## 0.1 Cobordismo

### 0.1.1 Conos

**Definición 1.** El *cono* de un espacio $X$ se define como:

$$CX := (X \times I)/_{X\times\{1\}}$$

Si el espacio es basado, ie $(X, x)$, entonces su cono se define como

$$C(X, x) := (X \times I)/_{(X\times\{1\})\cup(\{x\}\times I)}$$

Ve la figura 1.

*Nota.* Observa que el cono viene equipado de una inclusión natural $\imath : X \hookrightarrow CX$ con la regla $x \mapsto [x, 0]$.

**Ejercicio 1.** El cono de cualquier espacio $X$ es contraible.

*Proof.* Demostraré que $\mathrm{Id}_{CX} \simeq \mathrm{cte}_*$ donde $* = [x, 1] \in CX$. Defino la homotopía $H : (X \times I) \times I \to CX$ con

$$H((x, s), t) = [x, t + (1 - t)s].$$

Claramente $H_0 = \mathrm{Id}$ y $H_1 = \mathrm{cte}_*$. Además $H((x, 1), t) = [x, 1]$ para toda $x$. Por lo tanto $H$ se factoriza a través de $X \times \{1\}$:

$$\begin{tikzcd}
(X \times I) \times I \arrow[r, "H"] \arrow[d, two heads, "\nu"'] & CX \\
CX \times I \arrow[ur, dashed, "\bar{H}"'] &
\end{tikzcd}$$

También $\bar{H}_0 = \mathrm{Id}_{CX}$ y $\bar{H}_1 = \mathrm{cte}_*$. $\bar{H}$ es continua porque $H$ es continua. Por lo tanto $\bar{H}$ es una homotopía y $\mathrm{Id}_{CX} \simeq \mathrm{cte}_*$. $\square$

**Lema 1.** *Sea $f : X \to Y$ una función continua. $f$ es contraible si y sólo si $f$ se extiende a $CX$, es decir:*

$$f \simeq cte \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{tikzcd}
CX \arrow[dr, dashed, "\hat{f}"] & \\
X \arrow[u, hook, "\imath"] \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

*Proof.* ($\Longrightarrow$) Supongo que $f \simeq \mathrm{cte}$ mediante la homotopía $H : X \times I \to Y$. Como $H_1(x) = H(x, 1) = \mathrm{cte}(x) = y_0 \in Y$, entonces $H$ se factoriza a través de $(X \times I)/_{(X\times\{1\})} = CX$:

$$\begin{tikzcd}
X \times I \arrow[r, "H"] \arrow[d, two heads, "\nu"'] & Y \\
CX \arrow[ur, dashed, "\bar{H}"'] &
\end{tikzcd}$$

Aquí $\bar{H}$ es continua porque $H$ es continua y $\nu$ es una identificación.

Como $H_0 = f$, entonces $\bar{H}$ restringido a $X \times \{0\}$ es $f$, o equivalentemente $\bar{H} \circ \imath = f$. Por lo tanto $\bar{H}$ es la extensión de $f$ buscada.

($\Longleftarrow$) Sea $\hat{f} : CX \to Y$ una extensión de $f$ y defino $H = \hat{f} \circ \nu$. Observa que

$$\begin{aligned}
H(x, 0) &= \hat{f}[x, 0] = \hat{f}(\imath(x)) = f(x) \\
H(x, 1) &= \hat{f}(*) = y_0
\end{aligned}$$

donde $* = [x, 1] \in CX$. Por lo tanto si cte es la función constante $y_0$, entonces $f \simeq \mathrm{cte}$.

$\square$

**Ejercicio 2.** Si $f : (X, x) \to (Y, y)$ es basado, entonces $f \simeq \mathrm{cte}_y$ si y sólo si $f$ se extiende a un $\hat{f} : C(X, x) \to (Y, y)$.

*Proof.* ($\Longrightarrow$) Supongo que $f \simeq \mathrm{cte}_y$ mediante la homotopía basada $H : (X, x) \times I \to (Y, y)$. Como $H_1(x') = H(x', 1) = \mathrm{cte}_y(x') = y$ y $H_1(x, t) = y$ para toda $x' \in X$ y $t \in I$, $H$ se factoriza a través de $(X \times \{1\}) \cup (\{x\} \times I)$:

$$\begin{tikzcd}
(X,x) \times I \arrow[r, "H"] \arrow[d, two heads, "\nu"'] & (Y,y) \\
C(X,x) \arrow[ur, dashed, "\bar{H}"'] &
\end{tikzcd}$$

Aquí $\bar{H}$ es continua porque $H$ es continua y $\nu$ es una identificación.

Como $H_0 = f$, entonces $\bar{H}$ restringido a $X \times \{0\}$ es $f$, o equivalentemente $\bar{H} \circ \imath = f$. Por lo tanto $\bar{H}$ es la extensión de $f$ buscada.

