigma)} T_{n-1}^X((\text{sd}_{n-1}^X)^i(\sigma^{(i)})) \right]}_{t_n(\sigma)}. \quad (2.20)$$

Entonces si redefinimos  $t_\bullet$  como lo que está en corchetes, tendremos que  $\text{Id} \simeq t_\bullet$  mediante la familia  $\{R_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  de morfismos. Entonces si definimos:

$$t_n : S_n(X) \rightarrow S_n(X) \quad \text{con} \quad t_n(\sigma) = \sigma - (\partial_{n+1}R_n + R_{n-1}\partial_n)(\sigma)$$

estamos en posición para probar el teorema de escisión general:

*Proof.* (teorema 51) Observa que  $t_\bullet = (t_n)$  es un morfismo de complejos de cadena porque

$$(\partial_n t_n)(\sigma) = \partial_n(\sigma - (\partial_{n+1}R_n + R_{n-1}\partial_n)(\sigma)) = \partial_n(\sigma) + \partial_n R_{n-1} \partial_n(\sigma),$$

y porque

$$t_{n-1}\partial_n(\sigma) = \partial_n(\sigma) + \partial_n R_{n-1} \partial_n(\sigma) + \overbrace{R_{n-2} \partial_{n-1} \partial_n(\sigma)}^0.$$

Ahora, si  $\text{Im}(t_\bullet) \subset S_n^\mathfrak{U}$ , entonces  $t_\bullet$  se factoriza a través de la inclusión  $S_\bullet^\mathfrak{U}(X) \hookrightarrow S_\bullet(X)$ . Por lo tanto  $\text{Id} \simeq t_\bullet = \iota \circ t_\bullet$ . Para ver la expresión inversa, sabemos que

$$\sigma \in S_{n-1}^\mathfrak{U}(X) \implies \tau(\sigma) = 0 \implies R_n(\sigma) = 0$$

porque la suma que define  $R_n(\sigma)$  es vacía. Una consecuencia directa de esto es que

$$\sigma \in S_n^\mathfrak{U}(X) \implies \partial_n(\sigma) \in S_{n-1}^\mathfrak{U}(X) \implies R_{n-1}(\partial_n(\sigma)) = 0$$

Por lo tanto

$$t_n(\sigma) = \sigma + \partial_{n+1}R_n(\sigma) + R_{n-1}\partial_n(\sigma) = \sigma \implies \text{Id} = t_\bullet \circ \iota = t_\bullet|_{S_n^\mathfrak{U}} \implies \text{Id} \sim \iota \circ t_\bullet.$$

y podemos concluir que  $\text{Id} \simeq \iota \circ t_\bullet$ . Esto quiere decir que  $\iota$  es una equivalencia homotópica y por el ejercicio 67  $H_n(\iota)$  es un isomorfismo.

En este último párrafo probamos que si  $\text{Im}(t_\bullet) \subseteq S_n^\mathfrak{U}(X)$  entonces  $H_n(\iota)$  es un isomorfismo como queremos. El primer término de la definición de  $t_n(\sigma)$  claramente cumple  $(\text{sd}_n^X)^{\tau(\sigma)}(\sigma) \in S_n^\mathfrak{U}(X)$ . El segundo término es una suma de elementos de la forma  $(\text{sd}_{n-1}^X)^j(\sigma^{(i)})$  donde  $\tau(\sigma^{(i)}) \leq j$ , ie.  $(\text{sd}_{n-1}^X)^j(\sigma^{(i)})$ . Ahora sea  $\sigma \in S_n^\mathfrak{U}(X)$  arbitrario, entonces por definición  $T_n^X(\sigma) = \sigma \#(\mathcal{T}_n)$  pero como  $\text{Im}(\sigma) \subseteq U_\lambda$  entonces  $\text{Im}(\sigma \#(\mathcal{T}_n)) \subseteq U_\lambda$  y así  $T_n^X(\sigma) \in S_n^\mathfrak{U}(X)$ . Si juntamos los dos enunciados concluimos que  $t_n(\sigma)$  es una suma de elementos de  $S_n^\mathfrak{U}(X)$ . Deducimos que  $t_n(\sigma) \in S_n^\mathfrak{U}(X)$  para toda  $\sigma \in S_n(X)$  y acabamos.  $\square$

Por último vamos a probar el caso particular del teorema de escisión:

*Proof.* (teorema 50) Definimos  $\mathfrak{U} := \{X - U, A\}$  como la cubierta. Esta elección es válida porque  $\bar{U} \subset \dot{A}$  implica que  $X = (X - \bar{U}) \cup \dot{A} = (X - U) \cup \dot{A}$ .

