0.1 Producto cuña

A lo largo de las siguientes tres secciones voy a desarrollar herramienta topológica para poder estudiar a fondo la relación

$$\pi_n(X,x_0) := \Big[(\mathbb{S}^n,1),(X,x_0)\Big]$$

y cómo usarlo para relacionar los diferentes grupos fundamentales de un espacio basado. La primera construcción es el producto cuña:

Sea $\{(X_j,x_j)\}_{j\in J}$ una familia de espacios basados, $\sqcup_j(X_j,x_j)$ su unión disjunta e identifico todos los puntos base en uno sólo. Más precisamente defino $B=\{x_j\}_{j\in J}$, el conjunto de todos los puntos bases y hago cociente sobre B (ie. identifico a todos los elementos en B y a los demás los identifico sólo con ellos mismos). Así si define el producto cuña:

$$\bigvee_{j\in J}(X_j,x_j) := \frac{\bigsqcup(X_j,x_j)}{\{x_j\}}$$

con la topología cociente.

Lema 1. *El producto cuña en* $\mathbf{Top}_*$ *es un coproducto, es decir para cualquier familia* $\{(X_j,x_j)\}_{j\in J}$ *de espacios basados existen morfismos* $\{\mu_i:(X_i,x_i)\to\vee(X_j,x_j)\}_{j\in J}$ *tales que cumplen la siguiente propiedad universal: Si* (Y,y_0) *es cualquier espacio basado junto con morfismos* $\{f_i:(X_i,x_i)\to(Y,y_0)\}_{i\in J}$ *entonces existe un único morfismo* $\theta:\vee(X_j,x_j)\to(Y,y_0)$ *que hace el siguiente diagrama conmutar:*

$$\begin{tikzcd} \bigvee(X_j,x_j) \arrow[rr, dashed, "\theta"] & & (Y,y_0) \\ & (X_i,x_i) \arrow[ul, "\mu_i"] \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd} \tag{1}$$

Proof. Primero exhibo los morfismos $\mu_i:(X_i,x_i)\to\vee(X_j,x_j)$: para toda $i\in J$, existe una inclusión natural:

$$u_i:(X_i,x_i)\longrightarrow\bigsqcup_{j\in J}(X_j,x_j)$$

que hace $x\mapsto x\in\sqcup(X_j,x_j)$. Si compongo esta inclusión con la identificación natural $\nu:\sqcup(X_j,x_j)\twoheadrightarrow\vee(X_j,x_j)$, puedo definir $\mu_i:=\nu\circ u_i$. Afirmo que $\vee(X_j,x_j)$ junto con $\{\mu_i:(X_i,x_i)\to\vee(X_j,x_j)\}$ es un coproducto.

Sea (Y,y_0) un espacio basado con morfismos $\{f_i:(X_i,x_i)\to(Y,y_0)\}_{i\in J}$. Puedo definir de manera natural la función:

$$\sqcup f_j:\bigsqcup_{j\in J}(X_j,x_j)\longrightarrow(Y,y_0)\quad\text{con}\quad(\sqcup f_j(x))=f_i(x)\ \text{ si }\ x\in X_i.$$

Como la unión es disjunta, $\sqcup f_j$ está bien definida y es continua (porque cada f_j lo es). Observa que por definición $f_i=\sqcup f_j\circ u_i$ donde u_i es la inclusión natural de (X_i,x_i) en $\sqcup(X_i,x_i)$.

Además, es una función basada porque $\sqcup f_j(x_i)=f_i(x_i)=y_0$ para toda $i\in J$. Esta última igualdad implica que $(\sqcup f_j)[B]=\{y_0\}$ y así $\sqcup f_j$ se factoriza a través de $\vee(X_j,x_j)$; a esta nueva función (continua de espacios basados) la llamo $\vee f_j$:

$$\begin{tikzcd} \bigsqcup(X_j,x_j) \arrow[r, "\sqcup f_j"] \arrow[d, two heads, "\nu"'] & (Y,y_0) \\ \bigvee(X_j,x_j) \arrow[ur, dashed, "\vee f_j"'] & \end{tikzcd} \qquad \sqcup f_j=\vee f_j\circ\nu$$