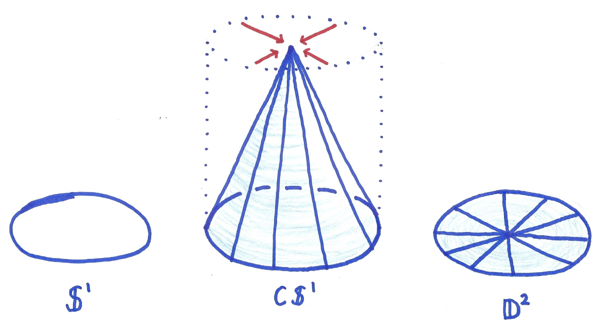
($\Longleftarrow$) Sea $\hat{f} : C(X, x) \to (Y, y)$ una extensión de $f$ y defino $H = \hat{f} \circ \nu$. Observa que

$$\begin{aligned}
H(x', 0) &= \hat{f}[x', 0] = \hat{f}(\imath(x')) = f(x') \quad \forall x' \in X \\
H(x', 1) &= \hat{f}(*) = y_0 \quad \forall x' \in X \\
H(x, t) &= y \quad \forall t \in I
\end{aligned}$$

donde $* = [x', 1] \in CX$. Por lo tanto $H$ es una homotopía basada, es decir $f \simeq \mathrm{cte}_y$.

$\square$

**Ejemplo 1.** $C\mathbb{S}^1 \approx \mathbb{D}^2$




### 0.1.2 Clases de cobordismo

Recuerda que si $N$ es una variedad suave, entonces $N \times I$ es una variedad suave con frontera $\partial N \sqcup \partial N$. En particular

$$\partial(\mathbb{S}^n \times I) = (\mathbb{S}^n \times \{0\}) \cup (\mathbb{S}^n \times \{1\}) = \mathbb{S}^n \sqcup \mathbb{S}^n.$$

Por lo tanto una homotopía $H : \mathbb{S}^n \times I \to X$ entre dos funciones $\alpha, \beta : \mathbb{S}^n \to X$ se cumple

$$H|_{\mathbb{S}^n \times \{0\}} = \alpha \quad \text{y} \quad H|_{\mathbb{S}^n \times \{1\}} = \beta,$$

donde podemos ver a los conjuntos $\mathbb{S}^n \times \{0\}$ y $\mathbb{S}^n \times \{1\}$ como la frontera de la variedad $\mathbb{S}^n \times I$. En otras palabras puedo decir que $\alpha$ y $\beta$ están relacionados porque existe una variedad (ie. $\mathbb{S}^n \times I$) que tiene como frontera los dominios de $\alpha$ y $\beta$ , y una función $H$ definida sobre esa variedad que se restringe a $\alpha$ y a $\beta$.

Hago más precisa esta idea:

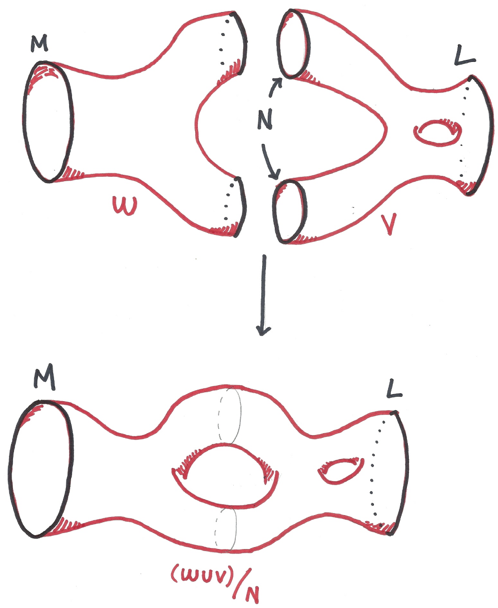
**Definición 2.** Sea $X$ un espacio topoloógico. Si $M^n$ es una variedad suave y compacta, la pareja $(M, f)$ es simplemente una función continua $f : M \to X$ donde $M$ es considerada como subvariedad de algún espacio euclideano. La *relación de cobordismo* es la siguiente relación de equivalencia sobre tales parejas:

$$(M^n, f) \sim (N^n, g) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists F : W^{n+1} \to X; \text{ continua tal que } \begin{cases} (i) & \partial W \cong M \sqcup N \\ (ii) & F|_M = f \text{ y } F|_N = g \end{cases}$$

donde $W$ es una variedad suave, compacta, con frontera y de dimensión $n+1$.

Observa que sí es una relación de equivalencia. Claramente es simétrica por definición. Es reflexiva porque $(M,f) \sim (M,f)$ mediante la variedad $W = M \times I$, que tiene frontera $\partial W = M \sqcup M$, y la función $F : W \to X$ definida por $F(x,t) = f(x)$. La transitividad es difícil de probar porque requiere un resultado muy fuerte de topología diferencial.