La inclusión  $j : (X - U, A - U) \hookrightarrow (X, A)$  induce un morfismo  $j_{\#} : S_{\bullet}(X - U) \rightarrow S_{\bullet}(X)$  que cumple que

$$j_{\#}[S_{\bullet}(A - U)] \subseteq S_{\bullet}(A).$$

Por lo tanto  $j_{\#}$  pasa al cociente:

$$\overline{j_{\#}} : \frac{S_{\bullet}(X - U)}{S_{\bullet}(A - U)} \longrightarrow \frac{S_{\bullet}(X)}{S_{\bullet}(A)}.$$

Hay que probar que  $\overline{j_{\#}}$  es un isomorfismo.

Observa que

$$S_n^{\mathfrak{U}}(X) = S_n(X - U) + S_n(A) \subset S_n(X) \quad \text{y} \quad S_n(X - U) \cap S_n(A) = S_n((X - U) \cap A) = S_n(A - U).$$

El segundo teorema de isomorfismo dice que la inclusión  $i : S_{\bullet}(X - U) \hookrightarrow S_{\bullet}(X - U) + S_{\bullet}(A) = S_n^{\mathfrak{U}}(X)$  induce un isomorfismo:

$$\overline{i} : \frac{S_{\bullet}(X - U)}{S_{\bullet}(A - U)} \xrightarrow{\cong} \frac{S_{\bullet}^{\mathfrak{U}}(X)}{S_{\bullet}(A)}.$$

Por otro lado, la inclusión  $\iota : S_{\bullet}^{\mathfrak{U}}(X) \rightarrow S_{\bullet}(X)$  induce un morfismo:

$$\overline{\iota} : \frac{S_{\bullet}^{\mathfrak{U}}(X)}{S_{\bullet}(A)} \longrightarrow \frac{S_n(X)}{S_n(A)}$$

porque  $\iota[S_{\bullet}(A)] \subseteq S_{\bullet}(A)$ . Observa que

$$\begin{array}{ccc} \frac{S_{\bullet}(X-U)}{S_{\bullet}(A-U)} & \xrightarrow{\overline{j_{\#}}} & \frac{S_{\bullet}(X)}{S_{\bullet}(A)} \\ \searrow \overline{i} & & \nearrow \overline{i} \\ & \frac{S_{\bullet}^{\mathfrak{U}}(X)}{S_{\bullet}(A)} & \end{array} \quad \overline{j_{\#}} = \overline{i} \circ \overline{\iota}$$

es un diagrama comutativo porque  $j_{\#} = \iota \circ i$ . Tomando homologías, obtenemos:

$$\begin{array}{ccc} H_n(X - U, A - U) & \xrightarrow{H_n(\overline{j_{\#}})} & H_n(X, A) \\ \searrow H_n(\overline{i}) & & \nearrow H_n(\overline{\iota}) \\ & H_n\left(\frac{S_{\bullet}^{\mathfrak{U}}(X)}{S_{\bullet}(A)}\right) & \end{array}$$

Como  $\overline{i}$  es un isomorfismo de complejos de cadena, entonces  $H_n(\overline{i})$  es un isomorfismo. Por lo tanto si probamos que  $H_n(\overline{i})$  es un isomorfismo podríamos concluir que  $H_n(\overline{j_{\#}})$  es un isomorfismo y acabaríamos.

Resulta que  $\overline{i}$  es una equivalencia homotópica de complejos de cadena con inverso  $\overline{t}_{\bullet}$ , el inducido por  $t_{\bullet} : S_{\bullet}(X) \rightarrow S_{\bullet}^{\mathfrak{U}}(X)$ . Si este es el caso, entonces  $H_n(\overline{i})$  es un isomorfismo y acabamos. Por lo tanto redujimos el problema a:

**Ejercicio 70.** El morfismo  $t_{\bullet} : S_{\bullet}(X) \rightarrow S_{\bullet}^{\mathfrak{U}}(X)$  pasa al cociente:

$$\overline{t}_{\bullet} : \frac{S_{\bullet}(X)}{S_{\bullet}(A)} \longrightarrow \frac{S_{\bullet}^{\mathfrak{U}}(X)}{S_{\bullet}(A)}$$

y es una equivalencia homotópica de complejos de cadena, más precisamente  $\overline{i} \circ \overline{t}_{\bullet} \simeq \text{Id} \simeq \overline{t}_{\bullet} \circ \overline{i}$ .

