

0.1 Complejos Simpliciales

0.1.1 Complejos simpliciales geométricos

Definición 1. Un subconjunto $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^n$ es *afin-independiente* (AI) si el conjunto de diferencias $\{a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$ es linealmente independiente en \mathbb{R}^n .

En palabras esto significa que un conjunto $\{a_0, \dots, a_n\}$ es AI si el conjunto $\{a_1, \dots, a_n\}$ bajo la traslación $a_0 \mapsto 0$, es linealmente independiente. En particular, si $\{a_1, \dots, a_n\}$ es linealmente independiente en \mathbb{R}^n , entonces $\{0, a_1, \dots, a_n\}$ es AI.

Observa que en la definición de AI, puedo tomar cualquier espacio ambiente \mathbb{R}^N con la condición $N \geq n$.

Ejercicio 1. Prueba que $\{a_0, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^n$ es AI si y sólo si para todas λ_i 's tales que $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 0$ se cumple que $\sum \lambda_i a_i = 0 \implies \lambda_i = 0$ para toda $i \in \{0, \dots, n\}$.

Proof. Sea $\{a_0, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^n$

(\implies) Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $\sum \lambda_i = 0$ y supongo que $\sum \lambda_i a_i = 0$. Entonces

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_0) = -a_0 \sum_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = -a_0(-\lambda_0) - \lambda_0 a_0 = 0.$$

Como $\{a_0, \dots, a_n\}$ es AI, $\{a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$ es linealmente independiente y así concluyo que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Por último, sustituyo esto en $\sum \lambda_i = 0$ para concluir que también $\lambda_0 = 0$.

(\impliedby) Sea $\sum \mu_i (a_i - a_0) = 0$ una combinación lineal. Entonces

$$\sum_{i=1}^n \mu_i a_i = a_0 \sum_{i=1}^n \mu_i. \quad (1)$$

Ahora defino $\lambda_i := \mu_i$ para $i \in \{1, \dots, n\}$ y defino $\lambda_0 = -\mu_1 - \dots - \mu_n$. Observa que $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 0$ por definición. Además la ecuación (1) se convierte en:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = a_0(-\lambda_0) \implies \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i = 0.$$

Por hipótesis esto implica que $\lambda_i = 0$ para toda $i \in \{0, \dots, n\}$. En particular $\mu_1 = \dots = \mu_n = 0$ y $\{a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$ es linealmente independiente. Por lo tanto $\{a_0, \dots, a_n\}$ es AI. □

Este ejercicio dice que la condición AI es casi equivalente a la independencia lineal, la única restricción es que los coeficientes de la combinación lineal (igualada a cero) deben sumar 0. Esta condición adicional literalmente “traslada” la condición de independencia lineal al punto a_0 .

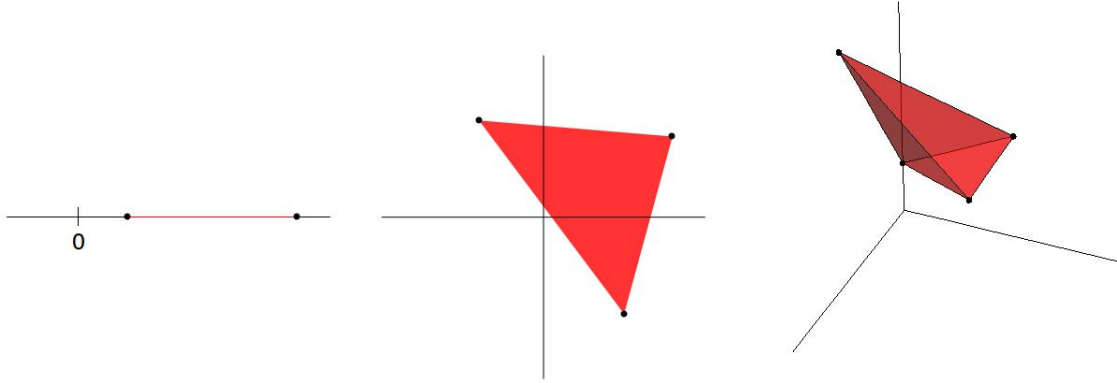
Definición 2. Un *n-simplejo geométrico* en \mathbb{R}^N (en particular $N \geq n$) es un subconjunto $\sigma_n \subset \mathbb{R}^N$ de la forma:

$$\sigma_n = \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i \mid \{a_0, \dots, a_n\} \text{ es AI, } \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

y se denota como $\sigma_n = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$ (ve la figura 1).

Nota. Esta definición es exactamente la definición de la cerradura convexa del conjunto $\{a_0, \dots, a_n\}$, ie. $\text{Conv}(a_0, \dots, a_n) = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$.

