Categorías

Para probar el teorema de la invariancia homotópica de la homología singular fue la existencia del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
S_n(X) \arrow[r, "T_n^X"] \arrow[d, "f_\#"'] & S_{n+1}(X \times I) \arrow[d, "(f \times \mathrm{Id}_I)_\#"] \\
S_n(Y) \arrow[r, "T_n^Y"'] & S_{n+1}(Y \times I)
\end{tikzcd}$$

Para probar el teorema de esición nos apoyamos en la sucesión exacta larga de la homología relativa junto con el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r, "H_n(\imath)"] \arrow[d, "H_n(f|_A)"] & H_n(X) \arrow[r, "H_n(j)"] \arrow[d, "H_n(f)"] & H_n(X,A) \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "H_n(f)"] & H_{n-1}(A) \arrow[r, "H_{n-1}(\imath)"] \arrow[d, "H_{n-1}(f|_A)"] & H_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "H_{n-1}(f)"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n(B) \arrow[r, "H_n(\imath')"'] & H_n(X) \arrow[r, "H_n(j')"'] & H_n(Y,B) \arrow[r, "d'_n"'] & H_{n-1}(B) \arrow[r, "H_{n-1}(\imath')"'] & H_{n-1}(Y) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Estas consideraciones llevaron a Eilenberg y a Maclane a crear la teoría de categorías.

Definición 1. Una *categoría* $\mathcal{C}$ consiste de tres cosas:

1. Una clase $\mathrm{obj}\,(\mathcal{C})$ de objetos.
2. Para cada dos objetos $A, B \in \mathrm{obj}\,(\mathcal{C})$, existe un conjunto $\mathrm{Hom}\,(A,B)$ cuyos elementos se llaman morfismos y se denotan $f : A \to B$ o $A \xrightarrow{f} B$.
3. Para cada terna $A, B, C \in \mathrm{obj}\,(\mathcal{C})$ existe una función

$$\circ : \mathrm{Hom}\,(A,B) \times \mathrm{Hom}\,(B,C) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(A,C) \quad \text{definido por} \quad (f,g) \mapsto g \circ f,$$

llamado *composición* que cumple las siguientes dos propiedades:

(a) $\circ$ es asociativa, es decir $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

(b) Para todo objeto $A \in \mathrm{obj}\,(\mathcal{C})$ existe un morfismo $\mathrm{Id}_A \in \mathrm{Hom}\,(A,A)$ tal que para todo objeto $B \in \mathrm{obj}\,(\mathcal{C})$, y cualesquiera $f \in \mathrm{Hom}\,(A,B)$ y $g \in \mathrm{Hom}\,(B,A)$, se cumple

$$f \circ \mathrm{Id}_A = f \quad \text{y} \quad \mathrm{Id}_A \circ g = g$$

Nota. Usualmente omitimos la notación $\circ$ para simplemente escribir gf en lugar de $g \circ f$. También pedimos que, si $A \neq C$ o $B \neq D$ entonces $\mathrm{Hom}\,(A,B) \cap \mathrm{Hom}\,(C,D) = \emptyset$. Es decir los morfismos están determinados, en parte, por su dominio y su contradominio.

Las matemáticas están llenas de categorías:

Ejemplo 1.

1. **Top**: $\mathrm{obj}\,(\mathbf{Top}) = \{\text{espacios topológicos}\}$, $\mathrm{Hom}\,(X,Y) = \{f : X \to Y \mid f \text{ es continua}\}$.

2. $\mathbf{Top}_*$: $\mathrm{obj}\,(\mathbf{Top}_*) = \{(X,x) \mid X \in \mathrm{obj}\,(\mathbf{Top})\,, x \in X\}$, $\mathrm{Hom}\,((X,x),(Y,y)) = \{f : X \to Y \mid f \text{ es continua y } f(x) = y\}$.

3. $\mathbf{Top}_2$: $\mathrm{obj}\,(\mathbf{Top}_2) = \{(X,A) \mid X, A \in \mathrm{obj}\,(\mathbf{Top})\,, A \subseteq X\}$, $\mathrm{Hom}\,((X,A),(Y,B)) = \{f : X \to Y \mid f \text{ es continua y } f[A] \subseteq B\}$.

4. $\mathbf{Var}$: $\mathrm{obj}\,(\mathbf{Var}) = \{\text{variedades suaves}\}$, $\mathrm{Hom}\,(M,N) = \{f : M \to N \mid f \text{ es suave}\}$.

