Ejercicio 1. La relación $\alpha \simeq \beta$ en $\Omega(X, x_0)$ es una relación de equivalencia.

Proof. Debemos probar tres cosas:

- (Simetría) Afirmamos que para todo lazo α, tenemos que $\alpha \simeq \alpha$ mediante la homotopía $H(s,t) = \alpha(s)$. Claramente H es continua porque es independiente del parámetro t y α es una función continua sobre la variable s. Además, para toda t, $H(s,t) = \alpha_t(s) = \alpha(s)$ es un lazo. Por lo tanto H es una homotopía

- (Reflexividad) Supongamos que $\alpha \simeq \beta$ para dos lazos en $\Omega(X, x_0)$ mediante la homotopía H. Si definimos $\bar{H}(s,t) := H(s, 1-t)$, entonces claramente $\bar{H}$ es continua porque es la composición de la función continua $t \mapsto 1-t$ y H, que por hipótesis es continua. Además, para toda t, $\bar{H}(s,t)$ es un lazo, en particular es el lazo $H(s, 1-t)$. Por último, $\bar{H}(s,0) = H(s,1) = \beta(s)$ y $\bar{H}(s,1) = H(s,0) = \alpha(s)$. Por lo tanto $\bar{H}$ es una homotopía entre β y α.

- (Transitividad) Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega(X, x_0)$ tales que $\alpha \simeq \beta$ y $\beta \simeq \gamma$ mediante las homotopías H y G respectivamente. Definimos una nueva homotopía:

$$F(s,t) := \begin{cases} H(s, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(s, 2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

  Primero observemos que al dominio de definición de F (el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$) lo estamos partiendo en dos cerrados $[0,1] \times [0, \frac{1}{2}]$ y $[0,1] \times [\frac{1}{2}, 1]$, de tal manera que sobre la intersección de esos cerrados (ie. $[0,1] \times \{\frac{1}{2}\}$), las homotopías H y G coinciden:

$$F\left(s, \frac{1}{2}\right) = H(s,1) = \beta(s) = G(s,0) = F\left(s, \frac{1}{2}\right).$$

  Como H y G son continuas, tenemos que F está bien definida y es continua sobre el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$.

  Por otro lado, para cada $t_0 \in [0,1]$ fija tenemos que $F(s, t_0)$ es un lazo en $\Omega(X, x_0)$ porque $H(s, t_0)$ o $G(s, t_0)$ es un lazo (la opción depende de si $t \leq \frac{1}{2}$ o si $t \geq \frac{1}{2}$). Por último verificamos que F deforma α en γ:

$$F(s,0) = H(s,0) = \alpha(0) \quad \text{y} \quad F(s,1) = G(s,1) = \gamma(s).$$

  Concluimos que $\alpha \simeq \gamma$ mediante la homotopía F.

□

Ejercicio 2. La relación $\alpha \simeq \beta$ en $\mathrm{Map}(X, Y)$ es una relación de equivalencia.

Proof. Debemos probar tres cosas:

- (Simetría) Afirmamos que para toda $f \in \mathrm{Map}(X, Y)$, tenemos que $f \simeq f$ mediante la homotopía $H(x,t) = f(x)$. Claramente H es continua porque es independiente del parámetro t y f es continua. Además $H_0 = f = H_1$, por lo tanto H es una homotopía.

- (Reflexividad) Supongamos que $f \simeq g$ para $f, g \in \mathrm{Map}(X, Y)$ mediante la homotopía H. Si definimos $\bar{H}(x,t) := H(x, 1-t)$, entonces claramente $\bar{H}$ es continua porque es la composición de la función continua $t \mapsto 1-t$ y H, que por hipótesis es continua. Además, para toda t, $\bar{H}_t(x) = H_{1-t}(x)$, y así $\bar{H}_t$ es continua. Por último, $\bar{H}_0 = H_1 = g$ y $\bar{H}_1 = H_0 = f$. Por lo tanto $\bar{H}$ es una homotopía entre f y g.

- (Transitividad) Sean $f, g, h \in \mathrm{Map}(X, Y)$ tales que $f \simeq g$ y $g \simeq h$ mediante las homotopías H y G respectivamente. Definimos una nueva homotopía:

$$F(x,t) := \begin{cases} H(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Primero observemos que al dominio de definición de F (el espacio $X \times I$) lo estamos partiendo en dos cerrados $X \times [0, \frac{1}{2}]$ y $X \times [\frac{1}{2}, 1]$, de tal manera que sobre la intersección de esos cerrados (ie. $X \times \{\frac{1}{2}\}$), las homotopías H y G coinciden:

$$F\left(x, \frac{1}{2}\right) = H(x,1) = g(x) = G(x,0) = F\left(x, \frac{1}{2}\right).$$

Como H y G son continuas, tenemos que F está bien definida y es continua sobre $X \times I$.

Por otro lado, para cada $t \in I$ fija tenemos que F_t es una función continua porque es igual a H_t o G_t que por hipótesis son continuas (la opción depende de que $t \leq \frac{1}{2}$ o que $t \geq \frac{1}{2}$). Por último verificamos que:

$$F_0(x) = H(x,0) = H_0(x) = f(x) \quad \text{y} \quad F_1(x) = G(x,1) = G_1(x) = h(x).$$

Concluimos que $f \simeq h$ mediante la homotopía F.

□

Ejercicio 3. $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial topógico: la suma $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y el producto por escalares $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son continuas.

Proof. Como $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico y su topología usual es la inducida por la métrica euclideana, la base son las bolas abiertas:

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < \varepsilon\}.$$

Para probar que la suma es continua, voy a probar que la imagen inversa $X := (+)^{-1}[B_\varepsilon(x)]$ es abierta para toda $\varepsilon > 0$ y para toda $x \in \mathbb{R}^n$.

Sea $\varepsilon > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Tomo $y = (y_1, y_2) \in X$, es decir que

$$y_1 + y_2 \in B_\varepsilon(x) \quad \iff \quad |x - y_1 - y_2| = \varepsilon - \delta < \varepsilon$$

para alguna $\delta > 0$

Propongo al abierto $V := B_{\delta/2}(y_1) \times B_{\delta/2}(y_2) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ como vecindad de (y_1, y_2) contenida en X. Si efectivamente $V \subseteq X$, entonces X es abierto y acabo. Para probar que $V \subseteq X$ calculo: si $(z_1, z_2) \in V$ entonces $|y_i - z_i| < \delta/2$ y así:

$$\begin{aligned} &|x - z_1 - z_2| = |x - y_1 + y_1 - z_1 + y_2 - y_2 - z_2| \leq |x - y_1 - y_2| + |y_1 - z_1| + |y_2 - z_2| \\ \therefore \quad &|x - z_1 - z_2| < \varepsilon - \delta + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Concluyo que la suma $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua.

Ahora aplicaré exactamente el mismo método para probar que el producto por escalares es continua: sea $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ y fijo $(t_0, y_0) \in Y := (\cdot)^{-1}[B_\varepsilon(x)] \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Entonces tengo que

$$t_0 y_0 \in B_\varepsilon(x) \quad \iff \quad |x - t_0 y_0| = \varepsilon - \delta < \varepsilon$$

para una $\delta > 0$ fija.

Ahora propongo al abierto $W := B_{\delta_1}(t_0) \times B_{\delta_2}(y_0)$ donde:

$$\delta_1 := \frac{\delta}{|y_0| + 1} \quad \text{y} \quad \delta_2 := \frac{\delta}{\delta + |t_0| + |t_0|\,|y_0|}.$$

Observa que ambos denominadores son estrictamente positivos por ser suma de un número positivo y otro no-negativo; el numerador de ambos es positivos. Esto quiere decir que $0 < \delta_1, \delta_2$ son radios posibles de una bola abierta. De aquí sólo debo probar que W está contenido en Y:

Sea $(t, y) \in W$. Por definición tengo $|t_0 - t| < \delta_1$ y $|y_0 - y| < \delta_2$. Observa que $|t| = |t_0 - t - t_0| \leq |t_0 - t| + |t_0| < \delta_1 + |t_0|$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}|x-ty| &= |x-t_0y_0+t_0y_0-ty_0+ty_0-ty|\\ &\leq |x-t_0y_0|+|t_0y_0-ty_0|+|ty_0-ty|\\ &\leq |x-t_0y_0|+|t_0-t|\,|y_0|+|t|\,|y_0-y|\\ &< \varepsilon-\delta+\delta_1\,|y_0|+\delta_2\delta_1+\delta_2\,|t_0|\end{aligned}$$

Sustituyo las expresiones para δ_1 y δ_2:

$$\begin{aligned}|x-ty| &< \varepsilon-\delta+\frac{\delta\,|y_0|}{|y_0|+1}+\frac{\delta}{|y_0|+1}\cdot\frac{\delta}{\delta+|t_0|+|t_0|\,|y_0|}+\frac{\delta\,|t_0|}{\delta+|t_0|+|t_0|\,|y_0|}\\ &< \varepsilon-\delta+\delta\frac{|y_0|\,(\delta+|t_0|+|t_0|\,|y_0|)+\delta+|t_0|\,(|y_0|+1)}{(|y_0|+1)(\delta+|t_0|+|t_0|\,|y_0|)}.\end{aligned}$$

Como todo el cociente se hace 1, obtengo:

$$|x-ty|<\varepsilon \quad\implies\quad ty\in B_\varepsilon(x) \quad\implies\quad (t,y)\in Y$$

y así $W\subset Y$.

Por lo tanto el producto por escalares es continua. □

Ejercicio 4. Sean $\alpha_1,\dots,\alpha_n : I\to X$ trayectorias tales que $\alpha_r(0)=\alpha_{r-1}(1)$. Si $f_r : I\to I$ está definida como en **??**, entonces:

$$(\alpha_1*\cdots*\alpha_n)\circ f_r=(\alpha_1*\cdots*\alpha_r)*(\alpha_{r+1}*\cdots*\alpha_n).$$

Proof.

$$0\leq s\leq \tfrac{1}{2} \quad\implies\quad 2s=\frac{n}{r}f_r(s) \quad , \quad \frac{1}{2}\leq s\leq 1 \quad\implies\quad 2s-1=f_r(s)-\frac{2r}{n}(1-s)$$

También escribo explícitamente la definición de $\alpha_{r+1}*\cdots*\alpha_n$:

$$(\alpha_r*\cdots*\alpha_n)(s):=\begin{cases}\alpha_r((n-r)s) & \text{si } 0\leq s\leq \frac{1}{n-r}\\ \alpha_{r+1}((n-r)s-1) & \text{si } \frac{1}{n-r}\leq s\leq\frac{2}{n-r}\\ \vdots & \vdots\\ \alpha_{r+k'}((n-r)s-(k'-1)) & \text{si } \frac{k'-1}{n-r}\leq s\leq \frac{k'}{n-r}\\ \vdots & \vdots\\ \alpha_n((n-r)ns-((n-r)-1)) & \text{si } \frac{(n-r)-1}{n-r}\leq s\leq 1\end{cases}$$

donde $r\in\{1,\dots,n-1\}$ y $k\in\{1,\dots,n-r\}$

Para probar el ejercicio, evalúo ambos lados en $s\in[0,1]$. Para facilitar la cuenta, divido en dos casos:

Primero supongo que $0\leq s\leq\frac{1}{2}$. Entonces el lado izquierdo se vuelve:

$$\big((\alpha_1*\cdots*\alpha_n)\circ f_r\big)(s)=(\alpha_1*\cdots*\alpha_n)\left(\frac{2rs}{n}\right)=\alpha_k\left(n\frac{2rs}{n}-(k-1)\right)=\alpha_k(2rs-k+1)$$

donde $k\in\{1,\dots,n\}$ es un elemento tal que

$$\frac{k-1}{n}\leq\frac{2rs}{n}\leq\frac{k}{n} \quad\iff\quad \frac{k-1}{r}\leq 2s\leq\frac{k}{r} \tag{1}$$

Ahora, como $s\leq 1/2$, tengo:

$$\big((\alpha_1*\cdots*\alpha_r)*(\alpha_{r+1}*\cdots*\alpha_n)\big)(s)=(\alpha_1*\cdots*\alpha_r)(2s).$$

Como $2s$ cumple (**??**), puedo calcular explícitamente la función anterior:

$$(\alpha_1*\cdots*\alpha_r)(2s)=\alpha_k(r(2s)-(k-1))=\alpha_k(2rs-k+1)$$

y coincide con $\big((\alpha_1 * \cdots * \alpha_n) \circ f_r\big)(s)$.

En el segundo caso, supongo que $1/2 < s \leq 1$ y hago el mismo proceso:

$$\begin{aligned} \big((\alpha_1 * \cdots * \alpha_n) \circ f_r\big)(s) &= (\alpha_1 * \cdots * \alpha_n)\left(2s - 1 + \frac{2r}{n}(1-s)\right) \\ &= \alpha_k\left(n\left(2s - 1 + \frac{2r}{n}(1-s)\right) - (k-1)\right) \\ &= \alpha_k\left(2ns - n + 2r(1-s) - k + 1\right) \end{aligned} \tag{2}$$

donde $k \in \{1, \ldots, n\}$ es el único tal que

$$\frac{k-1}{n} \leq 2s - 1 + \frac{2r}{n}(1-s) < \frac{k}{n}.$$

Si le restas $(2r/n)(1-s)$ a la desigualdad, separas $2r = r + r$ y factorizas $n - r$, llegas a que:

$$\frac{k-1}{n} \leq 2s - 1 + \frac{2r}{n}(1-s) \leq \frac{k}{n} \quad \iff \quad \frac{k-r-1}{n-r} \leq 2s - 1 \leq \frac{k-r}{n-r} \tag{3}$$

Si haces $k' = k - r$ (o equivalentemente $k' + r = k$), entonces $(\alpha_{r+1} * \cdots * \alpha_n)(2s-1)$ se evalúa en la trayectoria $\alpha_{r+k'}$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \Big((\alpha_1 * \cdots * \alpha_r) * (\alpha_{r+1} * \cdots * \alpha_n)\Big)(s) &= (\alpha_{r+1} * \cdots * \alpha_n)(2s-1) \\ &= \alpha_{r+k'}\Big((n-r)(2s-1) - (k'-1)\Big) \\ &= \alpha_k\Big(2ns - n - 2rs + 2r - (k-r-1)\Big) \\ &= \alpha_k\left(2ns - n + 2r(1-s) - k + 1\right) \end{aligned}$$

Esto coincide con (**??**) y termino.

□

Ejercicio 5. Sea X un espacio topológico y $x_0, x_1 \in X$ tales que existe una trayectoria $\sigma : I \to X$ tal que $\sigma(0) = x_0$ y $\sigma(1) = x_1$. Entonces:

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$$

mediante el ismorfismo $\hat{\sigma}\big([\alpha]\big) = [\bar{\sigma} * \alpha * \sigma]$

Proof. Primero verifico que $\hat{\sigma}$ está bien definida. Observemos que, como σ es continua, entonces $\bar{\sigma} * \alpha * \sigma$ también lo es. Observa que

$$(\bar{\sigma} * \alpha * \sigma)(0) = \bar{\sigma}(0) = x_1 = \sigma(1) = (\bar{\sigma} * \alpha * \sigma)(1).$$

Por lo tanto $\hat{\sigma}([\alpha]) \in \pi_1(X, x_1)$. Además, como $\hat{\sigma}$ está definida para clases de equivalencia hay que probar que respeta homotopías:

Sean $\alpha \simeq \beta$ lazos en (X, x_0). Entonces $\alpha * \sigma \simeq \beta * \sigma$. Esto se parece mucho al resultado que usé para probar que la operación $[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta]$ está bien definida; la diferencia es que σ es una trayectoria en lugar de un lazo. Sin embargo la homotopía es la misma:

Si $\alpha \simeq_H \beta$ (relativo a $A = \{0, 1\}$) entonces $\alpha * \sigma \simeq_F \beta * \sigma$ donde

$$F(s,t) := \begin{cases} H(2s, t) & \text{si } \ 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \sigma(2s-1) & \text{si } \ \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}.$$

Volvemos a aplicar este resultado a $(\alpha * \sigma)$ y concluimos que $\bar{\sigma} * \alpha * \sigma \simeq \bar{\sigma} * \beta * \sigma$. Por lo tanto

$$\hat{\sigma}\big([\alpha]\big) = [\bar{\sigma} * \alpha * \sigma] = \bar{\sigma} * \beta * \sigma = \hat{\sigma}\big([\beta]\big)$$

cuando $\alpha \simeq \beta$ y así $\tilde{\sigma}$ está bien definido.

