## 0.1 Generalización del grupo fundamental a otras dimensiones

Para poder generalizar el grupo fundamental a otras dimensiones, necesito encontrar otra definición equivalente de la cual resulte obvio generalizar a otras dimensions. Para este fin, considera el siguiente argumento:

Un lazo $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ es una función continua $\alpha : I \to X$ tal que $\alpha(0) = x_0 = \alpha(1)$. Esto significa que $\alpha$ se factoriza a través de $I/\partial I$. Más precisamente:

La función $\nu I \to \mathbb{S}^1$ definido por $\nu(t) = e^{2\pi i t}$ es continua y sobre. Además, para toda $U \subseteq \mathbb{S}^1$ se tiene

$$U \text{ es abierto} \quad \iff \quad \nu^{-1}[U] \text{ es abierto.}$$

Por lo tanto $\nu$ es una proyección de espacios topológicos.

Esto quiere decir que $\mathbb{S}^1$ tiene la topología cociente: sobre $I$ definimos la siguiente relación de equivalencia:

$$s \sim t \quad \iff \quad \nu(s) = \nu(t).$$

Esta relación parte el conjunto en todos los singuletes $\{s\}_{s \neq 0,1}$ y en $\partial I = \{0, 1\}$. Por lo tanto el espacio de clases cumple

$$\frac{I}{\partial I} \approx \mathbb{S}^1.$$

Además, cualquier función continua $\alpha : I \to X$ tal que $\alpha(0) = \alpha(1)$, ie. un lazo se factoriza a través de $\nu$:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, two heads, "\nu"'] & X \\ \frac{I}{\partial I} \arrow[ur, dotted, "\tilde{\alpha}"'] & \end{tikzcd} \qquad \text{con} \quad \alpha = \tilde{\alpha} \circ \nu$$

Por lo tanto hay una biyección natural

$$\Big[(\mathbb{S}^1, 1), (X, x_0)\Big] \xrightarrow{\Phi} \pi_1(X, x_0) \qquad \text{con} \qquad [\beta] \longmapsto [\beta \circ \nu]$$

con inverso $[\alpha] \mapsto [\tilde{\alpha}]$. Está bien definido por la proposición **??**: $\alpha \simeq \beta \implies \alpha \circ \nu \simeq \beta \circ \nu$.

Además, esta biyección es un homeomorfismo..................................................

*Proposición* 1. Si $\Omega(X, x_0)$ y $\mathrm{Map}_*((\mathbb{S}^1, 1), (X, x_0))$ tienen la topología compacto-abierta; si $\pi_1(X, x_0)$ y $[(\mathbb{S}^1, 1), (X, x_0)]$ tienen sus correspondientes topologías cociente, entonces

$$\Big[(\mathbb{S}^1, 1), (X, x_0)\Big] \approx \pi_1(X, x_0)$$

*Proof.* Primero pruebo que $\Phi$ es continuo. Sea $U \subseteq \pi_1(X, x_0)$, entonces su preimagen $\bar{U}$ en

$$\Omega(X, x_0) = \{I \xrightarrow{\alpha} X \mid \alpha \text{ es continua y } \alpha(0) = \alpha(1)\},$$

con la topología de subespacio de $C^0(I, Y)$, es abierto, es decir es una unión arbitraria de intersecciones finitas de los abiertos $B_K(U)$:

$$\bar{U} = \bigcup_{j \in J} B_{K_j}(U_j)$$

con $K_j \subseteq I$ compacto y $U_j \subseteq Y$ abierto. Quiero probar que la preimagen bajo $\Phi$ de $\bar{U}$ es un abierto. Como $\Phi$ es biyectiva, basta probar esto para $\bar{U} = B_K(U)$ (esto es porque la)..

□

*Nota.* Puedo intercambiar $(\mathbb{S}^1, 1)$ por $(I/\partial I, \star)$ donde $\star \in I/\partial I$ es la clase de equivalencia $[\partial I]$ ya que son homeomorfos como espacios basados.

Este resultado motiva la siguiente definición:

**Definición 1.** El grupo fundamental de dimensión $n$ de un espacio basado $(X, x_0)$ se define como

$$\pi_n(X, x_0) := \Big[(\mathbb{S}^n, 1), (X, x_0)\Big].$$

Primero analizamos qué sucede cuando $n = 0$ ya que este caso es distinto a los demás.