Sean $(M,f) \sim (N,g)$ y $(N,g) \sim (L,h)$ mediante $F : W \to X$ y $G : V \to X$ respectivamente. Lo ideal es "pegar" $W$ y $V$ a lo largo de $N$:




para obtener la variedad suave $(W \cup V)/_N =: Y$, y así poder definir

$$H : Y \to X \quad \text{con} \quad Y(x) = \begin{cases} F(x) & \text{si } x \in W \\ G(x) & \text{si } x \in V \end{cases}$$

que claramente implica que $(M,f) \sim (L,h)$. Lo único que faltaría probar es que $Y$ es una variedad suave, pero esto es consecuencia de los siguientes dos teoremas:

**Teorema 2.** *Toda variedad suave $M$ con frontera tiene un collar, es decir existe un encaje $(\partial M \times [0,1)) \hookrightarrow M$.*

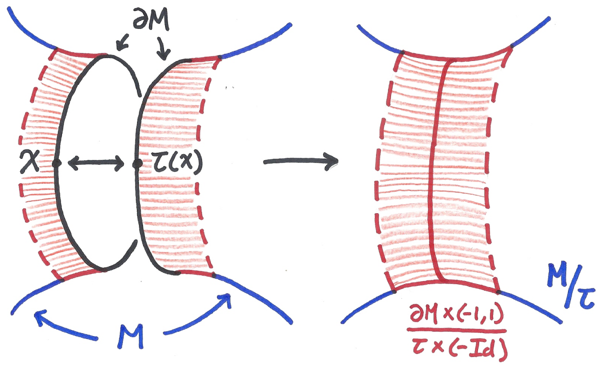
**Teorema 3.** *Sea $M$ una variedad suave con frontera, $\kappa : (\partial M \times [0,1)) \to M$ un collar y $\tau : \partial M \to \partial M$ una función suave libre de puntos fijos tal que $\tau \circ \tau = Id$. Entonces el espacio cociente $M/_\tau := M/_{x\sim\tau(x)}$ tiene una única estructura diferenciable tal que la inclusión $M - \partial M \subset M/_\tau$ y la función*

$$\widehat{\kappa} : \frac{\partial M \times (-1,1)}{\tau \times (-Id)} \longrightarrow \frac{M}{\tau} \quad \textit{con} \quad \widehat{\kappa}[x,t] = \begin{cases} \kappa(x,t) & \textit{si } t \geq 0 \\ \kappa\big(\tau(x), -t\big) & \textit{si } t \leq 0 \end{cases}$$

*son encajes.*

En palabras, este último teorema dice que un collar permite identificar la frontera mediante una involución sin puntos fijos de tal manera que el resto de la variedad (ie. $M - \partial M$) no cambia y que los collares se pegan para dar un abierto de la variedad.

*Nota.* Para la transitividad, estoy usando como variedad a $W \sqcup V$ y como involución $\tau : N \to N$ que simplemente cambia de copia de $N$ (observa que este no tiene puntos fijos porque el dominio y el contradominio de *tau* son copias distintas de $N$ como subvariedad de $W \sqcup V$).




**Definición 3.** Al conjunto de clases de equivalencia $[M, f]$ donde $M$ es cerrada de dimensión $n$ y $f : M \to X$, se denota $\eta_n(X)$. Es un grupo abeliano con la suma

$$[M, f] + [N, g] := [M \sqcup N, f \sqcup g]$$

y neutro $0 = [\mathbb{S}^n, \text{cte}]$.

En efecto, $(M \sqcup \mathbb{S}^n, f \sqcup \text{cte}) \sim (M, f)$ mediante la variedad $(M \times I) \sqcup \mathbb{D}^{n+1}$, que tiene frontera $M \sqcup (M \sqcup \mathbb{S}^n)$, y la función

$$F(x) = \begin{cases} f(y) & \text{si } x = (y,t) \in M \times I \\ \text{cte} & \text{si } x \in \mathbb{D}^{n+1} \end{cases}.$$

*Nota.* Para evitar problemas conjuntistas, estoy asumiendo que todas las $n$-variedades cerradas están encajadas en $\mathbb{R}^{2n}$.

**Ejercicio 3.** Todo elemento de $\eta_n(X)$ es su propio inverso, es decir $-[M, f] = [M, f]$.

*Proof.* Observa que $[M, f] + [M, f] = [M \sqcup M, f \sqcup f]$. Ahora considera la variedad $N = (M \times I) \sqcup \mathbb{D}^{n+1}$ de dimensión $n + 1$. Ahora defino $F : N \to X$ como

$$F(x) = \begin{cases} f(y) & \text{si } x = (y,t) \in M \times I \\ \text{cte} & \text{si } x \in \mathbb{D}^{n+1} \end{cases}.$$

Claramente es continua porque $F = (f \circ p) \sqcup \text{cte}$ donde $f \circ p$ es la composición $M \times I \xrightarrow{p} M \xrightarrow{f} X$. Además $\partial N = (M \sqcup M) \sqcup \mathbb{S}^n$ y por último $F|_{M \sqcup M} = f \sqcup f$ y $F|_{\mathbb{S}^n} = \text{cte}$ porque $M \sqcup M \subset (M \times I)$ y $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{D}^{n+1}$ donde $F$ vale, por definición, $f \sqcup f$ y cte respectivamente.