Figure 1: Ejemplos de n -simplejos geométricos de dimensión 1,2 y 3



Recuerda que la cerradura convexa de un conjunto $X \subset \mathbb{R}^N$ (en este caso tomo $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ finito) es la intersección de todos los conjuntos convexos que lo contienen. Más precisamente si escribo $\mathfrak{C} = \{Y \subseteq \mathbb{R}^N \mid Y \text{ es convexo y } X \subseteq Y\}$, entonces

$$\text{Conv}(X) = \bigcap_{Y \in \mathfrak{C}} Y. \quad (2)$$

Es sencillo probar (2): primero observa que $\text{Conv}(X)$ es un conjunto convexo porque si $\lambda = \sum \lambda_i x_i, \mu = \sum \mu_i x_i \in \text{Conv}(X)$ entonces

$$t\lambda + (1-t)\mu = \sum_{i=1}^n (t\lambda_i + (1-t)\mu_i)x_i \in \text{Conv}(X) \quad \forall t \in [0, 1]$$

ya que

$$\sum_{i=1}^n t\lambda_i + (1-t)\mu_i = t \sum_{i=1}^n \lambda_i + (1-t) \sum_{i=1}^n \mu_i = t + (1-t) = 1.$$

Por lo tanto $\text{Conv}(X) \in \mathfrak{C}$ y la contención \supseteq de (2) se cumple. Para la otra contención considera $Y \in \mathfrak{C}$ y observa que si $\sum \lambda_i x_i \in \text{Conv}(X)$ entonces $\sum \lambda_i x_i \in Y$ porque $x_1, \dots, x_n \in Y$, $\sum \lambda_i = 1$ y Y es convexo; por lo tanto $\text{Conv}(X) \subseteq Y$ para toda $Y \in \mathfrak{C}$.

Por último, la intersección de conjuntos convexos es convexo (razón: si $x, y \in \cap Y_i$ con Y_i convexo, entonces la recta \mathcal{L} que un x, y está contenido en cada Y_i y así $\mathcal{L} \subseteq \cap Y_i$), entonces he probado que:

Proposición 1. El n -simplejo geométrico $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$ es el conjunto convexo más pequeño que contiene al conjunto $\{a_0, \dots, a_n\}$, en general:

$$\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle = \text{Conv}(a_0, \dots, a_n) = \bigcap_{Y \in \mathfrak{C}} Y$$

donde \mathfrak{C} es la familia de conjuntos convexos Y que contienen a $\{a_0, \dots, a_n\}$.

Hay una clase de n -simplejos muy importantes:

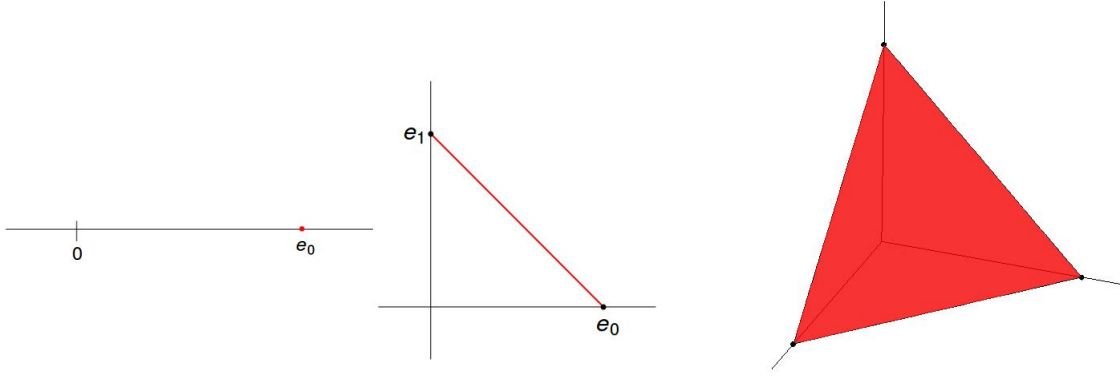
Definición 3. El n -simplejo geométrico estándar, denotado por $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, es el n -simplejo generado por la base canónica de \mathbb{R}^{n+1} , ie. $\Delta^n := \langle e_0, \dots, e_n \rangle$.

Ve la figura 2 para los primeros ejemplos.

Observa que podemos encajar Δ^n en \mathbb{R}^n en lugar de \mathbb{R}^{n+1} como $\Delta^n = \langle 0, e_1, \dots, e_n \rangle$; en este caso $\Delta^n = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum \lambda_i \leq 1, \lambda_i \geq 0\}$. Estas dos maneras de definir los simplejos estándares son equivalentes entonces usaré ambas descripciones intercambiamente.

Los n -simplejos geométricos estándares nos permite clasificar topológicamente todos los n -simplejos geométricos mediante la siguiente proposición:

Figure 2: Ejemplos de n -simplejos geométricos estándares de dimensión 0,1 y 2



Proposición 2. Sean $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$ y $\tau = \langle b_0, \dots, b_n \rangle$ dos n -simplejos en \mathbb{R}^N . Entonces $\sigma \approx \tau$ donde el homeomorfismo sólo depende de los vértices. En este caso se dice que σ y τ son *afinmente homeomorfos*.

Ejercicio 2. La función $f : \sigma \rightarrow \tau$ definida por $f(\sum \lambda_i a_i) = \sum \lambda_i b_i$ es un homeomorfismo.¹

Proof. Primero observa que si $x = \sum \lambda_i a_i \in \sigma$, entonces $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_n$ y así:

$$\begin{aligned} x &= \lambda_0 a_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = a_0 \left(1 + \sum_{i=1}^n (-\lambda_i)\right) + \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = a_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_0) \\ \therefore x - a_0 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_0) \end{aligned}$$

Ahora defino $T_{a_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ como la traslación $x \mapsto x - a_0$. Por lo tanto $T_{a_0}[\sigma] = \langle 0, a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0 \rangle$ donde $A = \{a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$ es una base. Después defino $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ como la transformación lineal que cambia la base A en la base $B = \{b_1 - b_0, \dots, b_n - b_0\}$, en particular $F(a_i - a_0) = b_i - b_0$. Por último sea $T_{-b_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la traslación $x \mapsto x + b_0$. Claramente cada una de estas tres funciones son homeomorfismos entonces su composición es un homeomorfismo de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n .