Para probar que es un homomorfismo de grupos, hay que probar la siguiente igualdad:

$$\hat{\sigma}\big([\alpha][\beta]\big) = \hat{\sigma}\big([\alpha]\big)\hat{\sigma}\big([\beta]\big).$$

Aplico la asociatividad del grupo fundamental y la existencia de neutros para concluir que:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}\big([\alpha][\beta]\big) = \hat{\sigma}\big([\alpha * \beta]\big) &= [\bar{\sigma} * \alpha * \beta * \sigma] = [\bar{\sigma}][\alpha][\beta][\sigma] = [\bar{\sigma}][\alpha]\Big([\sigma][\sigma]^{-1}\Big)[\beta][\sigma] \\ &= [\bar{\sigma}][\alpha]\Big([\sigma][\bar{\sigma}]\Big)[\beta][\sigma] = \Big([\bar{\sigma}][\alpha][\sigma]\Big)\Big([\bar{\sigma}][\beta][\sigma]\Big) \\ &= \hat{\sigma}\big([\alpha]\big)\hat{\sigma}\big([\beta]\big).\end{aligned}$$

□

Ejercicio 6. Sea $\{(X_j, x_j)\}_{j\in J}$ una familia de espacios basados y sean $\lambda_i : (X_i, x_i) \to \prod(X_j, x_j)$ las inclusiones naturales definidas por

$$\lambda_i(x) = \{z_j\}_{j\in J} \quad \text{con} \quad z_j = \begin{cases} x & \text{si } j = i \\ x_j & \text{si } j \neq i \end{cases}.$$

Entonces el morfismo inducido

$$\vee\lambda_j : \bigvee_{j\in J}(X_j, x_j) \longrightarrow \prod_{j\in J} X_j$$

es inyectivo.

Proof. Como en el lema **??**, sean $\{\mu_j : (X_j, x_j) \to \vee(X_j, x_j)\}_{j\in J}$ los morfismo canónicos que hacen que $\vee(X_j, x_j)$ sea el coproducto en de $\{(X_j, x_j)\}$ en $\mathbf{Top}_*$. Además, sean $\pi_i : \prod(X_j, x_j) \to (X_i, x_i)$ las proyecciones canónicas definidas por

$$\pi_i\big(\{y_j\}_{j\in J}\big) = y_i \in (X_i, x_i).$$

Sean $[x], [x'] \in \vee(X_j, x_j)$ elementos distintos con $x \in (X_i, x_i)$ y $x' \in (X_l, x_l)$. Como las clases de x y x' son distintas, al menos una de ellos (sin pérdida de generalidad supongo que x) no es un punto base, ie. $x \neq x_i$.

Ahora si $i \neq l$ entonces:

$$\vee\lambda_j\big([x]\big) = \lambda_i(x) = \{z_j\} \neq \{z'_j\} = \lambda_l(x') = \vee\lambda_j\big([x']\big)$$

porque por definición los elementos $\{z_j\}$ y $\{z'_j\}$ difieren en la i-ésima entrada donde valen x y x_i respectivamente.

Si $i = l$, entonces:

$$\vee\lambda_j\big([x]\big) = \lambda_i(x) = \{z_j\} \neq \{z'_j\} = \lambda_i(x') = \vee\lambda_j\big([x']\big)$$

porque los elementos $\{z_j\}$ y $\{z'_j\}$ difieren nada más en la i-ésima entrada donde valen x y x' respectivamente que por hipótesis son distintos porque $[x] \neq [x']$ y $x, x' \in X_i$.

Por lo tanto si $[x] \neq [x']$ tengo que $\vee\lambda_j([x]) \neq \vee\lambda_j([x'])$ y $\vee\lambda_j$ es inyectiva.

□

Ejercicio 7. Sean X, Y y Z conjuntos, entonces:

$$\mathrm{Hom}\,(X \times Z, Y) \xrightarrow{\ \Phi\ } \mathrm{Hom}\,(X, \mathrm{Hom}\,(Z, Y))$$

$$\Big(X \times Z \xrightarrow{f} Y\Big) \longmapsto \Big(X \xrightarrow{\Phi_f} \mathrm{Hom}\,(Z, Y)\Big)$$

definido por $\Phi_f(x) : Z \to Y$ con $\Phi_f(x)(z) = f(x, z)$ es una biyección.

Proof. Doy un inverso de Φ: sea $g \in \operatorname{Hom}(X, \operatorname{Hom}(Z,Y))$ con $g(x) : Z \to Y$ y defino

$$\Psi(g) : X \times Z \longrightarrow Y \quad \text{con} \quad \Psi(g)(x,z) = g(x)(z).$$

Para $f \in \operatorname{Hom}(X \times Z, Y)$ calculo:

$$\Psi(\Phi(f))(x,z) = \Psi(\Phi_f)(x,z) = \Phi_f(x)(z) = f(x,z) \quad \Longrightarrow \quad \Psi(\Phi(f)) = f.$$

Por otro lado si $g \in \operatorname{Hom}(X, \operatorname{Hom}(Z,Y))$ entonces:

$$\Phi(\Psi(g))(x)(z) = \Phi_{\Psi(g)}(x)(z) = \Psi(g)(x,z) = g(x)(z) \quad \Longrightarrow \quad \Phi(\Psi(g)) = g.$$

Por lo tanto $\Psi = \Phi^{-1}$ y Φ es una biyección.

□

Ejercicio 8. Sean (X, x_0) y (Y, y_0) espacios basados, entonces:

$$\operatorname{Map}_*\Big((\mathcal{S}X, \star), (Y, y_0)\Big) \xrightarrow{\Phi} \operatorname{Map}_*\Big((X, x_0), (\Omega(Y, y_0), e)\Big)$$

$$\Big(\mathcal{S}X \xrightarrow{f} Y\Big) \longmapsto \Big(X \xrightarrow{\Phi_f} \Omega(Y, y_0)\Big)$$

definido por $\Phi_f(x)(t) = f[x,t]$ es una biyección. Aquí $[x,t]$ es una clase de equivalencia en $\mathcal{S}X$.

Proof. La prueba es muy similar al ejercicio **??**; hay unos detalles adicionales que hay que verificar. Para probar que Φ es biyectiva, exhibo un inverso.

Sea $g \in \operatorname{Map}_*((X, x_0), (\Omega(Y, y_0), e)) = \operatorname{Map}_*(X, \Omega)$. Entonces $g(x) : I \to Y$ es un lazo (ie. $g(x)(0) = y_0 = g(x)(1)$ para toda $x \in X$) y $g(x_0) = e_{y_0}$ es el lazo constante. Defino la siguiente función:

$$\Psi(g) : \mathcal{S}X \longrightarrow Y \quad \text{con} \quad \Psi(g)[x,t] = g(x)(t).$$

Observa que está bien definido porque:

$$\Psi(g)[x,0] = g(x)(0) = y_0 = g(x)(1) = \Psi(g)[x,1] \quad \forall x \in X$$

y

$$\Psi(g)[x_0,t] = e_{y_0}(t) = y_0 \quad \forall t \in I.$$

Estas últimas dos igualdades implican que $\Psi(g)$ está bien definido sobre $\mathcal{S}X$.

Ahora verifico que $\Psi = \Phi^{-1}$. Para $f \in \operatorname{Map}_*(\mathcal{S}X, Y)$ calculo:

$$\Psi(\Phi(f))[x,t] = \Psi(\Phi_f)[x,t] = \Phi_f(x)(t) = f[x,t] \quad \Longrightarrow \quad \Psi(\Phi(f)) = f.$$

Por otro lado si $g \in \operatorname{Map}_*(X, \Omega)$ entonces:

$$\Phi(\Psi(g))(x)(t) = \Phi_{\Psi(g)}(x)(t) = \Psi(g)[x,t] = g(x)(t) \quad \Longrightarrow \quad \Phi(\Psi(g)) = g.$$

Por lo tanto $\Psi = \Phi^{-1}$ y Φ es una biyección.

□

Ejercicio 9. Para cualquier espacio basado (X, x_0) se tiene que

$$\mathcal{S}X \approx X \wedge \mathbb{S}^1$$

Proof. Usaré $I/\partial I$ en lugar de $\mathbb{S}^1$, pero resumo la notación a $J := I/\partial I$. Denoto $\nu : I \to J$ como la función identificación; también tomo a $[0] = [1] \in J$ como el punto base. Considero la función:

$$\iota : X \times I \longrightarrow X \wedge J \quad \text{con} \quad \iota(x,t) = [x,[t]]$$

donde $[t] \in J$ y $[x,[t]]$ es la clase del punto $(x,[t]) \in X \times J$. Claramente es continua porque es la composición de las siguientes funciones continuas

$$\begin{tikzcd} X \times I \arrow[r, "\mathrm{Id}_X \times \nu"] & X \times J \arrow[r, two heads, "\pi"] & X \wedge J \\ (x,t) \arrow[r, mapsto] & (x,[t]) \arrow[r, mapsto] & [x,[t]] \end{tikzcd}$$

donde $\pi : X \times J \to X \wedge J$ es la proyección natural. Observa también, que como ν y π son sobreyectivas, ι es sobreyectiva.

Si denoto por $\star$ al punto base canónico de $X \wedge J$, claramente se cumple que

$$\iota(x,0) = [x,[0]] = \star = [x,[1]] = \iota(x,1)$$

para toda $x \in X$ porque $(x,[0]),(x,[1]) \in X \vee J = (X \times \{\star\}) \cup (\{x_0\} \times J) \subset X \times J$ que es el conjunto que se identifica a un punto al contruir $X \wedge J$. Además tengo que

$$(x_0,[t]) \in X \vee J \quad \Longrightarrow \quad \iota(x_0,t) = [x_0,[t]] = \star \quad \forall t \in I.$$

Todo esto junto implica que ι es constante sobre el conjunto $(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (\{x_0\} \times I)$ y así se factoriza a través de la suspensión reducida:

$$\begin{tikzcd} X \times I \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, two heads, "\nu"'] & X \wedge J \\ \mathcal{S}X \arrow[ur, dashed, "\bar{\iota}"'] & \end{tikzcd}$$

Si pruebo que ι es una identificación, entonces podré concluir que $\bar{\iota}$ es un homeomorfismo. Como ι es sobreyectiva, basta probar que es una función abierta:

Sea $U \subseteq X \times I$ abierto. Entonces existen abiertos $V_1 \subseteq X$ y $V_2 \subseteq I$ tales que $U = V_1 \times V_2$.

$\square$

Ejercicio 10. Sea $\bar{h} : \frac{I}{\partial I} \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ como en la proposición **??**. Entonces $\bar{h}$ se factoriza a través de $\mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^n$ y que $\hat{h}$, la función inducida, es biyectiva.

Ejercicio 11. Sean (X,x_0) y (Y,y_0) espacios basados, entonces la función inducida por Φ del ejercicio **??**:

$$\Big[(\mathcal{S}X,\star),(Y,y_0)\Big] \longleftrightarrow \Big[(X,x_0),(\Omega(Y,y_0),e)\Big]$$

es una biyección.

Proof. Usaré la misma notación que el ejercicio **??** y todos los espacios son basados.

Sean $f,f' \in \mathrm{Map}_*(\mathcal{S}X,Y)$ y $g,g' \in \mathrm{Map}_*(X,\Omega Y)$. Si pruebo que

$$f \simeq f' \quad \Longrightarrow \quad \Phi(f) \simeq \Phi(f') \quad , \quad g \simeq g' \quad \Longrightarrow \quad \Psi(g) \simeq \Psi(g')$$

entonces Φ y Ψ se factorizan naturalmente a través de los espacios cocientes, es decir que existen únicos:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Map}_*(\mathcal{S}X,Y) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, two heads, "\pi_1"'] & \mathrm{Map}_*(X,\Omega Y) & \mathrm{Map}_*(X,\Omega Y) \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, two heads, "\pi_2"'] & \mathrm{Map}_*(\mathcal{S}X,Y) \\ \big[\mathcal{S}X,Y\big] \arrow[ur, dashed, "\bar{\Phi}"'] & & \big[X,\Omega Y\big] \arrow[ur, dashed, "\bar{\Psi}"'] & \end{tikzcd} \tag{4}$$

que hacen conmutar los diagramas, es decir que $\Phi = \bar{\Phi} \circ \pi_1$ y $\Psi = \bar{\Psi} \circ \pi_2$. He denotado por π_i la función cociente. Observa que por definición $\bar{\Phi}([f]) = \Phi(f)$.

Supongo que $f \simeq f'$ mediante la homotopía $F : \mathcal{S}X \times I \to Y$. Para un parámetro fijo $t \in I$ tengo que $F_t \in \mathrm{Map}_*(\mathcal{S}X,Y)$ entonces $\Phi(F_t) \in \mathrm{Map}_*(X,\Omega Y)$ tiene sentido y es una función continua. Con esto defino $F' : X \times I \to \Omega Y$ con:

$$F'(x,t) := \Phi(F_t)(x)$$

que es continua porque cada $\Phi(F_t)$ lo es. Observa que $F'(x,0) = \Phi(F_0)(x) = \Phi(f)(x)$ y $F'(x,1) = \Phi(F_1)(x) = \Phi(f')(x)$ entonces F' es una homotopía entre $\Phi(f)$ y $\Phi(f')$, es decir $\Phi(f) \simeq \Phi(f')$.

Por otro lado supongo que $g \simeq_G g'$ con $G : X \times I \to \Omega Y$ una homotopía. Observa que para todo parámetro $G_t \in \mathrm{Map}_*(X, \Omega Y)$ y así $\Psi(G_t) \in \mathrm{Map}_*(\mathcal{S}X, Y)$ y es continua. Similarmente defino:

$$G'([x,s],t) := \Psi(G_t)[x,s]$$

donde $[x,s] \in \mathcal{S}X$. Observa que como cada $\Psi(G_t)$ es continua entonces G' también lo es. Además $G'([x,s],0) = \Psi(G_0)[x,s] = \Psi(g)[x,s]$ y $G'([x,s],1) = \Psi(G_1)[x,s] = \Psi(g')[x,s]$. Por lo tanto $\Psi(g) \simeq_{G'} \Psi(g')$.

Como $\mathrm{Id} = \Psi \circ \Phi$, entonces:

$$\Phi(f) \simeq \Phi(f') \quad \Longrightarrow \quad \Psi(\Phi(f)) = f \simeq f' = \Psi(\Phi(f'))$$

y así:

$$f \simeq f' \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi(f) \simeq \Phi(f')$$

o equivalentement:

$$[f] = [f'] \quad \Longleftrightarrow \quad \big[\Phi(f)\big] = \big[\Phi(f')\big].$$

Si uso la notación de los diagramas conmutativos en (**??**), la equivalencia anterior quiere decir que la función

$$(\pi_2 \circ \bar{\Phi}) : [\mathcal{S}X, Y] \longrightarrow [X, \Omega Y]$$

es inyectiva porque

$$(\pi_2 \circ \bar{\Phi})\big([f]\big) = \pi_2\Big(\bar{\Phi}\big([f]\big)\Big) = \pi_2\big(\Phi(f)\big) = \big[\Phi(f)\big].$$

Admeás, si $[g] \in [X, \Omega Y]$ entonces:

$$(\pi_2 \circ \bar{\Phi})\big([\Psi(g)]\big) = \pi_2\Big(\bar{\Phi}\big(\Psi(g)\big)\Big) = \pi_2\Big(\Phi\big(\Psi(g)\big)\Big)\big[\Phi(\Psi(g))\big] = [g]$$

y así $\pi_2 \circ \bar{\Phi}$ es sobreyectiva. Por lo tanto ésta es la biyección

$$\big[\mathcal{S}X, Y\big] \longleftrightarrow \big[X, \Omega Y\big].$$

□

Ejercicio 12. Sea ΩX el espacio de lazos de un espacio basado (X, x_0), equipada con la topología compacto-abierta. Entonces las funciones

$$\mu : \Omega X \times \Omega X \longrightarrow \Omega X \quad \text{y} \quad \lambda : \Omega X \longrightarrow \Omega X$$

definidas por $\mu(\alpha,\beta) = \alpha * \beta$ y $\lambda(\alpha) = \bar{\alpha}$ son funciones continuas. En particular ΩX es un H-grupo.

Proof. Recuerda que la topología compacto-abierta tiene como subase a todos los conjuntos de la forma

$$B(K,U) := \{\alpha \in \Omega X \mid \alpha[K] \subseteq U\}$$

donde $K \subseteq I$ es compacto y $U \subseteq X$ es abierto. A K la puedo separar como la unión de los dos compactos $K_1 := K \cap [0, \frac{1}{2}]$ y $K_2 = K \cap [\frac{1}{2}, 1]$ (K_i es compacto por ser subespacio cerrado de un compacto). Entonces $K = K_1 \cup K_2$ y $B(K,U) = B(K_1,U) \cap B(K_2,U)$ porque $\alpha[K_1], \alpha[K_2] \subseteq U$ si y sólo si $\alpha[K_1] \cup \alpha[K_2] = \alpha[K] \subseteq U$.

Por lo tanto para probar continuidad basta verificar que $\mu^{-1}[B(K,U)]$ y $\lambda^{-1}[B(K,U)]$ son abiertos en $\Omega X \times \Omega X$ y ΩX respectivamente, para todo compacto $K \subseteq I$ y abierto $U \subseteq X$.

Sea $K \subseteq I$ compacto y $U \subseteq X$ abierto. Afirmo que:

$$\mu^{-1}[B(K,U)] = B(2K_1, U) \times B(2K_2 - 1, U) \quad \text{y} \quad \lambda^{-1}[B(K,U)] = B(1-K, U)$$

donde $2K_1$ es la imagen de K_1 bajo la función continua $x \mapsto 2x$; observa que $2K_1$ es compacto. De manera similar defino $2K_2 - 1$ y $1 - K$.