*Proof.* Como  $t_\bullet|_{S_\bullet^U(X)} = \text{Id}$  y  $S_\bullet(A) \subseteq S_\bullet(X - U) + S_\bullet = S_\bullet^U(X)$ , entonces

$$t_\bullet[S_\bullet(A)] = S_\bullet(A)$$

y así  $t_\bullet$  pasa al cociente, es decir existe un único  $\bar{t}_\bullet$  tal que:

$$\begin{array}{ccccc} S_\bullet(X) & \xrightarrow{t_\bullet} & S_\bullet^U(X) & \twoheadrightarrow & \frac{S_\bullet^U(X)}{S_\bullet(A)} \\ \downarrow & & \searrow \bar{t}_\bullet & & \\ \frac{S_\bullet(X)}{S_\bullet(A)} & & & & \end{array}$$

Como

$$t_\bullet|_{S_\bullet^U(X)} = \text{Id} \implies \iota \circ t_\bullet = \text{Id} \implies \bar{\iota} \circ \bar{t}_\bullet = \text{Id}$$

y así tenemos trivialmente que  $\text{Id} \simeq \bar{\iota} \circ \bar{t}_\bullet$ . Para probar el inverso, hay que dar una homotopía de complejos de cadena entre  $\bar{t}_\bullet$  y  $\bar{\iota}$ ; esta homotopía va a ser la inducida por  $\mathfrak{R} = \{\bar{R}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  donde  $\mathfrak{R} = \{R_n\}$  es la homotopía  $t_\bullet \simeq \text{Id}$ .

De hecho, si probamos que las  $R_n : S_n(X) \rightarrow S_n(X)$  pasan al cociente entonces:

$$\begin{aligned} (\overline{R_{n-1}}\partial_n + \partial_{n+1}\overline{R_n})[\sigma] &= \overline{R_{n-1}}[\partial_n(\sigma)] + \partial_{n+1}[R_n(\sigma)] = [R_{n-1}(\partial_n(\sigma))] + [\partial_{n+1}R_n(\sigma)] \\ &= [\sigma - t_n(\sigma)] = [\sigma] - [t_n(\sigma)] = \text{Id}(\sigma) - \overline{t_n}(\sigma) \\ \therefore \text{Id} &\simeq \text{Id} \circ \bar{t}_\bullet \end{aligned}$$

porque  $t_n(\sigma) = \sigma + \partial_{n+1}R_n(\sigma) + R_{n-1}\partial_n(\sigma)$  por definición. □

□

Decimos que la inclusión  $\iota$  (o  $\bar{\iota}$ ) es un *retracto por deformación*, es decir: existe un morfismo  $r$  (que en este caso es  $r = t_\bullet$ ) tal que  $\iota \circ r = \text{Id}$  y  $r \circ \iota \simeq \text{Id}$ .

# Categorías

Para probar el teorema de la invariancia homotópica de la homología singular fue la existencia del diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} S_n(X) & \xrightarrow{T_n^X} & S_{n+1}(X \times I) \\ f_\# \downarrow & & \downarrow (f \times \text{Id}_I)_\# \\ S_n(Y) & \xrightarrow[T_n^Y]{} & S_{n+1}(Y \times I) \end{array}$$

Para probar el teorema de esición nos apoyamos en la sucesión exacta larga de la homología relativa junto con el diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_n(A) & \xrightarrow{H_n(i)} & H_n(X) & \xrightarrow{H_n(j)} & H_n(X, A) & \xrightarrow{d_n} & H_{n-1}(A) & \xrightarrow{H_{n-1}(i)} & H_{n-1}(X) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow H_n(f|_A) & & \downarrow H_n(f) & & \downarrow H_n(f) & & \downarrow H_{n-1}(f|_A) & & \downarrow H_{n-1}(f) & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_n(B) & \xrightarrow[H_n(i')]{} & H_n(X) & \xrightarrow[H_n(j')]{} & H_n(Y, B) & \xrightarrow{d'_n} & H_{n-1}(B) & \xrightarrow[H_{n-1}(i')]{} & H_{n-1}(Y) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Estas consideraciones llevaron a Eilenberg y a Maclane a crear la teoría de categorías.