Para $x = \sum \lambda_i a_i \in \sigma$ calculo:

$$\begin{aligned} (T_{-b_0} \circ F \circ T_{a_0})(x) &= (T_{-b_0} \circ F)(x - a_0) = (T_{-b_0} \circ F) \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_0) \right) \\ &= T_{-b_0} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i (b_i - b_0) \right) = b_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i (b_i - b_0) = \sum_{i=0}^n \lambda_i b_i = f(x) \\ \therefore (T_{-b_0} \circ F \circ T_{a_0})|_{\sigma} &= f \end{aligned}$$

y así f es casi un homeomorfismo, lo único que hace falta calcular es la imagen de f . Pero esto es sencillo:

$$\text{Im}(f) = \{f(\sum \lambda_i a_i) \mid \sum \lambda_i a_i \in \sigma\} = \{\sum \lambda_i b_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1\} = \tau.$$

Por lo tanto:

$$(T_{-b_0} \circ F \circ T_{a_0})|_{\sigma} = f : \sigma \rightarrow \tau$$

es un homeomorfismo por ser restricción del homeomorfismo $T_{-b_0} \circ F \circ T_{a_0}$ (co-restringido a su imagen). \square

Un corolario inmediato de este ejercicio es que todo n -simplejo geométrico $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$ es homeomorfo al complejo geométrico estándar Δ^n . Por lo tanto la topología de Δ^n completamente determina la topología de los n -simplejos geométricos:

¹En clase probamos esto usando el hecho que los n -simplejos geométricos son compactos (cf. ejercicio 3), pero modifiqué esta prueba para no usar la compacidad para poder demostrar el ejercicio 3 con este ejercicio y así evitar un círculo lógico.

Ejercicio 3. Todo n -simplejo geométrico $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$ es cerrado, convexo y compacto como subespacio de \mathbb{R}^N .

Proof. Como $\sigma = \text{Conv}(a_0, \dots, a_n)$ (por la proposición 1), entonces σ es convexo.

Para probar compacidad, basta probar que los n -simplejos geométricos estándares son compactos ya que todo n -simplejo geométrico es homeomorfo a Δ^n (cf. ejercicio 2).

Sea $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ el plano definido por $x_1 + \dots + x_n = 1$ y $C \subset \mathbb{R}^n$ el primer cuadrante, ie. $C = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0\}$. Observa que ambos conjuntos son cerrados. Ahora pruebo que:

$$\Delta^n = \langle 0, e_1, \dots, e_n \rangle = \mathcal{P} \cap C$$

y así Δ^n es cerrado.

(\subseteq) Sea $x = \sum \lambda_i e_i$ donde $0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ y $\lambda_i \geq 0$. Como $\{e_1, \dots, e_n\}$ es la base estándar, entonces $x = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ y claramente se cumple que $x \in \mathcal{P} \cap C$.

(\supseteq) Sea $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{P} \cap C$, entonces $x_1 + \dots + x_n = 1$ y $x_i \geq 0$. Si tomo $\lambda_i = x_i$ entonces $x = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum \lambda_i e_i \in \Delta^n$.

Por último observa que si $x = \sum \lambda_i e_i \in \Delta^n$ entonces:

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|\lambda_i e_i\| = \sum_{i=1}^n |\lambda_i| = \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

ya que $0 \leq \lambda_i$. Por lo tanto Δ^n es un conjunto cerrado y acotado en \mathbb{R}^n , entonces Δ^n es compacto. \square

Definición 4. Sea $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$ un n -simplejo geométrico y $m \leq n$. Una m -cara τ de σ es el m -simplejo geométrico asociado a algún subconjunto $\{a_{i_0}, \dots, a_{i_m}\}$ de $\{a_0, \dots, a_n\}$, es decir $\tau = \langle a_{i_0}, \dots, a_{i_m} \rangle \subseteq \sigma$.

Definición 5. El *baricentro* de un n -simplejo geométrico $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$ es el punto

$$\mathbf{b}(\sigma) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n a_i$$

Observa que el baricentro $\mathbf{b}(\sigma)$ es un elemento de σ porque $\sum \frac{1}{n+1} = 1$.

Los n -simplejos por sí solos no son muy interesantes topológicamente (acabamos de clasificarlos todos!), pero forman parte de una construcción muy importante:

Definición 6. Un *complejo simplicial geométrico* en \mathbb{R}^N es una familia finita K de simplejos geométricos (de dimensión $\leq N$) que cumple dos propiedades:

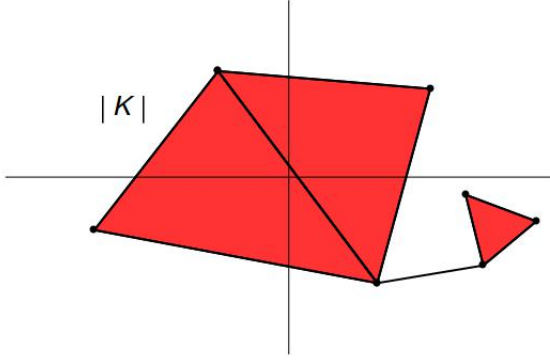
- (i) K contiene todas las caras de todos sus elementos, es decir si $\sigma \in K$ y $\tau \subset \sigma$ es una cara, entonces $\tau \in K$.
- (ii) La intersección de cualesquiera dos $\sigma, \tau \in K$ es una cara común de σ y τ (también incluyo el caso cuando la intersección es vacía).