Ahora sólo falta ver que $\theta=\vee f_j$ satisface el diagrama conmutativo (1), es decir que $f_i=\vee f_j\circ\mu_i$. Esto se sigue inmediatamente de todas las definiciones que he dado y el diagrama conmutativo anterior:

$$\vee f_j\circ\mu_i=\vee f_j\circ(\nu\circ u_i)=(\vee f_j\circ\nu)\circ u_i=\sqcup f_j\circ u_i=f_i.$$

Observa que si $\star\in\vee(X_j,x_j)$ es su punto base natural, entonces para $x_i\in(X_i,x_i)$ en la preimagen bajo (cualquier) μ_i tenemos que $\vee f_j(\star)=\vee f_j(\mu_i(x_i))=f_i(x_i)=y_0$. Entonces $\vee f_j$ es un morfismo en $\mathbf{Top}_*$.

La unicidad de $\vee f_j$ se sigue de que el coproducto es un objeto inicial en una categoría adecuada. $\square$

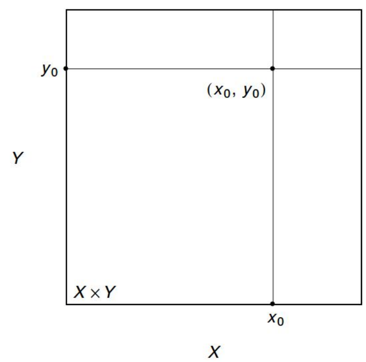

Figure 1: $X \vee Y \subset X \times Y$

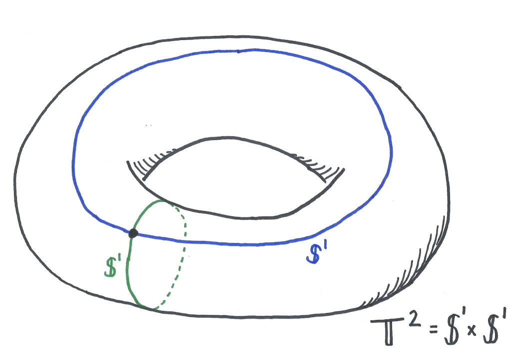

Figure 2: $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{T}^2$

Nota. Al morfismo $\vee f_j$ se le puede dar una fórmula: sea $[x] \in \vee(X_j, x_j)$, entonces $x \in \sqcup(X_j, x_j)$ y puedo asumir sin pérdida de generalidad que $x \in X_i$ para una $i \in J$. Observa que $\sqcup f_j(x) = f_i(x) \in Y$. Por construcción tengo que

$$\vee f_j([x]) = f_i(x) \quad \text{si} \quad x \in (X_i, x_i).$$

Antes de seguir, observa que si considero el producto cuña de dos espacios (X, x_0) y (Y, y_0) entonces hay una manera canónica de ver $X \vee Y$ encajado en $X \times Y$ como el conjunto $(X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y)$. Ve la figura 1 para el caso general y la figura 2 para el caso particular $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{T}^2$.

En efecto, si denoto $V := (X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y)$ y defino las siguientes dos funciones $f_X : X \to V$ y $f_Y : Y \to V$ como

$$f_X(x) = (x, y_0) \quad \text{y} \quad f_Y(y) = (x_0, y),$$

claramente tengo dos morfismos de espacios basados (ie. f_X y f_Y son continuas y basadas) y como el producto cuña es un coproducto en $\mathbf{Top}_*$ existe un único morfismo $g := f_X \vee f_Y$ de $X \vee Y$ a V tal que:

$$g\big([z]\big) = \begin{cases} f_X(z) = (z, y_0) & \text{si } z \in X \\ f_Y(z) = (x_0, z) & \text{si } z \in Y \end{cases}$$