Por lo tanto $[M \sqcup M, f \sqcup f] \sim [\mathbb{S}^n, \text{cte}] = 0$ y así $-[M, f] = [M, f]$. □

*Proposición* 1. En $\eta_n(X)$, $[M, f] = 0$ si y sólo si existe una $(n+1)$-variedad compacta $N$ y una función continua $F : N \to X$ tal que $\partial N \cong M$ y $F|_M = f$.

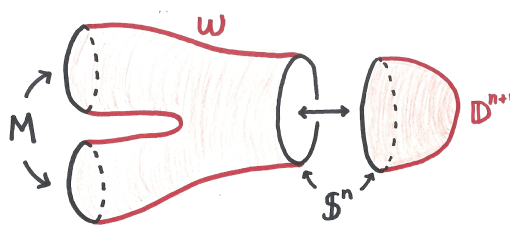
*Proof.*

($\Longrightarrow$) Por hipótesis existe una variedad $W^{n+1}$ compacta y una función continua $F : W \to X$ tal que $\partial W \cong M \sqcup \mathbb{S}^n$, $F|_M = f$ y $F|_{\mathbb{S}^n} = \text{cte}$. Como $\partial \mathbb{D}^{n+1} = \mathbb{S}^n$ entonces mediante un collar puedo pegar $\mathbb{D}^{n+1}$ y $W$ a lo largo de $\mathbb{S}^n$. A esta nueva variedad la llamo $N$, es decir $N = (W \cup \mathbb{D}^{n+1})/_{\mathbb{S}^n}$. También defino $G : N \to X$ como $G = F \sqcup \text{cte}$. Como $G|_{\mathbb{S}^n} = \text{cte} = F|_{\mathbb{S}^n}$ entonces $G$ pasa al cociente y es continua. Claramente $G|_M = F|_M = f$.

($\Longleftarrow$) Sea $N$ la variedad garantizada por hipótesis y defino $W = N \sqcup \mathbb{D}^{n+1}$ junto con $G : W \to X$ como $G = F \sqcup \text{cte}$. Observa que $\partial W = \partial N \sqcup \partial \mathbb{D}^{n+1} \cong M \sqcup \mathbb{S}^n$. Además:

$$\begin{aligned} G|_M &= G|_{\partial N} = F|_{\partial N} = F|_M = f \\ G|_{\mathbb{S}^n} &= G|_{\partial \mathbb{D}^{n+1}} = (G|_{\mathbb{D}^{n+1}})|_{\partial \mathbb{D}^{n+1}} = (\text{cte})|_{\partial \mathbb{D}^{n+1}} = \text{cte}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $[M, f] = [\mathbb{S}^n, \text{cte}] = 0$.




$\square$

Observa que si $\varphi : X \to Y$ es continua, entonces éste induce un morfismo de grupos $\varphi_* : \eta_n(X) \to \eta_N(Y)$ definido por $\varphi_*[M, f] \mapsto [M, \varphi \circ f]$. Entonces $\eta_n : \mathbf{Top} \to \mathbf{Ab}$ es un funtor:

**Ejercicio 4.** La asignación $X \mapsto \eta_n(X)$ es funtorial, es decir $\mathrm{Id}_* = \mathrm{Id}$ y $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$.

*Proof.* Sean $[M, f] \in \eta_n(X)$ y $\varphi : X \to Y$, $\psi : Y \to Z$ funciones continuas.

$$(\mathrm{Id}_X)_*[M, f] = [M, \mathrm{Id}_X \circ f] = [M, f] \quad \Longrightarrow \quad (\mathrm{Id}_X)_* = \mathrm{Id}_{\eta_n(X)}.$$

Además:

$$(\varphi \circ \psi)_*[M, f] = [M, (\varphi \circ \psi) \circ f] = [M, \varphi \circ (\psi \circ f)] = \varphi_*[M, \psi \circ f] = \varphi_*\big(\psi_*[M, f]\big)$$

Por lo tanto $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$ y acabo. $\square$

*Nota.* Este último ejercicio prueba que $X \mapsto \eta_n(X)$ es un funtor entonces preserva isomorfismos, es decir:

$$X \approx Y \quad \Longrightarrow \quad \eta_n(X) \cong \eta_n(Y)$$

o en otras palabras, $\eta_n$ es un invariante topológico.

