

## 0.1 Complejos Simpliciales

### 0.1.1 Complejos simpliciales geométricos

**Definición 1.** Un subconjunto  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^n$  es *afin-independiente* (AI) si el conjunto de diferencias  $\{a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$  es linealmente independiente en  $\mathbb{R}^n$ .

En palabras esto significa que un conjunto  $\{a_0, \dots, a_n\}$  es AI si el conjunto  $\{a_1, \dots, a_n\}$  bajo la traslación  $a_0 \mapsto 0$ , es linealmente independiente. En particular, si  $\{a_1, \dots, a_n\}$  es linealmente independiente en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\{0, a_1, \dots, a_n\}$  es AI.

Observa que en la definición de AI, puedo tomar cualquier espacio ambiente  $\mathbb{R}^N$  con la condición  $N \geq n$ .

**Ejercicio 1.** Prueba que  $\{a_0, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^n$  es AI si y sólo si para todas  $\lambda_i$ 's tales que  $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 0$  se cumple que  $\sum \lambda_i a_i = 0 \implies \lambda_i = 0$  para toda  $i \in \{0, \dots, n\}$ .

*Proof.* Sea  $\{a_0, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^n$

( $\implies$ ) Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tales que  $\sum \lambda_i = 0$  y supongo que  $\sum \lambda_i a_i = 0$ . Entonces

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_0) = -a_0 \sum_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = -a_0(-\lambda_0) - \lambda_0 a_0 = 0.$$

Como  $\{a_0, \dots, a_n\}$  es AI,  $\{a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$  es linealmente independiente y así concluyo que  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ . Por último, sustituyo esto en  $\sum \lambda_i = 0$  para concluir que también  $\lambda_0 = 0$ .

( $\impliedby$ ) Sea  $\sum \mu_i (a_i - a_0) = 0$  una combinación lineal. Entonces

$$\sum_{i=1}^n \mu_i a_i = a_0 \sum_{i=1}^n \mu_i. \quad (1)$$

Ahora defino  $\lambda_i := \mu_i$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$  y defino  $\lambda_0 = -\mu_1 - \dots - \mu_n$ . Observa que  $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 0$  por definición. Además la ecuación (1) se convierte en:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = a_0(-\lambda_0) \implies \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i = 0.$$

Por hipótesis esto implica que  $\lambda_i = 0$  para toda  $i \in \{0, \dots, n\}$ . En particular  $\mu_1 = \dots = \mu_n = 0$  y  $\{a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$  es linealmente independiente. Por lo tanto  $\{a_0, \dots, a_n\}$  es AI. □

Este ejercicio dice que la condición AI es casi equivalente a la independencia lineal, la única restricción es que los coeficientes de la combinación lineal (igualada a cero) deben sumar 0. Esta condición adicional literalmente “traslada” la condición de independencia lineal al punto  $a_0$ .

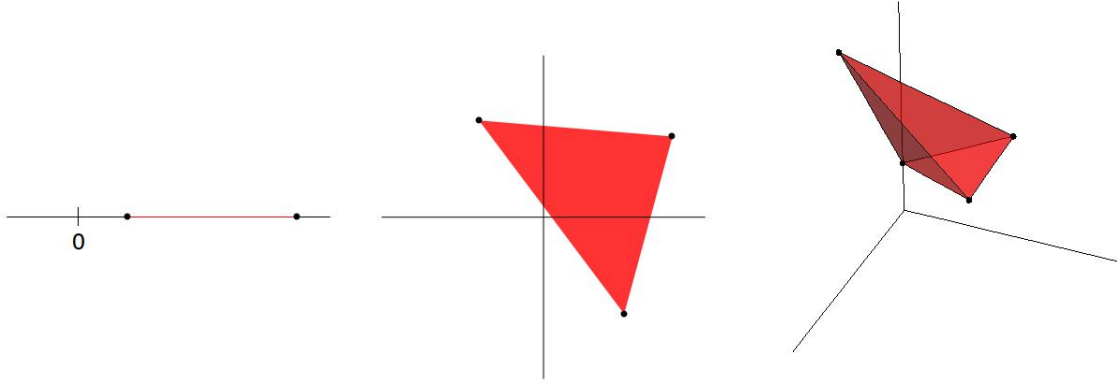
**Definición 2.** Un *n-simplejo geométrico* en  $\mathbb{R}^N$  (en particular  $N \geq n$ ) es un subconjunto  $\sigma_n \subset \mathbb{R}^N$  de la forma:

$$\sigma_n = \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i \mid \{a_0, \dots, a_n\} \text{ es AI, } \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

y se denota como  $\sigma_n = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$  (ve la figura 1).

*Nota.* Esta definición es exactamente la definición de la cerradura convexa del conjunto  $\{a_0, \dots, a_n\}$ , ie.  $\text{Conv}(a_0, \dots, a_n) = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$ .

Figure 1: Ejemplos de  $n$ -simplejos geométricos de dimensión 1,2 y 3



Recuerda que la cerradura convexa de un conjunto  $X \subset \mathbb{R}^N$  (en este caso tomo  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  finito) es la intersección de todos los conjuntos convexos que lo contienen. Más precisamente si escribo  $\mathfrak{C} = \{Y \subseteq \mathbb{R}^N \mid Y \text{ es convexo y } X \subseteq Y\}$ , entonces

$$\text{Conv}(X) = \bigcap_{Y \in \mathfrak{C}} Y. \quad (2)$$

Es sencillo probar (2): primero observa que  $\text{Conv}(X)$  es un conjunto convexo porque si  $\lambda = \sum \lambda_i x_i, \mu = \sum \mu_i x_i \in \text{Conv}(X)$  entonces

$$t\lambda + (1-t)\mu = \sum_{i=1}^n (t\lambda_i + (1-t)\mu_i)x_i \in \text{Conv}(X) \quad \forall t \in [0, 1]$$

ya que

$$\sum_{i=1}^n t\lambda_i + (1-t)\mu_i = t \sum_{i=1}^n \lambda_i + (1-t) \sum_{i=1}^n \mu_i = t + (1-t) = 1.$$

Por lo tanto  $\text{Conv}(X) \in \mathfrak{C}$  y la contención  $\supseteq$  de (2) se cumple. Para la otra contención considera  $Y \in \mathfrak{C}$  y observa que si  $\sum \lambda_i x_i \in \text{Conv}(X)$  entonces  $\sum \lambda_i x_i \in Y$  porque  $x_1, \dots, x_n \in Y$ ,  $\sum \lambda_i = 1$  y  $Y$  es convexo; por lo tanto  $\text{Conv}(X) \subseteq Y$  para toda  $Y \in \mathfrak{C}$ .

Por último, la intersección de conjuntos convexos es convexo (razón: si  $x, y \in \cap Y_i$  con  $Y_i$  convexo, entonces la recta  $\mathcal{L}$  que un  $x, y$  está contenido en cada  $Y_i$  y así  $\mathcal{L} \subseteq \cap Y_i$ ), entonces he probado que:

**Proposición 1.** El  $n$ -simplejo geométrico  $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$  es el conjunto convexo más pequeño que contiene al conjunto  $\{a_0, \dots, a_n\}$ , en general:

$$\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle = \text{Conv}(a_0, \dots, a_n) = \bigcap_{Y \in \mathfrak{C}} Y$$

donde  $\mathfrak{C}$  es la familia de conjuntos convexos  $Y$  que contienen a  $\{a_0, \dots, a_n\}$ .

Hay una clase de  $n$ -simplejos muy importantes:

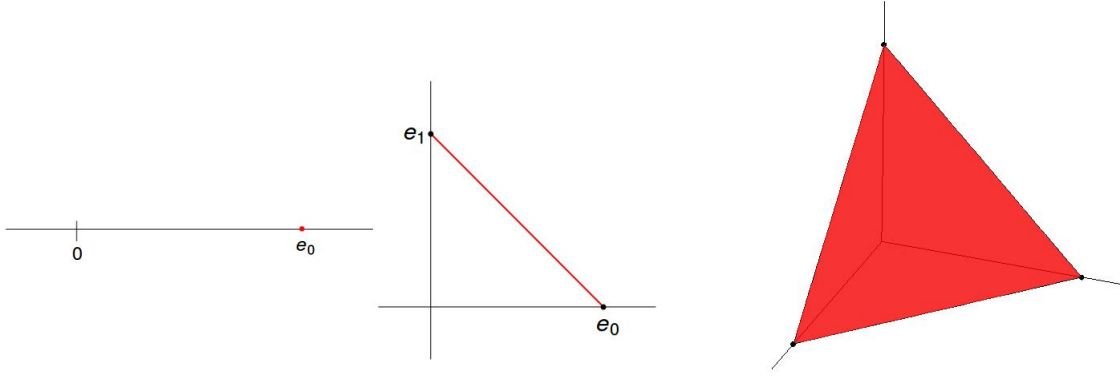
**Definición 3.** El  $n$ -simplejo geométrico estándar, denotado por  $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , es el  $n$ -simplejo generado por la base canónica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , ie.  $\Delta^n := \langle e_0, \dots, e_n \rangle$ .

Ve la figura 2 para los primeros ejemplos.

Observa que podemos encajar  $\Delta^n$  en  $\mathbb{R}^n$  en lugar de  $\mathbb{R}^{n+1}$  como  $\Delta^n = \langle 0, e_1, \dots, e_n \rangle$ ; en este caso  $\Delta^n = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum \lambda_i \leq 1, \lambda_i \geq 0\}$ . Estas dos maneras de definir los simplejos estándares son equivalentes entonces usaré ambas descripciones intercambiamente.

Los  $n$ -simplejos geométricos estándares nos permite clasificar topológicamente todos los  $n$ -simplejos geométricos mediante la siguiente proposición:

Figure 2: Ejemplos de  $n$ -simplejos geométricos estándares de dimensión 0,1 y 2



**Proposición 2.** Sean  $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$  y  $\tau = \langle b_0, \dots, b_n \rangle$  dos  $n$ -simplejos en  $\mathbb{R}^N$ . Entonces  $\sigma \approx \tau$  donde el homeomorfismo sólo depende de los vértices. En este caso se dice que  $\sigma$  y  $\tau$  son *afinmente homeomorfos*.

**Ejercicio 2.** La función  $f : \sigma \rightarrow \tau$  definida por  $f(\sum \lambda_i a_i) = \sum \lambda_i b_i$  es un homeomorfismo.<sup>1</sup>

*Proof.* Primero observa que si  $x = \sum \lambda_i a_i \in \sigma$ , entonces  $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_n$  y así:

$$\begin{aligned} x &= \lambda_0 a_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = a_0 \left(1 + \sum_{i=1}^n (-\lambda_i)\right) + \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = a_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_0) \\ \therefore x - a_0 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_0) \end{aligned}$$

Ahora defino  $T_{a_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  como la traslación  $x \mapsto x - a_0$ . Por lo tanto  $T_{a_0}[\sigma] = \langle 0, a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0 \rangle$  donde  $A = \{a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$  es una base. Después defino  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  como la transformación lineal que cambia la base  $A$  en la base  $B = \{b_1 - b_0, \dots, b_n - b_0\}$ , en particular  $F(a_i - a_0) = b_i - b_0$ . Por último sea  $T_{-b_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la traslación  $x \mapsto x + b_0$ . Claramente cada una de estas tres funciones son homeomorfismos entonces su composición es un homeomorfismo de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ .

Para  $x = \sum \lambda_i a_i \in \sigma$  calculo:

$$\begin{aligned} (T_{-b_0} \circ F \circ T_{a_0})(x) &= (T_{-b_0} \circ F)(x - a_0) = (T_{-b_0} \circ F) \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_0) \right) \\ &= T_{-b_0} \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i (b_i - b_0) \right) = b_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i (b_i - b_0) = \sum_{i=0}^n \lambda_i b_i = f(x) \\ \therefore (T_{-b_0} \circ F \circ T_{a_0})|_{\sigma} &= f \end{aligned}$$

y así  $f$  es casi un homeomorfismo, lo único que hace falta calcular es la imagen de  $f$ . Pero esto es sencillo:

$$\text{Im}(f) = \{f(\sum \lambda_i a_i) \mid \sum \lambda_i a_i \in \sigma\} = \{\sum \lambda_i b_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1\} = \tau.$$

Por lo tanto:

$$(T_{-b_0} \circ F \circ T_{a_0})|_{\sigma} = f : \sigma \rightarrow \tau$$

es un homeomorfismo por ser restricción del homeomorfismo  $T_{-b_0} \circ F \circ T_{a_0}$  (co-restringido a su imagen).  $\square$

Un corolario inmediato de este ejercicio es que todo  $n$ -simplejo geométrico  $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$  es homeomorfo al complejo geométrico estándar  $\Delta^n$ . Por lo tanto la topología de  $\Delta^n$  completamente determina la topología de los  $n$ -simplejos geométricos:

<sup>1</sup>En clase probamos esto usando el hecho que los  $n$ -simplejos geométricos son compactos (cf. ejercicio 3), pero modifiqué esta prueba para no usar la compacidad para poder demostrar el ejercicio 3 con este ejercicio y así evitar un círculo lógico.

**Ejercicio 3.** Todo  $n$ -simplejo geométrico  $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$  es cerrado, convexo y compacto como subespacio de  $\mathbb{R}^N$ .

*Proof.* Como  $\sigma = \text{Conv}(a_0, \dots, a_n)$  (por la proposición 1), entonces  $\sigma$  es convexo.

Para probar compacidad, basta probar que los  $n$ -simplejos geométricos estándares son compactos ya que todo  $n$ -simplejo geométrico es homeomorfo a  $\Delta^n$  (cf. ejercicio 2).

Sea  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$  el plano definido por  $x_1 + \dots + x_n = 1$  y  $C \subset \mathbb{R}^n$  el primer cuadrante, ie.  $C = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0\}$ . Observa que ambos conjuntos son cerrados. Ahora pruebo que:

$$\Delta^n = \langle 0, e_1, \dots, e_n \rangle = \mathcal{P} \cap C$$

y así  $\Delta^n$  es cerrado.

( $\subseteq$ ) Sea  $x = \sum \lambda_i e_i$  donde  $0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$  y  $\lambda_i \geq 0$ . Como  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es la base estándar, entonces  $x = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  y claramente se cumple que  $x \in \mathcal{P} \cap C$ .

( $\supseteq$ ) Sea  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{P} \cap C$ , entonces  $x_1 + \dots + x_n = 1$  y  $x_i \geq 0$ . Si tomo  $\lambda_i = x_i$  entonces  $x = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum \lambda_i e_i \in \Delta^n$ .

Por último observa que si  $x = \sum \lambda_i e_i \in \Delta^n$  entonces:

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|\lambda_i e_i\| = \sum_{i=1}^n |\lambda_i| = \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

ya que  $0 \leq \lambda_i$ . Por lo tanto  $\Delta^n$  es un conjunto cerrado y acotado en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\Delta^n$  es compacto.  $\square$

**Definición 4.** Sea  $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$  un  $n$ -simplejo geométrico y  $m \leq n$ . Una  $m$ -cara  $\tau$  de  $\sigma$  es el  $m$ -simplejo geométrico asociado a algún subconjunto  $\{a_{i_0}, \dots, a_{i_m}\}$  de  $\{a_0, \dots, a_n\}$ , es decir  $\tau = \langle a_{i_0}, \dots, a_{i_m} \rangle \subseteq \sigma$ .

**Definición 5.** El *baricentro* de un  $n$ -simplejo geométrico  $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$  es el punto

$$\mathbf{b}(\sigma) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n a_i$$

Observa que el baricentro  $\mathbf{b}(\sigma)$  es un elemento de  $\sigma$  porque  $\sum \frac{1}{n+1} = 1$ .

Los  $n$ -simplejos por sí solos no son muy interesantes topológicamente (acabamos de clasificarlos todos!), pero forman parte de una construcción muy importante:

**Definición 6.** Un *complejo simplicial geométrico* en  $\mathbb{R}^N$  es una familia finita  $K$  de simplejos geométricos (de dimensión  $\leq N$ ) que cumple dos propiedades:

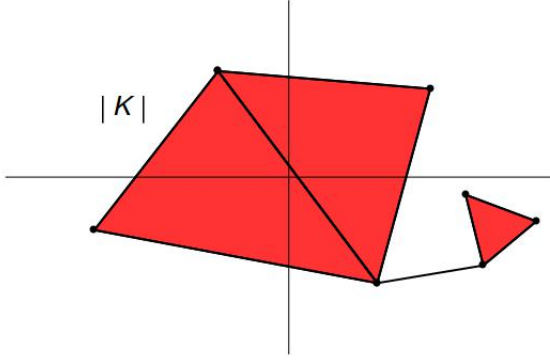
- (i)  $K$  contiene todas las caras de todos sus elementos, es decir si  $\sigma \in K$  y  $\tau \subset \sigma$  es una cara, entonces  $\tau \in K$ .
- (ii) La intersección de cualesquiera dos  $\sigma, \tau \in K$  es una cara común de  $\sigma$  y  $\tau$  (también incluyo el caso cuando la intersección es vacía).

Intuitivamente, la primera propiedad nada más garantiza que estás trabajando con todos los posibles sub-simplejos del complejo. La segunda condición te dice que los simplejos se pegan bien, es decir a lo largo de caras (que por la primera propiedad son elementos de  $K$ ).

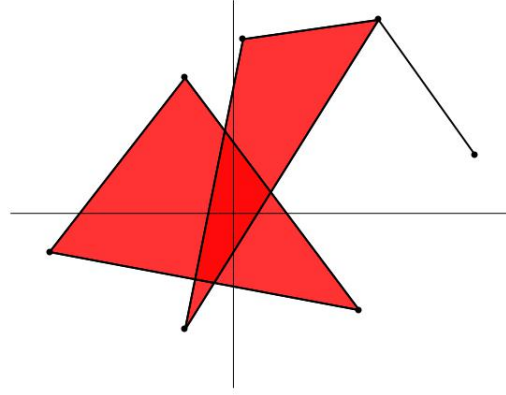
Para visualizar un complejo simplicial geométrico  $K$ , dibujamos su “realización geométrica”  $|K| := \{x \in \mathbb{R}^N \mid \exists \sigma \in K \text{ tal que } x \in \sigma\} = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ .

Esta construcción se puede generalizar considerablemente.

(a) Sí es complejo simplicial geométrico.



(b) No es complejo simplicial geométrico.



### 0.1.2 Complejos simpliciales abstractos

**Definición 7.** Una *complejo simplicial* (abstracto)  $K$  es una familia de subconjuntos finitos no vacíos de un conjunto  $V_K$ , cuyos elementos se llaman *vértices*, que satisface:

- (i)  $K$  contiene todos los singuletes de  $V_K$ , es decir  $v \in V_K \implies \{v\} \in K$ .
- (ii)  $K$  es cerrado bajo subconjuntos, es decir si  $L \in K$  y  $L' \subseteq L$  entonces  $L' \in K$ .

Esta definición efectivamente generaliza la definición de complejo simplicial geométrico; la idea es que para pasar de complejos simpliciales geométricos a complejos simpliciales abstractos basta tomar los “vértices” de los simplejos geométricos en lugar de todas las combinaciones convexas de ellas.

**Ejercicio 4.** Todo complejo simplicial geométrico determina un complejo simplicial abstracto.

*Proof.* Sea  $K = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  un complejo simplicial geométrico con  $\sigma_i = \langle a_0^i, \dots, a_{n_i}^i \rangle$ ; los veo encajados en algún  $\mathbb{R}^N$ , ie.  $a_j^i \in \mathbb{R}^N$  para toda  $i \in \{1, \dots, n\}$  y para toda  $j \in \{0, \dots, n_i\}$ . Para cada simplejo  $\sigma_i \in K$  defino el conjunto de sus vértices como  $\sigma'_i = \{a_0^i, \dots, a_{n_i}^i\}$ .

En general escribo el conjunto de vértices como

$$V := \bigcup_{i=1}^n \sigma'_i = \{a_j^i\}_{i,j} \subset \mathbb{R}^N$$

y defino  $K' = \{\sigma'_i\}_{i=1}^n$ .

Ahora pruebo que  $K'$  cumple las dos propiedades de ser un complejo simplicial abstracto. Primero observa que para un vértice arbitrario  $a_j^i \in V$ , el simplejo  $\langle a_j^i \rangle$  es una 0-cara del simplejo geométrico  $\sigma_i = \langle a_0^i, \dots, a_{n_i}^i \rangle$  entonces por definición el 0-simplejo geométrico  $\langle a_j^i \rangle$  es un elemento de  $K$ , ie.  $\langle a_j^i \rangle = \sigma_l$  para alguna  $l \in \{1, \dots, n\}$ . Por lo tanto  $\sigma'_l = \{a_j^i\} \in K'$ .

Para probar la segunda propiedad sea  $L = \sigma'_i = \{a_0^i, \dots, a_{n_i}^i\} \in K'$  y sea  $L' \subseteq L$ . Entonces  $L'$  genera una cara del simplejo geométrico  $\sigma_i$ . Por definición, el simplejo generado por  $L'$  es un elemento de  $K$ , ie.  $L'$  genera a algún  $\sigma_k \in K$ . Por lo tanto  $L' = \sigma'_k \in K'$  y termino.  $\square$

Cada complejo simplicial  $K$  tiene una realización topológica, ie. tiene asociado canónicamente un espacio topológico que se denota por  $|K|$ .

**Definición 8.** Sea  $K$  un complejo simplicial con conjunto de vértices  $V_K$ , entonces se define:

$$|K| := \left\{ \sigma : V_K \rightarrow I \subset \mathbb{R} : \sigma^{-1}(0, 1] \in K, \sum_{v \in V_K} \sigma(v) = 1 \right\} \subset \{f : V_K \rightarrow \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^{V_K}$$

que tiene una métrica definida por:

$$d : |K| \times |K| \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad d(\sigma, \tau) = \sqrt{\sum_{v \in V_K} (\sigma(v) - \tau(v))^2}.$$

El espacio topológico inducido por esta métrica se denota por  $|K|_d$ .

Observa que las sumas en la definición anterior están bien definidas porque para  $\sigma \in |K|$  se tiene que  $\sigma(v) \neq 0$  para sólo una cantidad finita de vértices ya que por definición  $\{v \in V_K \mid \sigma(v) \neq 0\} = \sigma^{-1}(0, 1] \in K$  y los elementos de  $K$  son conjuntos finitos.

*Nota.* El conjunto  $\sigma^{-1}(0, 1]$  es exactamente el soporte de la función  $\sigma$ , ie.

$$\sigma^{-1}(0, 1] = \text{Sop}(\sigma) := \{v \in V_K \mid \sigma(v) \neq 0\}.$$

Entonces usaré ambas descripciones intercambiabilmente.

