0.1 $\pi_1(X, x_0)$ es un grupo.

En esta parte demuestro el Teorema **??**. Sea (X, x_0) un espacio basado, abrevio $\Omega = \Omega(X, x_0)$ $\pi = \pi_1(X, x_0)$ y sea $[e] \in \pi$ la clase del lazo constante $e \in \Omega$. Defino la operación $[\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha * \beta]$. Para probar que la pareja $(\pi, \cdot)$ es un grupo, hay que probar que cumple las siguientes tres propiedades:

1. La operación $*$ es asociativa.
2. El elemento $[e]$ cumple que $[\alpha][e] = [\alpha] = [e][\alpha]$ para toda $[\alpha] \in \pi$.
3. Para todo elemento $[\alpha] \in \pi$ existe un $[\alpha]^{-1} \in \pi$ tal que $[\alpha][\alpha]^{-1} = [e] = [\alpha]^{-1}[\alpha]$.

Para la primera propiedad, voy a demostrar asociatividad generalizada:

$$[\alpha_1] \cdots [\alpha_n] = \Big([\alpha_1] \cdots [\alpha_r]\Big) \cdot \Big([\alpha_{r+1}] \cdots [\alpha_n]\Big) \quad \forall [\alpha_i] \in \pi \ , \ \forall r \in \{1, \dots, n-1\}. \tag{1}$$

Llevado al espacio de lazos, la asociatividad se escribe como:

$$\alpha_1 * \cdots * \alpha_n \simeq (\alpha_1 * \cdots * \alpha_r) * (\alpha_{r+1} * \cdots * \alpha_n) \quad \forall \alpha_i \in \Omega \ , \ \forall r \in \{1, \dots, n-1\}. \tag{2}$$

Para probar esto primero necesito definir la concatenación para más de dos lazos:

Definición 1. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n : I \to X$ funciones continuas (ie. *trayectorias*) tales que $\alpha_i(0) = \alpha_{i-1}(1)$, es decir que el punto final de una trayectoria es el punto inicial de la que sigue. Defino:

$$(\alpha_1 * \cdots * \alpha_n)(s) := \begin{cases} \alpha_1(ns) & \text{si } 0 \le s \le \frac{1}{n} \\ \alpha_2(ns - 1) & \text{si } \frac{1}{n} \le s \le \frac{2}{n} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_r(ns - (r-1)) & \text{si } \frac{r-1}{n} \le s \le \frac{r}{n} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n(ns - (n-1)) & \text{si } \frac{n-1}{n} \le s \le 1 \end{cases}$$

Observa que la condición $(r-1)/n \le s \le r/n$ es equivalente a $0 \le sn - (r-1) \le 1$, entonces cada $\alpha_r(ns - (r-1))$ está bien definida. Además, en cada intersección de los intervalos $[(r-1)/n, rn]$, ie. en los puntos $s = r/n$, ambas funciones α_{r+1} y α_r coinciden:

$$\alpha_{r+1}\left(\frac{r}{n}\right) = \alpha_{r+1}\left(n\frac{r}{n} - r\right) = \alpha_{r+1}(0) = \alpha_r(1) = \alpha_r\left(n\frac{r}{n} - (r-1)\right) = \alpha_r\left(\frac{r}{n}\right).$$

Por lo tanto $\alpha_1 * \cdots \alpha_n$ es continua.

Para probar (2), voy a "reparametrizar" la curva $\alpha_1 * \cdots * \alpha_n$ para que la igualdad se sigue inmediatamente de la nueva fórmula.

Considera la siguiente función $f : I \to I$:

$$f_r(s) := \begin{cases} \frac{2rs}{n} & \text{si } 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ 2s - 1 + \frac{2r}{n}(1 - s) & \text{si } \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases} \tag{3}$$

Está definida mediante funciones lineals que coinciden en la intersección de sus dominios:

$$\frac{2r(1/2)}{n} = \frac{r}{n} = 2\frac{1}{2} - 1 + \frac{2r}{n}\left(1 - \frac{1}{2}\right).$$

Por lo tanto f_r es continua para $r \in \{1, \dots, r-1\}$.

Ahora, como $I \subset \mathbb{R}$ es convexo, el Teorema **??** me garantiza que f_r es homotópica a cualquier función continua $f\ I \to I$, en particular la identidad Id_I. Por lo tanto $f_r \simeq \mathrm{Id}_I$. Además, como $f_r(0) = 0$ y $f_r(1) = 1$ son los únicos dos puntos donde coinciden f_r y Id_I (la intersección de sus gráficas es $A = \{0, 1\}$), entonces la homotopía entre f_r y Id_I es relativo a A.