**Definición 87.** Una *categoría*  $\mathcal{C}$  consiste de tres cosas:

1. Una clase  $\text{obj}(\mathcal{C})$  de objetos.
2. Para cada dos objetos  $A, B \in \text{obj}(\mathcal{C})$ , existe un conjunto  $\text{Hom}(A, B)$  cuyos elementos se llaman morfismos y se denotan  $f : A \rightarrow B$  o  $A \xrightarrow{f} B$ .
3. Para cada terna  $A, B, C \in \text{obj}(\mathcal{C})$  existe una función

$$\circ : \text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(B, C) \longrightarrow \text{Hom}(A, C) \quad \text{definido por} \quad (f, g) \mapsto g \circ f,$$

llamado *composición* que cumple las siguientes dos propiedades:

- (a)  $\circ$  es asociativa, es decir  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ .
- (b) Para todo objeto  $A \in \text{obj}(\mathcal{C})$  existe un morfismo  $\text{Id}_A \in \text{Hom}(A, A)$  tal que para todo objeto  $B \in \text{obj}(\mathcal{C})$ , y cualesquiera  $f \in \text{Hom}(A, B)$  y  $g \in \text{Hom}(B, A)$ , se cumple

$$f \circ \text{Id}_A = f \quad \text{y} \quad \text{Id}_A \circ g = g$$

*Nota.* Usualmente omitimos la notación  $\circ$  para simplemente escribir  $gf$  en lugar de  $g \circ f$ . También pedimos que, si  $A \neq C$  o  $B \neq D$  entonces  $\text{Hom}(A, B) \cap \text{Hom}(C, D) = \emptyset$ . Es decir los morfismos están determinados, en parte, por su dominio y su contradominio.

Las matemáticas están llenas de categorías:

**Ejemplo 20.**

1. **Top:**  $\text{obj}(\text{Top}) = \{\text{espacios topológicos}\}$ ,  $\text{Hom}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ es continua}\}$ .

2.  $\mathbf{Top}_*$ :  $\text{obj}(\mathbf{Top}_*) = \{(X, x) \mid X \in \text{obj}(\mathbf{Top}), x \in X\}$ ,  $\text{Hom}((X, x), (Y, y)) = \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ es continua y } f(x) = y\}$ .
3.  $\mathbf{Top}_2$ :  $\text{obj}(\mathbf{Top}_2) = \{(X, A) \mid X, A \in \text{obj}(\mathbf{Top}), A \subseteq X\}$ ,  $\text{Hom}((X, A), (Y, B)) = \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ es continua y } f[A] \subseteq B\}$ .
4.  $\mathbf{Var}$ :  $\text{obj}(\mathbf{Var}) = \{\text{variedades suaves}\}$ ,  $\text{Hom}(M, N) = \{f : M \rightarrow N \mid f \text{ es suave}\}$ .
5.  $h\mathbf{Top}$ :  $\text{obj}(h\mathbf{Top}) = \text{obj}(\mathbf{Top})$ ,  $\text{Hom}(X, Y) = [X, Y]$  donde la composición está definida por  $[g][f] = [g \circ f]$  (cf. definición 7).
6.  $\mathbf{Grupos}$ :  $\text{obj}(\mathbf{Grupos}) = \{\text{grupos}\}$ ,  $\text{Hom}(G, H) = \{f : G \rightarrow H \mid f \text{ es un homomorfismo de grupos}\}$ .
7.  $\mathbf{Ab}$ :  $\text{obj}(\mathbf{Ab}) = \{\text{grupos abelianos}\}$ ,  $\text{Hom}(G, H) = \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ es homomorfismo de grupos}\}$ .
8.  $R\mathbf{Mod}$ :  $\text{obj}(R\mathbf{Mod}) = \{R\text{-módulos izquierdos}\}$ ,  $\text{Hom}(M, N) = \{f : M \rightarrow N \mid f \text{ es un morfismo de } R\text{-módulos}\}$ .
9.  $\mathbf{CompSimp}$ :  $\text{obj}(\mathbf{CompSimp}) = \{\text{complejos simpliciales}\}$ ,  $\text{Hom}(K, L) = \{f : K \rightarrow L \mid f \text{ es un mapeo simplicial}\}$ .
10.  $\mathbf{Comp}(\mathcal{A})$ :  $\text{obj}(\mathbf{Comp}(\mathcal{A})) = \{\text{complejos de cadena en la categoría } \mathcal{A}\}$ ,  $\text{Hom}(\mathcal{C}_\bullet, \mathcal{C}'_\bullet) = \{f_\bullet : \mathcal{C}_\bullet \rightarrow \mathcal{C}'_\bullet \mid f_\bullet \text{ es un morfismo de complejos de cadena}\}$ .
11.  $\mathbf{Cov}(X)$ :  $\text{obj}(\mathbf{Cov}(X)) = \{\text{cubrientes sobre } X\}$ ,  $\text{Hom}((E, p, X), (E', p', X)) = \{f : E \rightarrow E' \mid f \text{ es continua y } f \circ p' = p\}$ .
12. Si  $(X, \leq)$  es un conjunto parcialmente ordenado, entonces tiene naturalmente la estructura de una categoría: define  $\text{obj}((X, \leq)) = X$  y