**Ejercicio 5.**  $d$  es una métrica sobre  $|K|$ .

*Proof.* Sean  $\sigma, \sigma' \in |K|$ . Pruebo que  $d$  cumple las tres propiedades de ser una métrica.

1. Si  $d(\sigma, \sigma') = 0$  entonces  $\sum (\sigma(v) - \sigma'(v))^2 = 0$  y como cada sumando es no-negativo, necesariamente se tiene que  $\sigma(v) - \sigma'(v) = 0$  para toda  $v \in V_K$ . Por lo tanto  $\sigma = \sigma'$  como funciones. Para la otra dirección,  $\sigma = \sigma'$  implica que  $(\sigma(v) - \sigma'(v))^2 = 0$  para toda  $v \in V_K$  y así  $d(\sigma, \sigma') = \sum 0 = 0$ .
2. Como  $(\sigma(v) - \sigma'(v))^2 = (\sigma'(v) - \sigma(v))^2$  para toda  $v$ , puedo sumar sobre  $V_K$  y obtengo que  $d(\sigma, \sigma') = d(\sigma', \sigma)$ .
3. La desigualdad del triángulo se cumple por la misma razón que se cumple con la métrica euclideana: sean  $\sigma, \sigma', \sigma'' \in |K|$  y  $L := \sigma^{-1}(0, 1] \cup (\sigma')^{-1}(0, 1] \cup (\sigma'')^{-1}(0, 1]$  que es finito porque es la unión finita de elementos de  $K$ ; sea  $N = \#(L)$  y  $L = \{v_1, \dots, v_N\}$  una enumeración. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} d(\sigma, \sigma'') &= \sqrt{\sum_{i=1}^N (\sigma(v_i) - \sigma''(v_i))^2} \\ &= \|(\sigma(v_1) - \sigma''(v_1), \dots, \sigma(v_N) - \sigma''(v_N))\| \\ &= \|(\sigma(v_1), \dots, \sigma(v_N)) - (\sigma''(v_1), \dots, \sigma''(v_N))\| \end{aligned}$$

donde la última expresión es la distancia usual euclideana entre los puntos  $(\sigma(v_1), \dots, \sigma(v_N))$  y  $(\sigma''(v_1), \dots, \sigma''(v_N))$  de  $\mathbb{R}^N$ . Aquí se vale la desigualdad del triángulo entonces:

$$\begin{aligned} d(\sigma, \sigma'') &\leq \|(\sigma(v_1), \dots, \sigma(v_N)) - (\sigma'(v_1), \dots, \sigma'(v_N))\| + \\ &\quad \|(\sigma'(v_1), \dots, \sigma'(v_N)) - (\sigma''(v_1), \dots, \sigma''(v_N))\| \\ &\leq \|(\sigma(v_1) - \sigma'(v_1), \dots, \sigma(v_N) - \sigma'(v_N))\| + \|(\sigma'(v_1) - \sigma''(v_1), \dots, \sigma'(v_N) - \sigma''(v_N))\| \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^N (\sigma(v_i) - \sigma'(v_i))^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^N (\sigma'(v_i) - \sigma''(v_i))^2} \\ &\leq d(\sigma, \sigma') + d(\sigma', \sigma''). \end{aligned}$$

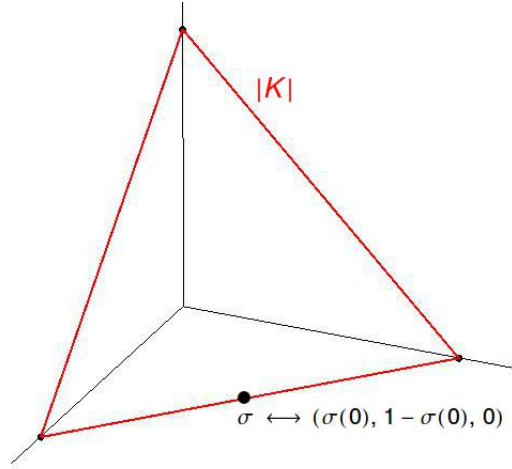
□

Aunque la definición de  $|K|$  parece complicada, sí concuerda con la intuición, especialmente cuando  $V_K$  es finito. Por ejemplo:

**Ejemplo 1.** Sea  $V_K = \{0, e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2$  y  $K = \{\{0\}, \{e_1\}, \{e_2\}, \{0, e_1\}, \{0, e_2\}, \{e_1, e_2\}\}$ . Como  $V_K$  es finito (con tres elementos), entonces una función  $\sigma : V_K \rightarrow I$  la puedo representar como una terna  $\sigma = (\sigma(0), \sigma(e_1), \sigma(e_2))$ . Como  $V_K \notin K$  entonces al menos una coordenada de  $\sigma$  debe ser 0. Por lo tanto, la segunda propiedad que cumple  $\sigma$ , (ie. la suma de las tres coordenadas da 1) me permite describir completamente  $|K|$ . Por ejemplo si  $\sigma(0) = 0$  entonces  $\sigma(e_1) = 1 - \sigma(e_2)$ , por lo tanto cualquier  $\sigma \in |K|$  que cumple que  $\sigma(0) = 0$  está completamente determinado por un parámetro  $t = \sigma(e_1) \in I$ , es decir  $\sigma = (0, t, 1 - t)$ . De esta manera tengo que:

$$|K| = \{(0, t, 1 - t) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{(t, 0, 1 - t) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{(t, 1 - t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

que es la orilla de  $\Delta^2 \subset \mathbb{R}^3$ . También observa que la métrica  $d$  de  $|K|$  coincide con la métrica usual de  $\mathbb{R}^3$  ya que los sumandos  $\sigma(v) - \tau(v)$  dentro del radical son simplemente las diferencias de las coordenadas de  $\sigma$  y  $\tau$  vistas como puntos en  $\mathbb{R}^3$ .



Como el caso finito es sencillo, formalizo este caso:

**Definición 9.** Sea  $K$  un complejo simplicial y  $L \in K$ , entonces

$$|L| := \{\sigma \in |K| : \sigma^{-1}(0, 1] \subseteq L\} = \{\sigma \in |K| : \text{Sop}(\sigma) \subseteq L\}.$$

La importancia de analizar  $|L|$  para  $L \in K$  es evidente del siguiente ejercicio:

**Ejercicio 6.** Sea  $L = \{v_0, \dots, v_n\} \in K$ , la función

$$\varphi : |L|_d \rightarrow \Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{definida por} \quad \sigma \mapsto (\sigma(v_0), \dots, \sigma(v_n))$$

es una isometría. En particular  $|L|_d \approx \Delta^n$  es un homeomorfismo.

*Proof.* Primero verifico que  $\Delta^n \approx |\Delta^n|_d$  (donde la topología usual de  $\Delta^n$  es la de subespacio de  $\mathbb{R}^n$ ).

Como  $L$  es finito cada  $\varphi$  está bien definida. Para ver que  $\varphi$  preserva la métrica, tomo  $\sigma, \tau \in |L|$  arbitrarios y calculo:

$$d_{\Delta^n}(\varphi(\sigma), \varphi(\tau)) = d_{\mathbb{R}^{n+1}}(\sigma(v_0), \dots, \sigma(v_n), \tau(v_0), \dots, \tau(v_n)) = \sqrt{\sum_{i=0}^n (\sigma(v_i) - \tau(v_i))^2}$$

Observa que  $V_L = L$  entonces la suma dentro del radical es la suma de  $(\sigma(v) - \tau(v))^2$  sobre  $v \in V_L$ . Por lo tanto

$$d_{\Delta^n}(\varphi(\sigma), \varphi(\tau)) = \sqrt{\sum_{v \in V_L} (\sigma(v) - \tau(v))^2} = d_{|L|}(\sigma, \tau)$$

y  $\varphi$  preserva la métrica. En particular es continua e inyectiva.

Ahora considera la función

$$\psi : \Delta^n \rightarrow |K|_d \quad \text{definida por} \quad (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \mapsto \psi(\lambda_0, \dots, \lambda_n)(v) = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } v = v_i \in L \\ 0 & \text{si } v \notin L \end{cases}$$

Está bien definida porque los elementos  $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \Delta^n$  cumplen  $\sum \lambda_i = 1$  y  $\lambda_i \geq 0$ , además de que  $\psi(\lambda) = \psi(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in |K|$  es cero fuera de  $L$ , ie.  $\psi(\sigma)|_{V_K - L} = 0$  o equivalentemente  $\text{Sop}(\varphi(\lambda)) \subseteq L$ . En particular  $\text{Im}(\psi) \subseteq |L|$ , entonces puedo suponer que  $\psi$  tiene como contradominio a  $|L|_d$ , es decir  $\psi : \Delta^n \rightarrow |L|_d$ .

Por definición:

$$\begin{aligned}
d_{|K|}(\varphi(\lambda), \varphi(\mu)) &= \sqrt{\sum_{v \in V_K} (\varphi(\lambda)(v) - \varphi(\mu)(v))^2} = \sqrt{\sum_{v \in L} (\varphi(\lambda)(v) - \varphi(\mu)(v))^2} \\
&= \sqrt{\sum_{i=0}^n (\varphi(\lambda)(v_i) - \varphi(\mu)(v_i))^2} = \sqrt{\sum_{i=0}^n (\lambda_i - \mu_i)^2} \\
&= d_{\mathbb{R}^{n+1}}((\lambda_0, \dots, \lambda_n), (\mu_0, \dots, \mu_n)) \\
&= d_{\Delta^n}(\lambda, \mu).
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $\psi$  preserva la métrica. En particular es continua e inyectiva.

Por último observa que:

$$\begin{aligned}
\psi(\varphi(\sigma))(v_i) &= \psi(\sigma(v_0), \dots, \sigma(v_n))(v_i) = \sigma(v_i) \implies \psi(\varphi(\sigma)) = \sigma \\
\varphi(\psi(\lambda)) &= (\psi(\lambda)(v_0), \dots, \psi(\lambda)(v_n)) = (\lambda_0, \dots, \lambda_n)\lambda.
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{\Delta^n}$  y  $\psi \circ \varphi = \text{Id}_{|L|_d}$ .

Para terminar resumo lo que tengo: hay dos funciones  $\varphi : |L|_d \rightarrow \Delta^n$  y  $\psi : \Delta^n \rightarrow |L|_d$  que son inversas entre sí. Además cada una preserva la métrica. Por lo tanto ambas son isometrías.  $\square$

*Nota.* Observa que  $|K|$  es la unión de todos los subespacios  $|L|$ , entonces el ejercicio anterior prueba que:

$$|K| = \bigcup_{L \in K} |L| \approx \bigcup \Delta^n,$$

es decir que la realización topológica de un complejo simplicial es una unión de simplejos geométricos estándares.

El ejercicio 6 y la nota anterior nos permite definirle una topología a  $|K|$  sin mencionar métricas:

**Definición 10.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Para cada  $L \in K$ , asígnales a  $|L|$  la topología inducida por el homeomorfismo  $|L| \approx \Delta^n$ . Entonces la *topología coherente* de  $|K|$  está definido por:

$$U \subseteq |K| \text{ es abierto} \iff U \cap |L| \text{ es abierto } \forall L \in K$$

*Nota.* De ahora en adelante,  $|K|$  se refiere a la realización topológica del complejo simplicial  $K$  con la topología coherente y  $|K|_d$  a la realización topológica con la topología inducida por la métrica  $d$  del ejercicio 5.