5. $h\mathbf{Top}$: $\mathrm{obj}\,(h\mathbf{Top}) = \mathrm{obj}\,(\mathbf{Top})$, $\mathrm{Hom}\,(X,Y) = [X,Y]$ donde la composición está definida por $[g][f] = [g \circ f]$ (cf. definición **??**).

6. $\mathbf{Grupos}$: $\mathrm{obj}\,(\mathbf{Grupos}) = \{\text{grupos}\}$, $\mathrm{Hom}\,(G,H) = \{f : G \to H \mid f \text{ es un homomorfismo de grupos}\}$.

7. $\mathbf{Ab}$: $\mathrm{obj}\,(\mathbf{Ab}) = \{\text{grupos abelianos}\}$, $\mathrm{Hom}\,(G,H) = \{f : X \to Y \mid f \text{ es homomorfismo de grupos}\}$.

8. ${}_R\mathbf{Mod}$: $\mathrm{obj}\,({}_R\mathbf{Mod}) = \{R\text{-módulos izquierdos}\}$, $\mathrm{Hom}\,(M,N) = \{f : M \to N \mid f \text{ es un morfismo de } R\text{-módulos}\}$.

9. $\mathbf{CompSimp}$: $\mathrm{obj}\,(\mathbf{CompSimp}) = \{\text{complejos simpliciales}\}$, $\mathrm{Hom}\,(K,L) = \{f : K \to L \mid f \text{ es un mapea simplicial}\}$.

10. $\mathbf{Comp}(\mathcal{A})$: $\mathrm{obj}\,(\mathbf{Comp}(\mathcal{A})) = \{\text{complejos de cadena en la categoría } \mathcal{A}\}$, $\mathrm{Hom}\,(\mathcal{C}_\bullet, C'_\bullet) = \{f_\bullet : \mathcal{C}_\bullet \to \mathcal{C}'_\bullet \mid f_\bullet \text{ es un morfismo de complejos de cadena}\}$.

11. $\mathbf{Cov}(X)$: $\mathrm{obj}\,(\mathbf{Cov}(X)) = \{\text{cubrientes sobre } X\}$, $\mathrm{Hom}\,((E,p,X),(E',p',X)) = \{f : E \to E' \mid f \text{ es continua y } f \circ p' = p\}$.

12. Si $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, entonces tiene naturalmente la estructura de una categoría: define $\mathrm{obj}\,((X,\leq)) = X$ y
$$\mathrm{Hom}\,(x,x') = \begin{cases} \imath^x_{x'} & \text{si } x \leq x' \\ \emptyset & \text{si } x \not\leq x'. \end{cases}$$

13. Todo grupo G se puede realizar como una categoría: define $\mathrm{obj}\,(G) = \{\bullet\}$ y $\mathrm{Hom}\,(\bullet,\bullet) = G$ donde la composición está dada por la multiplicación del grupo, ie. $g \circ g' = gg'$.

Definición 2. Una categoría $\mathcal{C}$ es *pequeña* si $\mathrm{obj}\,(\mathcal{C})$ es un conjunto.

Una definicón que siempre hemos usado es la de isomorfismo:

Definición 3. Sea $\mathcal{A}$ una categoría y $A, B \in \mathrm{obj}\,(\mathcal{A})$. Un morfismo $f \in \mathrm{Hom}\,(A,B)$ es un *isomorfismo* si existe un morfismo $g \in \mathrm{Hom}\,(B,A)$ tal que $gf = \mathrm{Id}_A$ y $fg = \mathrm{Id}_B$.

Otra definición importante es la de funtor:

Definición 4. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías. Un *funtor* (covariante), denotado por $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, es una asignación:
$$A \mapsto \mathcal{F}(A) \in \mathrm{obj}\,(\mathcal{B}) \quad \text{y} \quad \left(A \xrightarrow{f} A'\right) \mapsto \left(\mathcal{F}(A) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(A')\right)$$
que cumple las siguiente dos propiedades:

1. $\mathcal{F}(\mathrm{Id}_A) = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(A)}$
2. $\mathcal{F}(gf) = \mathcal{F}(g)\mathcal{F}(f)$

Ejemplo 2.

1. $\pi_n : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Grupos}$ con $(X,x_0) \mapsto \pi_n(X,x_0)$.
2. $H_n(\_;R) : \mathbf{Top} \to {}_R\mathbf{Mod}$ con $X \mapsto H_n(X;R)$.
3. $|\cdot| : \mathbf{CompSimp} \to \mathbf{Top}$ con $K \mapsto |K|$.