De hecho, $\eta_n$ es más que un invariante topológico, es un invariante homotópico. Para probar esto necesito:

*Proposición* 2. Sean $\varphi, \psi : X \to Y$ funciones continuas. Entonces $\varphi \simeq \psi \Longrightarrow \varphi_* = \psi_*$.

*Proof.* Sea $[M, f] \in \eta_n(X)$, entonces $\varphi_*[M, f] = [M, \varphi \circ f]$ y $\psi_*[M, \psi \circ f]$. Por hipótesis $\varphi \simeq \psi$ mediante alguna homotopía $H : X \times I \to Y$ (en particular $H_0 = \varphi$ y $H_1 = \psi$). Ahora considera $F : M \times I \to Y$ definido por la composici'on

$$M \times I \xrightarrow{f \times \mathrm{Id}} X \times I \xrightarrow{H} Y \;.$$

Observa que $F(x, 0) = H(f(x), 0) = \varphi(f(x))$ y $F(x, 1) = H(f(x), 1) = \psi(f(x))$, es decir:

$$F|_{M \times \{0\}} = \varphi \circ f \quad \text{y} \quad F|_{M \times \{1\}} = \psi \circ f.$$

Como $\partial(M \times I) = (M \times \{0\}) \sqcup (M \times \{1\}) = M \sqcup M$ y $F$ es continua, entonces $[M, \varphi \circ f] \sim [M, \psi \circ f]$ y así $\varphi_*[M, f] = \psi_*[M, f]$ para toda $[M, f] \in \eta_n(X)$. $\square$

**Ejercicio 5.** Para toda $n$, se tiene que $X \simeq Y \Longrightarrow \eta_n(X) \cong \eta_n(Y)$, es decir que $\eta_n$ es un invariante homotópico.

*Proof.* Por hipótesis existen $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ continuas tales que $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_Y$ y $g \circ f \simeq \mathrm{Id}_X$. La proposición pasada y el ejercicio 4 garantizan que:

$$\mathrm{Id}_{\eta_n(Y)} = (\mathrm{Id}_Y)_* = (f \circ g)_* = f_* \circ g_* \quad \text{y} \quad \mathrm{Id}_{\eta_n(X)} = (\mathrm{Id}_X)_* = (g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

lo cual implica que $f_* : \eta_n(X) \to \eta_n(Y)$ y $g_* : \eta_n(Y) \to \eta_n(X)$ son isomorfismos. Por lo tanto $\eta_n(X) \cong \eta_n(Y)$. $\square$

Esta idea se puede generalizar. En lugar de tomar $M^n$ sin frontera para las clases $[M, f]$, puedo tomar $M$ con frontera tal que $f[\partial M] \subseteq A$ donde $A \subseteq X$ es un conjunto cerrado fijo. Estas clases se denotan por $\eta_n(X, A)$. Estos grupos son importantes porque forman una sucesión exacta larga:

$$\cdots \longrightarrow \eta_n(A) \longrightarrow \eta_n(X) \longrightarrow \eta_n(X, A) \xrightarrow{\delta} \eta_{n-1}(A) \longrightarrow \eta_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

donde $\delta[M, f] = [\partial M, f|_{\partial M}]$. Los grupos $\eta_n(X, A)$ cumplen la propiedad de *escisión*:

**Teorema 4.** *Sea $U \subset A \subseteq X$ tal que $\bar{U} \subseteq \mathring{A}$. Entonces la inclusión $\imath : (X - U, A - U) \hookrightarrow (X, A)$ induce un isomorfismo $\eta_n(X - U, A - U) \cong \eta_n(X, A)$.*

En general si $h_*(X, A) = \{h_n(X, A)\}_{n=0}^{\infty}$ es una familia de grupos abelianos tales que $(X, A) \mapsto h_N(X, A)$ es funtorial, existe una sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow h_n(A) \longrightarrow h_n(X) \longrightarrow h_n(X, A) \longrightarrow h_{n-1}(A) \longrightarrow h_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

y cada $h_n$ cumple la propiedad de escición, se dice que $h_*(X, A)$ es una teoría de homología.

Ahora calculo $\eta_n$ de un punto. Para esto, denoto $\eta_n := \eta_n(\{x\})$. Observa que los elementos de $\eta_n$ son de la forma $[M, \mathrm{cte}]$. Por lo tanto $[M] = [N]$ si y sólo si existe una variedad $W^{n+1}$ y una función $F : W \to \{x\}$ continua (ie. $F = \mathrm{cte}$) tal que $\partial W = M \sqcup N$. Como $F$ es necesariamente constante, dos elementos $[M, \mathrm{cte}]$ y $[N, \mathrm{cte}]$ de $\eta_n$ son iguales si son frontera de una variedad de dimensión $n + 1$. Vale la pena mencionar que si $M = \partial N$ entonces $[M, \mathrm{cte}] = 0 = [\mathbb{S}^n, \mathrm{cte}]$; nada más toma $W = N \sqcup \mathbb{D}^{n+1}$.