Por el momento asume que $(\alpha_1 * \cdots * \alpha_n) \circ f_r = (\alpha_1 * \cdots * \alpha_r) * (\alpha_{r+1} * \cdots * \alpha_n)$ (esto lo probaré en el ejercicio 4). Como $f \simeq \mathrm{Id}_I$, la proposición **??** garantiza que:

$$(\alpha_1 * \cdots * \alpha_n) \circ \mathrm{Id}_I \simeq (\alpha_1 * \cdots * \alpha_n) \circ f = (\alpha_1 * \cdots * \alpha_r) * (\alpha_{r+1} * \cdots * \alpha_n).$$

Esta expresión es justo la fórmula (2) de la cual concluyo la asociatividad de $(\pi, \cdot)$. Pruebo lo que me falta:

Ejercicio 1. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n : I \to X$ trayectorias tales que $\alpha_r(0) = \alpha_{r-1}(1)$. Si $f_r : I \to I$ está definida como en 3, entonces:

$$(\alpha_1 * \cdots * \alpha_n) \circ f_r = (\alpha_1 * \cdots * \alpha_r) * (\alpha_{r+1} * \cdots * \alpha_n).$$

Proof.

$$0 \leq s \leq \tfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad 2s = \frac{n}{r} f_r(s) \quad , \quad \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad 2s - 1 = f_r(s) - \frac{2r}{n}(1-s)$$

También escribo explícitamente la definición de $\alpha_{r+1} * \cdots * \alpha_n$:

$$(\alpha_r * \cdots * \alpha_n)(s) := \begin{cases} \alpha_r((n-r)s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{n-r} \\ \alpha_{r+1}((n-r)s - 1) & \text{si } \frac{1}{n-r} \leq s \leq \frac{2}{n-r} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{r+k'}((n-r)s - (k'-1)) & \text{si } \frac{k'-1}{n-r} \leq s \leq \frac{k'}{n-r} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n((n-r)ns - ((n-r)-1)) & \text{si } \frac{(n-r)-1}{n-r} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

donde $r \in \{1, \ldots, n-1\}$ y $k \in \{1, \ldots, n-r\}$

Para probar el ejercicio, evalúo ambos lados en $s \in [0,1]$. Para facilitar la cuenta, divido en dos casos: Primero supongo que $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$. Entonces el lado izquierdo se vuelve:

$$\big((\alpha_1 * \cdots * \alpha_n) \circ f_r\big)(s) = (\alpha_1 * \cdots * \alpha_n)\left(\frac{2rs}{n}\right) = \alpha_k\left(n\frac{2rs}{n} - (k-1)\right) = \alpha_k(2rs - k + 1)$$

donde $k \in \{1, \ldots, n\}$ es un elemento tal que

$$\frac{k-1}{n} \leq \frac{2rs}{n} \leq \frac{k}{n} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{k-1}{r} \leq 2s \leq \frac{k}{r} \tag{4}$$

Ahora, como $s \leq 1/2$, tengo:

$$\big((\alpha_1 * \cdots * \alpha_r) * (\alpha_{r+1} * \cdots * \alpha_n)\big)(s) = (\alpha_1 * \cdots * \alpha_r)(2s).$$

Como $2s$ cumple (**??**), puedo calcular explícitamente la función anterior:

$$(\alpha_1 * \cdots * \alpha_r)(2s) = \alpha_k(r(2s) - (k-1)) = \alpha_k(2rs - k + 1)$$

y coincide con $\big((\alpha_1 * \cdots * \alpha_n) \circ f_r\big)(s)$.

En el segundo caso, supongo que $1/2 < s \leq 1$ y hago el mismo proceso:

$$\begin{aligned} \big((\alpha_1 * \cdots * \alpha_n) \circ f_r\big)(s) &= (\alpha_1 * \cdots * \alpha_n)\left(2s - 1 + \frac{2r}{n}(1-s)\right) \\ &= \alpha_k\left(n\left(2s - 1 + \frac{2r}{n}(1-s)\right) - (k-1)\right) \\ &= \alpha_k\left(2ns - n + 2r(1-s) - k + 1\right) \end{aligned} \tag{5}$$

donde $k \in \{1, \ldots, n\}$ es el único tal que

$$\frac{k-1}{n} \leq 2s - 1 + \frac{2r}{n}(1-s) < \frac{k}{n}.$$

Si le restas $(2r/n)(1-s)$ a la desigualdad, separas $2r = r + r$ y factorizas $n - r$, llegas a que:

$$\frac{k-1}{n} \leq 2s - 1 + \frac{2r}{n}(1-s) \leq \frac{k}{n} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{k-r-1}{n-r} \leq 2s - 1 \leq \frac{k-r}{n-r} \tag{6}$$

Si haces $k' = k - r$ (o equivalentemente $k' + r = k$), entonces $(\alpha_{r+1} * \cdots * \alpha_n)(2s-1)$ se evalúa en la trayectoria $\alpha_{r+k'}$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\Big((\alpha_1 * \cdots * \alpha_r) * (\alpha_{r+1} * \cdots * \alpha_n)\Big)(s) &= (\alpha_{r+1} * \cdots * \alpha_n)(2s-1) \\
&= \alpha_{r+k'}\Big((n-r)(2s-1) - (k'-1)\Big) \\
&= \alpha_k\Big(2ns - n - 2rs + 2r - (k-r-1)\Big) \\
&= \alpha_k\left(2ns - n + 2r(1-s) - k + 1\right)
\end{aligned}$$

Esto coincide con (**??**) y termino.