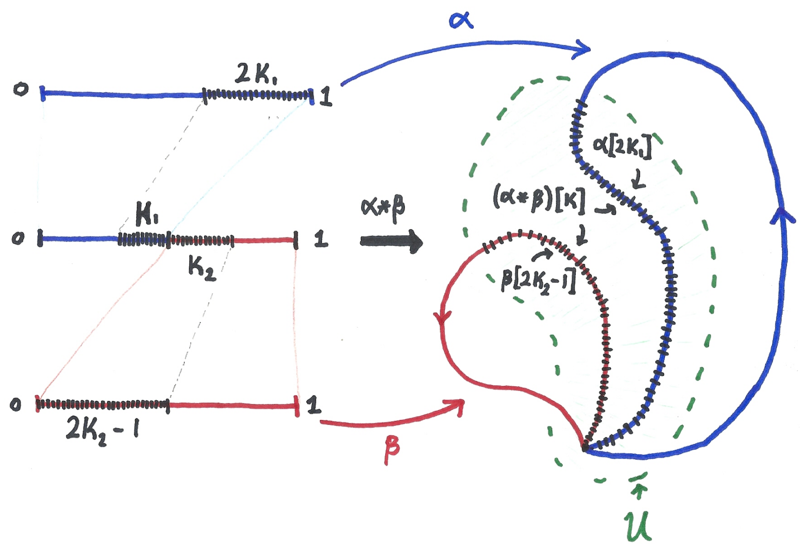


Figure 1: La multiplicación en ΩX es continua.

Para la primera igualdad observa que:

$$\begin{aligned}(\alpha,\beta)\in\mu^{-1}[B(K,U)] \quad &\iff \quad \mu(\alpha,\beta)[K]=(\alpha*\beta)[K]=(\alpha*\beta)[K_1]\cup(\alpha*\beta)[K_2]\subseteq U\\ &\iff \quad (\alpha*\beta)[K_1]\subseteq U \;\text{ y }\; (\alpha*\beta)[K_2]\subseteq U.\end{aligned}$$

Ahora si $s\in K_1$ entonces $(\alpha*\beta)(s)=\alpha(2s)$ y así $\alpha[2K_1]=(\alpha*\beta)[K_1]$. Por lo tanto

$$(\alpha*\beta)[K_1]=\alpha[2K_1]\subseteq U \quad\iff\quad \alpha\in B(2K_1,U),$$

y similarmente:

$$(\alpha*\beta)[K_2]=\beta[2K_2-1]\subseteq U \quad\iff\quad \beta\in B(2K_2-1,U),$$

Con esto concluyo que:

$$(\alpha,\beta)\in\mu^{-1}[B(K,U)] \quad\iff\quad (\alpha,\beta)\in B(2K_1,U)\times B(2K_2-1,U)$$

y así $\mu^{-1}[B(K,U)]=B(2K_1,U)\times B(2K_2-1,U)$ es abierto (por ser producto de subásicos).

Por último, como $\lambda(\alpha)(s)=\bar{\alpha}(s)=\alpha(1-s)$, tengo que $\alpha[1-K]=\bar{\alpha}[K]$ Análogamente concluyo que $\alpha\in\lambda^{-1}[B(K,U)]$ si y sólo si $\alpha\in B(1-K,U)$ y así $\lambda^{-1}[B(K,U)]=B(1-K,U)$ es abierto.

Con esto termino la prueba. La figura **??** ilustra esta demostración.

□

Ejercicio 13. Sea (Y,y_0) un espacio basado y $\mathbb{S}^0=\{-1,1\}$, entonces la biyección canónica:

$$\mathrm{Map}_*(\mathbb{S}^0,Y)\xrightarrow{\psi}Y \qquad\text{con}\qquad \psi(f)=f(-1)$$

es un homeomorfismo, ie. $\mathrm{Map}_*(\mathbb{S}^0,Y)\approx Y$.

Proof. A cada $y\in Y$ le asocio la función $f_y:\mathbb{S}^0\to Y$ con valores $f_y(1)=y_0$ y $f_y(-1)=y$. A la función $y\mapsto f_y$ la denoto por φ. Demotraré que φ es la inversa de ψ y que ambas son continuas.

La primera propiedad es clara porque

$$\varphi(\psi(f))(-1)=\varphi(f(-1))=f_{f(-1)}(-1)=f(-1) \quad\text{y}\quad \psi(\varphi(y))=\psi(f_y)=f_y(-1)=y.$$

Ahora observa que para $U\subseteq Y$ abierto,

$$\psi^{-1}[U]:=\{f:\mathbb{S}^0\to Y\mid f(-1)\in U\}=\{f:\mathbb{S}^0\to Y\mid f[\{-1\}]\subseteq K\}=B(K,U)\subset\mathrm{Map}_*(\mathbb{S}^0,Y)$$

donde $K = \{-1\}$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{S}^0$. Es decir que $\psi^{-1}[U]$ es un abierto subásico de la topología compacto-abierta. Por lo tanto ψ es continua.

Además, si $B(K,U) \subseteq \mathrm{Map}_*(\mathbb{S}^0, Y)$ es un subásico. Aquí $K \subseteq \mathbb{S}^0$ es compacto, en particular es uno de los cuatro conjuntos $\emptyset$,$\{1\}$,$\{-1\}$, $\mathbb{S}^0$. También $U \subseteq Y$ es abierto. Por definición:

$$\varphi^{-1}[B(K,U)] = \{y \in Y \mid f_y[K] \subseteq U\}.$$

Calculo este conjunto por casos:

Para $y_0 \in U$, tengo

$$\varphi^{-1}[B(\emptyset,U)] = Y = \varphi^{-1}[B(\{1\},U)] \quad , \quad \varphi^{-1}[B(\{-1\},U)] = U = \varphi^{-1}[B(\mathbb{S}^0,U)],$$

y para $y_0 \notin U$, tengo

$$\varphi^{-1}[B(\emptyset,U)] = Y \quad , \quad \varphi^{-1}[B(\{-1\},U)] = U \quad , \quad \varphi^{-1}[B(\{1\},U)] = \emptyset = \varphi^{-1}[B(\mathbb{S}^0,U)].$$

Todos los casos dan conjuntos abiertos. Por lo tanto $\varphi^{-1}[B(K,U)]$ es abierto para toda K y U, y así φ es continua. Esto termina la prueba. □

Ejercicio 14. Un espacio X es contraible si y sólo si $\mathrm{Id}_X \simeq e_x$ donde $e_x : X \to X$ es la función constante, para alguna $x \in X$.

Proof. $\Longrightarrow$) Supongamos que X es contraible, es decir que $X \simeq \{p\}$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $p \in X$ porque para todo elemento $x_0 \in X$ tenemos que $\{x_0\} \approx \{p\}$ y así $X \simeq \{p\} \simeq \{x_0\}$.

Por definición esto quiere decir que existen un funciones continuas $f : X \to \{x_0\}$ y $g : \{x_0\} \to X$ tales que $g \circ f \simeq_H \mathrm{Id}_X$ y $f \circ g \simeq_G \mathrm{Id}_{\{x_0\}}$. En particular,

$$H(x,0) = (g \circ f)(x) = g(x_0) \quad \text{y} \quad H(x,1) = \mathrm{Id}_X(x).$$

Como H es continua por hipótesis, esto quiere decir que H es una homotopía entre Id_X y la función constante $x \mapsto g(x_0)$.

$\Longleftarrow$) Supongamos que existe una homotopía $H : X \times I \to X$ tal que $H(x,0) = \mathrm{Id}_X(x) = x$ y $H(x,1) = e_{x_0} = x_0$. Si denotamos $f = \mathrm{Id}_X|_{\{x_0\}} : \{x_0\} \to X$ entonces $e_{x_0} \circ f = \mathrm{Id}_{\{x_0\}}$ porque $(e_{x_0} \circ f)(x_0) = e_{x_0}(x_0) = x_0$, en particular $e_{x_0} \circ f \simeq \mathrm{Id}_{\{x_0\}}$. Por otro lado lado $f \circ e_{x_0} = e_{x_0}$ porque $(f \circ e_{x_0})(x) = f(x_0) = x_0$ y por hipótesis $e_{x_0} \simeq \mathrm{Id}_X$. Por lo tanto $f \circ e_{x_0} \simeq \mathrm{Id}_X$. Ambas homotopías implican que $X \simeq \{x_0\}$ y así X es contraible. □

Ejercicio 15. Sean $f, \tilde{f} : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ y $g, \tilde{g} : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ funciones basadas tales que $f \simeq \tilde{f}$ y $g \simeq \tilde{g}$ donde las homotopías son basadas. Entonces $g \circ f \simeq \tilde{g} \circ \tilde{f}$ donde las homotopíbas son de funciones basadas.

Proof. Supongamos que $F : X \times I \to Y$ y $G : Y \times I \to Z$ son las homotopías $f \simeq \tilde{f}$ y $g \simeq \tilde{g}$ respectivamente. Definimos una función $H : X \times I \to Z$ mediante la siguiente composición:

$$X \times I \xrightarrow{(F,\mathrm{Id})} Y \times I \xrightarrow{G} Z \quad \text{con} \quad (x,t) \mapsto (F(x,t),t) \mapsto G(F(x,t),t).$$

H es continua porque es composición de funciones continuas. Ahora, para $t \in I$ fija tenemos que $H_t = G_t(F_t(x))$ que es continua porque F_t y G_t lo son. Por último tenemos que $H_0 = G_0 \circ F_0 = g \circ f$ y $H_1 = G_1 \circ F_1 = \tilde{g} \circ \tilde{f}$ por hipótesis.

Solamente nos falta verificar que H es una homotopía basada. Nada más hay que calcular

$$H_t(x_0) = G_t(F_t(x_0)) = G_t(y_0) = z_0 \quad \forall t \in I$$

ya que F y G son homotopías basadas por hipótesis. Por lo tanto $g \circ f \simeq \tilde{g} \circ \tilde{f}$ donde la homotopía H es basada.

□

Ejercicio 16. El atlas $\Phi = \{(U_+, \varphi_+), (U_-, \varphi_-)\}$ de $\mathbb{S}^n$ genera una estructura diferenciable.

Proof. Escribo $N_\pm = \{0, \dots, 0, \pm 1\}$ para los polos de $\mathbb{S}^n$. Primero verifico que φ_+ y φ_- son homeomorfismos. Escribo $\mathcal{P}_\pm$ como los planos en $\mathbb{R}^{n+1}$ definidos por $x_{n+1} = \pm 1$; estos planos son cerrados entonces $V_\pm := \mathbb{R}^{n+1} - \mathcal{P}_\pm$ son abiertos tales que $V_\pm \cap \mathbb{S}^n = U_\pm$.

Ahora, las funciones $\varphi_\pm$ son funciones racionales (cocientes de polinomios) donde el denominador se anula en $\mathcal{P}_\pm$ asi que $\varphi_\pm$ es continua (y suave) sobre $V_\pm$. Por lo tanto $\varphi_\pm$ es continua sobre $U_\pm$.

Por otro lado, escribo $\|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ y defino $\psi_\pm : \mathbb{R}^n \to U_\pm$ como

$$\psi_\pm(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{2x_1}{\|x\|^2+1}, \dots, \frac{2x_n}{\|x\|^2+1}, \pm \frac{\|x\|^2-1}{\|x\|^2+1} \right) = \frac{1}{\|x\|^2+1}(2x_1, \dots, 2x_n, \pm(\|x\|^2-1)).$$

Primero observa que $x \mapsto \|x\|^2$ es una función polinomial entonces es continua. Esto implica que cada coordenada de $\psi_\pm$ es una función racional donde cada denominador nunca se anula porque $\|x\|^2+1 > 0$. Entonces $\psi_\pm$ es una función continua; de hecho por la misma razón es una función suave sobre todo $\mathbb{R}^n$.

Ahora verifico que el contradominio de ψ es efectivamente $U_\pm$: observa que $\|x\|^2 - 1 < \|x\|^2 + 1$ entonces el cociente $(\|x\|^2-1)/(\|x\|^2+1)$ nunca puede ser 1. El cociente sólo puede ser -1 si $\|x\|^2 = 0$, es decir $x = 0$. En este caso: $\psi_+(0) = N_-$ y $\psi_-(0) = N_+$ entonces puedo concluir que la última coordenada de $\psi_\pm$ nunca es ± 1 y así el contradominio de $\psi_\pm$ es un subconjunto de $V_\pm$.

Para ver que la imagen de $\psi_\pm$ es $U_\pm$ basta calcular la norma de $\psi_\pm(x)$. Escribo $t = (\|x\|^2+1)^{-1}$ para simplificar las cuentas:

$$\begin{aligned}
\|\psi_\pm(x)\|^2 &= \|(2tx_1, \dots, 2tx_n, t(\|x\|^2-1))\|^2 \\
&= t^2(\|x\|^2-1)^2 + 4t^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 \\
&= t^2(\|x\|^4 - 2\|x\|^2 + 1 + 4\|x\|^2) \\
&= t^2(\|x\|^2+1)^2 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\varphi_\pm(x) \in U_\pm$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$, y concluyo que $\psi_\pm : \mathbb{R}^n \to U_\pm$ es una función continua.

Ahora verifico que $\psi_\pm$ es el inverso de $\varphi_\pm$. Denoto $s = (1 \mp x_{n+1})^{-1}$ para simplificar la notación y calculo:

$$\begin{aligned}
\psi_\pm(\varphi_\pm(x_1, \dots, x_{n+1})) &= \psi_\pm((sx_1, \dots, sx_n)) = \psi_\pm(sx) \\
&= \frac{1}{\|sx\|^2+1}(2sx_1, \dots, 2sx_n, \pm(\|sx\|^2-1))
\end{aligned} \tag{5}$$

donde

$$\begin{aligned}
\frac{2sx_i}{\|sx\|^2+1} &= \frac{2sx_i}{s^2\|x\|^2+1} = \frac{2x_i}{s\|x\|^2+s^{-1}} = \frac{2x_i}{s(1-x_{n+1}^2)+s^{-1}} \\
&= \frac{2x_i}{s(1-x_{n+1})(1+x_{n+1}) + (1 \mp x_{n+1})} = \frac{2x_i}{(1 \pm x_{n+1}) + (1 \mp x_{n+1})} = \frac{2x_i}{2} \\
&= x_i \quad \forall i = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{6}$$

porque $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$ implica que $\|(x_1, \dots, x_n)\|^2 = 1 - x_{n+1}^2$. Además:

$$\begin{aligned}
\frac{\|sx\|^2-1}{\pm(\|sx\|^2+1)} &= \frac{s^2\|x^2\|-1}{\pm s^2\|x\|^2 \pm 1} = \frac{\|x\|^2 - s^{-2}}{\pm\|x\|^2 \pm s^{-2}} = \frac{(1-x_{n+1}^2) - (1 \mp x_{n+1})^2}{\pm(1-x_{n+1}^2) \pm (1 \mp x_{n+1})^2} \\
&= \frac{1 - x_{n+1}^2 - 1 \pm 2x_{n+1} - x_{n+1}^2}{\pm 1 \mp x_{n+1}^2 \pm 1 - 2x_{n+1} \pm x_{n+1}^2} = \frac{\pm 2x_{n+1}(1 \mp x_{n+1})}{\pm 2(1 \mp x_{n+1})} \\
&= x_{n+1}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Por lo tanto si sustituyo (**??**) y (**??**) en (**??**) obtengo:

$$\psi_\pm(\varphi_\pm(x_1, \dots, x_{n+1})) = (x_1, \dots, x_{n+1}) \quad \Longrightarrow \quad \psi_\pm \circ \varphi_\pm = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{n+1}}$$

Por otro lado si retomo la notación $t = (\|x\|^2 + 1)^{-1}$ para $x = (x_1, \ldots, x_n)$ tengo:

$$\begin{aligned}
\varphi_\pm(\psi_\pm(x)) &= \varphi_\pm(2tx_1, \ldots, 2tx_n, \pm t(\|x\|^2 - 1)) = \left(\frac{2tx_i}{1 \mp (\pm t\|x\|^2 \mp t)} \right)_{i=1}^n \\
&= \left(\frac{2tx_i}{1 - t\|x\|^2 + t} \right)_{i=1}^n = \left(\frac{2x_i}{t^{-1} - \|x\|^2 + 1} \right)_{i=1}^n \\
&= \left(\frac{2x_i}{\|x\|^2 + 1 - \|x\|^2 + 1} \right)_{i=1}^n = \left(\frac{2x_i}{2} \right)_{i=1}^n \\
&= x \\
\therefore \varphi_\pm \circ \psi_\pm &= \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}
\end{aligned}$$

Resumo lo que he hecho: $\varphi_\pm : U_\pm \to \mathbb{R}^n$ y $\psi_\pm : \mathbb{R}^n \to U_\pm$ son funciones continuas y suaves (por ser racionales en cada coordenada) e inversos entre sí, es decir $\varphi_\pm^{-1} = \psi_\pm$.

Además, esto prueba que los cambios de coordenadas $\varphi_+ \circ \varphi_-^{-1} = \varphi_+ \circ \psi_-$ y $\varphi_- \circ \varphi_+^{-1} = \varphi_- \circ \psi_+$ son suaves porque son composición de funciones suaves. Observa que tácitamente estoy restringiendo las $\psi_\pm$ a $\mathbb{R}^n - \{0\}$ para que los cambios de coordenadas estén bien definidos; esto no afecta la diferenciablidad de éstas.