Intuitivamente, la primera propiedad nada más garantiza que estás trabajando con todos los posibles sub-simplejos del complejo. La segunda condición te dice que los simplejos se pegan bien, es decir a lo largo de caras (que por la primera propiedad son elementos de K).

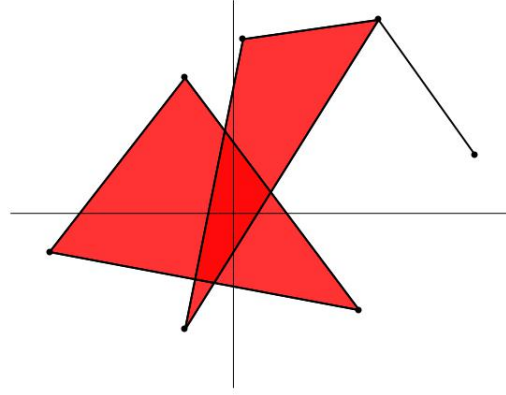
Para visualizar un complejo simplicial geométrico K , dibujamos su “realización geométrica” $|K| := \{x \in \mathbb{R}^N \mid \exists \sigma \in K \text{ tal que } x \in \sigma\} = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$.

Esta construcción se puede generalizar considerablemente.

(a) Sí es complejo simplicial geométrico.



(b) No es complejo simplicial geométrico.



0.1.2 Complejos simpliciales abstractos

Definición 7. Una *complejo simplicial* (abstracto) K es una familia de subconjuntos finitos no vacíos de un conjunto V_K , cuyos elementos se llaman *vértices*, que satisface:

- (i) K contiene todos los singuletes de V_K , es decir $v \in V_K \implies \{v\} \in K$.
- (ii) K es cerrado bajo subconjuntos, es decir si $L \in K$ y $L' \subseteq L$ entonces $L' \in K$.

Esta definición efectivamente generaliza la definición de complejo simplicial geométrico; la idea es que para pasar de complejos simpliciales geométricos a complejos simpliciales abstractos basta tomar los “vértices” de los simplejos geométricos en lugar de todas las combinaciones convexas de ellas.

Ejercicio 4. Todo complejo simplicial geométrico determina un complejo simplicial abstracto.

Proof. Sea $K = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ un complejo simplicial geométrico con $\sigma_i = \langle a_0^i, \dots, a_{n_i}^i \rangle$; los veo encajados en algún \mathbb{R}^N , ie. $a_j^i \in \mathbb{R}^N$ para toda $i \in \{1, \dots, n\}$ y para toda $j \in \{0, \dots, n_i\}$. Para cada simplejo $\sigma_i \in K$ defino el conjunto de sus vértices como $\sigma'_i = \{a_0^i, \dots, a_{n_i}^i\}$.

En general escribo el conjunto de vértices como

$$V := \bigcup_{i=1}^n \sigma'_i = \{a_j^i\}_{i,j} \subset \mathbb{R}^N$$

y defino $K' = \{\sigma'_i\}_{i=1}^n$.

Ahora pruebo que K' cumple las dos propiedades de ser un complejo simplicial abstracto. Primero observa que para un vértice arbitrario $a_j^i \in V$, el simplejo $\langle a_j^i \rangle$ es una 0-cara del simplejo geométrico $\sigma_i = \langle a_0^i, \dots, a_{n_i}^i \rangle$ entonces por definición el 0-simplejo geométrico $\langle a_j^i \rangle$ es un elemento de K , ie. $\langle a_j^i \rangle = \sigma_l$ para alguna $l \in \{1, \dots, n\}$. Por lo tanto $\sigma'_l = \{a_j^i\} \in K'$.

Para probar la segunda propiedad sea $L = \sigma'_i = \{a_0^i, \dots, a_{n_i}^i\} \in K'$ y sea $L' \subseteq L$. Entonces L' genera una cara del simplejo geométrico σ_i . Por definición, el simplejo generado por L' es un elemento de K , ie. L' genera a algún $\sigma_k \in K$. Por lo tanto $L' = \sigma'_k \in K'$ y termino. \square

Cada complejo simplicial K tiene una realización topológica, ie. tiene asociado canónicamente un espacio topológico que se denota por $|K|$.

Definición 8. Sea K un complejo simplicial con conjunto de vértices V_K , entonces se define:

$$|K| := \left\{ \sigma : V_K \rightarrow I \subset \mathbb{R} : \sigma^{-1}(0, 1] \in K, \sum_{v \in V_K} \sigma(v) = 1 \right\} \subset \{f : V_K \rightarrow \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^{V_K}$$

que tiene una métrica definida por:

$$d : |K| \times |K| \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad d(\sigma, \tau) = \sqrt{\sum_{v \in V_K} (\sigma(v) - \tau(v))^2}.$$

El espacio topológico inducido por esta métrica se denota por $|K|_d$.