$\square$

Para probar que $(\pi, \cdot)$ cumple las otras dos propiedades, usaré un método similar al que acabo de usar: Sea $e = e_{x_0}$ el lazo constante $e(s) = x_o \in X$ y sea $\alpha \in \Omega$ arbitrario. Quiero probar que:

$$[\alpha][e] = [\alpha] = [e][\alpha] \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha * e \simeq \alpha \simeq e * \alpha. \tag{7}$$

Defino la función $f_e : I \to I$ como

$$f_e(s) := \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 2s-1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}.$$

Observa que $0 = 2(1/2) - 1$ entonces f_e está definido por dos funciones lineales que coinciden en $s = 1/2$. Por lo tanto f_e es continua y por el Teorema **??** tengo que $f_e \simeq \mathrm{Id}_I$. Uso la proposición **??** para deducir

$$\alpha \circ f_e \simeq \alpha \circ \mathrm{Id}_I = \alpha.$$

Por último, calculo

$$(\alpha \circ f_e)(s) = \begin{cases} \alpha(0) = x_0 & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2s-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} = (e * \alpha)(s)$$

para concluir que $e * \alpha \simeq \alpha$ y así $[e][\alpha] = [\alpha]$. Para probar la igualdad en el otro orden, has una calca de esta prueba pero usando:

$$_e f(s) := \begin{cases} 2s & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}.$$

Nota. Si $\alpha : I \to X$ es una trayectoria que empieza en $\alpha(0) = x_0$ y termina en $\alpha(1) = x_1$, entonces

$$e_{x_0} * \alpha \simeq \alpha \simeq \alpha * e_{x_1}.$$

Observa que $\alpha * e_{x_0}$ y $e_{x_1} * \alpha$ no están bien definidas en $s = 1/2$ y por lo tanto no representan funciones al menos de que $x_0 = x_1$, o en palabras: α es un lazo.

Lo último que debo probar es la existencia de inversos en π. Si α es un lazo, el candidato natural a ser su inverso bajo la concatenación, es simplemente el lazo en sentido contrario: para toda $\alpha \in \Omega$, defino:

$$\bar{\alpha}(s) = \alpha(1-s).$$

Claramente $\bar{\alpha}$ es un lazo y además si $\alpha \simeq \beta$ mediante una homotopía H, entonces $\bar{\alpha} \simeq \bar{\beta}$ mediante la homotopía $\bar{H}(s,t) := H(1-s,t)$. Como t se mantiene igual para H y $\bar{H}$, si H es relativo a $A \subseteq I$, entonces también lo será $\bar{H}$.

Ahora sigo la misma ruta que antes. Defino

$$\bar{f}(s) := \begin{cases} 2s & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-s) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}.$$

Claramente en $s = 1/2$ coinciden ambas funciones lineales. Por lo tanto $\bar{f}$ es continua y cumple que $\bar{f} \simeq 0$ donde $0 : I \to I$ es la función constante 0 porque $\bar{f}(0) = 0 = \bar{f}(1)$. Por lo tanto $\alpha \circ \bar{f} \simeq \alpha \circ 0 = e$ ya que $(\alpha \circ 0)(s) = \alpha(0) = x_0$.

Por último calculo

$$(\alpha \circ \bar{f})(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2(1-s)) = \bar{\alpha}(2s-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} = (\alpha * \bar{\alpha})(s).$$

Con esto concluyo que $\alpha * \bar{\alpha} \simeq e$ y así $[\alpha][\bar{\alpha}] = [e]$. Para la igualdad en el otro orden, sólo observa que:

$$(\bar{\alpha} \circ \bar{f})(s) = \begin{cases} \bar{\alpha}(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \bar{\alpha}(2(1-s)) = \alpha(2s-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} = (\bar{\alpha} * \alpha)(s).$$

Por lo tanto si defino $[\alpha]^{-1} := [\bar{\alpha}]$ obtengo la existencia de inversos en π:

$$\forall [\alpha] \in \pi \quad \exists [\alpha]^{-1} = [\bar{\alpha}] \in \pi \quad \text{tal que} \quad [\alpha][\alpha]^{-1} = [\alpha][\bar{\alpha}] = [e] = [\bar{\alpha}][\alpha] = [\alpha]^{-1}[\alpha]. \tag{8}$$

Con esto termino la prueba del Teorema **??**:

$$\big(\pi_1(X, x_0), \cdot\big) \quad \text{con} \quad [\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha * \beta] \quad \text{es un grupo.}$$