Con esto termino de probar que Φ es un atlas suave y así genera un atlas maximal que es una estructura diferenciable de $\mathbb{S}^n$. □

Ejercicio 17. Los atlas Φ y $\mathcal{H}$ de $\mathbb{S}^n$ son compatibles.

Proof. Debo probar que los cambios de coordenadas $\varphi_\pm \circ (h_i^\pm)^{-1}$ y $h_i^\pm \circ \varphi_\pm^{-1}$ son suaves; sólo me enfocaré en los casos cuando el signo de las cartas $h_i^\pm$ es $+$, la prueba con el otro signo es análoga porque las reglas de correspondencia de h_i^+ y h_i^- son exactamente iguales.

Ahora si $i \neq n+1$, entonces para toda $x \in V_i^+$ tengo que $\pm x_i > 0$ y así $\pm x_{n+1} \neq 1$ porque si se da la igualdad tendré $\|x\|^2 \geq x_i^2 + x_{n+1}^2 > 1$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $x \in U_\pm$ y así $V_i^+ \subset U_+, U_-$ para toda $i = 1, \ldots, n$. Si $i = n+1$ entonces los polos $N^+ \in V_{n+1}^+$ y $N^- \notin V_{n+1}^+$. Por lo tanto:

$$U_* \cap V_i^+ = \begin{cases} V_i^+ & \text{si } \ i = 1, \ldots, n \\ V_{n+1}^+ & \text{si } \ * = -, \ \ i = n+1 \\ V_{n+1}^+ - \{N^+\} & \text{si } \ * = +, \ \ i = n+1 \end{cases}$$

Observa que el dominio de $\varphi_\pm \circ (h_i^+)^{-1}$, para $i \neq n+1$, es $h_i^+[V_i^+] = \overset{\circ}{\mathbb{D}}$, entonces para $x = (x_1, \ldots, x_n)$ en el interior del disco unitario tengo (escribo $r = (1 - \sum x_k)^{1/2}$ para simplificar la notación)

$$\varphi_\pm \circ (h_i^+)^{-1}(x) = \varphi_\pm \circ \rho_i^+(x) = \varphi_\pm(x_1, \ldots, x_{i-1}, r, x_i, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_1}{1 \mp x_n}, \ldots, \frac{r}{1 \mp x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{1 \mp x_n} \right)$$

que es claramente suave porque $1 > \|x\| \leq \mp x_n$.

Si $i = n+1$ tengo dos casos, el dominio de $\varphi_- \circ (h_i^+)^{-1}$ sigue siendo el disco abierto unitario, entonces:

$$\varphi_- \circ (h_{n+1}^+)^{-1}(x) = \varphi_-(x_1, \ldots, x_n, r) = \left(\frac{x_1}{1+r}, \ldots, \frac{x_n}{1+r} \right),$$

pero siempre tengo que $r > 0$ porque x está en el interior del disco unitario. Por lo tanto $\varphi_- \circ (h_{n+1}^+)^{-1}$ es suave.

Por otro lado el dominio de $\varphi_+ \circ (h_{n+1}^+)^{-1}$ es

$$h_{n+1}^+\big[V_{n+1}^+ - \{N^+\}\big] = \overset{\circ}{\mathbb{D}} - \{h_{n+1}^+(N^+)\} = \overset{\circ}{\mathbb{D}} - \{(0, \ldots, 0, \widehat{1})\} = \overset{\circ}{\mathbb{D}} - \{0\},$$

entonces si $x \neq 0$ tengo que $r \neq 1$ y así

$$\varphi_+ \circ (h_{n+1}^+)^{-1}(x) = \varphi_+(x_1, \ldots, x_n, r) = \left(\frac{x_1}{1-r}, \ldots, \frac{x_n}{1-r} \right),$$

es suave porque los denominadores nunca se anulan. Con esto concluyo que todos los cambios de coordenadas $\varphi_\pm \circ (h_i^+)^{-1}$ son suaves.

Para ver la diferenciabilidad de los cambios de coordenadas $h_i^+ \circ \varphi_\pm^{-1}$ veré que estas funciones son restricciones de funciones suaves definidos sobre todo $\mathbb{R}^n$.

Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Como $\varphi_\pm^{-1} = \psi_\pm$ es una función suave, y proyectar sobre un subespacio $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (ie. olvidar la i-ésima coordenada) es suave, la composición:

$$x \mapsto \left(\frac{2x_1}{\|x\|^2+1}, \dots, \frac{2x_n}{\|x\|^2+1}, \pm\frac{\|x\|^2-1}{\|x\|^2+1} \right) \mapsto \left(\frac{2x_1}{\|x\|^2+1}, \dots, \widehat{\frac{2x_1}{\|x\|^2+1}}, \dots, \frac{2x_n}{\|x\|^2+1}, \pm\frac{\|x\|^2-1}{\|x\|^2+1} \right)$$

es suave (observa que no hay problema si $i = n+1$ como en el caso anterior). Por lo tanto, si restrinjo esta composición a $\varphi_\pm[U_\pm \cap V_i^+] \subset \mathbb{R}^n$ obtengo el cambio de coordenadas $h_i^+ \circ \varphi_\pm^{-1} = h_i^+ \circ \psi_\pm$ que, por lo tanto, es suave.

Con todo esto concluyo que todos los posibles cambios de coordenadas entre los atlas Φ y $\mathcal{H}$ son suaves. Por lo tanto ambos atlas generan el mismo atlas maximal y así la misma estructura diferenciable de $\mathbb{S}^n$, es decir Φ y $\mathcal{H}$ son compatibles. $\square$

Ejercicio 18. Los atlas ι y Θ de $\mathbb{R}$ no son compatibles, es decir algún cambio de coordenadas no es una función suave.

Proof. Denoto f como la función $x \mapsto x^3$, es decir $(\mathbb{R}, f)$ es la carta de Θ. Ahora, f^{-1} no es una función suave en $x = 0$ porque su derivada:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

no está bien definida en $x = 0$ porque se hace arbitrariamente grande alrededor del 0, es decir $(f^{-1})'(x) \to \infty$ cuando $x \to 0$. Por lo tanto el cambio de coordenadas $\mathrm{Id}_\mathbb{R} \circ f^{-1} = f^{-1}$, que está definido sobre $f^{-1}[\mathbb{R} \cap \mathbb{R}] = \mathbb{R}$, no es suave sobre todo su dominio.

Esto quiere decir que la carta $(\mathbb{R}, f)$ no está en el atlas maximal generado por el atlas canónico ι y así las estructuras diferenciables de las variedades $(\mathbb{R}, \iota)$ y $(\mathbb{R}, \Theta)$ no son la misma. $\square$

Ejercicio 19. A la esfera $\mathbb{S}^n$ le defino la relación de equivalencia $x \sim -x$ donde relaciono cada punto con su antípoda. En este caso se cumple que:

$$\mathbb{R}P^n \approx \mathbb{S}^n/_\sim$$

Proof. Considera la restricción $\hat{\nu} := \nu|_{\mathbb{S}^n} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}P^n$ de la proyección canónica $\nu : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{R}P^n$. Claramente es una función sobre porque $[x] = [\|x\|^{-1}x] \in \mathbb{R}P^n$, además

$$\hat{\nu}(x) = \hat{\nu}(y) \quad \iff \quad \exists\lambda \neq 0 \quad \text{tal que} \quad \lambda x = y \quad \iff \quad x \sim y$$

donde la última equivalencia se cumple porque $x, y \in \mathbb{S}^n$ y necesariamente $\lambda = \pm 1$. Por lo tanto $\hat{\nu}$ se factoriza a través de la proyección $q : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n/_\sim$, es decir existe una única función continua biyectiva φ tal que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^n \arrow[r, "\hat{\nu}"] \arrow[d, "q"'] & \mathbb{R}P^n \\
\mathbb{S}^n/_\sim \arrow[ur, dashed, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

Como $\mathbb{S}^n$ es compacto y $\mathbb{R}P^n$ es Hausdorff, φ es un homeomorfismo. $\square$

Ejercicio 20. Las variedades suaves $\mathbb{R}_\iota := (\mathbb{R}, \iota)$ y $\mathbb{R}_\Theta := (\mathbb{R}, \Theta)$ son difeomorfos.

Proof. Defino $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $f(x) = x^{1/3}$ y $g(x) = x^3$. Observa que $(\mathbb{R}, g)$ es la única carta de Θ, entonces denotaré por g_Θ como la carta y g como la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ apesar de que sean la misma función. Claramente $f \circ g = \mathrm{Id}_\mathbb{R} = g \circ f$ y el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}_\iota \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & \mathbb{R}_\Theta \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g_\Theta"] & \mathbb{R}_\iota \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & \mathbb{R}_\Theta \arrow[d, "g_\Theta"] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "g_\Theta \circ f \circ \mathrm{Id}^{-1}"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "\mathrm{Id} \circ g \circ g_\Theta^{-1}"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g_\Theta \circ f \circ \mathrm{Id}^{-1}"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Los dos cambios de coordenadas son claramente suaves porque

$$g \circ f \circ \mathrm{Id}^{-1} = \mathrm{Id} = \mathrm{Id} \circ g \circ g_{\Theta}^{-1}$$

Por lo tanto f y g son funciones suaves tales que $f \circ g = \mathrm{Id} = g \circ f$ entonces R_ι y $\mathbb{R}_\Theta$ son difeomorfos. $\square$

Ejercicio 21. Sea M una variedad suave de dimensión m con atlas $\mathfrak{A} = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$. Todo subconjunto abierto U de M también es una variedad suave con el atlas $\mathfrak{A}_U = \{(U_\lambda \cap U, (\varphi_\lambda)|_U)\}_{\lambda\in\Lambda}$.

Proof. Como cada $\varphi_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo sobre su imagen, entonces la restricción $(\varphi_\lambda)|_U : U_\lambda \cap U \to \varphi_\lambda[U_\lambda \cap U]$ es un homeomorfismo. Como la familia $\{U_\lambda\}$ es una cubierta abierta de M, la familia $\{U_\lambda \cap U\}$ de abiertos cubren a U. Por lo tanto $\mathfrak{A}_U$ es un atlas.

Ahora considera un cambio de coordenadas arbitrario

$$f = (\varphi_\lambda)|_U \circ (\varphi_\mu)|_U^{-1} : (\varphi_\mu)|_U[U_\lambda \cap U_\mu \cap U] \longrightarrow (\varphi_\lambda)|_U[U_\lambda \cap U_\mu \cap U]$$

y observa que es igual a la función $(\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1})|_U$ que es la restricción de un cambio de coordenadas del atlas fA. Como éste es suave, el cambio de coordenada f del atlas $\mathfrak{A}_U$ también es suave. Por lo tanto $\mathfrak{A}_U$ es un atlas diferenciable sobre U. $\square$

Ejercicio 22. Para toda $x \in M$, $D_x f : T_x M \to T_{f(x)}N$ es lineal.

Proof. Sean $d, d' \in T_x M$ derivaciones y $\lambda \in \mathbb{R}$ un escalar. Entonces para toda $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} D_x F(d + \lambda d')(f) &= (d + \lambda d')(f \circ F) = d(f \circ F) + \lambda d'(f \circ F) = D_x F(d)(f) + \lambda D_x F(d')(f) \\ \therefore \quad D_x F(d + \lambda d') &= D_x F(d) + \lambda D_x F(d') \end{aligned}$$

entonces $D_x F$ es una transformación lineal. $\square$

Ejercicio 23. La relación $\sim$ definido sobre $\mathfrak{B}$ es de equivalencia.

Proof. Primero comento que $\mathfrak{B}$ está en biyección con las matrices invertibles: si $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\} \in \mathfrak{B}$ con $v_j = (v_{1j}, \ldots, v_{nj}) \in V$, denoto por (v_{ij}) a la matriz que obtengo de tomar a v_j como columnas. Por lo tanto:

$$\Phi : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \quad \text{con} \quad f(\beta) = (v_{ij})$$

es una biyección. Por lo tanto identificaré $\mathfrak{B}$ con $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ (de hecho existe una estructura de grupo sobre $\mathfrak{B}$ que hace que Φ sea un isomorfismo de grupos).

Observa que $H = \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R}) = \{A \in G \mid \det A > 0\}$ es un subgrupo de G entonces la función $(A, \beta) \mapsto A\beta = A(v_{ij})$ es una acción de grupo. En efecto: $\mathrm{Id}\beta = \mathrm{Id}(v_{ij}) = (v_{ij}) = \beta$ y $(AB)\beta = (AB)(v_{ij}) = A(B(v_{ij})) = A(B\beta)$.

Además $\sim$ es la relación de equivalencia que define esta acción: sean $\beta = (v_{ij})$ y $\gamma = (w_{ij})$ dos bases y Q su matriz de cambio de base, ie. $Q\beta = \gamma$. Entonces:

$$\beta \sim \gamma \iff \det Q > 0 \iff Q \in H \iff \gamma \in \mathcal{O}(\beta)$$

donde $\mathcal{O}(\beta)$ denota la órbita de β. Por lo tanto $\sim$ es una relación de equivalencia ya que está inducida por una acción de grupo. $\square$

Ejercicio 24. El espacio de clases $\mathfrak{B}/_\sim$ tiene dos elementos.

Proof. Uso la misma notación que el ejercicio pasado. Debo probar que sólo hay dos órbitas, es decir que toda matriz de G está relacionada con Id o con Id^- que defino como

$$\mathrm{Id}^- := \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Sea $\beta = (v_{ij}) \in \mathfrak{B}$ una base arbitraria con $\Delta = \det(v_{ij})$ y sea $A = (v_{ij})^{-1}$. Entonces $A(v_{ij}) = \mathrm{Id}$ y similarmente si multiplico Id^- por la derecha a ambos lados, obtengo $A'(v_{ij}) = \mathrm{Id}^-$ donde $A' := \mathrm{Id}^- A$ y $\det A' = \det(\mathrm{Id}^-)\Delta = -\Delta$.

Estas dos igualdades quieren decir que A es la matriz de cambio de base de (v_{ij}) a Id, y A' es la matriz de cambio de base de (v_{ij}) a Id^-. Por lo tanto si $\Delta > 0$ entonces aplica la primera frase y $(v_{ij}) \sim \mathrm{Id}$; si $\Delta < 0$, entonces $\det A' > 0$ y $(v_{ij}) \sim \mathrm{Id}^-$. En símbolos: para toda $\beta \in \mathfrak{B}$

$$[\beta] = \begin{cases} [\mathrm{Id}] & \text{si } \Delta > 0 \\ [\mathrm{Id}^-] & \text{si } \Delta < 0 \end{cases}$$

y así concluyo que $\mathfrak{B}/_{\sim} = \{[\mathrm{Id}], [\mathrm{Id}^-]\}$. □

Ejercicio 25. Para toda $x \in \mathbb{S}^1$, existe una vecindad abierta $U \subseteq \mathbb{S}^1$ de x tal que $\epsilon^{-1}[U] = \bigcup U_n$ con $U_n \cap U_m = \emptyset$ donde $\epsilon_n := \epsilon|_{U_n} : U_n \to U$ es un homeomorfismo.

Proof. Veo a $\mathbb{S}^1$ encajado en el plano complejo y sea $e^\theta \in \mathbb{S}^1$. Sin pérdida de generalidad puedo asumir que $e^\theta \neq -1$ porque de otra manera nada más encajo $\mathbb{S}^1$ como $-\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$.

Observa que $e^\theta \in \mathbb{C} - \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ entonces la rama principal del argumento está bien definida y $\arg(e^\theta) = \vartheta \in (-\pi, \pi)$ donde $\theta = \vartheta + 2\pi n$ para alguna $n \in \mathbb{Z}$ (aquí arg es una función continua).

De esta manera para cada $z \in \mathbb{S}^1 - \{-1\}$ hay un único $\vartheta \in (-\pi, \pi)$ tal que $z = e^\vartheta$, ie. $\arg(z) = \vartheta$. Con esto puedo definir una función continua $\delta : \mathbb{S}^1 - \{-1\} \to (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ como

$$\delta(z) = \delta(e^\vartheta) = \frac{\vartheta}{2\pi}.$$

Claramente es continua y además es el inverso de la restricción $\bar{\epsilon} := \epsilon|_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ porque si $t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, o equivalentemente $2\pi t \in (-\pi, \pi)$, y si $z = e^\vartheta \in \mathbb{S}^1 - \{-1\}$ entonces:

$$\delta(\bar{\epsilon}(t)) = \delta(e^{2\pi t}) = \frac{2\pi t}{2\pi} = t \quad \text{y} \quad \bar{\epsilon}(\delta(e^\vartheta)) = \bar{\epsilon}\left(\tfrac{\vartheta}{2\pi}\right) = e^{2\pi \frac{\vartheta}{2\pi}} = e^\vartheta.$$

Por lo tanto $\mathbb{S}^1 - \{-1\} \approx (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ mediante la restricción de ϵ.

Ahora escribo $U = \mathbb{S}^1 - \{-1\}$ como la vecindad abierta de algún elemento $z \neq -1$ arbitrario de $\mathbb{S}^1$. Observa que

$$\epsilon^{-1}[U] = \{t \in \mathbb{R} \mid e^{2\pi t} \neq -1\} = \{t \in \mathbb{R} \mid t \notin \left(\tfrac{1}{2} + \mathbb{Z}\right)\} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(n - \tfrac{1}{2}, n + \tfrac{1}{2}\right)$$

donde $\frac{1}{2} + \mathbb{Z} = \{\frac{1}{2} + n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{Z}\}$; escribo $U_n := \left(-\frac{1}{2} + n, \frac{1}{2} + n\right)$. Claramente las U_n's son disjuntas porque cada una pertenece a un elemento distinto de la partición $\{[n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de $\mathbb{R}$.