*Nota.* Vale la pena mencionar que una función  $f : |K| \rightarrow X$  es continua si y sólo si  $f|_{|L|} : |L| \rightarrow X$  es continua para toda  $L \in K$ . Esto quiere decir que  $\text{Id} : |K| \rightarrow |K|_d$  es continua porque  $\text{Id}|_{|L|} : |L| \rightarrow |L|_d$  es continua por definición de la topología de  $|L|$  (como  $|L| \approx \Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , la métrica  $d$  restringida a  $|L|$  coincide exactamente con la euclídeana de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ). Por lo tanto la topología coherente es más fina que la topología inducida por la métrica  $d$ , es decir tiene más abiertos.

**Definición 11.** Un complejo simplicial  $K$  es *localmente finito* si para cada  $v \in V_K$  sólo hay una cantidad finita de  $L \in K$  tales que  $v \in L$ , es decir que el conjunto  $\{L \in K \mid v \in L\}$  es finito para todo vértice  $v$ .

La importancia de esta condición se muestra en el siguiente teorema:

**Teorema 1.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1.  $K$  es localmente finito.
2.  $|K|$  es compacto.
3.  $\text{Id} : |K| \rightarrow |K|_d$  es un homeomorfismo, es decir que la topología coherente coincide con la topología inducida por la métrica  $d$ .
4.  $|K|$  es metrizable.



5.  $|K|$  satisface el primer axioma de numerabilidad, ie. todo punto  $\sigma \in |K|$  tiene una base local numerable.

**Definición 12.** Sean  $K$  y  $L$  complejos simpliciales. Un morfismo de complejos simpliciales  $f : K \rightarrow L$  es una función  $f : V_K \rightarrow V_L$  entre los vértices tal que

$$\{v_0, \dots, v_n\} \in K \implies \{f(v_0), \dots, f(v_n)\} \in L.$$

Además, para cada morfismo  $f : K \rightarrow L$  existe una función  $|f| : |K| \rightarrow |L|$  definida por:

$$|f|(\sigma) : V_L \longrightarrow I \quad \text{con} \quad |f|(\sigma)(u) = \sum_{v \in f^{-1}[\{u\}]} \sigma(v)$$

**Ejercicio 7.** La función inducida  $|f|$  está bien definida, es decir para toda  $\sigma \in |K|$  se tiene que  $|f|(\sigma) \in |L|$ .

*Proof.* Sea  $\sigma \in |K|$ , en particular

$$\sum_{v \in V_K} \sigma(v) = 1 \quad \text{y} \quad \sigma^{-1}(0, 1] = \text{Sop}(\sigma) = \{v_0, \dots, v_n\} \in K$$

Como  $V_K = \cup_{u \in V_L} f^{-1}[u]$  entonces:

$$\sum_{u \in V_L} |f|(\sigma)(u) = \sum_{\tau \in L} \sum_{v \in f^{-1}[u]} \sigma(v) = \sum_{v \in V_K} \sigma(v) = 1 \quad (3)$$

porque  $\sigma \in |K|$ .

Ahora sólo falta verificar que  $\text{Sop}(|f|(\sigma)) \in L$ . Como  $f$  es un mapeo simplicial entonces:

$$\text{Sop}(\sigma) = \{v_0, \dots, v_n\} \in K \implies \{f(v_0), \dots, f(v_n)\} \in L.$$

Si pruebo que  $\text{Sop}(|f|(\sigma)) = \{f(v_0), \dots, f(v_n)\}$  entonces por lo anterior y la fórmula (3) tendré que  $|f|(\sigma) \in |L|$  para toda  $\sigma \in |K|$ .

Pruebo la igualdad que me falta:

$\subseteq$ ) Sea  $u \in \text{Sop}(|f|(\sigma)) \subseteq V_L$ , entonces:

$$0 < |f|(\sigma)(u) = \sum_{v \in f^{-1}[u]} \sigma(v) \implies \exists v' \in f^{-1}[u] \text{ tal que } \sigma(v') > 0$$

porque todos los sumandos son no negativos. Esto implica que  $v' = v_i \in \text{Sop}(\sigma) = \{v_0, \dots, v_n\}$  para alguna  $i$ . Por lo tanto  $f(v') = f(v_i) = u \in \{f(v_0), \dots, f(v_n)\}$ .

$\supseteq$ ) Considera  $u \in \{f(v_0), \dots, f(v_n)\}$ . Entonces

$$|f|(\sigma)(u) = |f|(\sigma)(f(v_i)) = \sum_{v \in f^{-1}[f(v_i)]} \sigma(v) = \sigma(v_i) + \sum \sigma(v) > 0$$

porque  $v_i \in f^{-1}[f(v_i)]$  y además  $v_i \in \text{Sop}(\sigma)$  lo cual implica que  $\sigma(v_i) > 0$ . Por lo tanto

$$|f|(\sigma)(u) > 0 \implies u \in \text{Sop}(|f|(\sigma)).$$

Con esto concluyo que  $\text{Sop}(|f|(\sigma)) = \{f(v_0), \dots, f(v_n)\}$  y acabo.  $\square$

**Ejercicio 8.** La función inducida  $|f| : |K| \rightarrow |L|$  es continua con respecto a la topología coherente.

*Proof.*  $\square$

*Nota.* Los dos ejercicios anteriores nos muestra que la asignación  $K \mapsto |K|$  y  $f \mapsto |f|$  es un funtor entre la categoría de complejos simpliciales y **Top**.

Una construcción importante que se puede hacer para cualquier complejos simplicial es la subdivisión baricéntrica:

**Definición 13.** Sea  $K$  un complejo simplicial. La *subdivisión baricéntrica* de  $K$  es un complejo simplicial denotado por  $\text{sd}(K)$  cuyos vértices es todo  $K$ , i.e  $V_{\text{sd}(K)} = K$ , y los  $n$ -simplejos de  $\text{sd}(K)$  son conjuntos finitos totalmente ordenados  $\{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n\} \subseteq K$  tales que  $\sigma_0 \subsetneq \sigma_1 \subsetneq \dots \subsetneq \sigma_n$ .

Se llama subdivisión baricéntrica porque intuitivamente el conjunto de vértices  $V_{\text{sd}(K)}$  se puede pensar como asignar a cada  $\sigma \in K$  su baricentro  $\mathbf{b}(\sigma)$ . El siguiente dibujo aclara esta intuición:

Una de las propiedades más importantes de la subdivisión baricéntrica es:

**Ejercicio 9.**  $|\text{sd}(K)| \approx |K|$

*Proof.* □

Este resultado significa que podemos iterar el proceso de subdivisión baricéntrica sin cambiar de espacio topológico asociado. Si definimos inductivamente

$$\text{sd}^n(K) := \text{sd}(\text{sd}^{n-1}(K))$$

entonces tendremos que  $|\text{sd}^n(K)| \approx |K|$  para toda  $n$ . Esto significa que topológicamente no importa que trabajes con un complejo simplicial o con una (y por lo tanto todas) subdivisión de él.

La subdivisión baricéntrica nos da una definición de orden en los complejos simpliciales:

**Definición 14.** Un complejo simplicial  $K$  está ordenado si el conjunto de vértices  $V_K$  tiene un orden parcial tal que cada simplejo  $\sigma \in K$  está totalmente ordenado.

Por ejemplo  $\text{sd}(K)$  siempre es un complejo simplicial ordenado.

### 0.1.3 Triangulaciones y nervios

**Definición 15.** Un espacio  $X$  es *triangulable* si existe un complejo simplicial  $K$  tal que  $|K| \approx X$ .

**Ejercicio 10.** Sea  $V_K = \{0, e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2$  y  $K = \{\{0\}, \{e_1\}, \{e_2\}, \{0, e_1\}, \{0, e_2\}, \{e_1, e_2\}\}$  (cf. ejemplo 1). Prueba que  $|K| \approx \mathbb{S}^1$ , es decir que  $\mathbb{S}^1$  es triangulable.

*Proof.* Sabemos que:

$$|K| = \bigcup_{L \in K} |L|,$$

pero varios de estos uniendos son redundantes, por ejemplo:

$$|\{v_0\}| = \{\sigma \in |K| : \text{Sop}(\sigma) \subseteq \{v_0\} \subseteq \{v_0, v_1\}\} \subseteq \{\sigma \in |K| : \text{Sop}(\sigma) \subseteq \{v_0, v_1\}\} = |\{v_0, v_1\}|.$$

En general la realización geométrica de todo 0-simplejo de  $K$  está contenido en la realización geométrica de un 1-simplejo. Por lo tanto:

$$|K| = |\{v_0, v_1\}| \cup |\{v_0, v_2\}| \cup |\{v_1, v_2\}|.$$

Por otro lado, como el conjunto de vértices de  $K$  tiene 3 elementos, por definición tenemos que  $|K| \subset \mathbb{R}^3$  y cada elemento  $\sigma \in |K|$  se escribe como  $\sigma = (\sigma(v_0), \sigma(v_1), \sigma(v_2))$ . De esta manera podemos describir los elementos de  $|\{v_i, v_j\}|$  como

$$|\{v_0, v_1\}| = \{(\sigma(v_0), \sigma(v_1), \sigma(v_2)) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \sigma(v_i), \sigma(v_2) = 0, \sigma(v_0) + \sigma(v_1) = 1\} = \{(t, 1-t, 0)\}_{t \in I}.$$

Análogamente:

$$|\{v_0, v_2\}| = \{(t, 0, 1-t)\}_{t \in I} \quad \text{y} \quad |\{v_1, v_2\}| = \{(0, t, 1-t)\}_{t \in I},$$

y así

$$|K| = \{(t, 1-t, 0)\}_{t \in I} \cup \{(t, 0, 1-t)\}_{t \in I} \cup \{(0, t, 1-t)\}_{t \in I}.$$

Para dar un homeomorfismo entre  $|K|$  y  $\mathbb{S}^1$ , daré una composición de tres homeomorfismos:

1. Sea  $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la proyección  $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ . Claramente  $p|_{|K|}$  es continua y su imagen es:

$$\begin{aligned} p[|K|] &= p[\{(t, 1-t, 0)\}_{t \in I}] \cup p[\{(t, 0, 1-t)\}_{t \in I}] \cup p[\{(0, t, 1-t)\}_{t \in I}] \\ &= \{(t, 1-t)\}_{t \in I} \cup \{(t, 0)\}_{t \in I} \cup \{(0, t)\}_{t \in I}. \end{aligned}$$

La función  $p|_{|K|}$  tiene una inversa obvia: para cada pedazo de  $p[|K|]$  define

$$\begin{aligned} q_1 : \{(t, 1-t)\}_{t \in I} &\longrightarrow \{(t, 1-t, 0)\}_{t \in I} \quad \text{con} \quad (t, 1-t) \mapsto (t, 1-t, 0) \\ q_2 : \{(t, 0)\}_{t \in I} &\longrightarrow \{(t, 0, 1-t)\}_{t \in I} \quad \text{con} \quad (t, 0) \mapsto (t, 0, 1-t) \\ q_3 : \{(0, t)\}_{t \in I} &\longrightarrow \{(0, t, 1-t)\}_{t \in I} \quad \text{con} \quad (0, t) \mapsto (0, t, 1-t) \end{aligned}$$

que son claramente continuas (como restricciones de funciones continuas  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ). Además las podemos pegar porque coinciden en las intersecciones de los dominios:

$$q_1(0, 1) = (0, 1, 0) = q_3(0, 1) \quad , \quad q_1(1, 0) = (1, 0, 0) = q_2(1, 0) \quad , \quad q_2(0, 0) = (0, 0, 1) = q_3(0, 0).$$

