0.1 Homotopías

Definición 1. Sean $f : X \to Y$ y $g : X \to Y$ funciones continuas $(\star)$ entre espacios topológicos X y Y. Decimos que f y g son *homotópicas*, denotado por $f \simeq g$, si existe una función continua $H : X \times [0,1] \to Y$, que llamamos *homotopía*, tal que:

- Para cada parámetro $t \in [0,1]$, la función $H_t : X \to Y$ definida por $H_t(x) := H(x,t)$ es continua $(\star)$.
- $H_0 = f$ y $H_1 = g$.

Además decimos que la *homotopía es relativa a* $A \subseteq X$ si para toda $x \in A$ tenemos que $f(x) = H_t(x)$ para toda $t \in [0,1]$, es decir la homotopía fija a A.

Nota. La continuidad marcada por una $(\star)$ en la definición anterior se puede cambiar a cualquier otra propiedad como ser homeomorfismos, ser morfismo de espacios basados, ser suave, etc.

Además, de ahora en adelante denotaremos $I = [0,1]$. Antes con los lazos, esta notación podía confundirse en la definición de homotopía porque un intervalo es el dominio del lazo mientras que el otro intervalo parametriza la familia de lazos en la deformación.

Escribimos:

$$\mathrm{Map}(X,Y) := \{f : X \to Y \mid f \text{ es continua}\}.$$

Si además quiero que las funciones continuas f sean de espacios basados, escribo:

$$\mathrm{Map}_*\Big((X,x_0),(Y,y_0)\Big) := \{f : (X,x_0) \to (Y,y_o) \mid f \text{ es continua y } f(x_0) = y_0\}$$

A estos conjuntos se les puede dotar de la topología *compacto-abierto* que es la topología con sub-base: para todo compacto $K \subseteq X$ y todo abierto $U \subseteq Y$,

$$B_K(U) := \{f \in \mathrm{Map}(X,Y) \mid f[K] \subseteq U\}.$$

Al igual que en el caso de lazos, tenemos:

Ejercicio 1. La relación $\alpha \simeq \beta$ en $\mathrm{Map}(X,Y)$ es una relación de equivalencia.

Proof. Debemos probar tres cosas:

- (Simetría) Afirmamos que para toda $f \in \mathrm{Map}(X,Y)$, tenemos que $f \simeq f$ mediante la homotopía $H(x,t) = f(x)$. Claramente H es continua porque es independiente del parámetro t y f es continua. Además $H_0 = f = H_1$, por lo tanto H es una homotopía.
- (Reflexividad) Supongamos que $f \simeq g$ para $f,g \in \mathrm{Map}(X,Y)$ mediante la homotopía H. Si definimos $\bar{H}(x,t) := H(x,1-t)$, entonces claramente $\bar{H}$ es continua porque es la composición de la función continua $t \mapsto 1-t$ y H, que por hipótesis es continua. Además, para toda t, $\bar{H}_t(x) = H_{1-t}(x)$, y así $\bar{H}_t$ es continua. Por último, $\bar{H}_0 = H_1 = g$ y $\bar{H}_1 = H_0 = f$. Por lo tanto $\bar{H}$ es una homotopía entre f y g.
- (Transitividad) Sean $f,g,h \in \mathrm{Map}(X,Y)$ tales que $f \simeq g$ y $g \simeq h$ mediante las homotopías H y G respectivamente. Definimos una nueva homotopía:

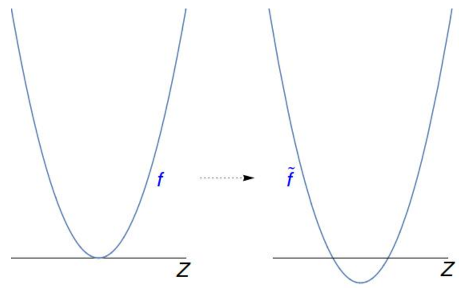
  $$F(x,t) := \begin{cases} H(x,2t) & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ G(x,2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

  Primero observemos que al dominio de definición de F (el espacio $X \times I$) lo estamos partiendo en dos cerrados $X \times [0,\frac{1}{2}]$ y $X \times [\frac{1}{2},1]$, de tal manera que sobre la intersección de esos cerrados (ie. $X \times \{\frac{1}{2}\}$), las homotopías H y G coinciden:

  $$F\left(x,\frac{1}{2}\right) = H(x,1) = g(x) = G(x,0) = F\left(x,\frac{1}{2}\right).$$

  Como H y G son continuas, tenemos que F está bien definida y es continua sobre $X \times I$.

Figure 1: Deformación de una función f para que sea transversal a Z (aquí está dibujado la imagen de f).



Por otro lado, para cada $t \in I$ fija tenemos que F_t es una función continua porque es igual a H_t o G_t que por hipótesis son continuas (la opción depende de que $t \leq \frac{1}{2}$ o que $t \geq \frac{1}{2}$). Por último verificamos que:

$$F_0(x) = H(x,0) = H_0(x) = f(x) \quad \text{y} \quad F_1(x) = G(x,1) = G_1(x) = h(x).$$

Concluimos que $f \simeq h$ mediante la homotopía F.