Además sea $\varphi_{-n} : U_n \to (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ la traslación $\varphi_{-n}(t) = t - n$. Claramente es un homeomorfismo porque es la restricción de un homeomorfismo con el codominio igual a su imagen. Por lo tanto

$$\epsilon_n := \epsilon|_{U_n} = \bar{\epsilon} \circ \varphi_{-n} \quad \text{porque} \quad \bar{\epsilon}(\varphi_{-n}(t)) = \bar{\epsilon}(t - n) = e^{2\pi(t-n)} = e^{2\pi t} = \epsilon_n(t).$$

Esto quiere decir que $\epsilon_n : U_n \to U$ es un homeomorfismo por ser la composición de homeomorfismos. □

Ejercicio 26. Prueba "$\Longrightarrow$" del teorema **??**.

Proof. Sea $f_\#[\alpha] = [f \circ \alpha] \in f_\#[\pi_1(Y)] \subseteq \pi_1(X)$ con $\alpha : I \to Y$ un lazo y sea $\widehat{f} : Y \to E$ la función basada garantizada por la hipótesis. Observa que $\widehat{f}_\#[\alpha] = [\widehat{f} \circ \alpha] \in \pi_1(E)$. Como $X \mapsto \pi_1(X)$ es funtorial, entonces $p_\# \circ \widehat{f}_\# = f_\#$. En particular $f_\#[\alpha] = p_\#(\widehat{f}_\#[\alpha]) \in p_\#[\pi_1(E)]$.

□

Ejercicio 27. Sea $X^n = X \times \cdots \times X$ y $G = S_n$ el grupo simétrico (de permutaciones de un conjunto con n elementos). Entonces $X^n \times S_n \to X^n$ definido por

$$\big((x_1, \ldots, x_n), \sigma\big) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

es una acción derecha de S_n sobre X^n.

Proof. Primero observa que el neutro $1 \in S_n$ es la identidad, entonces

$$(x_1, \dots, x_n)1 = (x_{1(1)}, \dots, x_{1(n)}) = (x_1, \dots, x_n).$$

Ahora sea $\sigma, \tau \in S_n$. Entonces

$$\begin{aligned}(x_1, \dots, x_n)(\sigma\tau) &= (x_{(\sigma\tau)(1)}, \dots, x_{(\sigma\tau)(n)}) = (x_{\sigma(\tau(1))}, \dots, x_{\sigma(\tau(n))}) = (x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)})\sigma \\ &= ((x_1, \dots, x_n)\sigma)\tau.\end{aligned}$$

Esta prueba muestra que esta acción no es izquierda porque tendría $(\sigma\tau)x = \tau(\sigma(x))$, es decir que la segunda propiedad de acción izquierda no se cumple porque se invierte el orden de las acciones.

Nada más falta probar que $X^n \times S_n \to X^n$ es continua. Sea $U_1 \times \cdots U_n \subseteq X^n$ un abierto arbitrario, es decir $U_i \subseteq X$ es abierto para toda $i = 1, \dots, n$. Entonces $((x_1, \dots, x_n), \sigma)$ está en la preimagen de la acción si $x_{\sigma(i)} \in U_i$ para toda i, pero esto es equivalente a que

$$x_i \in U_{\sigma^{-1}(i)} \qquad \forall i = 1, \dots, n.$$

La equivalencia se da porque si $x_i \in U_i$ para toda i, entonces $x_{\tau(i)} \in U_{\tau(i)}$ para toda permutación τ; en particular $\tau = \sigma^{-1}$.

Por lo tanto la preimagen de U en $X \times S_n$ es:

$$\bigcup_{\sigma \in S_n} \big((U_{\sigma^{-1}(1)} \times \cdots \times U_{\sigma^{-1}(n)}) \times \{\sigma\}\big)$$

que es abierto ya que $\{\sigma\} \subset S_n$ es abierto porque S_n tiene la topología discreta. $\square$

Ejercicio 28. El grupo de isotropía de x siempre es un subrupo.

Proof. Si $1 \in G$ es el neutro, entonces por definición $1x = x$, entonces $1 \in G_x$. Ahora sean $g, h \in G_x$, en particular $hx = x$ Esto implica que

$$(gh^{-1})x = g(h^{-1}x) = g(h^{-1}(hx)) = g((h^{-1}h)x) = g(1x) = gx = x.$$

Por lo tanto $gh^{-1} \in G_x$ y G_x es un subgrupo de G.

$\square$

Ejercicio 29. La relación

$$x \sim y \quad \iff \quad \exists g \in G \text{ tal que } gx = y \quad \iff \quad y \in \mathcal{O}(x)$$

definida sobre X es una relación de equivalencia.

Proof. Pruebo algo equivalente: $\{\mathcal{O}(x)\}_{x \in X}$ es una partición de X. Si $x \in X$, entonces $1x = x$ y así $x \in \mathcal{O}(x)$. Por lo tanto

$$X = \bigcup_{x \in X} \mathcal{O}(x). \tag{8}$$

Ahora sean $x, y \in X$ tales que $\mathcal{O}(x) \cap \mathcal{O}(y) \neq \emptyset$; sea $z \in X$ un elemento en esta intersección. Esto implica que existen $g, h \in G$ tal que $gz = x$ y $hz = y$. Por lo tanto

$$(hg^{-1})x = (hg^{-1})(gz) = (hg^{-1}g)z = (h1)z = h(1z) = hz = y$$

y así $y \in \mathcal{O}(x)$. Con esto tengo que $g'y \in \mathcal{O}(x)$ implica $g'y = (g'hs^{-1})x$ y $g'y \in \mathcal{O}(x)$ entonces $\mathcal{O}(y) \subseteq \mathcal{O}(x)$. De manera análoga tengo que $\mathcal{O}(x) \subseteq \mathcal{O}(y)$.

Por lo tanto si $\mathcal{O}(x) \cap \mathcal{O}(y)$ se intersectan, entonces son iguales. Por lo tanto la unión en la ecuación (**??**) es disjunta y así $\{\mathcal{O}(x)\}_{x \in X}$ es una partición en X. Esto significa que la relación inducida $x \sim y \iff y \in \mathcal{O}(x)$ es una relación de equivalencia. $\square$

Ejercicio 30. $\bar{\mathfrak{a}}_x : (G/G_x) \to \mathcal{O}(x)$ es inyectiva. Por lo tanto es una función continua y biyectiva.

Proof. Como $\bar{\mathfrak{a}}_x(gG_x) = \mathfrak{a}_x(g) = gx$, entonces

$$\bar{\mathfrak{a}}_x(gG_x) = \bar{\mathfrak{a}}_x(hG_x) \iff \mathfrak{a}_x(g) = \mathfrak{a}_x(h) \iff gx = hx \iff (gh^{-1})x = x \iff gh^{-1} \in G_x$$

dice que $\mathfrak{a}_x$ está bien definida y es inyectiva. Además es sobreyectiva porque $\mathcal{O}(x)$ se define como la imagen de $\mathfrak{a}_x$. Por lo tanto $\mathfrak{a}_x$ es biyectiva.

Por último, $\mathfrak{a}_x = \bar{\mathfrak{a}}_x \circ \nu$ donde $\nu : G_x \twoheadrightarrow G/G_x$ es la identificación inducida por $\mathfrak{a}_x$, entonces, como $\mathfrak{a}_x$ es continua, $\bar{\mathfrak{a}}_p$ es continua. □

Ejercicio 31. Sea G un grupo discreto y $\mathfrak{a} : G \times X \to X$ una acción de grupos. Entonces:

$$\mathfrak{a} \text{ es propiamente discontinua} \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{a} \text{ es libre.}$$

Proof. Sea $x \in X$ y $U \subseteq X$ una vecindad garantizada por la definición de propiamente discontinua. Ahora sea $g \in G$ tal que $gx = x$ Entonces $gU = U \Longrightarrow U \cap gU \neq \emptyset$ por lo tanto necesariamente $g = 1$ y $\mathfrak{a}$ es una acción libre. □

Ejercicio 32. Sea $p : E \to X$ un cubriente. Si E es conectable por trayectorias entonces la acción $E_x \times \pi(X) \to E_x$ es transitiva.

Proof. Sean $e, e' \in E_x$. Como E es conectable por trayectorias, existe un $\tau : I \to E$ tal que $\tau(0) = e$ y $\tau(1) = e'$. Entonces $\sigma := p \circ \tau$ es un lazo en X porque

$$\sigma(0) = p(\tau(0)) = p(e) = x = p(e') = p(\tau(1)) = \sigma(1).$$

Por lo tanto si elijo $e \in E$, el lazo σ se levanta a una única trayectoria $\widehat{\sigma}_e$ tal que $\widehat{\sigma}_e(0) = e$ y $p \circ \widehat{\sigma}_e = \sigma$. Pero τ también cumple estas propiedades ($\sigma = p \circ \tau$ por definición y $\tau(0) = e$). Por la unicidad del levantamiento tengo que $\widehat{\sigma}_e = \tau$, por lo tanto:

$$e[p \circ \tau] = e[\sigma] = \widehat{\sigma}_e(1) = \tau(1) = e'$$

y la acción es transitiva. □

Ejercicio 33. Sean $p : E \to X$ un cubriente y $p_\# : \pi_1(E, e) \to \pi_1(X, x)$ el homomorfismo inducido donde $x \in X$ es fija y $e \in E_x$. Si denoto $G = \pi_1(X, x)$, el grupo de isotropía de e bajo la acción inducida por el cubriente es:

$$G_e = p_\# \big[\pi_1(E, e)\big].$$

Proof.

($\subseteq$) Sea $[\sigma] \in G_e$ con $\sigma : I \to X$ un lazo y $\widehat{\sigma}_e : I \to E$ su levantamiento, en particular $\widehat{\sigma}_e(0) = e$. Como $[\sigma] \in G_e$, entonces:

$$e[\sigma] = \widehat{\sigma}_e(1) = e$$

y así $\widehat{\sigma}_e$ es un lazo en E, ie. $[\widehat{\sigma}_e] \in \pi_1(E)$. por último, como $\widehat{\sigma}_e$ es el levantamiento de σ, entonces $p \circ \widehat{\sigma}_e = \sigma$ y así:

$$p_\#[\widehat{\sigma}_e] = [p \circ \widehat{\sigma}_e] = [\sigma].$$

Por lo tanto $[\sigma] \in p_\#[\pi_1(E)]$.

($\supseteq$) Sea $p_\#[\sigma] = [p \circ \sigma] \in p_\#[\pi_1(E)]$ donde $[\sigma] \in \pi_1(E, e)$, ie. $\sigma(0) = e = \sigma(1)$. Si escribo $\tau := p \circ \sigma$ para el lazo en X, su levantamiento es $\widehat{\tau}_e$ donde $p \circ \widehat{\tau}_e = \tau$ y $\widehat{\tau}_e(0) = e$. Observa que σ también cumple estas dos propiedades entonces la unicidad del levantamiento dice que $\widehat{\tau}_e = \sigma$. Por lo tanto:

$$e[p \circ \sigma] = e[\tau] = \widehat{\tau}_e(1) = \sigma(1) = e \quad \Longrightarrow \quad [p \circ \sigma] \in G_e.$$

□

Ejercicio 34. $\bar{\mathfrak{a}}_0 : G \to \mathbb{Z}$ es un homomorfismo de grupos.

Proof. Sean $[\sigma], [\tau] \in G$. Primero calculo (usando las propiedades de acciones de grupo):

$$\bar{\mathfrak{a}}_0[\sigma * \tau] = 0 \cdot [\sigma * \tau] = (0 \cdot [\sigma]) \cdot [\tau] = \widehat{\sigma}_0(1) \cdot [\tau] = \widehat{\tau}_n(1)$$

donde $n = \bar{\mathfrak{a}}_0[\sigma] = \widehat{\sigma}_0(1) \in \mathbb{Z}$. La imagen de $\widehat{\tau}_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ es simplemente la imagen de $\widehat{\tau}_0$ trasladado por n, en particular

$$\widehat{\tau}_n(1) = n + \widehat{\tau}_0(1) = \widehat{\sigma}_0(1) + \widehat{\tau}_0(1) = \bar{\mathfrak{a}}_0[\sigma] + \bar{\mathfrak{a}}_0[\tau]$$

Más formalmente, el lazo $\widehat{\tau}_0' := n + \widehat{\tau}_0$ también cumple las propiedades de ser un levantamiento de τ que inicia en n. $\square$

Ejercicio 35. El cono de cualquier espacio X es contraible.

Proof. Demostraré que $\mathrm{Id}_{CX} \simeq \mathrm{cte}_*$ donde $* = [x, 1] \in CX$. Defino la homotopía $H : (X \times I) \times I \to CX$ con

$$H((x, s), t) = [x, t + (1 - t)s].$$

Claramente $H_0 = \mathrm{Id}$ y $H_1 = \mathrm{cte}_*$. Además $H((x, 1), t) = [x, 1]$ para toda x. Por lo tanto H se factoriza a través de $X \times \{1\}$:

$$\begin{tikzcd}
(X \times I) \times I \arrow[r, "H"] \arrow[d, two heads, "\nu"'] & CX \\
CX \times I \arrow[ur, dashed, "\bar{H}"'] &
\end{tikzcd}$$

También $\bar{H}_0 = \mathrm{Id}_{CX}$ y $\bar{H}_1 = \mathrm{cte}_*$. $\bar{H}$ es continua porque H es continua. Por lo tanto $\bar{H}$ es una homotopía y $\mathrm{Id}_{CX} \simeq \mathrm{cte}_*$. $\square$

Ejercicio 36. Si $f : (X, x) \to (Y, y)$ es basado, entonces $f \simeq \mathrm{cte}_y$ si y sólo si f se extiende a un $\hat{f} : C(X, x) \to (Y, y)$.

Proof. ($\Longrightarrow$) Supongo que $f \simeq \mathrm{cte}_y$ mediante la homotopía basada $H : (X, x) \times I \to (Y, y)$. Como $H_1(x') = H(x', 1) = \mathrm{cte}_y(x') = y$ y $H_1(x, t) = y$ para toda $x' \in X$ y $t \in I$, H se factoriza a través de $(X \times \{1\}) \cup (\{x\} \times I)$:

$$\begin{tikzcd}
(X, x) \times I \arrow[r, "H"] \arrow[d, two heads, "\nu"'] & (Y, y) \\
C(X, x) \arrow[ur, dashed, "\bar{H}"'] &
\end{tikzcd}$$

Aquí $\bar{H}$ es continua porque H es continua y ν es una identificación.

Como $H_0 = f$, entonces $\bar{H}$ restringido a $X \times \{0\}$ es f, o equivalentemente $\bar{H} \circ \imath = f$. Por lo tanto $\bar{H}$ es la extensión de f buscada.

($\Longleftarrow$) Sea $\hat{f} : C(X, x) \to (Y, y)$ una extensión de f y defino $H = \hat{f} \circ \nu$. Observa que

$$\begin{aligned}
H(x', 0) &= \hat{f}[x', 0] = \hat{f}(\imath(x')) = f(x') \quad \forall x' \in X \\
H(x', 1) &= \hat{f}(*) = y_0 \quad \forall x' \in X \\
H(x, t) &= y \quad \forall t \in I
\end{aligned}$$

donde $* = [x', 1] \in CX$. Por lo tanto H es una homotopía basada, es decir $f \simeq \mathrm{cte}_y$.

$\square$

Ejercicio 37. Todo elemento de $\eta_n(X)$ es su propio inverso, es decir $-[M, f] = [M, f]$.

Proof. Observa que $[M, f] + [M, f] = [M \sqcup M, f \sqcup f]$. Ahora considera la variedad $N = (M \times I) \sqcup \mathbb{D}^{n+1}$ de dimensión $n + 1$. Ahora defino $F : N \to X$ como

$$F(x) = \begin{cases} f(y) & \text{si } x = (y, t) \in M \times I \\ \mathrm{cte} & \text{si } x \in \mathbb{D}^{n+1} \end{cases}.$$

Claramente es continua porque $F = (f \circ p) \sqcup \text{cte}$ donde $f \circ p$ es la composición $M \times I \xrightarrow{p} M \xrightarrow{f} X$. Además $\partial N = (M \sqcup M) \sqcup \mathbb{S}^n$ y por último $F|_{M \sqcup M} = f \sqcup f$ y $F|_{\mathbb{S}^n} = \text{cte}$ porque $M \sqcup M \subset (M \times I)$ y $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{D}^{n+1}$ donde F vale, por definición, $f \sqcup f$ y cte respectivamente.

Por lo tanto $[M \sqcup M, f \sqcup f] \sim [\mathbb{S}^n, \text{cte}] = 0$ y así $-[M, f] = [M, f]$. □

Ejercicio 38. La asignación $X \mapsto \eta_n(X)$ es funtorial, es decir $\text{Id}_* = \text{Id}$ y $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$.