Por lo tanto la función  $q : p[|K|] \rightarrow |K|$ , que se obtiene al pegar  $q_1, q_2$  y  $q_3$  es continua y por construcción es la inversa de  $p|_{|K|}$ . Por lo tanto  $p|_{|K|}$  es un homeomorfismo. Observa también que la imagen de  $p|_{|K|}$  es exactamente la frontera de  $\Delta^2 \subset \mathbb{R}^2$ , ie.  $p[|K|] = \partial\Delta^2$

2. Observa que el punto  $(1/3, 1/3) \in \Delta^2$  está en el interior (porque  $1/3 + 1/3 \neq 1$ ) de  $\Delta^2$  ie.  $(1/3, 1/3 \notin \partial\Delta^2)$ , entonces aplico la traslación  $(x, y) \mapsto (x - 1/3, y - 1/3)$  para llevar el punto  $(1/3, 1/3)$  al origen. Esta traslación es claramente un homeomorfismo. A la traslación de  $\partial\Delta^2$  la denoto por  $\tau := \partial\Delta^2 - 1/3$ .
3. El último homeomorfismo es la restricción de normalizar:

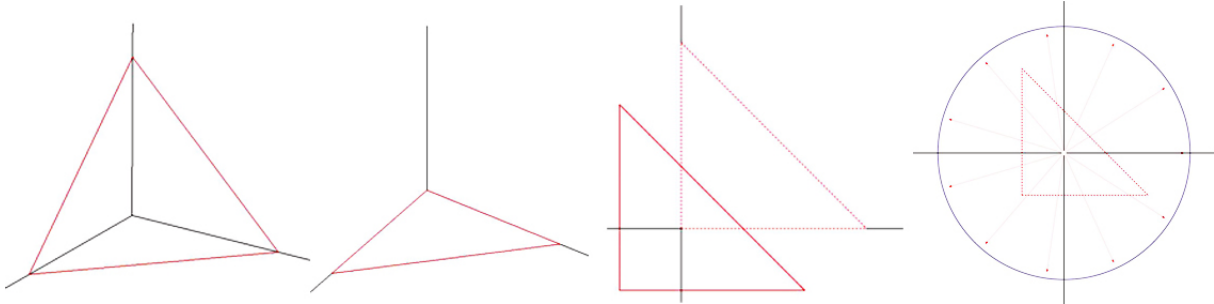
$$u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \quad \text{definido por} \quad (x, y) \mapsto \frac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

En coordenadas polares, esta función hace  $(\theta, r) \mapsto (\theta, 1)$ , entonces sólo depende del “argumento” del vector  $(x, y)$ .

Claramente es sobre porque  $u|_{\mathbb{S}^1} = \text{Id}_{\mathbb{S}^1}$ . Además,  $u|_{\tau}$  es inyectiva. Para ver esto basta observar que cada rayo que inicia en el origen intersecta a  $\tau$  en un sólo punto, o de otra manera: para cada argumento  $\theta$  hay un solo vector  $(x, y) \in \tau$  con argumento igual a  $\theta$ .

Por lo tanto  $u|_{\tau} : \tau \rightarrow \mathbb{S}^1$  es una función continua y biyectiva. Como  $\tau$  es compacto (por ser frontera de un 2-simplejo que es compacto) y  $\mathbb{S}^1$  es Hausdorff, entonces  $u|_{\tau}$  es un homeomorfismo.

El siguiente dibujo ilustra los tres pasos:



Para terminar, simplemente compone los tres homeomorfismos anteriores

$$|K| \longrightarrow \partial\Delta^2 \longrightarrow \partial\Delta^2 - \frac{1}{3} \xrightarrow{u} \mathbb{S}^1$$

para concluir que  $|K| \approx \mathbb{S}^1$ .

□

Este ejercicio se generaliza a variedades:

**Teorema 2.** *Toda variedad suave es triangulable.*

*Nota.* Una consecuencia de este teorema es:

$$n < m \implies \pi_n(\mathbb{S}^m) = 0 \quad (4)$$

Para ver esto sea  $[\alpha] \in \pi_n(\mathbb{S}^m)$ , es decir  $\alpha : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^m$  es continua. Como las esferas son triangulables, existen complejos simpliciales  $K$  y  $L$  tales que  $|K| \approx \mathbb{S}^n$  y  $|L| \approx \mathbb{S}^m$  donde las dimensiones de  $K$  y  $L$  son  $n$  y  $m$  respectivamente.

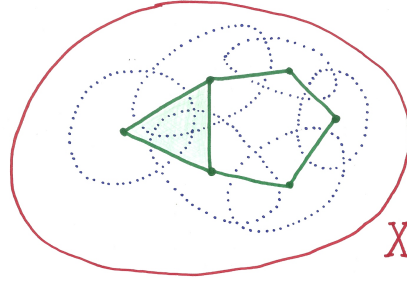
Ahora, si  $f : K \rightarrow L$  es un morfismo simplicial entonces un simplejo de dimensión máxima  $\{v_0, \dots, v_n\} \in K$  se manda, bajo  $f$ , al simplejo  $\{f(v_0), \dots, f(v_n)\} \in L$  que tiene a lo más  $n$  elementos. Por lo tanto  $f[K] \subset L$  es un subcomplejo simplicial de dimensión a lo más  $n < m$ , es decir  $f[K] \neq L$  y así  $|f|[\mathbb{S}^n] \neq [\mathbb{S}^m]$ .

Por lo tanto si cada función continua  $\alpha : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^m$  es homotópica a una función de la forma  $|f|$  para algún morfismo simplicial  $f$ , entonces tendríamos que  $[\alpha] = 1$  y así  $\pi_n(\mathbb{S}^m) = 0$  cuando  $n < m$ .

Ahora doy un ejemplo de un complejo simplicial abstracto:

**Definición 16.** (Alexandrov y Čech) Sean  $X$  un espacio topológico y  $\mathcal{C} = \{C_j\}_{j \in J}$  una familia de subespacios (en general se toma una cubierta abierta). El *nervio* de  $\mathcal{C}$ , denotado por  $\mathcal{N}\mathcal{C}$  es el complejo simplicial con vértices  $V_{\mathcal{N}\mathcal{C}} = J$ , el conjunto de índices, y  $n$ -simplejos de la forma  $L = \{j_0, \dots, j_n\}$  donde  $C_{j_0} \cap \dots \cap C_{j_n} \neq \emptyset$ .

Por ejemplo, un sub-complejo simplicial de un nervio se puede ver como:



**Definición 17.** Una función continua  $f : X \rightarrow Y$  es una *equivalencia homotópica débil* si para toda  $x \in X$  y para toda  $n > 0$ ,  $f_{\#} : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, f(x))$  es un isomorfismo y si además para  $n = 0$ ,  $f_{\#}$  es una función biyectiva.

Claramente tenemos que si  $X \simeq Y$  entonces existe una equivalencia homotópica débil entre  $X$  y  $Y$  (cf. el corolario ??), pero en ciertos casos, la equivalencia homotópica débil implica equivalencia homotópica:

**Teorema 3.** (S.H.C. Whitehead) Si  $X$  y  $Y$  son espacios triangulados entonces si  $f : X \rightarrow Y$  es una equivalencia homotópica débil, se cumple que  $X \simeq Y$ .

La noción de equivalencia homotópica débil y la de nervios nos permite estudiar, bajo ciertas condiciones, las propiedades de un espacio. Los siguientes teoremas (sin pruebas) ilustran estas relaciones.

**Teorema 4.** Sea  $\mathfrak{U} = \{U_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$  una cubierta abiertade  $X$  puntualmente finita (ie. para toda  $x \in X$  solamente existe una cantidad finita de  $U_{\lambda} \in \mathfrak{U}$  tales que  $x \in U_{\lambda}$ ). Si toda intersección finita  $U_{\lambda_1} \cap \dots \cap U_{\lambda_n} \neq \emptyset$  cumple que  $\pi_n(U_{\lambda_1} \cap \dots \cap U_{\lambda_n}, x) = 0$  entonces existe una equivalencia homotópica débil  $f : |\mathcal{N}\mathfrak{U}| \rightarrow X$ .

**Teorema 5.** Si  $X$  es un espacio para compacto equipado de una cubierta abierta  $\mathfrak{U}$  localmente finita tal que toda intersección finita no vacía de la cubierta es contraíble, entonces  $\mathcal{N}\mathfrak{U} \simeq X$ .

**Teorema 6.** Sea  $M^n$  una variedad suave y  $\mathfrak{U} = \{U_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$  una cubierta localmente finita<sup>2</sup> tal que cada intersección finita de  $n$  elementos de la cubierta cumplen  $U_{\lambda_1} \cap \dots \cap U_{\lambda_n} \approx \mathbb{R}^n$ , entonces  $\mathcal{N}\mathfrak{U} \simeq M$

<sup>2</sup>Como  $M$  es una variedad suave, admite una métrica Riemanniana y en este caso los elementos de la cubierta se pueden tomar fuertemente conexos, ie. para todas  $x, y \in U_{\lambda}$  existe una única geodésica que une  $x$  con  $y$ .

### 0.1.4 Homología Simplicial

Primero estudio la orientación de los complejos simpliciales.

**Definición 18.** Sea  $K$  un complejo simplicial y  $\sigma \in K$  un  $n$ -simplejo. Además sea  $\Sigma = \Sigma(\sigma)$  el conjunto de funciones biyectivas  $\underline{n} \rightarrow \sigma$ , donde  $\underline{n} = \{0, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$ . Entonces hay una relación de equivalencia:

$$f \simeq g \iff g^{-1}f \in S_{n+1} \text{ es una permutación par.}$$

**Ejercicio 11.** Prueba que solamente hay dos clases de equivalencia que son  $[f]$  y  $[\bar{f}]$  donde  $\bar{f} = \tau \circ f$  donde  $\tau \in S_{n+1}$  es la permutación que transpone el 0 y el 1 y fija a los demás.

*Proof.* Sea  $A_{n+1}$  el grupo alternante, ie. las permutaciones pares del grupo simétrico  $S_{n+1}$ . Defino la siguiente acción derecha:

$$\Sigma \times A_{n+1} \longrightarrow \Sigma \quad \text{con} \quad (f, \alpha) \mapsto f \circ \alpha.$$

Claramente es una acción derecha porque  $(f, 1) \mapsto f \circ 1 = f$  y

$$\begin{aligned} ((f, \alpha), \beta) &\mapsto (f \circ \alpha, \beta) = (f \circ \alpha) \circ \beta = f \circ (\alpha \circ \beta) \\ \therefore (f\alpha)\beta &= f(\alpha\beta). \end{aligned}$$

Ahora sea  $f \in \Sigma$ . Calculo su grupo de isotropía:

$$(A_{n+1})_f = \{\alpha \in A_{n+1} \mid f \circ \alpha = f\} = \{1\}.$$

Esto es porque si  $\alpha \in A_{n+1}$  mueve un elemento entonces  $f \circ \alpha$  y  $f$  difieren en ese elemento. Más precisamente, si  $\alpha \neq 1$ , existen  $i \neq j \in \underline{n}$  tal que  $\alpha(i) = j$  y por lo tanto  $(f \circ \alpha)(i) = f(\alpha(i)) = f(j) \neq f(i)$ , ie.  $f \circ \alpha \neq f$ , porque  $f$  es biyectiva. Este argumento prueba que la acción de  $A_{n+1}$  sobre  $\Sigma$  es libre.