Los funtores preservan isomorfismos:

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{A}$ una categoría y $A, A' \in \operatorname{obj}(\mathcal{A})$. Si $f \in \operatorname{Hom}(A, A')$ es un isomorfismo, entonces $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(A')$ es un isomorfismo.

Proof. Por hipótesis $f : A \to A'$ es un isomorfismo, entonces existe un morfismo $g \in \operatorname{Hom}(A', A)$ tal que $gf = \mathrm{Id}_A$ y $fg = \mathrm{Id}_{A'}$. Aplicamos el funtor $\mathcal{F}$ a estas igualdades para obtener

$$\mathcal{F}(g)\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(gf) = \mathcal{F}(\mathrm{Id}_A) = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(A)} \quad \text{y} \quad \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(\mathrm{Id}_{A'}) = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(A')}$$

Por lo tanto existe un $\mathcal{F}(g) \in \operatorname{Hom}(()\,\mathcal{F}(A'), \mathcal{F}(A))$ tal que $\mathcal{F}(g)\mathcal{F}(f) = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(A)}$ y $\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g) = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(A')}$. Por lo tanto $\mathcal{F}(f)$ es un isomorfismo. □

Ejercicio 2. Los isomorfismos de $h\mathbf{Top}$ son las clases de homotopía de equivalencias homotópicas.

Proof. Sean $X, Y \in \operatorname{obj}(h\mathbf{Top}) = \operatorname{obj}(\mathbf{Top})$. Un morfismo $[f] \in \operatorname{Hom}(X, Y) = [X, Y]$ es un isomorfismo si y sólo si existe un $[g] \in [Y, X]$ tal que $[g][f] = [g \circ f] = [\mathrm{Id}_X]$ y $[f][g] = [g \circ f] = [\mathrm{Id}_Y]$, o equivalentemente $g \circ f \simeq \mathrm{Id}_X$ y $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_Y$. Por lo tanto $[f]$ es un isomorfismo si y sólo f es una equivalencia homotópica. □

Mientras que la definición de funtor es importante, es más interesante la de transformación natural:

Definición 5. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías, $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funtores. Una *transformación natural* entre $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, denotado por $\mathfrak{T} : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es una familia de morfismos $\mathfrak{T} = \{T_A : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{G}(A)\}_{A \in \operatorname{obj}(\mathcal{A})}$ tales que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(A) \arrow[r, "T_A"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{G}(A) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\ \mathcal{F}(A') \arrow[r, "T_{A'}"'] & \mathcal{G}(A') \end{tikzcd} \quad \forall A, A' \in \operatorname{obj}(\mathcal{A}), \ \ \forall f \in \operatorname{Hom}(A, A').$$

Si además cada $T_A \in \mathfrak{T}$ es un isomorfismo, decimos que $\mathfrak{T}$ es una *equivalencia natural.*

Ejemplo 3.

1. Sea $S_n(\_; R) : \mathbf{Top} \to {}_R\mathbf{Mod}$ el funtor $X \mapsto S_n(X; R)$ y $f \mapsto f_n$, la n-ésima componente del morfismo $f_\# : S_\bullet(X) \to S_\bullet(Y)$ de complejos de cadena. Sea $\mathfrak{I} : \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}$ el funtor $X \mapsto X \times I$ con $f \mapsto f \times \mathrm{Id}$. Definimos:

$$\mathcal{F} = (S_{n+1}(\_; R) \circ \mathfrak{I}) : \mathbf{Top} \longrightarrow {}_R\mathbf{Mod} \quad \text{con} \quad X \mapsto S_{n+1}(X \times I) \ \ , \ \ f \mapsto (f \times \mathrm{Id})_\#$$

   Observa que $\mathfrak{T} = \{T_A : S_n(X) \to S_{n+1}(X \times I)\}_X$ es una transformación natural (cf. sección **??**).

2. Tomamos el funtor $H_n(\_, \_; R)$ el funtor de homología relativa. Define $\mathcal{F}_n = H_{n-1}(\_; R) \circ \pi$ donde $\pi : \mathbf{Top}_2 \to \mathbf{Top}$ es el funtor $(X, A) \mapsto A$ y $f \mapsto f|_A$. En símbolos:

$$\mathcal{F}_n : \mathbf{Top}_2 \longrightarrow {}_R\mathbf{Mod} \quad \text{con} \quad (X, A) \mapsto H_{n-1}(A; R)$$

   Entonces la familia de morfismos de conexión $\mathfrak{D} = \{d_n^{(X,A)} : H_n(X, A; R) \to H_{n-1}(A)\}_{(X,A)}$ es una transformación natural entre $H_n(\_, \_; R)$ y $\mathcal{F}_n$.