Proof. Sean $[M, f] \in \eta_n(X)$ y $\varphi : X \to Y$, $\psi : Y \to Z$ funciones continuas.

$$(\text{Id}_X)_*[M, f] = [M, \text{Id}_X \circ f] = [M, f] \quad \Longrightarrow \quad (\text{Id}_X)_* = \text{Id}_{\eta_n(X)}.$$

Además:

$$(\varphi \circ \psi)_*[M, f] = [M, (\varphi \circ \psi) \circ f] = [M, \varphi \circ (\psi \circ f)] = \varphi_*[M, \psi \circ f] = \varphi_*\big(\psi_*[M, f]\big)$$

Por lo tanto $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$ y acabo. □

Ejercicio 39. Para toda n, se tiene que $X \simeq Y \Longrightarrow \eta_n(X) \cong \eta_n(Y)$, es decir que η_n es un invariante homotópico.

Proof. Por hipótesis existen $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ continuas tales que $f \circ g \simeq \text{Id}_Y$ y $g \circ f \simeq \text{Id}_X$. La proposición pasada y el ejercicio **??** garantizan que:

$$\text{Id}_{\eta_n(Y)} = (\text{Id}_Y)_* = (f \circ g)_* = f_* \circ g_* \quad \text{y} \quad \text{Id}_{\eta_n(X)} = (\text{Id}_X)_* = (g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

lo cual implica que $f_* : \eta_n(X) \to \eta_n(Y)$ y $g_* : \eta_n(Y) \to \eta_n(X)$ son isomorfismos. Por lo tanto $\eta_n(X) \cong \eta_n(Y)$. □

Ejercicio 40. La función $\Phi : \eta_0 \to \mathbb{Z}_2$ definido por $[M] \mapsto \#M \mod 2$ es un isomorfismo.

Proof. Primero observa que para todo elemento $[M] \in \eta_0$, M es compacto, entonces M es un conjunto finito de puntos. Así tiene sentido definir Φ.

Para probar que Φ está bien definido, supongo que $[M] = [N]$ para variedades cerradas $M = \{x_1, \ldots, x_m\}$ y $N = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Esto quiere decir que hay una 1-variedad W tal que $\partial W = M \sqcup N$. Como W es una 1-variedad, entonces necesariamente es la unión disjunta de intervalos (ie. trayectorias) y de círculos. Como $\partial \mathbb{S}^1 = \emptyset$, puedo asumir que W es simplemente la unión disjunta de trayectorias.

La frontera de una trayectoria es la unión disjunta de su punto inicial y su punto final (ya que por suposición esta trayectoria no puede ser un lazo). Por lo tanto por cada pareja de puntos en $M \sqcup N$ hay una trayectoria (que es una componente de W) que las une. Además esta trayectoria es única ya que si hay dos trayectorias que tienen el mismo punto inicial (o final), este punto deja de ser parte de la frontera.

Con esto puedo concluir que las componentes de W inducen un apareamiento entre los elementos de $M \sqcup N$ sin dejar un punto libre (ya que de lo contrario W no sería de dimensión 1). Por lo tanto $M \sqcup N$, que tiene $n + m$ elementos, tiene una cantidad par de puntos. Por lo tanto n y m necesariamente tienen la misma paridad, o en otras palabras $m \equiv n \mod 2$. Con esto conluyo que $\Phi[M] = \Phi[N]$ y Φ está bien definido.

Observa que

$$\Phi\big([M] + [N]\big) = \Phi[M \sqcup N] = \#(M \sqcup N) = \#M + \#N = \Phi[M] + \Phi[N]$$

entonces al reducir módulo 2 obtengo que Φ es un homomorfismo de grupos.

Claramente es sobre porque

$$\begin{aligned} \Phi[\{x_0\}] = \#\{x_0\} &\equiv 1 \mod 2 \\ \Phi[\{x_0, x_1\}] = \#\{x_0, x_1\} = 2 &\equiv 0 \mod 2. \end{aligned}$$

Por último, si $\Phi[M] = 0$ entonces $\#M$ es par, es decir M es un conjunto par de puntos, digamos $2n$. Si $W = I \sqcup \cdots \sqcup I$ es la unión disjunta de n intervalos entonces M es difeomorfo a

$$\partial W = \bigsqcup_{j=1}^{n} \partial I = \bigsqcup_{j=1}^{n} \{0, 1\}$$

y así M es la frontera de una 1-variedad. Por lo tanto $[M] = 0$ y $\ker \Phi = 0$.

Con esto he probado que Φ es un isomorfismo y que $\eta_0 \cong \mathbb{Z}_2$. □

Ejercicio 41. $\eta_4 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Proof. $\square$

Ejercicio 42. Para cada 0-variedad orientada $(M, \mathfrak{O}_M)$ donde $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y $\mathfrak{O}_M = \{\mathfrak{o}_1, \ldots, \mathfrak{o}_n\}$ (con cada $\mathfrak{o}_j \in \{-1, 1\}$), defino la función $\Phi : \Omega_0 \to \mathbb{Z}$ como

$$\Phi[M, \mathfrak{O}_M] = \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{o}_j.$$

Prueba que Φ es un isomorfismo, y en particular $\Omega_0 \cong \mathbb{Z}$.

Proof. Primero pruebo que Φ está bien definido. Sean $[M, \mathfrak{O}_M] = [N, \mathfrak{O}_N]$, entonces $M \sqcup N$ es la frontera de una 1-variedad orientada $(W, \mathfrak{O}_W)$. Como en la discusión anterior, escribo $M \sqcup N = \{x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_{s+s'}\}$ donde la orientación de x_j es positiva para $j \in \{1, \ldots, s\}$ y negativa para el resto. Por la proposición **??**, sé que $s = s'$.

Por otro lado supongo que M tiene m puntos orientados positivamente y m' puntos orientados negativamente, en particular $\Phi[M, \mathfrak{O}_M] = m - m'$. Similarmente también supongo que $\Phi[N, \mathfrak{O}_N] = n - n'$ (con la misma notación, es decir N tiene n puntos positivos y n' puntos negativos). Claramente la cantidad de puntos en $M \sqcup N$ orientados positivamente es $s = m + n$. Similarmente $s' = m' + n'$. Por lo tanto si sustituyo esto en la fórmula garantizada por la proposición **??**, obtengo que

$$s = s' \quad \Longrightarrow \quad m + n = m' + n' \quad \Longrightarrow \quad m - m' = n - n' \quad \Longrightarrow \quad \Phi[M, \mathfrak{O}_M] = \Phi[N, \mathfrak{O}_N]$$

y concluyo que Φ está bien definida.

Ahora supongo que $\Phi[M, \mathfrak{O}_M] = m - m' = n - n' = \Phi[N, \mathfrak{O}_N]$, entonces $m + n = m' + n'$ y así $M \sqcup N$ tiene la misma cantidad de puntos orientados positivamente que de puntos orientados negativamente. Entonces existe una biyección

$$\{x \in M \sqcup N \mid \mathfrak{o}_x = +1\} \longleftrightarrow \{x \in M \sqcup N \mid \mathfrak{o}_x = -1\}.$$

Por lo tanto con esta asociación puedo contruir trayectorias que inicia en un punto orientado negativamente y terminan en el punto orientado positivamente que está asociado al punto inicial. De esta manera la unión disjunta de estas trayectorias está orientada y la orientación que induce sobre su frontera, ie. $M \sqcup N$, es exactamente la orientación de $M \sqcup N$.

Por lo tanto $M \sqcup N$ es la frontera de una 1-variedad compacta orientada y así $[M, \mathfrak{O}_M] = [N, \mathfrak{O}_N]$ y Φ es inyectiva.

Φ es claramente sobreyectiva porque

$$\begin{aligned} \Phi[\{(x_1, +1), \ldots, (x_1, +1)\}] = 1 + \cdots + 1 &= n \\ \Phi[\{(x_1, -1), \ldots, (x_1, -1)\}] = -1 - \cdots - 1 &= -n \\ \Phi[\{(x_1, +1), (x_2, -1)\}] = 1 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio 43. Prueba que $\{a_0, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}^n$ es AI si y sólo si para todas λ_i's tales que $\lambda_0 + \cdots + \lambda_n = 0$ se cumple que $\sum \lambda_i a_i = 0 \Longrightarrow \lambda_i = 0$ para toda $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Proof. Sea $\{a_0, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}^n$

($\Longrightarrow$) Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $\sum \lambda_i = 0$ y supongo que $\sum \lambda_i a_i = 0$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_i - a_0) = -a_0 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = -a_0(-\lambda_0) - \lambda_0 a_0 = 0.$$

Como $\{a_0, \ldots, a_n\}$ es AI, $\{a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_0\}$ es linealmente independiente y así concluyo que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Por último, sustituyo esto en $\sum \lambda_i = 0$ para concluir que también $\lambda_0 = 0$.

($\Longleftarrow$) Sea $\sum \mu_i(a_i - a_0) = 0$ una combinación lineal. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i a_i = a_0 \sum_{i=1}^{n} \mu_i. \tag{9}$$

Ahora defino $\lambda_i := \mu_i$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$ y defino $\lambda_0 = -\mu_1 - \cdots - \mu_n$. Observa que $\lambda_0 + \cdots + \lambda_n = 0$ por definición. Además la ecuación (**??**) se convierte en:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = a_0(-\lambda_0) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i = 0.$$

Por hipótesis esto implica que $\lambda_i = 0$ para toda $i \in \{0, \ldots, n\}$. En particular $\mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$ y $\{a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_0\}$ es linealmente independiente. Por lo tanto $\{a_0, \ldots, a_n\}$ es AI.

$\square$

Ejercicio 44. Todo n-simplejo geométrico $\sigma = \langle a_0, \ldots, a_n \rangle$ es cerrado, convexo y compacto como subespacio de $\mathbb{R}^N$.

Proof. Como $\sigma = \mathrm{Conv}(a_0, \ldots, a_n)$ (por la proposición **??**), entonces σ es convexo.

Para probar compacidad, basta probar que los n-simplejos geométricos estándares son compactos ya que todo n-simplejo geométrico es homeomorfos a Δ^n (cf. ejercicio **??**).

Sea $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ el plano definido por $x_1 + \cdots + x_n = 1$ y $C \subset \mathbb{R}^n$ el primer cuadrante, ie. $C = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0\}$. Observa que ambos conjuntos son cerrados. Ahora pruebo que:

$$\Delta^n = \langle 0, e_1, \ldots, e_n \rangle = \mathcal{P} \cap C$$

y así Δ^n es cerrado.

($\subseteq$) Sea $x = \sum \lambda_i e_i$ donde $0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ y $\lambda_i \geq 0$. Como $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es la base estándar, entonces $x = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ y claramente se cumple que $x \in \mathcal{P} \cap C$.

($\supseteq$) Sea $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{P} \cap C$, entonces $x_1 + \cdots + x_n = 1$ y $x_i \geq 0$. Si tomo $\lambda_i = x_i$ entonces $x = (\lambda_1 \ldots, \lambda_n) = \sum \lambda_i e_i \in \Delta^n$.

Por último observa que si $x = \sum \lambda_i e_i \in \Delta^n$ entonces:

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\lambda_i e_i\| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

ya que $0 \leq \lambda_i$. Por lo tanto Δ^n es un conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$, entonces Δ^n es compacto.

$\square$

Ejercicio 45. La función $f : \sigma \to \tau$ definida por $f(\sum \lambda_i a_i) = \sum \lambda_i b_i$ es un homeomorfismo.[1]

Proof. Primero observa que si $x = \sum \lambda_i a_i \in \sigma$, entonces $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \cdots - \lambda_n$ y así:

$$\begin{aligned} x &= \lambda_0 a_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = a_0(1 + \sum_{i=1}^{n}(-\lambda_i)) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = a_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_i - a_0) \\ \therefore x - a_0 &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_i - a_0) \end{aligned}$$

Ahora defino $T_{a_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ como la traslación $x \mapsto x - a_0$. Por lo tanto $T_{a_0}[\sigma] = \langle 0, a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_0 \rangle$ donde $A = \{a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_0\}$ es una base. Después defino $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ como la transformación lineal que cambia la base A en la base $B = \{b_1 - b_0, \ldots, b_n - b_0\}$, en particular $F(a_i - a_0) = b_i - b_0$. Por

[1] En clase probamos esto usando el hecho que los n-simplejos geométricos son compactos (cf. ejercicio **??**), pero modifiqué esta prueba para no usar la compacidad para poder demostrar el ejercicio **??** con este ejercicio y así evitar un círculo lógico.

último sea $T_{-b_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la traslación $x \mapsto x + b_0$. Claramente cada una de estas tres funciones son homeomorfismos entonces su composición es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$.

Para $x = \sum \lambda_i a_i \in \sigma$ calculo:

$$\begin{aligned}
(T_{-b_0} \circ F \circ T_{a_0})(x) &= (T_{-b_0} \circ F)(x - a_0) = (T_{-b_0} \circ F)\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_i - a_0)\right) \\
&= T_{-b_0}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (b_i - b_0)\right) = b_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (b_i - b_0) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i b_i = f(x) \\
\therefore (T_{-b_0} \circ F \circ T_{a_0})|_\sigma &= f
\end{aligned}$$

y así f es casi un homeomorfismo, lo único que hace falta calcular es la imagen de f. Pero esto es sencillo:

$$\operatorname{Im}(f) = \{f(\sum \lambda_i a_i) \mid \sum \lambda_i a_i \in \sigma\} = \{\sum \lambda_i b_i \mid \lambda_i \geq 0, \ \ \sum \lambda_i = 1\} = \tau.$$

Por lo tanto:

$$(T_{-b_0} \circ F \circ T_{a_0})|_\sigma = f : \sigma \to \tau$$

es un homeomorfismo por ser restricción del homeomorfismo $T_{-b_0} \circ F \circ T_{a_0}$ (co-restringido a su imagen). □

Ejercicio 46. Todo complejo simplicial geométrico determina un complejo simplicial abstracto.

Proof. Sea $K = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ un complejo simplicial geométrico con $\sigma_i = \langle a_0^i, \ldots, a_{n_i}^i \rangle$; los veo encajados en algún $\mathbb{R}^N$, ie. $a_j^i \in \mathbb{R}^N$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ y para toda $j \in \{0, \ldots, n_i\}$. Para cada simplejo $\sigma_i \in K$ defino el conjunto de sus vértices como $\sigma_i' = \{a_0^i, \ldots, a_{n_i}^i\}$.

En general escribo el conjunto de vértices como

$$V := \bigcup_{i=1}^{n} \sigma_i' = \{a_j^i\}_{i,j} \subset \mathbb{R}^N$$

y defino $K' = \{\sigma_i'\}_{i=1}^n$.

Ahora pruebo que K' cumple las dos propiedades de ser un complejo simplicial abstracto. Primero observa que para un vértice arbitrario $a_j^i \in V$, el simplejo $\langle a_j^i \rangle$ es una 0-cara del simplejo geométrico $\sigma_i = \langle a_0^i, \ldots, a_{n_i}^i \rangle$ entonces por definición el 0-simplejo geométrico $\langle a_j^i \rangle$ es un elemento de K, ie. $\langle a_j^i \rangle = \sigma_l$ para alguna $l \in \{1, \ldots, n\}$. Por lo tanto $\sigma_l' = \{a_j^i\} \in K'$.

Para probar la segunda propiedad sea $L = \sigma_i' = \{a_0^i, \ldots, a_{n_i}^i\} \in K'$ y sea $L' \subseteq L$. Entonces L' genera una cara del simplejo geométrico σ_i. Por definición, el simplejo generado por L' es un elemento de K, ie. L genera a algún $\sigma_k \in K$. Por lo tanto $L' = \sigma_k' \in K'$ y termino. □

Ejercicio 47. d es una métrica sobre $|K|$.

Proof. Sean $\sigma, \sigma' \in |K|$. Pruebo que d cumple las tres propiedades de ser una métrica.

1. Si $d(\sigma, \sigma') = 0$ entonces $\sum(\sigma(v) - \sigma'(v))^2 = 0$ y como cada sumando es no-negativo, necesariamente se tiene que $\sigma(v) - \sigma'(v) = 0$ para toda $v \in V_K$. Por lo tanto $\sigma = \sigma'$ como funciones. Para la otra dirección, $\sigma = \sigma'$ implica que $(\sigma(v) - \sigma'(v))^2 = 0$ para toda $v \in V_K$ y así $d(\sigma, \sigma') = \sum 0 = 0$.

2. Como $(\sigma(v) - \sigma'(v))^2 = (\sigma'(v) - \sigma(v))^2$ para toda v, puedo sumar sobre V_K y obtengo que $d(\sigma, sigma') = d(\sigma', \sigma)$.