Por el ejercicio ??, hay una biyección (de hecho un homeomorfismo porque  $\Sigma$  y  $A_{n+1}$  son finitos con la topología discreta) entre

$$\mathcal{O}(f) \longleftrightarrow \frac{A_{n+1}}{(A_{n+1})_f} = \frac{A_{n+1}}{1} \cong A_{n+1}$$

Esto quiere decir que todas las órbita de la acción tienen  $(n+1)!/2$  elementos<sup>3</sup>. Además observa que:

$$\mathcal{O}(f) = \{g \in \Sigma \mid \exists \alpha \in A_{n+1} \text{ tal que } g \circ \alpha = f\} = \{g \in \Sigma \mid \exists \alpha \in A_{n+1} \text{ tal que } \alpha = g^{-1}f\} = [f] \in \Sigma/\sim$$

Ahora,  $\Sigma$  tiene  $(n+1)!$  elementos por ser el conjunto de funciones biyectivas entre dos conjuntos con  $n+1$  elementos. Como las órbitas forman una partición de  $\Sigma$  y cada órbita tienen la mitad de los elementos de  $\Sigma$ , sólo puede haber dos órbitas. Sea  $f \in \Sigma$  arbitrario, pruebo que  $\Sigma/\sim = \{[f], [\bar{f}]\}$ , es decir que  $f \not\sim \bar{f}$ .

Observa que:

$$f \circ \bar{f}^{-1} = f \circ (\tau \circ f)^{-1} = f \circ (f^{-1} \circ \tau^{-1}) = \tau^{-1} = \tau.$$

Como  $\tau$  es una transposición, es una permutación impar. Por lo tanto  $f \not\sim \bar{f}$  y acabo.  $\square$

En la prueba del ejercicio anterior se vió que  $\Sigma(\sigma)/\sim$  tiene naturalmente una estructura de grupo isomorfa a  $\mathbb{Z}_2$  bajo el isomorfismo (continuo)  $[f] \mapsto 1$  y  $[\bar{f}] \mapsto -1$ . Entonces,  $\Sigma(\sigma)/\sim \cong \{1, -1\}$ .

**Definición 19.** Sea  $K$  un complejo simplicial y  $\sigma \in K$  un  $n$ -simplejo. Una *orientación* de  $\sigma$  es la pareja  $(\sigma, \mathbf{o}_\sigma)$  donde  $\mathbf{o}_\sigma \in \Sigma(\sigma)/\sim = \{1, -1\}$ . En general, si vamos a denotar  $\pm[\sigma] := (\sigma, \pm)$  y si ya tenemos una orientación para  $\sigma$ , ie. un ordenamiento  $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$  entonces denotamos  $[\sigma] = [v_0, \dots, v_n]$ .

En variedades triangulables, las orientaciones de los complejos simpliciales que realizan a la variedad cumplen varias propiedades importantes.

Sea  $M^n$  una variedad compacta de dimensión  $n$  con triangulación  $M \approx |K|$ . Entonces cada simplejo de  $K$  es cara de un  $n$ -simplejo y además cada  $(n-1)$ -simplejo es cara de exactamente dos  $n$ -simplejos. Estas dos propiedades permiten definir orientación de complejos simpliciales que realizan variedades compactas.

**Definición 20.** Sea  $M^n$  una variedad suave y compacta tal que  $M \approx |K|$  para algún complejo simplicial  $K$ . Una *orientación* de  $K$  es una elección de una orientación para cada  $n$ -simplejo  $\sigma \in K$ , que cumple que las dos orientaciones inducidas en cada  $(n-1)$ -simplejo de  $K$  son distintas.

Más precisamente, cada  $(n-1)$ -simplejo  $\sigma \in K$  es cara de exactamente dos  $n$ -simplejos  $\tau, \tau' \in K$ . Entonces la orientaciones  $\mathbf{o}_\tau$  y  $\mathbf{o}_{\tau'}$  deben ser distintas, ie.  $\mathbf{o}_\tau = -\mathbf{o}_{\tau'}$ .

**Ejemplo 2.** Toma  $K = \{\{e_0\}, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_0, e_1\}, \{e_1, e_2\}, \{e_0, e_2\}, \{e_0, e_1, e_2\}\}$ , el complejo simplicial inducido por  $\Delta^2$ . Si orientamos  $\Delta^2$  como  $[\Delta^2] = [e_0, e_1, e_2]$ . Esto induce una orientación en cada 1-cara:

Observa que las 1-caras (orientadas) las podemos reescribir como:

$$[e_0, e_1] = [e_0, e_1, \hat{e}_2] \quad , \quad [e_1, e_2] = [\hat{e}_0, e_1, e_2] \quad \text{y} \quad [e_2, e_0] = -[e_0, \hat{e}_1, e_2]$$

donde la notación  $\hat{e}_i$  significa omitir ese elemento de la lista. Esto nos sugiere que el “borde” o la frontera de  $\Delta^2$  la podemos escribir como la siguiente suma formal:

$$[\hat{e}_0, e_1, e_2] - [e_0, \hat{e}_1, e_2] + [e_0, e_1, \hat{e}_2]$$

o en general como

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i [e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n] \quad (5)$$

Un ejemplo que ilustra esta idea mejor es el siguiente:

**Ejemplo 3.** Considera el conjunto de vértices  $V_K = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$  (por ejemplo los vértices de  $\Delta^3$ ). Construye  $K$  de la siguiente manera: no hay 3-simplejos; los 2-simplejos son  $[v_0, v_1, v_2]$ ,  $[v_1, v_3, v_2]$ ,  $[v_0, v_2, v_3]$  y  $[v_0, v_3, v_1]$ ; y toma todos los subconjuntos de estos 2-simplejos como los 1-simplejos y 0-simplejos que faltan (los que necesita la definición de complejo simplicial abstracto).

La realización geométrica es un tetraedro (como  $\Delta^3$ ) sin relleno y orientado de la siguiente manera:

Ahora calculamos la frontera de la misma manera que en (5):

$$\begin{cases} [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1] \\ [v_3, v_2] - [v_1, v_2] + [v_1, v_3] \\ [v_3, v_1] - [v_0, v_1] + [v_0, v_3] \end{cases} = [v_3, v_2] + [v_1, v_3] + [v_2, v_3] + [v_3, v_1] = 0.$$

El hecho que el resultado dio 0 es porque  $K$  es la frontera de otro simplejo, en particular  $[v_0, v_1, v_2, v_3]$ .

He estado sumando y restando complejos simpliciales sin ninguna formalidad pero esto no es grave porque siempre existe la herramienta de grupos libres o en este caso particular,  $R$ -módulos libres:

**Definición 21.** Sea  $R$  un anillo conmutativo con 1 y  $X$  un conjunto. El  $R$ -módulo libre generado por  $X$  se define como

$$R\langle X \rangle := \{f : X \rightarrow R \mid f(x) \neq 0 \text{ para una cantidad finita de } x \in X\}.$$

Las operaciones son las naturales:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{y} \quad (rf)(x) = rf(x).$$

*Nota.* A cada elemento  $x \in X$ , le podemos asociar de manera canónica un elemento de  $R\langle X \rangle$ : la función:

$$x(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y \end{cases}.$$

---

<sup>3</sup>Esto se sigue del teorema de Langrange y de que  $(S_{n+1} : A_{n+1}) = 2$ . La función  $S_{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}_2$  que le asocia a una permutación  $\alpha \in S_{n+1}$  su signo  $\alpha \mapsto \text{sgn}(\alpha) \in \{-1, 1\}$ , es un epimorfismo de grupos con kernel  $A_{n+1}$  lo cual implica que  $S_{n+1}/A_{n+1} \cong \mathbb{Z}_2$ . Por el teorema de Lagrange  $\#(S_{n+1}) = (S_{n+1} : A_{n+1})\#(A_{n+1}) \implies \frac{1}{2}\#(S_{n+1}) = \frac{1}{2}(n+1)! = \#(A_{n+1})$ .

A veces a esta función si le llama la función característica de  $x$  y se denota  $\chi_x$ . En el caso particular de los espacios vectoriales se usa la delta de Kronecker  $\delta_{ij}$ .

Por otro lado, para toda  $f \in R\langle X \rangle$ ,  $\text{Sop}(f) = \{x_1, \dots, x_n\}$  es finito, entonces claramente

$$f = \sum_{i=1}^n f(x_i)x_i = \sum_{x \in X} f(x)\chi_x.$$

Esta es una representación canónica porque sólo depende de  $f$ .

Los  $R$ -módulos libres cumplen una propiedad muy importante:

**Ejercicio 12.** Sea  $M$  un  $R$ -módulo y  $f : X \rightarrow R$  una función. Entonces existe un único morfismo de  $R$ -módulos  $\hat{f} : R\langle X \rangle \rightarrow M$  tal que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & R\langle X \rangle & \\ x \mapsto \chi_x \nearrow & \downarrow \hat{f} & \\ X & \xrightarrow{f} & M \end{array} \quad (6)$$

*Proof.* Sea

$$g = \sum_{x \in X} g(x)\chi_x \in R\langle X \rangle = \{f : X \rightarrow R \mid \text{Sop}(f) \text{ es finito}\}$$

un elemento arbitrario donde  $\chi_x \in R\langle X \rangle$  es la función definida por  $\chi_x(x) = 1$  y  $\chi_x(x') = 0$  para toda  $x' \neq x$ . Define:

$$\hat{f} : R\langle X \rangle \longrightarrow M \quad \text{con} \quad g = \sum_{x \in X} g(x)\chi_x \mapsto \sum_{x \in X} g(x)f(x).$$

Como  $g(x) \in R$  y  $f(x) \in M$ ,  $\hat{f}$  está bien definida. Ahora observa que  $\hat{f}$  es un morfismo de  $R$ -módulos:

$$\begin{aligned} \hat{f}(g + g') &= \sum_{x \in X} (g + g')(x)f(x) = \sum_{x \in X} (g(x) + g'(x))f(x) = \sum_{x \in X} g(x)f(x) + \sum_{x \in X} g'(x)f(x) \\ &= \hat{f}(g) + \hat{f}(g'), \\ \hat{f}(rg) &= \sum_{x \in X} (rg)(x)f(x) = \sum_{x \in X} rg(x)f(x) = r \sum_{x \in X} g(x)f(x) \\ &= r\hat{f}(g). \end{aligned}$$

También tenemos que:

$$\hat{f}(\chi_x) = \sum_{x' \in X} \chi_x(x')f(x') = \chi_x(x)f(x) = 1f(x) = f(x)$$

Por lo tanto  $\hat{f}$  es la composición  $x \mapsto \chi_x \mapsto \hat{f}(\chi_x)$ , es decir, el diagrama (6) conmuta. Ya probé la existencia.