3. Sea $\mathcal{V}_{<\infty}$ la categoría de k-espacios vectoriales de dimensión finita con transformaciones lineales como morfismos. Sea $\mathcal{I} : \mathcal{V}_{<\infty} \to \mathcal{V}_{<\infty}$ el funtor identidad, es decir $\mathcal{I}(V) = V$ y $\mathcal{I}(f) = f$. Ahora define F cumple el funtor "doble dual", es decir $\mathcal{F} : \mathcal{V}_{<\infty} \to \mathcal{V}_{<\infty}$ con $V \mapsto V^{**}$ y $\mathcal{F}(f)$ definido de la manera canónica. Más precisamente, si $f : V \to W$ es una transformación lineal y $\alpha : V^* \to k$ es un elemento de $V^{**} = \operatorname{Hom}(V^*, k)$, entonces $\mathcal{F}(f)(\alpha)$ se define como la función $\mathcal{F}(f)(\alpha) : V^{**} \to W^{**}$ que hace $\mathcal{F}(f)(\alpha)(\beta) = \alpha(\beta \circ f)$, donde $\beta : W \to k$.

Ejercicio 3. La transformación natural $\mathfrak{T} : \mathcal{I} \to \mathcal{F}$, definido por $\mathfrak{T} = \{T_V : V \to (V^*)^*\}_V$ donde $T_V(v)(\alpha) = \alpha(v)$ es una equivalencia natural.

Proof. Primero probamos que cada T_V es una transformación lineal. Sean $v, v' \in V$ y $\lambda \in k$, entonces:

$$T_V(\lambda v + v')(\alpha) = \alpha(\lambda v + v') = \lambda\alpha(v) + \alpha(v') = \lambda T_V(v) + T_V(v')$$

porque $\alpha \in \operatorname{Hom}(V^*, k)$ es una transformación lineal. Así, T_V es una transformación lineal.

Ahora probamos que $\mathfrak{T} : \mathcal{I} \to \mathcal{F}$ es una transformación natural, es decir que para todas V y W k-espacios vectoriales de dimensión finita y para toda transformación lineal $f : V \to W$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T_V"] \arrow[d, "f"'] & (V^*)^* \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"] \\ W \arrow[r, "T_W"] & (W^*)^* \end{tikzcd} \tag{1}$$

Sea $v \in V$ y evaluamos el elemento $T_W(f(v)) \in (W^*)^* = \operatorname{Hom}(W^*, k)$ en un elemento $\beta : W \to k$ de $W^* = \operatorname{Hom}(W, k)$:

$$T_W(f(v))(\beta) \overset{\text{def}}{=} \beta(f(v)) = (\beta \circ f)(v),$$

mientras que

$$\mathcal{F}(f)\big(T_V(v)\big)(\beta) \overset{\text{def}}{=} T_V(v)(\beta \circ f) \overset{\text{def}}{=} (\beta \circ f)(v).$$

Por lo tanto $T_W(f(v)) = \mathcal{F}(f)(T_V(v))$ y el diagrama 1 conmuta.

Para probar que $\mathfrak{T}$ es una equivalencia natural, hay que probar que cada T_V es un isomorfismo. Primero pruebo que T_V es un monomorfismo:

$$T_V(v) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad T_V(v)(\alpha) = \alpha(v) = 0 \forall \alpha \in V^*.$$

En particular si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V y $e_j : V \to k$ son las funcionales lineales asociadas a la base, ie. $e_i(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_i$, tenemos que $e_i(v) = 0$ para toda i y así $v = 0v_1 + \cdots + 0v_n = 0$. Como claramente $v = 0 \Longrightarrow \alpha(v) = 0$ para toda $\alpha \in V^*$, tenemos que $T_V(v) = 0$ si y sólo si $v = 0$, es decir, T_V es inyectivo para toda v.

Como $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de V^*, la transformación lineal $v_1 \mapsto v_n$ es un isomorfismo, es decir $V \cong V^*$. Por lo tanto $\dim(V) = \dim(V^*) = \dim(V^{**})$ y como V es de dimensión finita, el monomorfismo T_V necesariamente es un isomorfismo y acabamos. $\square$