Observa que las sumas en la definición anterior están bien definidas porque para $\sigma \in |K|$ se tiene que $\sigma(v) \neq 0$ para sólo una cantidad finita de vértices ya que por definición $\{v \in V_K \mid \sigma(v) \neq 0\} = \sigma^{-1}(0, 1] \in K$ y los elementos de K son conjuntos finitos.

Nota. El conjunto $\sigma^{-1}(0, 1]$ es exactamente el soporte de la función σ , ie.

$$\sigma^{-1}(0, 1] = \text{Sop}(\sigma) := \{v \in V_K \mid \sigma(v) \neq 0\}.$$

Entonces usaré ambas descripciones intercambiabilmente.

Ejercicio 5. d es una métrica sobre $|K|$.

Proof. Sean $\sigma, \sigma' \in |K|$. Pruebo que d cumple las tres propiedades de ser una métrica.

1. Si $d(\sigma, \sigma') = 0$ entonces $\sum (\sigma(v) - \sigma'(v))^2 = 0$ y como cada sumando es no-negativo, necesariamente se tiene que $\sigma(v) - \sigma'(v) = 0$ para toda $v \in V_K$. Por lo tanto $\sigma = \sigma'$ como funciones. Para la otra dirección, $\sigma = \sigma'$ implica que $(\sigma(v) - \sigma'(v))^2 = 0$ para toda $v \in V_K$ y así $d(\sigma, \sigma') = \sum 0 = 0$.
2. Como $(\sigma(v) - \sigma'(v))^2 = (\sigma'(v) - \sigma(v))^2$ para toda v , puedo sumar sobre V_K y obtengo que $d(\sigma, \sigma') = d(\sigma', \sigma)$.
3. La desigualdad del triángulo se cumple por la misma razón que se cumple con la métrica euclideana: sean $\sigma, \sigma', \sigma'' \in |K|$ y $L := \sigma^{-1}(0, 1] \cup (\sigma')^{-1}(0, 1] \cup (\sigma'')^{-1}(0, 1]$ que es finito porque es la unión finita de elementos de K ; sea $N = \#(L)$ y $L = \{v_1, \dots, v_N\}$ una enumeración. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} d(\sigma, \sigma'') &= \sqrt{\sum_{i=1}^N (\sigma(v_i) - \sigma''(v_i))^2} \\ &= \|(\sigma(v_1) - \sigma''(v_1), \dots, \sigma(v_N) - \sigma''(v_N))\| \\ &= \|(\sigma(v_1), \dots, \sigma(v_N)) - (\sigma''(v_1), \dots, \sigma''(v_N))\| \end{aligned}$$

donde la última expresión es la distancia usual euclideana entre los puntos $(\sigma(v_1), \dots, \sigma(v_N))$ y $(\sigma''(v_1), \dots, \sigma''(v_N))$ de \mathbb{R}^N . Aquí se vale la desigualdad del triángulo entonces:

$$\begin{aligned} d(\sigma, \sigma'') &\leq \|(\sigma(v_1), \dots, \sigma(v_N)) - (\sigma'(v_1), \dots, \sigma'(v_N))\| + \\ &\quad \|(\sigma'(v_1), \dots, \sigma'(v_N)) - (\sigma''(v_1), \dots, \sigma''(v_N))\| \\ &\leq \|(\sigma(v_1) - \sigma'(v_1), \dots, \sigma(v_N) - \sigma'(v_N))\| + \|(\sigma'(v_1) - \sigma''(v_1), \dots, \sigma'(v_N) - \sigma''(v_N))\| \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^N (\sigma(v_i) - \sigma'(v_i))^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^N (\sigma'(v_i) - \sigma''(v_i))^2} \\ &\leq d(\sigma, \sigma') + d(\sigma', \sigma''). \end{aligned}$$

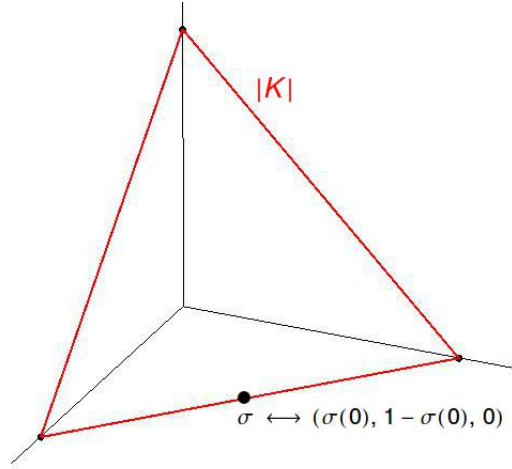
□

Aunque la definición de $|K|$ parece complicada, sí concuerda con la intuición, especialmente cuando V_K es finito. Por ejemplo:

Ejemplo 1. Sea $V_K = \{0, e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2$ y $K = \{\{0\}, \{e_1\}, \{e_2\}, \{0, e_1\}, \{0, e_2\}, \{e_1, e_2\}\}$. Como V_K es finito (con tres elementos), entonces una función $\sigma : V_K \rightarrow I$ la puedo representar como una terna $\sigma = (\sigma(0), \sigma(e_1), \sigma(e_2))$. Como $V_K \notin K$ entonces al menos una coordenada de σ debe ser 0. Por lo tanto, la segunda propiedad que cumple σ , (ie. la suma de las tres coordenadas da 1) me permite describir completamente $|K|$. Por ejemplo si $\sigma(0) = 0$ entonces $\sigma(e_1) = 1 - \sigma(e_2)$, por lo tanto cualquier $\sigma \in |K|$ que cumple que $\sigma(0) = 0$ está completamente determinado por un parámetro $t = \sigma(e_1) \in I$, es decir $\sigma = (0, t, 1 - t)$. De esta manera tengo que:

$$|K| = \{(0, t, 1 - t) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{(t, 0, 1 - t) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{(t, 1 - t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

que es la orilla de $\Delta^2 \subset \mathbb{R}^3$. También observa que la métrica d de $|K|$ coincide con la métrica usual de \mathbb{R}^3 ya que los sumandos $\sigma(v) - \tau(v)$ dentro del radical son simplemente las diferencias de las coordenadas de σ y τ vistas como puntos en \mathbb{R}^3 .



Como el caso finito es sencillo, formalizo este caso:

Definición 9. Sea K un complejo simplicial y $L \in K$, entonces

$$|L| := \{\sigma \in |K| : \sigma^{-1}(0, 1] \subseteq L\} = \{\sigma \in |K| : \text{Sop}(\sigma) \subseteq L\}.$$

La importancia de analizar $|L|$ para $L \in K$ es evidente del siguiente ejercicio:

Ejercicio 6. Sea $L = \{v_0, \dots, v_n\} \in K$, la función

$$\varphi : |L|_d \rightarrow \Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{definida por} \quad \sigma \mapsto (\sigma(v_0), \dots, \sigma(v_n))$$

es una isometría. En particular $|L|_d \approx \Delta^n$ es un homeomorfismo.

Proof. Primero verifico que $\Delta^n \approx |\Delta^n|_d$ (donde la topología usual de Δ^n es la de subespacio de \mathbb{R}^n).

Como L es finito cada φ está bien definida. Para ver que φ preserva la métrica, tomo $\sigma, \tau \in |L|$ arbitrarios y calculo:

$$d_{\Delta^n}(\varphi(\sigma), \varphi(\tau)) = d_{\mathbb{R}^{n+1}}(\sigma(v_0), \dots, \sigma(v_n), \tau(v_0), \dots, \tau(v_n)) = \sqrt{\sum_{i=0}^n (\sigma(v_i) - \tau(v_i))^2}$$

Observa que $V_L = L$ entonces la suma dentro del radical es la suma de $(\sigma(v) - \tau(v))^2$ sobre $v \in V_L$. Por lo tanto

$$d_{\Delta^n}(\varphi(\sigma), \varphi(\tau)) = \sqrt{\sum_{v \in V_L} (\sigma(v) - \tau(v))^2} = d_{|L|}(\sigma, \tau)$$

y φ preserva la métrica. En particular es continua e inyectiva.

Ahora considera la función

$$\psi : \Delta^n \rightarrow |K|_d \quad \text{definida por} \quad (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \mapsto \psi(\lambda_0, \dots, \lambda_n)(v) = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } v = v_i \in L \\ 0 & \text{si } v \notin L \end{cases}$$

Está bien definida porque los elementos $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \Delta^n$ cumplen $\sum \lambda_i = 1$ y $\lambda_i \geq 0$, además de que $\psi(\lambda) = \psi(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in |K|$ es cero fuera de L , ie. $\psi(\sigma)|_{V_K - L} = 0$ o equivalentemente $\text{Sop}(\varphi(\lambda)) \subseteq L$. En particular $\text{Im}(\psi) \subseteq |L|$, entonces puedo suponer que ψ tiene como contradominio a $|L|_d$, es decir $\psi : \Delta^n \rightarrow |L|_d$.

Por definición:

$$\begin{aligned}
d_{|K|}(\varphi(\lambda), \varphi(\mu)) &= \sqrt{\sum_{v \in V_K} (\varphi(\lambda)(v) - \varphi(\mu)(v))^2} = \sqrt{\sum_{v \in L} (\varphi(\lambda)(v) - \varphi(\mu)(v))^2} \\
&= \sqrt{\sum_{i=0}^n (\varphi(\lambda)(v_i) - \varphi(\mu)(v_i))^2} = \sqrt{\sum_{i=0}^n (\lambda_i - \mu_i)^2} \\
&= d_{\mathbb{R}^{n+1}}((\lambda_0, \dots, \lambda_n), (\mu_0, \dots, \mu_n)) \\
&= d_{\Delta^n}(\lambda, \mu).
\end{aligned}$$

Por lo tanto ψ preserva la métrica. En particular es continua e inyectiva.

Por último observa que:

$$\begin{aligned}
\psi(\varphi(\sigma))(v_i) &= \psi(\sigma(v_0), \dots, \sigma(v_n))(v_i) = \sigma(v_i) \implies \psi(\varphi(\sigma)) = \sigma \\
\varphi(\psi(\lambda)) &= (\psi(\lambda)(v_0), \dots, \psi(\lambda)(v_n)) = (\lambda_0, \dots, \lambda_n)\lambda.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{\Delta^n}$ y $\psi \circ \varphi = \text{Id}_{|L|_d}$.