Como todas las funciones en este caso son constantes, denotaré a la clase $[M, \mathrm{cte}] \in \eta_n$ simplemente por $[M]$ y se llama la *clase de bordismo de $M$*. Calcular las clases de bordismo de variedades de dimensión cero es sencillo:

**Ejercicio 6.** La función $\Phi : \eta_0 \to \mathbb{Z}_2$ definido por $[M] \mapsto \#M \mod 2$ es un isomorfismo.

*Proof.* Primero observa que para todo elemento $[M] \in \eta_0$, $M$ es compacto, entonces $M$ es un conjunto finito de puntos. Así tiene sentido definir $\Phi$.

Para probar que $\Phi$ está bien definido, supongo que $[M] = [N]$ para variedades cerradas $M = \{x_1, \ldots, x_m\}$ y $N = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Esto quiere decir que hay una 1-variedad $W$ tal que $\partial W = M \sqcup N$. Como $W$ es una 1-variedad, entonces necesariamente es la unión disjunta de intervalos (ie. trayectorias) y de círculos. Como $\partial \mathbb{S}^1 = \emptyset$, puedo asumir que $W$ es simplemente la unión disjunta de trayectorias.

La frontera de una trayectoria es la unión disjunta de su punto inicial y su punto final (ya que por suposición esta trayectoria no puede ser un lazo). Por lo tanto por cada pareja de puntos en $M \sqcup N$ hay una trayectoria (que es una componente de $W$) que las une. Además esta trayectoria es única ya que si hay dos trayectorias que tienen el mismo punto inicial (o final), este punto deja de ser parte de la frontera.

Con esto puedo concluir que las componentes de $W$ inducen un apareamiento entre los elementos de $M \sqcup N$ sin dejar un punto libre (ya que de lo contrario $W$ no sería de dimensión 1). Por lo tanto $M \sqcup N$, que tiene $n + m$ elementos, tiene una cantidad par de puntos. Por lo tanto $n$ y $m$ necesariamente tienen la misma paridad, o en otras palabras $m \equiv n \mod 2$. Con esto conluyo que $\Phi[M] = \Phi[N]$ y $\Phi$ está bien definido.

Observa que

$$\Phi\big([M] + [N]\big) = \Phi[M \sqcup N] = \#(M \sqcup N) = \#M + \#N = \Phi[M] + \Phi[N]$$

entonces al reducir módulo 2 obtengo que $\Phi$ es un homomorfismo de grupos.

Claramente es sobre porque

$$\begin{aligned} \Phi[\{x_0\}] = \#\{x_0\} &\equiv 1 \mod 2 \\ \Phi[\{x_0, x_1\}] = \#\{x_0, x_1\} = 2 &\equiv 0 \mod 2. \end{aligned}$$

Por último, si $\Phi[M] = 0$ entonces $\#M$ es par, es decir $M$ es un conjunto par de puntos, digamos $2n$. Si $W = I \sqcup \cdots \sqcup I$ es la unión disjunta de $n$ intervalos entonces $M$ es difeomorfo a

$$\partial W = \bigsqcup_{j=1}^{n} \partial I = \bigsqcup_{j=1}^{n} \{0, 1\}$$

y así $M$ es la frontera de una 1-variedad. Por lo tanto $[M] = 0$ y $\ker \Phi = 0$.

Con esto he probado que $\Phi$ es un isomorfismo y que $\eta_0 \cong \mathbb{Z}_2$. $\square$

Para calcular $\eta_1$, sólo basta recordar la clasificación de variedades cerradas de dimensión 1: si $[M] \in \eta_1$ entonces $M \cong \mathbb{S}^1 \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{S}^1$ y así $[M] = [\mathbb{S}^1 \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{S}^1] = [\mathbb{S}^1] + \cdots + [\mathbb{S}^1] = 0 + \cdots + 0 = 0$ para toda $[M] \in \eta_1$. Por lo tanto $\eta_1 = 0$.

Para dimensión 2, uso la clasificación de superficies cerradas: para toda $[M] \in \eta_2$ tengo que $M$ es una suma conexa de toros o una suma conexa de planos proyectivos. En el primer caso, $M$ es la frontera de ls suma conexa de toros rellena y así $[M] = 0$. Por lo tanto $\eta_2 = \mathbb{Z}_2$, generado por $[\mathbb{R}P^2]$.

En general,

$$\eta_* := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \eta_n$$

es un grupo abeliano graduado con graduación $\eta_n \times \eta_m \to \eta_{n+m}$ definido por $([M], [N]) \mapsto [M \times N]$.