Para la unicidad, supongo que existe un morfismo  $R$ -módulos  $F : R\langle X \rangle \rightarrow M$  que haga conmutar el diagrama, es decir que  $F(\chi_x) = f(x)$ . Entonces, como  $F$  es morfismo:

$$F(g) = F\left(\sum_{x \in X} g(x)\chi_x\right) = \sum_{x \in X} g(x)F(\chi_x) = \sum_{x \in X} g(x)f(x) = \hat{f}(g).$$

Por lo tanto  $F = \hat{f}$  y la extensión es única.  $\square$

Vamos a construir el  $R$ -módulo libre generado por simplejos de la siguiente manera:

Recuerda que cada  $n$ -simplejo  $\sigma \in K$  tiene una de dos orientaciones que denotamos como  $(\sigma, +1)$  y  $(\sigma, -1)$ . Con esto definimos el conjunto de  $n$ -simplejos con orientación como

$$S_n^{\mathcal{O}}(K) := \{(\sigma, \pm 1) \mid \sigma \text{ es un } n\text{-simplejo}\}.$$

La “O” gótica en el superíndice significa orientación. En general voy a omitir la  $K$  de la notación y escribiré  $S_n^{\mathcal{O}}$ . Vamos a trabajar con  $R\langle S_n^{\mathcal{O}} \rangle$ , el  $R$ -módulo libre generado por los  $n$ -simplejos orientados.

La fórmula (5) se extiende a todo  $R\langle S_n^{\mathcal{O}} \rangle$  por el ejercicio 12:

**Definición 22.** El morfismo frontera  $\partial_n : R\langle S_n^\Delta \rangle \longrightarrow R\langle S_{n-1}^\Delta \rangle$  se define sobre elementos de  $S_n^\Delta$  como:

$$\partial_n[v_0, \dots, v_n] := \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n].$$

Los elementos de  $\ker(\partial_n)$  se llaman  $n$ -ciclos.

**Ejercicio 13.** Para toda  $n \geq 1$ , se cumple que  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ , en particular  $\text{Im}(\partial_n) \subseteq \ker(\partial_{n-1})$ .

*Proof.* Sea  $[v_0, \dots, v_n] \in S_n^\Delta$ . Entonces:

$$\partial_{n-1}(\partial_n[v_0, \dots, v_n]) = \partial_{n-1} \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n] \right) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_{n-1}[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n] \quad (7)$$

Ahora analizo el término  $\partial_{n-1}[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n]$ . Observa que

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n] &= [\widehat{v_0}, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n] + \dots + (-1)^{i-1} [v_0, \dots, \widehat{v_{i-1}}, \widehat{v_i}, \dots, v_n] \\ &\quad + (-1)^i [v_0, \dots, \widehat{v_i}, \widehat{v_{i+1}}, \dots, v_n] + \dots + (-1)^{n-1} [v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, \widehat{v_n}] \end{aligned}$$

Juntando esto en notación de suma, tenemos:

$$\partial_{n-1}[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n] = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j [v_0, \dots, \widehat{v_j}, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n] + \sum_{k=i+1}^n (-1)^{k-1} [v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, \widehat{v_k}, \dots, v_n]$$

donde el exponente de  $(-1)$  en la segunda suma es  $k-1$  en lugar de  $k$  porque el  $k$ -ésimo sumando de la segunda suma es el  $(k-1)$ -ésimo sumando de todo  $\partial_{n-1}[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n]$  (ya que  $k > i$  y se eliminó el término  $i$ -ésimo). Sustituyo en la fórmula (7):

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}(\partial_n[v_0, \dots, v_n]) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \left( \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j [v_0, \dots, \widehat{v_j}, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=i+1}^n (-1)^{k-1} [v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, \widehat{v_k}, \dots, v_n] \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} [v_0, \dots, \widehat{v_j}, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n] \\ &\quad + \sum_{i=0}^n \sum_{j=i+1}^n (-1)^{i+j-1} [v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_n] \end{aligned}$$

De esta expresión se vuelve claro que un sumando arbitrario  $[v_0, \dots, \widehat{v_k}, \dots, \widehat{v_l}, \dots, v_n]$  aparece dos veces con signo contrario: en el primer sumando cuando  $k = j$  y  $l = i$  con signo  $(-1)^{i+j}$  y en el segundo sumando cuando  $k = i$  y  $l = j$  con signo  $(-1)^{i+j-1}$ .

Por lo tanto cada sumando de la primera suma, de la ecuación anterior, se cancela con un sumando de la segunda suma. Así podemos concluir que toda la suma vale 0, ie.  $\partial_{n-1}(\partial_n[v_0, \dots, v_n]) = 0$  para todo elemento de  $S_n^\Delta$ .

Ahora  $\partial_{n-1} \circ \partial$  se extiende a  $R\langle S_n^\Delta \rangle$  como:

$$(\partial_{n-1} \circ \partial_n) \left( \sum_{\sigma \in S_n^\Delta} r_\sigma \sigma \right) = \sum r_\sigma (\partial_{n-1} \circ \partial_n)(\sigma) = \sum r_\sigma 0 = 0$$

y así podemos concluir que  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$  como morfismo de  $R$ -módulos.  $\square$

Queremos poder operar los  $n$ -simplejos orientados de tal manera que si sumamos un  $n$ -simplejo y él mismo con la orientación puesta, queremos que el resultado de 0. Para garantizar esto hay que hacer un cociente:



**Definición 23.** Sea  $K$  un complejo simplicial y  $N = \langle (\sigma, +1) + (\sigma, -1) \rangle_{\sigma \in S_n^\mathfrak{D}}$  el submódulo de  $R\langle S_n^\mathfrak{D}(K) \rangle$  generado por las sumas de  $n$ -simplejos con ambas orientaciones. Entonces definimos:

$$C_n(K; R) := \frac{R\langle S_n^\mathfrak{D} \rangle}{N}.$$

Los elementos de  $C_n(K; R)$  se llaman  $n$ -cadenas orientadas.

En general, y al igual que  $S_n^\mathfrak{D}$ , suprimo la  $R$  en la notación.

Observa que el morfismo frontera pasa a este cociente porque si  $[\sigma] = [v_0, v_1, \dots, v_n]$  entonces:

$$\partial_n([\sigma] - [\sigma]) = \partial_n([v_0, v_1, \dots, v_n] + [v_1, v_0, \dots, v_n]) = \partial_n([v_0, v_1, \dots, v_n]) + \partial_n([v_1, v_0, \dots, v_n])$$

es una suma de la forma  $\sum [\tau] - [\tau] = 0$ . Por lo tanto,  $\partial_n$  se factoriza a través de  $C_n(K)$ ; esta nueva función la llamamos y denotamos igual:

$$\begin{array}{ccc} R\langle S_n^\mathfrak{D} \rangle & \xrightarrow{\partial_n} & R\langle S_{n-1}^\mathfrak{D} \rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_n(K) & \xrightarrow[\partial_n]{} & C_{n-1}(K) \end{array}$$

Gracias al ejercicio 13 tenemos que  $\text{Im}(\partial_{n+1}) \subseteq \ker(\partial_n)$  entonces tiene sentido definir:

**Definición 24.** La  $n$ -homología de  $K$  con coeficientes en un anillo  $R$ , conmutativo con 1, se define como el cociente:

$$H_n(K; R) := \frac{\ker(\partial_n)}{\text{Im}(\partial_{n+1})}$$

Por ejemplo:

**Ejercicio 14.** Sea  $K$  el complejo simplicial con vértices  $V_K = \{v_0, v_1, v_2\}$  y  $K = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_1, v_2\}\}$ . Entonces

$$H_n(K; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0, 1 \\ 0 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

*Proof.* □

Otra manera de definir  $n$ -cadenas es usando la idea de complejos simpliciales ordenados (cf. definición 14):

**Definición 25.** Sea  $K$  un complejo simplicial ordenado, entonces definimos:

$$C_n^<(K; R) := R\langle (v_0, \dots, v_n) \mid v_0 < \dots < v_n, \{v_0, \dots, v_n\} \in K \rangle$$

Los morfismos  $\partial_n$  se definen exactamente igual que antes.

*Proposición 3.* Para cada  $n$ , el morfismo  $\beta_n : C_n^<(K) \rightarrow C_n(K)$  que hace  $(v_0, \dots, v_n) \mapsto \overline{[v_0, \dots, v_n]}$ , donde  $\bar{\cdot}$  se refiere a la clase en el cociente de  $R\langle S_n^\mathfrak{D} \rangle$  y  $[\cdot]$  se refiere a la clase de orientación en  $S_n^\mathfrak{D}$ , es un isomorfismo y hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} C_n^<(K) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}^<(K) \\ \downarrow \beta_n & & \downarrow \beta_{n-1} \\ C_n(K) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(K) \end{array}$$

### 0.1.5 Complejos de cadena

En esta parte vamos a introducir una herramienta algebraica muy importante. Fijemos un anillo  $R$  conmutativo con 1 y trabajaremos en la categoría de  $R$ -módulos (aunque se pueda generalizar a cualquier categoría abeliana).

**Definición 26.** Un *complejo de cadenas*, denotado por  $\mathcal{C}_\bullet$  es una familia de  $R$ -módulos  $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  junto con una familia de morfismos  $\{\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}\}$ , llamados *diferenciales*, que cumplen  $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$  para toda  $n \in \mathbb{Z}$ . Diagramáticamente, esto se escribe como:

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

Un *morfismo de complejos de cadenas*  $\varphi : \mathcal{C}_\bullet \rightarrow \mathcal{C}'_\bullet$  es una familia de morfismos  $\{\varphi_n : C_n \rightarrow C'_n\}$  tales que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow \varphi_{n+1} & & \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_{n-1} \\ \cdots & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{\partial'_n} & C'_{n-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

La  $n$ -homología de un complejo de cadenas  $\mathcal{C}_\bullet$  se define como el cociente

$$H_n(\mathcal{C}_\bullet) := \frac{\ker(\partial_n)}{\text{Im}(\partial_{n+1})}.$$

*Nota.* La homología de las cadenas de complejos está bien definida porque  $\partial_{n+1} \circ \partial_n = 0$  implica que  $\text{Im}(\partial_{n+1}) \subseteq \ker(\partial_n)$ .

**Ejemplo 4.** Gracias al ejercicio 13, tenemos que las  $n$ -cadenas orientadas de un complejo simplicial  $K$  forman un complejo de cadenas  $\mathcal{C}_\bullet(K; R)$  que diagramáticamente se ve como:

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(K) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K) \longrightarrow \cdots$$

Observa que  $C_n(K) = 0$  para  $n < 0$ .

Por la misma razón,  $\mathcal{C}_\bullet^<(K)$  es un complejo de cadenas.

**Ejercicio 15.** Un morfismo  $\varphi : \mathcal{C}_\bullet \rightarrow \mathcal{C}'_\bullet$  induce un homomorfismo  $H_n(\varphi) : H_n(\mathcal{C}_\bullet) \rightarrow H_n(\mathcal{C}'_\bullet)$ .

*Proof.* Sea  $n \in \mathbb{Z}$  y considera el morfismo de  $R$ -módulos  $\varphi_n : C_n \rightarrow C'_n$  que da la definición de  $\varphi : \mathcal{C}_\bullet \rightarrow \mathcal{C}'_\bullet$ . También sea  $x \in \ker \partial_n \subseteq C_n$ . Como  $\varphi$  es un morfismo de cadenas, entonces:

$$0 = \varphi_{n-1}(0) = \varphi_{n-1}(\partial_n(x)) = \partial'_n(\varphi_n(x)) \implies \varphi_n(x) \in \ker \partial'_n.$$

Esto implica que  $\varphi_n|_{\ker \partial_n} : \ker \partial_n \rightarrow \ker \partial'_n$  está bien definida.