Recuerda que $\mathbb{S}^0 = \{x \in \mathbb{R} : |x| = 1\} = \{-1, 1\}$. Llamaré a estos puntos de otra manera para que las cuentas sean más nítidas: sean $1 = \star$ y $-1 = \bullet$. Con esta notación puedo escribir:

$$M := \mathrm{Map}_*\Big((\mathbb{S}^0, \star), (X, x_0)\Big) = \{\mathbb{S}^0 \xrightarrow{f} X \mid f \text{ es continua y } f(\star) = x_0\}.$$

Entonces la única información que nos falta saber para determinar a $f$ es el valor $f(\bullet) \in X$. Esto nos induce la función:

$$M \xrightarrow{\Psi} X \qquad \text{con} \qquad f \longmapsto f(\bullet).$$

Observa que si $f, g \in M$ son homotópicos, existe una función continua $H : \{\star, \bullet\} \times I \to X$ donde $H_o = f$ y $H_1 = g$. Esto significa que la función $F_\bullet : I \to X$ definida por $F_\bullet(t) = H(\bullet, t)$, es continua. Además $F_\bullet(0) = H_0(\bullet) = f(\bullet) = \Psi(f)$ y $F_\bullet(1) = H_1(\bullet) = g(\bullet) = \Psi(g)$. Es decir $F_\bullet$ es una trayectoria de $\Psi(f)$ a $\Psi(g)$ en $X$. Decimos que $\Psi(f)$ y $\Psi(g)$ son *conectables por trayectorias.*

Con esto podemos definir una relación de equivalencia natural en $X$: para todas $x, y \in X$

$$\begin{aligned} x \sim y \quad &\iff \quad x \text{ y} y \text{ son conectables por trayectorias} \\ &\iff \quad \exists\ \sigma : I \to X \text{ continua tal que } \sigma(0) = x \text{ y } \sigma(1) = y. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el argumento del párrafo anterior nos dice que:

$$f \simeq g \quad \Longrightarrow \quad \Psi(f) \sim \Psi(g)$$

y así, puedo definir $\Psi$ para clases de equivalencia:

$$\Psi\big([f]_\simeq\big) = [\Psi(f)]_\sim \quad \text{está bien definida.}$$

Debería de cambiar de notación a algo como $\hat{\Psi}$, pero no creo que cause problemas. Observa que $[f]_\simeq \in M/_\simeq$ que es precisamente $\pi_0(X, x_0)$. Por lo tanto $\Psi : \pi_0(X, x_0) \to X/_\sim$.

Pruebo que $\Psi$ es biyectiva:

Para toda $[x]_\sim \in X/_\sim$, toma $f_x \in M$ definida por $f(\bullet) = x$. Claramente

$$\Psi([f_x]_\simeq) = [\Psi(f)]_\sim = [f(\bullet)] = [x]_\sim,$$

y así $\Psi$ es sobreyectiva.

Sean $[\alpha], [\beta] \in \pi_0(X, x_0)$ tales que que $\Psi([\alpha]) = Psi([\alpha])$, es decir que $\alpha(\bullet)$ y $\beta(\bullet)$ son conectables por trayectorias; supongamos que es mediante la trayectoria $\sigma : I \to X$. Defino la siguiente homotopía entre $\alpha$ y $\beta$:

$$H(s,t) := \begin{cases} x_0 & \text{si } \ s = \star \\ \sigma(t) & \text{si } \ s = \bullet \end{cases}$$

Esta es una homotopía porque es la unión disjunta de funciones continuas y es una calca de la homotopía $F$ que construí para definir la relación de equivalencia en $X$. Por lo tanto $\alpha \simeq \beta$, entonces $[\alpha] = [\beta]$ y concluyo que $\Psi$ es inyectiva.

Por último observa que $X/_\sim$ se puede ver como el espacio de componentes conexas del espacio $X$ ya que al hacer cociente reducimos toda una componente conexa (arco-conexa) a un punto sobre ella.

Con todo esto he probado que

*Proposición* 2.

$$\pi_0(X, x_0) \xrightarrow{\Psi} \left\{ \begin{matrix} \text{componentes} \\ \text{conexas de } X \end{matrix} \right\} \qquad \text{es biyectiva.}$$

Los demás grupos fundamentales son muy parecidos a $\pi_1(X, x_0)$. La única diferencia es que los lazos ahora están definidos sobre $I^n/\partial I^n$ en lugar de sobre $I/\partial I$. Si defino la operación como:

$$(\alpha * \beta)(s_1, \dots, s_n) := \begin{cases} \alpha(2s_1, s_2, \dots, s_n) & \text{si } \ 0 \le s_1 \le \frac{1}{2} \\ \alpha(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n) & \text{si } \ \frac{1}{2} \le s_1 \le 1 \end{cases}$$

donde $\alpha, \beta : I^n \to X$, entonces todas las propiedades de grupo de $\pi_n(X, x_0)$ son idénticas a las propiedades de $\pi_1(X, x_0)$. Las enumero para tenerlas a la mano:

$$\begin{aligned} \big(\pi_n(X, x_0), *\big) &\quad \text{es un grupo} \\ [e] = [e_{x_0}] &\quad \text{es el neutro} \\ \forall\ [\alpha], &\quad [\alpha]^{-1} = [\bar{\alpha}] \end{aligned}$$

También observa que

$$(X, x_0) \xmapsto{\mathcal{F}} \pi_n(X, x_0) \qquad\qquad \Big\{(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0)\Big\} \longmapsto \Big\{\pi_n(X, x_0) \xrightarrow{f_\#} \pi_n(Y, y_0)\Big\}$$

es un funtor (covariante) de la categoría $\mathbf{Top}_*$ a la categoría de grupos. La prueba de esto es la misma que en el Teorema **??**.