**Teorema 5.** *(Thom) Sean $\{x_2, x_4, x_5, \ldots\}$ variables independientes con subíndices $n \neq 2^m - 1$ para toda $m$. Entonces $\eta_* \cong \mathbb{Z}_2[x_2, x_4, x_5, \ldots]$ donde el isomorfismo se puede tomar de tal manera que la imagen de $x_n$ es un elemento de $\eta_n$ y que $x_{2n} \mapsto [\mathbb{R}P^{2n}]$.*

De este teorema se tiene inmediatamente que $\eta_3 = 0$ porque no hay un polinomio $\pm x_2 \pm x_4 \pm x_5 \pm \cdots$ que corresponda a un $[M] \in \eta_3$ donde $M$ es de dimensión 3.

**Ejercicio 7.** $\eta_4 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

*Proof.* □

### 0.1.3 Cobordismo con Orientación

Hay una teoría similar al cobordismo si incluimos orientación:

**Definición 4.** Sobre el conjunto de parejas $((M, \mathfrak{O}_M), f)$, donde $M$ es una variedad cerrada con orientación $\mathfrak{O}_M$ y $f : M \to X$ es una función continua, defino la siguiente relación de equivalencia: $((M^n, \mathfrak{O}_M), f) \sim ((N^n, \mathfrak{O}_N), g)$ si y sólo si

$$\exists F : W^{n+1} \to X; \text{ continua tal que } \begin{cases} (i) & (\partial W, \mathfrak{O}_{\partial W}) \cong (M, \mathfrak{O}_M) \sqcup (N, \mathfrak{O}_N) \\ (ii) & F|_M = f \text{ y } F|_N = g \end{cases}$$

donde $W$ es una variedad suave, compacta, con frontera y el difeomorfismo entre las fronteras preserva las orientaciones.

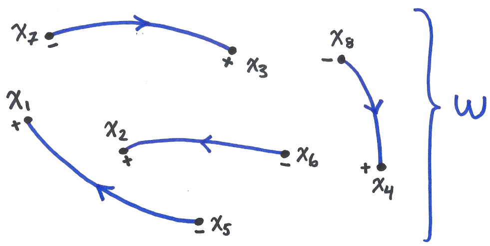
De la misma manera que definí $\eta_n$, defino $\Omega_n$ como las clases $[(M, \mathfrak{O}_M), f]$ sobre $X = \{x\}$. En este caso, $\Omega_0$ también son 0-variedades compactas, ie. conjuntos finitos pero como también están orientadas, cada punto viene con un signo. Por ejemplo si $M = \{x_1, x_2\}$ entonces una orientación de $M$ puede ser $(M, \mathfrak{O}_M) = \{(x_1, -1), (x_2, +1)\}$.

Más precisamente, si $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es una variedad compacta de dimensión 0, una orientación $\mathfrak{O}_M$ es un conjunto $\{\mathfrak{o}_1, \ldots, \mathfrak{o}_n\}$ donde $\mathfrak{o}_j \in \{-1, +1\}$. Entonces la variedad orientada se escribe como $(M, \mathfrak{O}_M) = \{(x_j, \mathfrak{o}_j)\}$. Por lo tanto puedo reordenar los elementos de $M$ tal que aparecen primero los que tienen orientación positiva. Es decir, puedo escribir $M = \{x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+m'}\}$ donde $\mathfrak{o}_j = +1$ para $j \in \{1, \ldots, m\}$ y $\mathfrak{o}_{m+j} = -1$ para $j \in \{1, \ldots, m'\}$.

Ahora me pregunto cuando $(M, \mathfrak{O}_M)$ es la frontera de una 1-variedad orientada $(W, \mathfrak{O}_W)$. Primero observa que toda 1-variedad compacta es la unión disjunta (finita) de intervalos/trayectorias y círculos, pero como sólo me interesa la frontera de $W$ y $\partial \mathbb{S}^1 = \emptyset$, puedo considerar solamente las $W$ cuyas componentes son unicamente intervalos/trayectorias (sin ser lazos). Además puedo asumir que $W$ está encajado en algún $\mathbb{R}^N$ entonces sí puedo asumir que los componentes de $W$ efectivamente son trayectorias, ie. imágenes suaves del intervalo $[0, 1]$.

En este caso, $\partial W$ es la unión disjunta de los puntos iniciales y finales de cada componente de $W$. Además ningún punto en $\partial W$ puede estar en dos trayectorias distintas ya que sucede uno de dos casos prohibidos: las trayectorias se intersectan y producen una variedad no diferenciable; el punto es inicial de una trayectoria y final de otra trayectoria que se pegan suavemente, pero en este caso este punto no está en $\partial W$. Por lo tanto cada pareja de elementos distintos de $\partial W$ están conectados por una única trayectoria en $\mathbb{R}^N$ que es una componente abierta de $W$. Además, una orientación de $W$ induce una orientación en

Figure 1:




$\partial W$: simplemente le asigna un $-1$ a los puntos iniciales y un $+1$ a los puntos finales. Para aclarar esta discusión, considera la figura 1 donde la frontera de $W$ es

$$(\partial W, \mathfrak{O}_{\partial W}) = \{(x_1,+1),(x_2,+1),(x_3,+1),(x_4,+1),(x_5,-1),(x_6,-1),(x_7,-1),(x_8,-1)\}$$

Observa que si $(M, \mathfrak{O}_M)$ es la frontera de la 1-variedad orientada $(W, \mathfrak{O}_W)$ entonces $M$ tiene la misma cantidad de puntos orientados positivamente que de puntos orientados negativamente; ya que las trayectorias inducen una biyección entre los puntos iniciales (ie. los puntos orientados negativamente) y los puntos finales (ie. los puntos orientados positivamente). En particular tengo:

*Proposición* 3. Si $(M, \mathfrak{O}_M)$ es una 0-variedad cerrada tal que $(M, \mathfrak{O}_M) \cong (\partial W, \mathfrak{O}_{\partial W})$, donde el difeomorfismo preserva orientación, entonces

$$\#\{x \in M \mid \mathfrak{o}_x = +1\} = \#\{x \in M \mid \mathfrak{o}_x = -1\}.$$

Más generalmente tengo:

**Ejercicio 8.** Para cada 0-variedad orientada $(M, \mathfrak{O}_M)$ donde $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y $\mathfrak{O}_M = \{\mathfrak{o}_1, \ldots, \mathfrak{o}_n\}$ (con cada $\mathfrak{o}_j \in \{-1, 1\}$), defino la función $\Phi : \Omega_0 \to \mathbb{Z}$ como

$$\Phi[M, \mathfrak{O}_M] = \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{o}_j.$$

Prueba que $\Phi$ es un isomorfismo, y en particular $\Omega_0 \cong \mathbb{Z}$.

*Proof.* Primero pruebo que $\Phi$ está bien definido. Sean $[M, \mathfrak{O}_M] = [N, \mathfrak{O}_N]$, entonces $M \sqcup N$ es la frontera de una 1-variedad orientada $(W, \mathfrak{O}_W)$. Como en la discusión anterior, escribo $M \sqcup N = \{x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_{s+s'}\}$ donde la orientación de $x_j$ es positiva para $j \in \{1, \ldots, s\}$ y negativa para el resto. Por la proposición 3, sé que $s = s'$.

Por otro lado supongo que $M$ tiene $m$ puntos orientados positivamente y $m'$ puntos orientados negativamente, en particular $\Phi[M, \mathfrak{O}_M] = m - m'$. Similarmente también supongo que $\Phi[N, \mathfrak{O}_N] = n - n'$ (con la misma notación, es decir $N$ tiene $n$ puntos positivos y $n'$ puntos negativos). Claramente la cantidad de puntos en $M \sqcup N$ orientados positivamente es $s = m + n$. Similarmente $s' = m' + n'$. Por lo tanto si sustituyo esto en la fórmula garantizada por la proposición 3, obtengo que

$$s = s' \quad \Longrightarrow \quad m + n = m' + n' \quad \Longrightarrow \quad m - m' = n - n' \quad \Longrightarrow \quad \Phi[M, \mathfrak{O}_M] = \Phi[N, \mathfrak{O}_N]$$

y concluyo que $\Phi$ está bien definida.

Ahora supongo que $\Phi[M, \mathfrak{O}_M] = m - m' = n - n' = \Phi[N, \mathfrak{O}_N]$, entonces $m + n = m' + n'$ y así $M \sqcup N$ tiene la misma cantidad de puntos orientados positivamente que de puntos orientados negativamente. Entonces existe una biyección

$$\{x \in M \sqcup N \mid \mathfrak{o}_x = +1\} \longleftrightarrow \{x \in M \sqcup N \mid \mathfrak{o}_x = -1\}.$$

Por lo tanto con esta asociación puedo contruir trayectorias que inicia en un punto orientado negativamente y terminan en el punto orientado positivamente que está asociado al punto inicial. De esta manera la unión disjunta de estas trayectorias está orientada y la orientación que induce sobre su frontera, ie. $M \sqcup N$, es exactamente la orientación de $M \sqcup N$.

Por lo tanto $M \sqcup N$ es la frontera de una 1-variedad compacta orientada y así $[M, \mathfrak{O}_M] = [N, \mathfrak{O}_N]$ y $\Phi$ es inyectiva.

$\Phi$ es claramente sobreyectiva porque

$$\begin{aligned}
\Phi[\{(x_1, +1), \ldots, (x_1, +1)\}] = 1 + \cdots + 1 &= n \\
\Phi[\{(x_1, -1), \ldots, (x_1, -1)\}] = -1 - \cdots - 1 &= -n \\
\Phi[\{(x_1, +1), (x_2, -1)\}] = 1 - 1 &= 0.
\end{aligned}$$

$\square$