Para terminar resumo lo que tengo: hay dos funciones $\varphi : |L|_d \rightarrow \Delta^n$ y $\psi : \Delta^n \rightarrow |L|_d$ que son inversas entre sí. Además cada una preserva la métrica. Por lo tanto ambas son isometrías. \square

Nota. Observa que $|K|$ es la unión de todos los subespacios $|L|$, entonces el ejercicio anterior prueba que:

$$|K| = \bigcup_{L \in K} |L| \approx \bigcup \Delta^n,$$

es decir que la realización topológica de un complejo simplicial es una unión de simplejos geométricos estándares.

El ejercicio 6 y la nota anterior nos permite definirle una topología a $|K|$ sin mencionar métricas:

Definición 10. Sea K un complejo simplicial. Para cada $L \in K$, asigne a $|L|$ la topología inducida por el homeomorfismo $|L| \approx \Delta^n$. Entonces la *topología coherente* de $|K|$ está definido por:

$$U \subseteq |K| \text{ es abierto} \iff U \cap |L| \text{ es abierto } \forall L \in K$$

Nota. De ahora en adelante, $|K|$ se refiere a la realización topológica del complejo simplicial K con la topología coherente y $|K|_d$ a la realización topológica con la topología inducida por la métrica d del ejercicio 5.

Nota. Vale la pena mencionar que una función $f : |K| \rightarrow X$ es continua si y sólo si $f|_{|L|} : |L| \rightarrow X$ es continua para toda $L \in K$. Esto quiere decir que $\text{Id} : |K| \rightarrow |K|_d$ es continua porque $\text{Id}|_{|L|} : |L| \rightarrow |L|_d$ es continua por definición de la topología de $|L|$ (como $|L| \approx \Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, la métrica d restringida a $|L|$ coincide exactamente con la euclidea de \mathbb{R}^{n+1}). Por lo tanto la topología coherente es más fina que la topología inducida por la métrica d , es decir tiene más abiertos.

Definición 11. Un complejo simplicial K es *localmente finito* si para cada $v \in V_K$ sólo hay una cantidad finita de $L \in K$ tales que $v \in L$, es decir que el conjunto $\{L \in K \mid v \in L\}$ es finito para todo vértice v .

La importancia de esta condición se muestra en el siguiente teorema:

Teorema 1. Sea K un complejo simplicial. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. K es localmente finito.
2. $|K|$ es compacto.
3. $\text{Id} : |K| \rightarrow |K|_d$ es un homeomorfismo, es decir que la topología coherente coincide con la topología inducida por la métrica d .
4. $|K|$ es metrizable.
5. $|K|$ satisface el primer axioma de numerabilidad, ie. todo punto $\sigma \in |K|$ tiene una base local numerable.

0.1.3 Triangulaciones y nervios

Definición 12. Un espacio X es *triangulable* si existe un complejo simplicial K tal que $|K| \approx X$.

Ejercicio 7. Sea $V_K = \{0, e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2$ y $K = \{\{0\}, \{e_1\}, \{e_2\}, \{0, e_1\}, \{0, e_2\}, \{e_1, e_2\}\}$ (cf. ejemplo 1). Prueba que $|K| \approx \mathbb{S}^1$, es decir que \mathbb{S}^1 es triangulable.

Proof. □

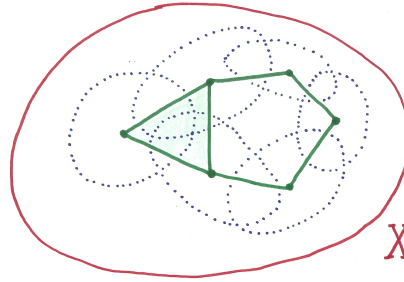
Este ejercicio se generaliza a variedades:

Teorema 2. *Toda variedad suave es triangulable.*

Ahora doy un ejemplo de un complejo simplicial abstracto:

Definición 13. (Alexandrov y Čech) Sean X un espacio topológico y $\mathcal{C} = \{C_j\}_{j \in J}$ una familia de subespacios (en general se toma una cubierta abierta). El *nervio* de \mathcal{C} , denotado por \mathcal{NC} es el complejo simplicial con vértices $V_{\mathcal{NC}} = J$, el conjunto de índices, y n -simplejos de la forma $L = \{j_0, \dots, j_n\}$ donde $C_{j_0} \cap \dots \cap C_{j_n} \neq \emptyset$.

Por ejemplo, un sub-complejo simplicial de un nervio se puede ver como:



0.1.4 Homología Simplicial

Primero estudio la orientación de los complejos simpliciales.

Definición 14. Sea K un complejo simplicial y $\sigma \in K$ un n -simplejo. Además sea $\Sigma = \Sigma(\sigma)$ el conjunto de funciones biyectivas $\underline{n} \rightarrow \sigma$, donde $\underline{n} = \{0, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$. Entonces hay una relación de equivalencia:

$$f \simeq g \iff g^{-1}f \in S_{n+1} \text{ es una permutación par.}$$

Ejercicio 8. Prueba que solamente hay dos clases de equivalencia que son $[f]$ y $[\bar{f}]$ donde $\bar{f} = \tau \circ f$ donde $\tau \in S_{n+1}$ es la permutación que transpone el 0 y el 1 y fija a los demás.