$$\text{Hom}(x, x') = \begin{cases} i_{x'}^x & \text{si } x \leq x' \\ \emptyset & \text{si } x \not\leq x'. \end{cases}$$

13. Todo grupo  $G$  se puede realizar como una categoría: define  $\text{obj}(G) = \{\bullet\}$  y  $\text{Hom}(\bullet, \bullet) = G$  donde la composición está dada por la multiplicación del grupo, ie.  $g \circ g' = gg'$ .

**Definición 88.** Una categoría  $\mathcal{C}$  es *pequeña* si  $\text{obj}(\mathcal{C})$  es un conjunto.

Una definición que siempre hemos usado es la de isomorfismo:

**Definición 89.** Sea  $\mathcal{A}$  una categoría y  $A, B \in \text{obj}(\mathcal{A})$ . Un morfismo  $f \in \text{Hom}(A, B)$  es un *isomorfismo* si existe un morfismo  $g \in \text{Hom}(B, A)$  tal que  $gf = \text{Id}_A$  y  $fg = \text{Id}_B$ .

Otra definición importante es la de funtor:

**Definición 90.** Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  categorías. Un *funtor* (covariante), denotado por  $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , es una asignación:

$$A \mapsto \mathcal{F}(A) \in \text{obj}(\mathcal{B}) \quad \text{y} \quad \left( A \xrightarrow{f} A' \right) \mapsto \left( \mathcal{F}(A) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(A') \right)$$

que cumple las siguientes dos propiedades:

1.  $\mathcal{F}(\text{Id}_A) = \text{Id}_{\mathcal{F}(A)}$
2.  $\mathcal{F}(gf) = \mathcal{F}(g)\mathcal{F}(f)$

**Ejemplo 21.**

1.  $\pi_n : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grupos}$  con  $(X, x_0) \mapsto \pi_n(X, x_0)$ .
2.  $H_n(\cdot; R) : \mathbf{Top} \rightarrow R\mathbf{Mod}$  con  $X \mapsto H_n(X; R)$ .
3.  $|\cdot| : \mathbf{CompSimp} \rightarrow \mathbf{Top}$  con  $K \mapsto |K|$ .

Los funtores preservan isomorfismos:

**Ejercicio 71.** Sea  $\mathcal{A}$  una categoría y  $A, A' \in \text{obj}(\mathcal{A})$ . Si  $f \in \text{Hom}(A, A')$  es un isomorfismo, entonces  $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(A')$  es un isomorfismo.