□

Con el resultado anterior podemos definir: para dos espacios topológicos X y Y tenemos:

$$[X,Y] := \mathrm{Map}(X,Y)/_{\simeq}$$

y éste viene con un mapeo natural: $f \mapsto [f]$. La ventaja de trabajar con $[X,Y]$ y no con $\mathrm{Map}(X,Y)$ es que en general una funci'on continua $f : X \to Y$ puede ser complicada de manejar, pero en general se va a poder deformar a una función $\tilde{f} : X \to Y$ que sea más fácil de manipular. Un ejemplo clásico de esto es cuando una función f (suave) no es transversal a una subvariedad $Z \subset Y$ y lo deformamos para que $\tilde{f}$ sí sea transversal a Z (figura 1).

La homotopía "preserva composiciones":

Proposición 1. Sean X, Y y Z espacios topológicos con funciones continuas $f, \tilde{f} : X \to Y$ y $g, \tilde{g} : Y \to Z$ tales que $f \simeq \tilde{f}$ y $g \simeq \tilde{g}$. Entonces $g \circ f \simeq \tilde{g} \circ \tilde{f}$.

Proof. Supongamos que $F : X \times I \to Y$ y $G : Y \times I \to Z$ son las homotopías $f \simeq \tilde{f}$ y $g \simeq \tilde{g}$ respectivamente. Definimos una función $H : X \times I \to Z$ mediante la siguiente composición:

$$X \times I \xrightarrow{(F,\mathrm{Id})} Y \times I \xrightarrow{G} Z \quad \text{con} \quad (x,t) \mapsto (F(x,t),t) \mapsto G(F(x,t),t).$$

H es continua porque es composición de funciones continuas (la primera es continua porque la imagen inversa de un abierto $U \times V$ de $Y \times I$ tiene como imagen inversa $F^{-1}[U] \times I$ que es abierto en $X \times I$ porque F es continua). Ahora, para $t \in I$ fija tenemos que $H_t = G_t(F_t(x))$ que es continua porque F_t y G_t lo son. Por último tenemos que $H_0 = G_0 \circ F_0 = g \circ f$ y $H_1 = G_1 \circ F_1 = \tilde{g} \circ \tilde{f}$ por hipótesis. Concluimos que $g \circ f \simeq \tilde{g} \circ \tilde{f}$. □

Ahora damos un criterio importante y útil para saber cuando dos funciones son homotópicos.

Teorema 1. *Sea X un espacio topológico arbitrario y $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ un subespacio del espacio euclideano. Si $f, g : X \to Y$ son continuas tales que para toda $x \in X$ el segmento de recta que une los puntos $f(x)$ y $g(x)$ en $\mathbb{R}^n$, que denotamos por $\mathcal{L}_x = \overline{f(x)\, g(x)}$, está completamente contenido en Y, entonces $f \simeq g$. En símbolos:*

$$\forall x \in X,\ \mathcal{L}_x \subseteq Y \quad \Longrightarrow \quad f \simeq g.$$

Proof. Observemos que podemos parametrizar $\mathcal{L}_x$ como la trayectoria $\mathcal{L}_x(t) = (1-t)f(x) + tg(x)$ que empieza en el punto $f(x)$ y termina en $g(x)$. Esto nos induce un candidato a homotopía:

$$H : X \times I \to Y \quad \text{con} \quad H(x,t) = \mathcal{L}_x(t) = (1-t)f(x) + tg(x).$$

Observemos que por hipótesis $\mathcal{L}_x \subseteq Y$ entonces H está bien definida (ie. su imagen efectivamente está contenido en su contradominio). Sólo falta ver que H es continua.

Podemos descomponer la regla de correspondencia de H de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd}
X \times I \arrow[r, "H"] \arrow[d] & Y \\
(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \arrow[r, "\cdot"] & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \arrow[u, "+"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(x,t) \arrow[r, mapsto, "H"] \arrow[d, mapsto] & (1-t)f(x) + tg(x) \\
(1-t, f(x), t, g(x)) \arrow[r, mapsto] & ((1-t)f(x), tg(x)) \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

La primera flecha hacia abajo es una función continua porque es el producto cartesiano de funciones continuas de variables independientes (por entrada), en particular de las cuatro funciones continuas $(x,t) \mapsto 1-t$, $(x,t) \mapsto f(x)$, $(x,t) \mapsto t$ y $(x,t) \mapsto g(x)$. Las siguientes dos flechas, correspondientes al producto por escalares y a la suma, representan funciones continuas (cf. ejercicio 2).

Por lo tanto H continua por ser composición de funciones continuas. Sólo falta verificar que:

$$H_0(x) = (1-0)f(x) + 0 \cdot g(x) = f(x) \quad \text{y} \quad H_1(x) = (1-1)f(x) + 1 \cdot g(x) = g(x).$$

Con esto concluimos que H es una homotopía entre f y g, y que $f \simeq g$. $\square$

Nota. Observemos que si $f(x) = g(x)$, entonces $H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x) = f(x) - tf(x) + tf(x) = f(x) = g(x)$, entonces la homotopía H es relativo al conjunto $A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$.