3. La desigualdad del triángulo se cumple por la misma razón que se cumple con la métrica euclideana: sean $\sigma, \sigma', \sigma'' \in |K|$ y $L := \sigma^{-1}(0,1] \cup (\sigma')^{-1}(0,1] \cup (\sigma'')^{-1}(0,1]$ que es finito porque es la unión finita de elements de K; sea $N = \#(L)$ y $L = \{v_1 \ldots, v_N\}$ una enumeración. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
d(\sigma, \sigma'') &= \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (\sigma(v_i) - \sigma''(v_i))^2} \\
&= \|(\sigma(v_1) - \sigma''(v_1), \ldots, \sigma(v_N) - \sigma''(v_N))\| \\
&= \|(\sigma(v_1), \ldots, \sigma(v_N)) - (\sigma''(v_1), \ldots, \sigma''(v_N))\|
\end{aligned}$$

donde la última expresión es la distancia usual euclideana entre los puntos $(\sigma(v_1), \ldots, \sigma(v_N))$ y $(\sigma''(v_1), \ldots, \sigma''(v_N))$ de $\mathbb{R}^N$. Aquí se vale la desigualdad del triángulo entonces:

$$\begin{aligned}
d(\sigma, \sigma'') &\leq \|(\sigma(v_1), \ldots, \sigma(v_N)) - (\sigma'(v_1), \ldots, \sigma'(v_N))\| + \\
&\quad \|(\sigma'(v_1), \ldots, \sigma'(v_N)) - (\sigma''(v_1), \ldots, \sigma''(v_N))\| \\
&\leq \|(\sigma(v_1) - \sigma'(v_1), \ldots, \sigma(v_N) - \sigma'(v_N))\| + \|(\sigma'(v_1) - \sigma''(v_1), \ldots, \sigma(v_N) - \sigma''(v_N))\| \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (\sigma(v_i) - \sigma'(v_i))^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (\sigma'(v_i) - \sigma''(v_i))^2} \\
&\leq d(\sigma, \sigma') + d(\sigma', \sigma'').
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 48. Sea $L = \{v_0, \ldots, v_n\} \in K$, la función

$$\varphi : |L|_d \to \Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{definida por} \quad \sigma \mapsto (\sigma(v_0), \ldots, \sigma(v_n))$$

es una isometría. En particular $|L|_d \approx \Delta^n$ es un homeomorfismo.

Proof. Primero verifico que $\Delta^n \approx |\Delta^n|_d$ (donde la topología usual de Δ^n es la de subespacio de $\mathbb{R}^n$).

Como L es finito cada φ está bien definida. Para ver que φ preserva la métrica, tomo $\sigma, \tau \in |L|$ arbitrarios y calculo:

$$d_{\Delta^n}(\varphi(\sigma), \varphi(\tau)) = d_{\mathbb{R}^{n+1}}\big(\sigma(v_0), \ldots, \sigma(v_n)), (\tau(v_0), \ldots, \tau(v_n))\big) = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} \big(\sigma(v_i) - \tau(v_i)\big)^2}$$

Observa que $V_L = L$ entonces la suma dentro del radical es la suma de $(\sigma(v) - \tau(v))^2$ sobre $v \in V_L$. Por lo tanto

$$d_{\Delta^n}(\varphi(\sigma), \varphi(\tau)) = \sqrt{\sum_{v \in V_L} \big(\sigma(v) - \tau(v)\big)^2} = d_{|L|}(\sigma, \tau)$$

y φ preserva la métrica. En particular es continua e inyectiva.

Ahora considera la función

$$\psi : \Delta^n \to |K|_d \quad \text{definida por} \quad (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \mapsto \psi(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)(v) = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } v = v_i \in L \\ 0 & \text{si } v \notin L \end{cases}$$

Está bien definida porque los elementos $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \Delta^n$ cumplen $\sum \lambda_i = 1$ y $\lambda_i \geq 0$, además de que $\psi(\lambda) = \psi(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in |K|$ es cero fuera de L, ie. $\psi(\sigma)|_{V_K - L} = 0$ o equivalentemente $\mathrm{Sop}(\varphi(\lambda)) \subseteq L$. En particular $\mathrm{Im}(\psi) \subseteq |L|$, entonces puedo suponer que ψ tiene como contradominio a $|L|_d$, es decir $\psi : \Delta^n \to |L|_d$.

Por definición:

$$\begin{aligned}
d_{|K|}(\varphi(\lambda), \varphi(\mu)) &= \sqrt{\sum_{v \in V_K} \big(\varphi(\lambda)(v) - \varphi(\mu)(v)\big)^2} = \sqrt{\sum_{v \in L} \big(\varphi(\lambda)(v) - \varphi(\mu)(v)\big)^2} \\
&= \sqrt{\sum_{i=0}^{n} \big(\varphi(\lambda)(v_i) - \varphi(\mu)(v_i)\big)^2} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} \big(\lambda_i - \mu_i\big)^2} \\
&= d_{\mathbb{R}^{n+1}}\big((\lambda_0, \ldots, \lambda_n), (\mu_0, \ldots, \mu_n)\big) \\
&= d_{\Delta^n}(\lambda, \mu).
\end{aligned}$$

Por lo tanto ψ preserva la métrica. En particular es continua e inyectiva.

Por último observa que:

$$\psi(\varphi(\sigma))(v_i) = \psi(\sigma(v_0), \ldots, \sigma(v_n))(v_i) = \sigma(v_i) \quad \Longrightarrow \quad \psi(\varphi(\sigma)) = \sigma$$

$$\varphi(\psi(\lambda)) = (\psi(\lambda)(v_0), \ldots, \psi(\lambda)(v_n)) = (\lambda_0, \ldots, \lambda_n)\lambda.$$

Por lo tanto $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\Delta^n}$ y $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{|L|_d}$.

Para terminar resumo lo que tengo: hay dos funciones $\varphi : |L|_d \to \Delta^n$ y $\psi : \Delta^n \to |L|_d$ que son inversas entre sí. Además cada una preserva la métrica. Por lo tanto ambas son isometrías. □

Ejercicio 49. Sea $V_K = \{0, e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2$ y $K = \{\{0\}, \{e_1\}, \{e_2\}, \{0, e_1\}, \{0, e_2\}, \{e_1, e_2\}\}$ (cf. ejemplo **??**). Prueba que $|K| \approx \mathbb{S}^1$, es decir que $\mathbb{S}^1$ es triangulable.

Proof. Sabemos que:

$$|K| = \bigcup_{L \in K} |L|,$$

pero varios de estos uniendos son redundantes, por ejemplo:

$$|\{v_0\}| = \{\sigma \in |K| : \mathrm{Sop}(\sigma) \subseteq \{v_0\} \subseteq \{v_0, v_1\}\} \subseteq \{\sigma \in |K| : \mathrm{Sop}(\sigma) \subseteq \{v_0, v_1\}\} = |\{v_0, v_1\}|.$$

En general la realización geométrica de todo 0-simplejo de K está contenido en la realización geométrica de un 1-simplejo. Por lo tanto:

$$|K| = |\{v_0, v_1\}| \cup |\{v_0, v_2\}| \cup |\{v_1, v_2\}|.$$

Por otro lado, como el conjunto de vértices de K tiene 3 elementos, por definición tenemos que $|K| \subset \mathbb{R}^3$ y cada elemento $\sigma \in |K|$ se escribe como $\sigma = (\sigma(v_0), \sigma(v_1), \sigma(v_2))$. De esta manera podemos describir los elementos de $|\{v_i, v_j\}|$ como

$$|\{v_0, v_1\}| = \{(\sigma(v_0), \sigma(v_1), \sigma(v_2)) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \sigma(v_i),\ \sigma(v_2) = 0,\ \sigma(v_0) + \sigma(v_1) = 1\} = \{(t, 1-t, 0)\}_{t \in I}.$$

Análogamente:

$$|\{v_0, v_2\}| = \{(t, 0, 1-t)\}_{t \in I} \quad \text{y} \quad |\{v_1, v_2\}| = \{(0, t, 1-t)\}_{t \in I},$$

y así

$$|K| = \{(t, 1-t, 0)\}_{t \in I} \cup \{(t, 0, 1-t)\}_{t \in I} \cup \{(0, t, 1-t)\}_{t \in I}.$$

Para dar un homeomorfismo entre $|K|$ y $\mathbb{S}^1$, daré una composición de tres homeomorfismos:

1. Sea $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la proyección $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Claramente $p|_{|K|}$ es continua y su imagen es:

$$\begin{aligned} p[|K|] &= p\big[\{(t, 1-t, 0)\}_{t \in I}\big] \cup p\big[\{(t, 0, 1-t)\}_{t \in I}\big] \cup p\big[\{(0, t, 1-t)\}_{t \in I}\big] \\ &= \{(t, 1-t)\}_{t \in I} \cup \{(t, 0)\}_{t \in I} \cup \{(0, t)\}_{t \in I}. \end{aligned}$$

La función $p|_{|K|}$ tiene una inversa obvia: para cada pedazo de $p[|K|]$ define

$$\begin{aligned} q_1 : \{(t, 1-t)\}_{t \in I} &\longrightarrow \{(t, 1-t, 0)\}_{t \in I} \quad \text{con} \quad (t, 1-t) \mapsto (t, 1-t, 0) \\ q_2 : \{(t, 0)\}_{t \in I} &\longrightarrow \{(t, 0, 1-t)\}_{t \in I} \quad \text{con} \quad (t, 0) \mapsto (t, 0, 1-t) \\ q_3 : \{(0, t)\}_{t \in I} &\longrightarrow \{(0, t, 1-t)\}_{t \in I} \quad \text{con} \quad (0, t) \mapsto (0, t, 1-t) \end{aligned}$$

que son claramente continuas (como restricciones de funciones continuas $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$). Además las podemos pegar porque coinciden en las intersecciones de los dominios:

$$q_1(0, 1) = (0, 1, 0) = q_3(0, 1) \ \ , \ \ q_1(1, 0) = (1, 0, 0) = q_2(1, 0) \ \ , \ \ q_2(0, 0) = (0, 0, 1) = q_3(0, 0).$$

Por lo tanto la función $q : p[|K|] \to |K|$, que se obtiene al pegar q_1, q_2 y q_3 es continua y por construcción es la inversa de $p|_{|K|}$. Por lo tanto $p|_{|K|}$ es un homeomorfismo. Observa también que la imagen de $p|_{|K|}$ es axactamente la frontera de $\Delta^2 \subset \mathbb{R}^2$, ie. $p[|K|] = \partial\Delta^2$

2. Observa que el punto $(1/3, 1/3) \in \Delta^2$ está en el interior (porque $1/3 + 1/3 \neq 1$) de Δ^2 ie. $(1/3, 1/3 \notin \partial\Delta^2)$, entonces aplico la traslación $(x, y) \mapsto (x - 1/3, y - 1/3)$ para llevar el punto $(1/3, 1/3)$ al origen. Esta traslación es claramente un homeomorfismo. A la traslación de $\partial\Delta^2$ la denoto por $\tau := \partial\Delta^2 - 1/3$.

3. El último homeomorfismo es la restricción de normalizar:

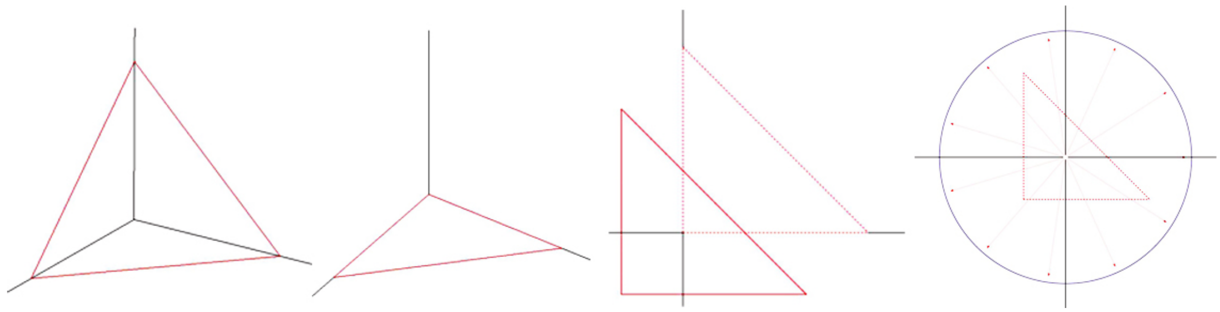
$$u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \quad \text{definido por} \quad (x,y) \mapsto \frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

   En coordenadas polares, esta función hace $(\theta, r) \mapsto (\theta, 1)$, entonces sólo depende del "argumento" del vector (x, y).

   Claramente es sobre porque $u|_{\mathbb{S}^1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{S}^1}$. Además, $u|_\tau$ es inyectiva. Para ver esto basta observar que cada rayo que inicia en el origen intersecta a τ en un sólo punto, o de otra manera: para cada argumento θ hay un solo vector $(x, y) \in \tau$ con argumento igual a θ.

   Por lo tanto $u|_\tau : \tau \to \mathbb{S}^1$ es una función continua y biyectiva. Como τ es compacto (por ser frontera de un 2-simplejo que es compacto) y $\mathbb{S}^1$ es Hausdorff, entonces $u|_\tau$ es un homeomorfismo.

El siguiente dibujo ilustra los tres pasos:



Para terminar, simplemente compone los tres homeomorfismos anteriores

$$|K| \longrightarrow \partial\Delta^2 \longrightarrow \partial\Delta^2 - \frac{1}{3} \xrightarrow{u} \mathbb{S}^1$$

para concluir que $|K| \approx \mathbb{S}^1$.

$\square$

Ejercicio 50. Prueba que solamente hay dos clases de equivalencia que son $[f]$ y $[\bar{f}]$ donde $\bar{f} = \tau \circ f$ donde $\tau \in S_{n+1}$ es la permutación que transpone el 0 y el 1 y fija a los demás.

Proof. Sea A_{n+1} el grupo alternante, ie. las permutaciones pares del grupo simétrico S_{n+1}. Defino la siguiente acción derecha:

$$\Sigma \times A_{n+1} \longrightarrow \Sigma \quad \text{con} \quad (f, \alpha) \longmapsto f \circ \alpha.$$

Claramente es una acción derecha porque $(f, 1) \mapsto f \circ 1 = f$ y

$$\begin{array}{rcl} ((f,\alpha),\beta) & \mapsto & (f\circ\alpha,\beta) = (f\circ\alpha)\circ\beta = f\circ(\alpha\circ\beta) \\ \therefore\ \ (f\alpha)\beta & = & f(\alpha\beta). \end{array}$$

Ahora sea $f \in \Sigma$. Calculo su grupo de isotropía:

$$(A_{n+1})_f = \{\alpha \in A_{n+1} \mid f \circ \alpha = f\} = \{1\}.$$

Esto es porque si $\alpha \in A_{n+1}$ mueve un elemento entonces $f \circ \alpha$ y f difieren en ese elemento. Más precisamente, si $\alpha \neq 1$, existen $i \neq j \in \underline{n}$ tal que $\alpha(i) = j$ y por lo tanto $(f \circ \alpha)(i) = f(\alpha(i)) = f(j) \neq f(i)$, ie. $f \circ \alpha \neq f$, porque f es biyectiva. Este argumento prueba que la acción de A_{n+1} sobre Σ es libre.

Por el ejercicio **??**, hay una biyección (de hecho un homeomorfismo porque Σ y A_{n+1} son finitos con la topología discreta) entre

$$\mathcal{O}(f) \longleftrightarrow \frac{A_{n+1}}{(A_{n+1})_f} = \frac{A_{n+1}}{1} \cong A_{n+1}$$

Esto quiere decir que todas las órbita de la acción tienen $(n+1)!/2$ elementos[2]. Además observa que:

$$\mathcal{O}(f) = \{g \in \Sigma \mid \exists \alpha \in A_{n+1} \text{ tal que } g \circ \alpha = f\} = \{g \in \Sigma \mid \exists \alpha \in A_{n+1} \text{ tal que } \alpha = g^{-1}f\} = [f] \in \Sigma/_{\sim}$$

Ahora, Σ tiene $(n+1)!$ elementos por ser el conjunto de funciones biyectivas entre dos conjuntos con $n+1$ elementos. Como las órbitas forman una partición de Σ y cada órbita tienen la mitad de los elementos de Σ, sólo puede haber dos órbitas. Sea $f \in \Sigma$ arbitrario, pruebo que $\Sigma/_{\sim} = \{[f], [\bar{f}]\}$, es decir que $f \not\sim \bar{f}$.

Observa que:

$$f \circ \bar{f}^{-1} = f \circ (\tau \circ f)^{-1} = f \circ (f^{-1} \circ \tau^{-1}) = \tau^{-1} = \tau.$$

Como τ es una transposición, es una permutación impar. Por lo tanto $f \not\sim \bar{f}$ y acabo. $\square$

Ejercicio 51. Sea M un R-módulo y $f : X \to R$ una función. Entonces existe un único morfismo de R-módulos $\hat{f} : R\langle X\rangle \to M$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & R\langle X\rangle \arrow[d, dashed, "\hat{f}"] \\ X \arrow[ur, "x\mapsto\chi_x"] \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd} . \tag{10}$$

Proof. Sea

$$g = \sum_{x\in X} g(x)\chi_x \in R\langle X\rangle = \{f : X \to R \mid \mathrm{Sop}(f) \text{ es finito}\}$$

un elemento arbitrario donde $\chi_x \in R\langle X\rangle$ es la función definida por $\chi_x(x) = 1$ y $\chi_x(x') = 0$ para toda $x' \neq x$. Define:

$$\hat{f} : R\langle X\rangle \longrightarrow M \quad \text{con} \quad g = \sum_{x\in X} g(x)\chi_x \mapsto \sum_{x\in X} g(x)f(x).$$

Como $g(x) \in R$ y $f(x) \in M$, $\hat{f}$ está bien definida. Ahora observa que $\hat{f}$ es un morfismo de R-módulos:

$$\begin{aligned} \hat{f}(g+g') &= \sum_{x\in X}(g+g')(x)f(x) = \sum_{x\in X}(g(x)+g'(x))f(x) = \sum_{x\in X} g(x)f(x) + \sum_{x\in X} g'(x)f(x) \\ &= \hat{f}(g) + \hat{f}(g'), \\ \hat{f}(rg) &= \sum_{x\in X}(rg)(x)f(x) = \sum_{x\in X} rg(x)f(x) = r\sum_{x\in X} g(x)f(x) \\ &= r\hat{f}(g). \end{aligned}$$

También tenemos que:

$$\hat{f}(\chi_x) = \sum_{x'\in X} \chi_x(x')f(x') = \chi_x(x)f(x) = 1f(x) = f(x)$$

Por lo tanto $\hat{f}$ es la composición $x \mapsto \chi_x \mapsto \hat{f}(\chi_x)$, es decir, el diagrama (**??**) conmuta. Ya probé la existencia.