*Proof.* Por hipótesis  $f : A \rightarrow A'$  es un isomorfismo, entonces existe un morfismo  $g \in \text{Hom}(A', A)$  tal que  $gf = \text{Id}_A$  y  $fg = \text{Id}_{A'}$ . Aplicamos el funtor  $\mathcal{F}$  a estas igualdades para obtener

$$\mathcal{F}(g)\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(gf) = \mathcal{F}(\text{Id}_A) = \text{Id}_{\mathcal{F}(A)} \quad \text{y} \quad \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(\text{Id}_{A'}) = \text{Id}_{\mathcal{F}(A')}$$

Por lo tanto existe un  $\mathcal{F}(g) \in \text{Hom}(\mathcal{F}(A'), \mathcal{F}(A))$  tal que  $\mathcal{F}(g)\mathcal{F}(f) = \text{Id}_{\mathcal{F}(A)}$  y  $\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g) = \text{Id}_{\mathcal{F}(A')}$ . Por lo tanto  $\mathcal{F}(f)$  es un isomorfismo.  $\square$

**Ejercicio 72.** Los isomorfismos de  $h\mathbf{Top}$  son las clases de homotopía de equivalencias homotópicas.

*Proof.* Sean  $X, Y \in \text{obj}(h\mathbf{Top}) = \text{obj}(\mathbf{Top})$ . Un morfismo  $[f] \in \text{Hom}(X, Y) = [X, Y]$  es un isomorfismo si y sólo si existe un  $[g] \in [Y, X]$  tal que  $[g][f] = [g \circ f] = [\text{Id}_X]$  y  $[f][g] = [g \circ f] = [\text{Id}_Y]$ , o equivalentemente  $g \circ f \simeq \text{Id}_X$  y  $f \circ g \simeq \text{Id}_Y$ . Por lo tanto  $[f]$  es un isomorfismo si y sólo  $f$  es una equivalencia homotópica.  $\square$

Mientras que la definición de funtor es importante, es más interesante la de transformación natural:

**Definición 91.** Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  categorías,  $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  funtores. Una *transformación natural* entre  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$ , denotado por  $\mathfrak{T} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  es una familia de morfismos  $\mathfrak{T} = \{T_A : \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{G}(A)\}_{A \in \text{obj}(\mathcal{A})}$  tales que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A) & \xrightarrow{T_A} & \mathcal{G}(A) \\ \mathcal{F}(f) \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}(f) \\ \mathcal{F}(A') & \xrightarrow{T_{A'}} & \mathcal{G}(A') \end{array} \quad \forall A, A' \in \text{obj}(\mathcal{A}), \quad \forall f \in \text{Hom}(A, A').$$

Si además cada  $T_A \in \mathfrak{T}$  es un isomorfismo, decimos que  $\mathfrak{T}$  es una *equivalencia natural*.

**Ejemplo 22.** 1. Sea  $S_n(\cdot; R) : \mathbf{Top} \rightarrow {}_R\mathbf{Mod}$  el funtor  $X \mapsto S_n(X; R)$  y  $f \mapsto f_n$ , la  $n$ -ésima componente del morfismo  $f_\# : S_\bullet(X) \rightarrow S_\bullet(Y)$  de complejos de cadena. Sea  $\mathfrak{I} : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}$  el funtor  $X \mapsto X \times I$  con  $f \mapsto f \times \text{Id}$ . Definimos:

$$\mathcal{F} = (S_{n+1}(\cdot; R) \circ \mathfrak{I}) : \mathbf{Top} \longrightarrow {}_R\mathbf{Mod} \quad \text{con} \quad X \mapsto S_{n+1}(X \times I), \quad f \mapsto (f \times \text{Id})_\#$$

Observa que  $\mathfrak{T} = \{T_A : S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(X \times I)\}_X$  es una transformación natural (cf. sección 2.3).

2. Tomamos el funtor  $H_n(\_, \_; R)$  el funtor de homología relativa. Define  $\mathcal{F}_n = H_{n-1}(\_, R) \circ \pi$  donde  $\pi : \mathbf{Top}_2 \rightarrow \mathbf{Top}$  es el funtor  $(X, A) \mapsto A$  y  $f \mapsto f|_A$ . En símbolos:

$$\mathcal{F}_n : \mathbf{Top}_2 \longrightarrow {}_R\mathbf{Mod} \quad \text{con} \quad (X, A) \mapsto H_{n-1}(A; R)$$

Entonces la familia de morfismos de conexión  $\mathfrak{D} = \{d_n^{(X, A)} : H_n(X, A; R) \rightarrow H_{n-1}(A)\}_{(X, A)}$  es una transformación natural entre  $H_n(\_, \_; R)$  y  $\mathcal{F}_n$ .