Ahora considera  $[x], [x'] \in H_n(\mathcal{C}_\bullet)$  tales que  $[x] = [x']$  o equivalentemente  $x - x' \in \text{Im} \partial_{n+1}$ . Entonces existe una  $y \in C_{n+1}$  tal que  $\partial_{n+1}(y) = x - x'$ . Como  $\varphi$  es un morfismo de complejos de cadena, tenemos que

$$\varphi_n(x) - \varphi_n(x') = \varphi_n(x - x') = \varphi_n(\partial_{n+1}(y)) = \partial'_{n+1}(\varphi_{n+1}(y)) \implies \varphi_n(x) - \varphi_n(x') \in \text{Im} \partial'_{n+1}.$$

Por lo tanto  $[\varphi_n(x)] = [\varphi_n(x')]$  en  $H_n(\mathcal{C}'_\bullet)$  y así la función:

$$H_n(\varphi) : H_n(\mathcal{C}_\bullet) \longrightarrow H_n(\mathcal{C}'_\bullet) \quad \text{definido por} \quad [x] \mapsto [\varphi_n(x)]$$

está bien definida. Como  $\varphi_n$  es un morfismo de  $R$ -módulos, entonces  $H_n(\varphi)$  es un morfismo de  $R$ -módulos gracias a la regla de correspondencia de  $H_n(\varphi)$ .  $\square$

*Nota.* Observa que la proposición 3 nos dice que  $\beta = \{\beta_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  (definiendo  $\beta_n = 0$  cuando  $n < 0$ ) es un morfismo de cadenas. Como cada  $\beta_n$  es un isomorfismo,  $\beta$  induce un isomorfismo a nivel de homología, i.e.  $H_n(\beta) : H_n(\mathcal{C}_\bullet^<(K)) \rightarrow H_n(\mathcal{C}_\bullet(K))$  es un isomorfismo. De hecho,  $\mathcal{C}_\bullet^<(K) \cong \mathcal{C}_\bullet(K)$  como cadenas.

**Definición 27.** Sea  $f : K \rightarrow L$  un morfismo de complejos simpliciales.  $f$  induce un morfismo de complejos  $\{f_n : C_n(K) \rightarrow C_n(L)\}$  definido por

$$f_n(\overline{[v_0, \dots, v_n]}) := \begin{cases} \overline{[f(v_0), \dots, f(v_n)]} & \text{si } f|_{\{v_0, \dots, v_n\}} \text{ es inyectiva} \\ 0 & \text{si } f|_{\{v_0, \dots, v_n\}} \text{ no es inyectiva} \end{cases}$$

**Definición 28.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Define  $\mathcal{C}_n(K) = R\langle (v_0, \dots, v_n) \mid \{v_0, \dots, v_n\} \in K \rangle$  y considera el complejo de cadenas  $\mathcal{C}_\bullet$  definido por

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{C}_{n+1}(K) \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathcal{C}_n(K) \xrightarrow{\partial_n} \mathcal{C}_{n-1}(K) \longrightarrow \cdots,$$

donde las diferenciales están definidos de la manera usual:

$$\partial_n(v_0, \dots, v_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n).$$

Además, si  $f : K \rightarrow L$  es un morfismo de complejos simpliciales entonces éste induce un morfismo de complejos de cadenas  $f_\# : \mathcal{C}_\bullet(K) \rightarrow \mathcal{C}_\bullet(L)$  definido por

$$f_\#(v_0, \dots, v_n) = (f(v_0), \dots, f(v_n)).$$

**Ejercicio 16.**  $f_\#$  es un morfismo de complejos de cadenas.

*Proof.* Para cada  $n \geq 0$  denoto por  $(f_\#)_n : \mathcal{C}_n(K) \rightarrow \mathcal{C}_n(L)$  al morfismo de  $R$ -módulos que es la extensión de  $(f_\#)_n : \{(v_0, \dots, v_n) \mid \{v_0, \dots, v_n\} \in K\} \rightarrow \{(u_0, \dots, u_n) \mid \{u_0, \dots, u_n\} \in L\}$  al  $R$ -módulo  $\mathcal{C}_n(K)$ . Para probar que  $f_\#$  es un morfismo de cadenas, nada más hay que probar que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_n(K) & \xrightarrow{\partial_n} & \mathcal{C}_{n-1}(K) \\ \downarrow (f_\#)_n & & \downarrow (f_\#)_{n-1} \\ \mathcal{C}_n(L) & \xrightarrow{\partial_n} & \mathcal{C}_{n-1}(L) \end{array}$$

o equivalentemente  $(f_\#)_{n-1} \circ \partial_n = \partial_n \circ (f_\#)_n$ . Como en la prueba del ejercicio 13, basta probar la conmutatividad del diagrama en los elementos de la base:

Sea  $(v_0, \dots, v_n) \in \mathcal{C}_n(K)$ , entonces:

$$\begin{aligned} (f_\#)_{n-1}(\partial_n(v_0, \dots, v_n)) &= (f_\#)_{n-1} \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i (v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n) \right) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i (f_\#)_{n-1}(v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i (f(v_0), \dots, \widehat{f(v_i)}, \dots, f(v_n)) \\ &= \partial_n(f(v_0), \dots, f(v_n)) \\ &= \partial_n((f_\#)_n(v_0, \dots, v_n)). \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que  $(f_\#)_{n-1} \circ \partial_n = \partial_n \circ (f_\#)_n$  y acabamos.  $\square$

*Nota.* Este último ejercicio, junto con el ejercicio 15, implican que  $f_\#$  induce un morfismo  $H_n(f_\#) : H_n(\mathcal{C}_\bullet(K)) \rightarrow H_n(\mathcal{C}_\bullet(L))$ .

La diferencia entre los complejos de cadenas  $C_\bullet(K)$  y  $\mathcal{C}_\bullet(K)$  desaparece a nivel de homología:

*Proposición 4.*  $H_n(C_\bullet(K)) \cong H_n(\mathcal{C}_\bullet(K))$

Toda la idea de definir homología simplicial es para poder definir homología de espacio topológicos (triangulables). Para un espacio triangulable  $X$ , ie.  $X \approx |K|$ , lo ideal sería definir  $H_n(X; R) := H_n(K; R)$ , pero para que esto esté bien definido necesitamos la propiedad de la *invariancia topológica de la homología simplicial*:

$$|K| \approx X \approx |L| \text{ son dos triangulaciones} \implies H_n(K; R) \cong H_n(L; R).$$

Poincaré propuso un plan para probarlo:

1. Si  $K \cong L$ , como complejos simpliciales, entonces  $H_n(K; R) \cong H_n(L; R)$ .
2. Si  $K'$  es una subdivisión de  $K$ , entonces  $H_n(K; R) \cong H_n(K'; R)$ .
3. (Hauptvermutung) Si  $K$  y  $L$  son complejos simpliciales tales que  $|K| \approx |L|$  entonces existen  $K'$  y  $L'$  subdivisiones de  $K$  y  $L$  respectivamente tales que  $K' \cong L'$ .

Resultó que el paso 3, llamado Hauptvermutung, no es cierto; Milnor probó que es falso en 1961. Pero la propiedad de invariancia topológica de la homología simplicial (ITHS) sí es cierta; Alexander lo probó con un método distinto al de Poincaré en 1915.

El primer paso no es difícil probar:

**Ejercicio 17.**  $K \cong L \implies H_n(K; R) \cong H_n(L; R)$

*Proof.* Supongamos que  $K \cong L$  mediante el isomorfismo de complejos simpliciales  $f : K \rightarrow L$ . Por el ejercicio 16  $f_{\#} : \mathcal{C}_{\bullet}(K) \rightarrow \mathcal{C}_{\bullet}(L)$  es un morfismo de complejos de cadenas. De hecho  $f_{\#}$  es un isomorfismo de complejos de cadenas porque  $(f^{-1})_{\#}$  es su inverso, en efecto:

$$(f_{\#})_n((f^{-1})_n(v_0, \dots, v_n)) = (f_{\#})_n(f^{-1}(v_0), \dots, f^{-1}(v_n)) = (f(f^{-1}(v_0)), \dots, f(f^{-1}(v_n))) = (v_0, \dots, v_n)$$

para toda  $(v_0, \dots, v_n)$  en la base de  $\mathcal{C}_n(K)$ . Sucede exactamente lo mismo para  $(f_{\#}^{-1})_n \circ (f_{\#})_n = \text{Id}$ . Por lo tanto  $\mathcal{C}_{\bullet}(K) \cong \mathcal{C}_{\bullet}(L)$  como complejos de cadenas. Como la homología de un complejo de cadenas depende solamente de la clase de isomorfismo del complejo (cf. ejercicio 15) entonces podemos concluir que  $H_n(\mathcal{C}_{\bullet}(K); R) \cong H_n(\mathcal{C}_{\bullet}(L); R)$ . Por último, la proposición 4 tenemos que:

$$H_n(C_{\bullet}(K)) \cong H_n(\mathcal{C}_{\bullet}(K)) \cong H_n(\mathcal{C}_{\bullet}(L)) \cong H_n(C_{\bullet}(L)).$$

□

Una vez establecido ITHS, podemos definir:

**Definición 29.** La homología de un espacio triangulable  $X$  se define como  $H_n(X; R) := H_n(K; R)$  donde  $X \approx |K|$ .

Vietoris dio una definición diferente para espacios métricos en los 1920's y Čech dió la siguiente definición en 1932:

**Definición 30.** Sea  $X$  un espacio topológico y toma un conjunto  $\mathcal{U}$  “suficientemente grande” de cubiertas abiertas de  $X$ , ordenados mediante refinamiento. Entonces la homología de  $X$  se define como:

$$H_n(X; R) := \varprojlim_{\mathcal{U} \in \mathcal{U}} H_n(\mathcal{N}\mathcal{U}; R)$$

En el caso de variedades, la homología es más sencilla. Sea  $M^n$  una variedad orientada y compacta con una triangulación  $T$ , ie.  $|T| \approx M$ . Como  $M$  está orientado, cada  $n$ -simplejo  $\sigma \in T$  tiene una orientación fija:  $[\sigma]$ . La  $n$ -cadena:

$$\mathfrak{C} = \sum_{\sigma \in S_n^{\mathcal{O}}(T)} [\sigma]$$

está bien definida porque  $M$  es compacto (cf. teorema 1), es decir la suma siempre es finita. Además, por definición de orientación de una triangulación de  $M$ , tenemos que

$$\partial_n(\mathfrak{C}) = \partial_n \left( \sum_{\sigma \in S_n^{\mathcal{O}}(T)} [\sigma] \right) = \sum_{\sigma \in S_n^{\mathcal{O}}(T)} \partial_n[\sigma] = 0$$

porque cada  $(n - 1)$ -simplejo aparece dos veces con la orientación opuesta. Por lo tanto  $\mathfrak{C} \in \ker \partial_n$  y así tenemos que

$$[\mathfrak{C}] \in H_n(M; \mathbb{Z}).$$

A este elemento de la homología se le llama la *clase fundamental* de  $M$ .

Si  $M$  no está orientada, entonces sólo podemos garantizar que  $\partial_n(\mathfrak{C}) \equiv 0 \pmod{2}$ . Entonces solamente tenemos que  $[\mathfrak{C}] \in H_n(M; \mathbb{Z}_2)$ .