Los conjuntos convexos $Y \subset \mathbb{R}^n$ cumplen que cualesquiera dos puntos (en particular $f(x)$ y $g(x)$ del teorema anterior) se pueden conectar mediante un segmento de recta completamente contenido en Y. Por lo tanto los conjuntos convexos cumplen de sobra las hipótesis del teorema anterior y así tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2. *Si X es un espacio topológico y $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo, entonces $f \simeq g$ para cualesquier dos funciones continuas $f, g : X \to Y$. En símbolos:*

$$[X, Y] = \{e\}$$

donde $e : X \to Y$ es la función constante $e(x) = y_0$ para cualquier $y_0 \in Y$.

Probamos lo que nos hace falta:

Ejercicio 2. $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial topógico: la suma $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y el producto por escalares $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son continuas.

Proof. Como $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico y su topología usual es la inducida por la métrica euclideana, la base son las bolas abiertas:

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < \varepsilon\}.$$

Para probar que la suma es continua, voy a probar que la imagen inversa $X := (+)^{-1}[B_\varepsilon(x)]$ es abierta para toda $\varepsilon > 0$ y para toda $x \in \mathbb{R}^n$.

Sea $\varepsilon > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Tomo $y = (y_1, y_2) \in X$, es decir que

$$y_1 + y_2 \in B_\varepsilon(x) \qquad \iff \qquad |x - y_1 - y_2| = \varepsilon - \delta < \varepsilon$$

para alguna $\delta > 0$

Propongo al abierto $V := B_{\delta/2}(y_1) \times B_{\delta/2}(y_2) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ como vecindad de (y_1, y_2) contenida en X. Si efectivamente $V \subseteq X$, entonces X es abierto y acabo. Para probar que $V \subseteq X$ calculo: si $(z_1, z_2) \in V$ entonces $|y_i - z_i| < \delta/2$ y así:

$$|x - z_1 - z_2| = |x - y_1 + y_1 - z_1 + y_2 - y_2 - z_2| \leq |x - y_1 - y_2| + |y_1 - z_1| + |y_2 - z_2|$$
$$\therefore \quad |x - z_1 - z_2| < \varepsilon - \delta + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \varepsilon.$$

Concluyo que la suma $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua.

Ahora aplicaré exactamente el mismo método para probar que el producto por escalares es continua: sea $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ y fijo $(t_0, y_0) \in Y := (\cdot)^{-1}[B_\varepsilon(x)] \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Entonces tengo que

$$t_0 y_0 \in B_\varepsilon(x) \quad \iff \quad |x - t_0 y_0| = \varepsilon - \delta < \varepsilon$$

para una $\delta > 0$ fija.

Ahora propongo al abierto $W := B_{\delta_1}(t_0) \times B_{\delta_2}(y_0)$ donde:

$$\delta_1 := \frac{\delta}{|y_0| + 1} \quad \text{y} \quad \delta_2 := \frac{\delta}{\delta + |t_0| + |t_0|\,|y_0|}.$$

Observa que ambos denominadores son estrictamente positivos por ser suma de un número positivo y otro no-negativo; el numerador de ambos es positivos. Esto quiere decir que $0 < \delta_1, \delta_2$ son radios posibles de una bola abierta. De aquí sólo debo probar que W está contenido en Y:

Sea $(t, y) \in W$. Por definición tengo $|t_0 - t| < \delta_1$ y $|y_0 - y| < \delta_2$. Observa que $|t| = |t_0 - t - t_0| \leq |t_0 - t| + |t_0| < \delta_1 + |t_0|$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
|x - ty| &= |x - t_0 y_0 + t_0 y_0 - t y_0 + t y_0 - ty| \\
&\leq |x - t_0 y_0| + |t_0 y_0 - t y_0| + |t y_0 - ty| \\
&\leq |x - t_0 y_0| + |t_0 - t|\,|y_0| + |t|\,|y_0 - y| \\
&< \varepsilon - \delta + \delta_1 |y_0| + \delta_2 \delta_1 + \delta_2 |t_0|
\end{aligned}$$

Sustituyo las expresiones para δ_1 y δ_2:

$$\begin{aligned}
|x - ty| &< \varepsilon - \delta + \frac{\delta\,|y_0|}{|y_0| + 1} + \frac{\delta}{|y_0| + 1} \cdot \frac{\delta}{\delta + |t_0| + |t_0|\,|y_0|} + \frac{\delta\,|t_0|}{\delta + |t_0| + |t_0|\,|y_0|} \\
&< \varepsilon - \delta + \delta \frac{|y_0|\,(\delta + |t_0| + |t_0|\,|y_0|) + \delta + |t_0|\,(|y_0| + 1)}{(|y_0| + 1)(\delta + |t_0| + |t_0|\,|y_0|)}.
\end{aligned}$$

Como todo el cociente se hace 1, obtengo:

$$|x - ty| < \varepsilon \quad \implies \quad ty \in B_\varepsilon(x) \quad \implies \quad (t, y) \in Y$$

y así $W \subset Y$.

Por lo tanto el producto por escalares es continua. $\square$