3. Sea  $\mathcal{V}_{<\infty}$  la categoría de  $k$ -espacios vectoriales de dimensión finita con transformaciones lineales como morfismos. Sea  $\mathcal{I} : \mathcal{V}_{<\infty} \rightarrow \mathcal{V}_{<\infty}$  el funtor identidad, es decir  $\mathcal{I}(V) = V$  y  $\mathcal{I}(f) = f$ . Ahora define  $\mathcal{F}$  cumple el funtor “doble dual”, es decir  $\mathcal{F} : \mathcal{V}_{<\infty} \rightarrow \mathcal{V}_{<\infty}$  con  $V \mapsto V^{**}$  y  $\mathcal{F}(f)$  definido de la manera canónica. Más precisamente, si  $f : V \rightarrow W$  es una transformación lineal y  $\alpha : V^* \rightarrow k$  es un elemento de  $V^{**} = \text{Hom}(V^*, k)$ , entonces  $\mathcal{F}(f)(\alpha)$  se define como la función  $\mathcal{F}(f)(\alpha) : V^{**} \rightarrow W^{**}$  que hace  $\mathcal{F}(f)(\alpha)(\beta) = \alpha(\beta \circ f)$ , donde  $\beta : W \rightarrow k$ .

**Ejercicio 73.** La transformación natural  $\mathfrak{T} : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{F}$ , definido por  $\mathfrak{T} = \{T_V : V \rightarrow (V^*)^*\}_V$  donde  $T_V(v)(\alpha) = \alpha(v)$  es una equivalencia natural.

*Proof.* Primero probamos que cada  $T_V$  es una transformación lineal. Sean  $v, v' \in V$  y  $\lambda \in k$ , entonces:

$$T_V(\lambda v + v')(\alpha) = \alpha(\lambda v + v') = \lambda\alpha(v) + \alpha(v') = \lambda T_V(v) + T_V(v')$$

porque  $\alpha \in \text{Hom}(V^*, k)$  es una transformación lineal. Así,  $T_V$  es una transformación lineal.

Ahora probamos que  $\mathcal{T} : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{F}$  es una transformación natural, es decir que para todas  $V$  y  $W$   $k$ -espacios vectoriales de dimensión finita y para toda transformación lineal  $f : V \rightarrow W$  el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T_V} & (V^*)^* \\ f \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}(f) \\ W & \xrightarrow{T_W} & (W^*)^* \end{array} \quad (21)$$

Sea  $v \in V$  y evaluamos el elemento  $T_W(f(v)) \in (W^*)^* = \text{Hom}(W^*, k)$  en un elemento  $\beta : W \rightarrow k$  de  $W^* = \text{Hom}(W, k)$ :

$$T_W(f(v))(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(f(v)) = (\beta \circ f)(v),$$

mientras que

$$\mathcal{F}(f)(T_V(v))(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} T_V(v)(\beta \circ f) \stackrel{\text{def}}{=} (\beta \circ f)(v).$$

Por lo tanto  $T_W(f(v)) = \mathcal{F}(f)(T_V(v))$  y el diagrama 21 conmuta.

Para probar que  $\mathcal{T}$  es una equivalencia natural, hay que probar que cada  $T_V$  es un isomorfismo. Primero pruebo que  $T_V$  es un monomorfismo:

$$T_V(v) = 0 \iff T_V(v)(\alpha) = \alpha(v) = 0 \forall \alpha \in V^*.$$

En particular si  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es una base de  $V$  y  $e_j : V \rightarrow k$  son las funcionales lineales asociadas a la base, ie.  $e_i(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_i$ , tenemos que  $e_i(v) = 0$  para toda  $i$  y así  $v = 0v_1 + \dots + 0v_n = 0$ . Como claramente  $v = 0 \implies \alpha(v) = 0$  para toda  $\alpha \in V^*$ , tenemos que  $T_V(v) = 0$  si y sólo si  $v = 0$ , es decir,  $T_V$  es inyectivo para toda  $v$ .

Como  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es una base de  $V^*$ , la transformación lineal  $v_1 \mapsto v_n$  es un isomorfismo, es decir  $V \cong V^*$ . Por lo tanto  $\dim(V) = \dim(V^*) = \dim(V^{**})$  y como  $V$  es de dimensión finita, el monomorfismo  $T_V$  necesariamente es un isomorfismo y acabamos.  $\square$