Proof. Sea A_{n+1} el grupo alternante, ie. las permutaciones pares del grupo simétrico S_{n+1} . Defino la siguiente acción derecha:

$$\Sigma \times A_{n+1} \longrightarrow \Sigma \quad \text{con} \quad (f, \alpha) \longmapsto f \circ \alpha.$$

Claramente es una acción derecha porque $(f, 1) \mapsto f \circ 1 = f$ y

$$\begin{aligned} ((f, \alpha), \beta) &\mapsto (f \circ \alpha, \beta) = (f \circ \alpha) \circ \beta = f \circ (\alpha \circ \beta) \\ \therefore (f\alpha)\beta &= f(\alpha\beta). \end{aligned}$$

Ahora sea $f \in \Sigma$. Calculo su grupo de isotropía:

$$(A_{n+1})_f = \{\alpha \in A_{n+1} \mid f \circ \alpha = f\} = \{1\}.$$

Esto es porque si $\alpha \in A_{n+1}$ mueve un elemento entonces $f \circ \alpha$ y f difieren en ese elemento. Más precisamente, si $\alpha \neq 1$, existen $i \neq j \in \underline{n}$ tal que $\alpha(i) = j$ y por lo tanto $(f \circ \alpha)(i) = f(\alpha(i)) = f(j) \neq f(i)$, ie. $f \circ \alpha \neq f$, porque f es biyectiva. Este argumento prueba que la acción de A_{n+1} sobre Σ es libre.

Por el ejercicio ??, hay una biyección (de hecho un homeomorfismo porque Σ y A_{n+1} son finitos con la topología discreta) entre

$$\mathcal{O}(f) \longleftrightarrow \frac{A_{n+1}}{(A_{n+1})_f} = \frac{A_{n+1}}{1} \cong A_{n+1}$$

Esto quiere decir que todas las órbita de la acción tienen $(n+1)!/2$ elementos². Además observa que:

$$\mathcal{O}(f) = \{g \in \Sigma \mid \exists \alpha \in A_{n+1} \text{ tal que } g \circ \alpha = f\} = \{g \in \Sigma \mid \exists \alpha \in A_{n+1} \text{ tal que } \alpha = g^{-1}f\} = [f] \in \Sigma/\sim$$

Ahora, Σ tiene $(n+1)!$ elementos por ser el conjunto de funciones biyectivas entre dos conjuntos con $n+1$ elementos. Como las órbitas forman una partición de Σ y cada órbita tienen la mitad de los elementos de Σ , sólo puede haber dos órbitas. Sea $f \in \Sigma$ arbitrario, pruebo que $\Sigma/\sim = \{[f], [\bar{f}]\}$, es decir que $f \not\sim \bar{f}$.

Observa que:

$$f \circ \bar{f}^{-1} = f \circ (\tau \circ f)^{-1} = f \circ (f^{-1} \circ \tau^{-1}) = \tau^{-1} = \tau.$$

Como τ es una transposición, es una permutación impar. Por lo tanto $f \not\sim \bar{f}$ y acabo. \square

En la prueba del ejercicio anterior se vió que $\Sigma(\sigma)/\sim$ tiene naturalmente una estructura de grupo isomorfa a \mathbb{Z}_2 bajo el isomorfismo (continuo) $[f] \mapsto 1$ y $[\bar{f}] \mapsto -1$. Entonces, $\Sigma(\sigma)/\sim \cong \{1, -1\}$.

Definición 15. Sea K un complejo simplicial y $\sigma \in K$ un n -simplejo. Una *orientación* de σ es la pareja $(\sigma, \mathbf{o}_\sigma)$ donde $\mathbf{o}_\sigma \in \Sigma(\sigma)/\sim = \{1, -1\}$.

En variedades triangulables, las orientaciones de los complejos simpliciales que realizan a la variedad cumplen varias propiedades importantes.

Sea M^n una variedad compacta de dimensión n con triangulación $M \approx |K|$. Entonces cada simplejo de K es cara de un n -simplejo y además cada $(n-1)$ -simplejo es cara de exactamente dos n -simplejos. Estas dos propiedades permiten definir orientación de complejos simpliciales que realizan variedades compactas.

Definición 16. Sea M^n una variedad suave y compacta tal que $M \approx |K|$ para algún complejo simplicial K . Una *orientación* de K es una elección de una orientación para cada n -simplejo $\sigma \in K$, que cumple que las dos orientaciones inducidas en cada $(n-1)$ -simplejo de K son distintas.

Más precisamente, cada $(n-1)$ -simplejo $\sigma \in K$ es cara de exactamente dos n -simplejos $\tau, \tau' \in K$. Entonces la orientaciones \mathbf{o}_τ y $\mathbf{o}_{\tau'}$ deben ser distintas, ie. $\mathbf{o}_\tau = -\mathbf{o}_{\tau'}$.

²Esto se sigue del teorema de Langrange y de que $(S_{n+1} : A_{n+1}) = 2$. La función $S_{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ que le asocia a una permutación $\alpha \in S_{n+1}$ su signo $\alpha \mapsto \text{sgn}(\alpha) \in \{-1, 1\}$, es un epimorfismo de grupos con kernel A_{n+1} lo cual implica que $S_{n+1}/A_{n+1} \cong \mathbb{Z}_2$. Por el teorema de Lagrange $\#(S_{n+1}) = (S_{n+1} : A_{n+1})\#(A_{n+1}) \implies \frac{1}{2}\#(S_{n+1}) = \frac{1}{2}(n+1)! = \#(A_{n+1})$.