Para construir el inverso, observa que V se puede descomponer un una unión disjunta $V = ((X - x_0) \times \{y_0\}) \sqcup (\{y_0\} \times (Y - y_0)) \sqcup \{(x_0, y_0)\}$. Ahora defino la siguiente función:

$$h(x, y) := \begin{cases} [x] & \text{si } x \neq x_0,\ y = y_0 \\ [y] & \text{si } x = x_0,\ y \neq y_0 \\ \star & \text{si } x = x_0,\ y = y_0 \end{cases}$$

donde $\star \in X \vee Y$ es el punto base canónico (ie $\star = [x_0] = [y_0]$). Esta función es claramente continua porque sobre cada componente de V, h es la restricción de la función continua $X \to X \vee Y$, $Y \to X \vee Y$ y la función constante $(x_0, y_0) \mapsto \star$. Claramente:

$$(g \circ h)(x, y) = \begin{cases} g([x]) = (x, y_0) & \text{si } x \neq x_0,\ y = y_0 \\ g([y]) = (x_0, y) & \text{si } x = x_0,\ y \neq y_0 \\ g(\star) = (x_0, y_0) & \text{si } x = x_0,\ y = y_0 \end{cases} = \mathrm{Id}_V$$

y

$$(h \circ g)\big([z]\big) = \begin{cases} h(z, y_0) = [z] & \text{si } z \in X \\ h(x_0, z) = [z] & \text{si } z \in Y \end{cases} = \mathrm{Id}_{X \vee Y}.$$

por lo tanto $X \vee Y \approx V = (X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y) \subset X \times Y$. Observa que la continuidad de g y h requieren que V tenga la topología de subespacio de la topología producto en $X \times Y$.

En general, si tomamos el producto cuña de una familia arbitraria de espacios basados, no necesariamente podemos encajar $\vee(X_j, x_j)$ en $\prod(X_j, x_j)$ (ie. que $\vee(X_j, x_j)$ sea homeomorfo a su imagen). Pero no todo se pierde:

Ejercicio 1. Sea $\{(X_j, x_j)\}_{j\in J}$ una familia de espacios basados y sean $\lambda_i : (X_i, x_i) \to \prod(X_j, x_j)$ las inclusiones naturales definidas por

$$\lambda_i(x) = \{z_j\}_{j\in J} \quad \text{con} \quad z_j = \begin{cases} x & \text{si } j = i \\ x_j & \text{si } j \neq i \end{cases}.$$

Entonces el morfismo inducido

$$\vee\lambda_j : \bigvee_{j\in J}(X_j, x_j) \longrightarrow \prod_{j\in J} X_j$$

es inyectivo.

Proof. Como en el lema 1, sean $\{\mu_j : (X_j, x_j) \to \vee(X_j, x_j)\}_{j\in J}$ los morfismo canónicos que hacen que $\vee(X_j, x_j)$ sea el coproducto en de $\{(X_j, x_j)\}$ en $\mathbf{Top}_*$. Además, sean $\pi_i : \prod(X_j, x_j) \to (X_i, x_i)$ las proyecciones canónicas definidas por

$$\pi_i\big(\{y_j\}_{j\in J}\big) = y_i \in (X_i, x_i).$$

Sean $[x], [x'] \in \vee(X_j, x_j)$ elementos distintos con $x \in (X_i, x_i)$ y $x' \in (X_l, x_l)$. Como las clases de x y x' son distintas, al menos una de ellos (sin pérdida de generalidad supongo que x) no es un punto base, ie. $x \neq x_i$.

Ahora si $i \neq l$ entonces:

$$\vee\lambda_j\big([x]\big) = \lambda_i(x) = \{z_j\} \neq \{z'_j\} = \lambda_l(x') = \vee\lambda_j\big([x']\big)$$

porque por definición los elementos $\{z_j\}$ y $\{z'_j\}$ difieren en la i-ésima entrada donde valen x y x_i respectivamente.

Si $i = l$, entonces:

$$\vee\lambda_j\big([x]\big) = \lambda_i(x) = \{z_j\} \neq \{z'_j\} = \lambda_i(x') = \vee\lambda_j\big([x']\big)$$

porque los elementos $\{z_j\}$ y $\{z'_j\}$ difieren nada más en la i-ésima entrada donde valen x y x' respectivamente que por hipótesis son distintos porque $[x] \neq [x']$ y $x, x' \in X_i$.

Por lo tanto si $[x] \neq [x']$ tengo que $\vee\lambda_j([x]) \neq \vee\lambda_j([x'])$ y $\vee\lambda_j$ es inyectiva.

□