Para la unicidad, supongo que existe un morfismo R-módulos $F : R\langle X\rangle \to M$ que haga conmutar el diagrama, es decir que $F(\chi_x) = f(x)$. Entonces, como F es morfismo:

$$F(g) = F\left(\sum g(x)\chi_x\right) = \sum_{x\in X} g(x)F(x) = \sum_{x\in X} g(x)f(x) = \hat{f}(g).$$

Por lo tanto $F = \hat{f}$ y la extensión es única. $\square$

Ejercicio 52. Para toda $n \geq 1$, se cumple que $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, en particular $\mathrm{Im}(\partial_n) \subseteq \ker(\partial_{n-1})$.

[2] Esto se sigue del teorema de Langrange y de que $(S_{n+1} : A_{n+1}) = 2$. La función $S_{n+1} \to \mathbb{Z}_2$ que le asocia a una permutación $\alpha \in S_{n+1}$ su signo $\alpha \mapsto \mathrm{sgn}(\alpha) \in \{-1, 1\}$, es un epimorfismo de grupos con kernel A_{n+1} lo cual implica que $S_{n+1}/A_{n+1} \cong \mathbb{Z}_2$. Por el teorema de Lagrange $\#(S_{n+1}) = (S_{n+1} : A_{n+1})\#(A_{n+1}) \Longrightarrow \frac{1}{2}\#(S_{n+1}) = \frac{1}{2}(n+1)! = \#(A_{n+1})$.

Proof. Sea $[v_0, \dots, v_n] \in S_n^{\mathfrak{O}}$. Entonces:

$$\partial_{n-1}(\partial_n[v_0, \dots, v_n]) = \partial_{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n]\right) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\partial_{n-1}[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n] \tag{11}$$

Ahora analizo el término $\partial_{n-1}[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n]$. Observa que

$$\begin{aligned}\partial_{n-1}[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n] = {} & [\widehat{v_0}, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n] + \dots + (-1)^{i-1}[v_0, \dots, \widehat{v_{i-1}}, \widehat{v_i}, \dots, v_n] \\ & + (-1)^i[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \widehat{v_{i+1}}, \dots, v_n] + \dots + (-1)^{n-1}[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, \widehat{v_n}]\end{aligned}$$

Juntando esto en notación de suma, tenemos:

$$\partial_{n-1}[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n] = \sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j[v_0, \dots, \widehat{v_j}, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n] + \sum_{k=i+1}^{n}(-1)^{k-1}[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, \widehat{v_k}, \dots, v_n]$$

donde el exponente de (-1) en la segunda suma es $k-1$ en lugar de k porque el k-ésimo sumando de la segunda suma es el $(k-1)$-ésimo sumando de todo $\partial_{n-1}[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n]$ (ya que $k > i$ y se eliminó el término i-ésimo). Sustituyo en la fórmula (**??**):

$$\begin{aligned}\partial_{n-1}(\partial_n[v_0, \dots, v_n]) &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\left(\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^i[v_0, \dots, \widehat{v_j}, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n]\right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=i+1}^{n}(-1)^{k-1}[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, \widehat{v_k}, \dots, v_n]\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i+j}[v_0, \dots, \widehat{v_j}, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n] \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}(-1)^{i+j-1}[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_n]\end{aligned}$$

De esta expressión se vuelve claro que un sumando arbitrario $[v_0, \dots, \widehat{v_k}, \dots, \widehat{v_l}, \dots, v_n]$ aparece dos veces con signo contrario: en el primer sumando cuando $k = j$ y $l = i$ con signo $(-1)^{i+j}$ y en el segundo sumando cuando $k = i$ y $l = j$ con signo $(-1)^{i+j-1}$.

Por lo tanto cada sumando de la primera suma, de la ecuación anterior, se cancela con un sumando de la segunda suma. Así podemos concluir que toda la suma vale 0, ie. $\partial_{n-1}(\partial_n[v_0, \dots, v_n]) = 0$ para todo elemento de $S_n^{\mathfrak{O}}$.

Ahora $\partial_{n-1} \circ \partial$ se extiende a $R\langle S_n^{\mathfrak{O}}\rangle$ como:

$$(\partial_{n-1} \circ \partial_n)\left(\sum_{\sigma \in S_n^{\mathfrak{O}}} r_\sigma \sigma\right) = \sum r_\sigma(\partial_{n-1} \circ \partial_n)(\sigma) = \sum r_\sigma 0 = 0$$

y así podemos concluir que $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ como morfismo de R-módulos. □

Ejercicio 53. La función inducida $|f|$ está bien definida, es decir para toda $\sigma \in |K|$ se tiene que $|f|(\sigma) \in |L|$.

Proof. Sea $\sigma \in |K|$, en particular

$$\sum_{v \in V_K} \sigma(v) = 1 \quad \text{y} \quad \sigma^{-1}(0,1] = \mathrm{Sop}(\sigma) = \{v_0, \dots, v_n\} \in K$$

Como $V_K = \cup_{u \in V_L} f^{-1}[u]$ entonces:

$$\sum_{u \in V_L} |f|(\sigma)(u) = \sum_{\tau \in L}\sum_{v \in f^{-1}[u]} \sigma(v) = \sum_{v \in V_K} \sigma(v) = 1 \tag{12}$$

porque $\sigma \in |K|$.

Ahora sólo falta verificar que $\text{Sop}(|f|(\sigma)) \in L$. Como f es un mapeo simplicial entonces:

$$\text{Sop}(\sigma) = \{v_0, \ldots, v_n\} \in K \quad \Longrightarrow \quad \{f(v_0), \ldots, f(v_n)\} \in L.$$

Si pruebo que $\text{Sop}(|f|(\sigma)) = \{f(v_0), \ldots, f(v_n)\}$ entonces por lo anterior y la fórmula (**??**) tendré que $|f|(\sigma) \in |L|$ para toda $\sigma \in |K|$.

Pruebo la igualdad que me falta:

$\subseteq$) Sea $u \in \text{Sop}(|f|(\sigma)) \subseteq V_L$, entonces:

$$0 < |f|(\sigma)(u) = \sum_{v \in f^{-1}[u]} \sigma(v) \quad \Longrightarrow \quad \exists v' \in f^{-1}[u] \text{ tal que } \sigma(v') > 0$$

porque todos los sumandos son no negativos. Esto implica que $v' = v_i \in \text{Sop}(\sigma) = \{v_0, \ldots, v_n\}$ para alguna i. Por lo tanto $f(v') = f(v_i) = u \in \{f(v_0), \ldots, f(v_n)\}$.

$\supseteq$) Considera $u \in \{f(v_0), \ldots, f(v_n)\}$. Entonces

$$|f|(\sigma)(u) = |f|(\sigma)(f(v_i)) = \sum_{v \in f^{-1}[f(v_i)]} \sigma(v) = \sigma(v_i) + \sum \sigma(v) > 0$$

porque $v_i \in f^{-1}[f(v_i)]$ y además $v_i \in \text{Sop}(\sigma)$ lo cual implica que $\sigma(v_i) > 0$. Por lo tanto

$$|f|(\sigma)(u) > 0 \quad \Longrightarrow \quad u \in \text{Sop}(|f|(\sigma)).$$

Con esto conluyo que $\text{Sop}(|f|(\sigma)) = \{f(v_0), \ldots, f(v_n)\}$ y acabo. $\square$

Ejercicio 54. La función inducida $|f| : |K| \to |L|$ es continua con respecto a la topología coherente.

Proof. $\square$

Ejercicio 55. $|\text{sd}(K)| \approx |K|$

Proof. $\square$

Ejercicio 56. Un morfismo $\varphi : \mathcal{C}_\bullet \to \mathcal{C}_\bullet$ induce un homomorfismo $H_n(\varphi) : H_n(\mathcal{C}_\bullet) \to H_n(\mathcal{C}'_\bullet)$.

Proof. Sea $n \in \mathbb{Z}$ y considera el morfismo de R-módulos $\varphi_n : \mathcal{C}_n \to \mathcal{C}'_n$ que da la definición de $\varphi : \mathcal{C}_\bullet \to \mathcal{C}'_\bullet$. También sea $x \in \ker \partial_n \subseteq C_n$. Como φ es un morfismo de cadenas, entonces:

$$0 = \varphi_{n-1}(0) = \varphi_{n-1}(\partial_n(x)) = \partial'_n(\varphi_n(x)) \quad \Longrightarrow \quad \varphi_n(x) \in \ker \partial'_n.$$

Esto implica que $\varphi_n|_{\ker \partial_n} : \ker \partial_n \to \ker \partial'_n$ está bien definida.

Ahora considera $[x], [x'] \in H_n(\mathcal{C}_\bullet)$ tales que $[x] = [x']$ o equivalentemente $x - x' \in \text{Im}\partial_{n+1}$. Entonces existe una $y \in C_{n+1}$ tal que $\partial_{n+1}(y) = x - x'$. Como φ es un morfismo de complejos de cadena, tenemos que

$$\varphi_n(x) - \varphi_n(x') = \varphi_n(x - x') = \varphi_n(\partial_{n+1} y) = \partial'_{n+1}(\varphi_{n+1}(y)) \quad \Longrightarrow \quad \varphi_n(x) - \varphi_n(x') \in \text{Im}\partial'_{n+1}.$$

Por lo tanto $[\varphi_n(x)] = [\varphi_n(x')]$ en $H_n(\mathcal{C}'_\bullet)$ y así la función:

$$H_n(\varphi) : H_n(\mathcal{C}_\bullet) \longrightarrow H_n(\mathcal{C}'_\bullet) \quad \text{definido por} \quad [x] \mapsto [\varphi_n(x)]$$

está bien definida. Como φ_n es un morfismo de R-módulos, entonces $H_n(\varphi)$ es un morfismo de R-módulos gracias a la regla de correspondencia de $H_n(\varphi)$. $\square$

Ejercicio 57. Sea K el complejo simplicial con vértices $V_K = \{v_0, v_1, v_2\}$ y $K = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_1, v_2\}\}$. Entonces

$$H_n(K; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0, 1 \\ 0 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Proof. $\square$

Ejercicio 58. $f_\#$ es un morfismo de complejos de cadenas.

Proof. Para cada $n \geq 0$ denoto por $(f_\#)_n : \mathcal{C}_n(K) \to \mathcal{C}_n(L)$ al morfismo de R-módulos que es la extensión de $(f_\#)_n : \{(v_0, \ldots, v_n) \mid \{v_0, \ldots, v_n\} \in K\} \to \{(u_0, \ldots, u_m) \mid \{u_0, \ldots, u_m\} \in L\}$ al R-módulo $\mathcal{C}_n(K)$. Para probar que $f_\#$ es un morfismo de cadenas, nada más hay que probar que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_n(K) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "(f_\#)_n"] & \mathcal{C}_{n-1}(K) \arrow[d, "(f_\#)_{n-1}"] \\
\mathcal{C}_n(L) \arrow[r, "\partial_n"'] & \mathcal{C}_{n-1}(L)
\end{tikzcd}$$

o equivalentemente $(f_\#)_{n-1} \circ \partial_n = \partial_n \circ (f_\#)_n$. Como en la prueba del ejercicio **??**, basta probar la conmutatividad del diagrama en los elementos de la base:

Sea $(v_0, \ldots, v_n) \in \mathcal{C}_n(K)$, entonces:

$$\begin{aligned}
(f_\#)_{n-1}(\partial_n(v_0, \ldots, v_n)) &= (f_\#)_{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_n)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(f_\#)_{n-1}(v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_n) \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(f(v_0), \ldots, \widehat{f(v_i)}, \ldots, f(v_n)) \\
&= \partial_n(f(v_0), \ldots, f(v_n)) \\
&= \partial_n((f_\#)_n(v_0, \ldots, v_n)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que $(f_\#)_{n-1} \circ \partial_n = \partial_n \circ (f_\#)_n$ y acabamos. □

Ejercicio 59. $K \cong L \implies H_n(K; R) \cong H_n(L; R)$

Proof. Supongamos que $K \cong L$ mediante el isomorfismo de complejos simpliciales $f : K \to L$. Por el ejercicio **??** $f_\# : \mathcal{C}_\bullet(K) \to \mathcal{C}_\bullet(L)$ es un morfismo de complejos complejos de cadena. De hecho $f_\#$ es un ismorfismo de complejos de cadenas porque $(f^{-1})_\#$ es su inverso, en efecto:

$$(f_\#)_n((f_\#^{-1})_n(v_0, \ldots, v_n)) = (f_\#)_n(f^{-1}(v_0), \ldots, f^{-1}(v_n)) = (f(f^{-1}(v_0)), \ldots, f(f^{-1}(v_n))) = (v_0, \ldots, v_n)$$

para toda $(v_0, \ldots, v_n)$ en la base de $\mathcal{C}_n(K)$. Sucede exactamente lo mismo para $(f_\#^{-1})_n \circ (f_\#)_n = \mathrm{Id}$. Por lo tanto $\mathcal{C}_\bullet(K) \cong \mathcal{C}_\bullet(L)$ como complejos de cadenas. Como la homología de un complejo de cadenas depende solamente de la clase de ismorfismo del complejo (cf. ejercicio **??**) entonces podemos concluir que $H_n(\mathcal{C}_\bullet(K); R) \cong H_n(\mathcal{C}_\bullet(L); R)$. Por último, la proposición **??** tenemos que:

$$H_n(C_\bullet(K)) \cong H_n(\mathcal{C}_\bullet(K)) \cong H_n(\mathcal{C}_\bullet(L)) \cong H_n(C_\bullet(L)).$$

□

Ejercicio 60. Para toda $j < i$ se cumple $F_n^i \circ F_{n-1}^j = F_n^j \circ F_{n-1}^i$.

Proof. □

Ejercicio 61. Para toda $n \geq 1$ se cumple $\partial_{n+1} \circ \partial_n$, en particular $\mathrm{Im}(\partial_{n+1}) \subseteq \ker \partial_n$.

Proof. □

Ejercicio 62. Sea $C_\bullet = \oplus_{\lambda \in \Lambda} C_\bullet^\lambda$ la suma directa de los complejos de cadena $C_\bullet$. Entonces la homología abre sumas:

$$H_n(C_\bullet; R) = H_n\left(\oplus C_n^\lambda; R\right) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(C_\bullet^\lambda; R)$$

Proof. Probaré que $H_n(C_\bullet; R)$ cumple la propiedad universal de la suma directa. Primero observa que para toda $n \in \mathbb{Z}$, la inclusión canónica $\imath_n^\mu : C_n^\mu \to \oplus_\lambda C_n^\lambda$ forma parte de un morfismo de cadenas $\imath^\mu : C_\bullet^\mu \to C_\bullet$. En efecto, el diagrama

$$\begin{tikzcd} C_n^\mu \arrow[r, "\partial_n^\mu"] \arrow[d, hook, "\imath_n^\mu"'] & C_{n-1}^\mu \arrow[d, hook, "\imath_{n-1}^\mu"] \\ \oplus_\lambda C_n^\lambda \arrow[r, "\oplus_\lambda \partial_n^\lambda"'] & \oplus_\lambda C_{n-1}^\lambda \end{tikzcd}$$

conmuta porque el morfismo $\oplus_\lambda \partial_n^\lambda$ es el dado por la propiedad universal de la suma directa; está inducido por la familia $\{\imath_{n-1}^\lambda \circ \partial_n^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ (esto ya lo argumenté antes de empezar el ejercicio).

Por el ejercicio **??** el morfismo $\imath^\mu : C_\bullet^\mu \to C_\bullet$ induce un morfismo

$$H_n(\imath^\mu) : H_n(C_\bullet^\mu; R) \longrightarrow H_n(C_\bullet; R) \quad \text{definido por} \quad H_n(\imath^\mu)[x] = [\imath_n^\mu(x)].$$

Por lo tanto $H_n(C_\bullet; R)$ viene equipado con la familia de morfismos $\{H_n(\imath^\lambda) : H_n(C_\bullet^\lambda; R) \to H_n(C_\bullet; R)\}_{\lambda\in\Lambda}$. Ahora falta probar que esta familia cumple la propiedad universal de la suma directa:

Sea M un R-módulo equipado con una familia de morfismos $\{f_\lambda : H_n(C_\bullet^\lambda; R) \to M\}_{\lambda\in\Lambda}$ Para cada $\lambda \in \Lambda$ defino el morfismo:

$$\begin{tikzcd} H_n(C_\bullet^\lambda) \arrow[rr, "f_\lambda"] \arrow[dr, "H_n(\imath^\lambda)"'] & & M \\ & H_n(C_\bullet; R) \arrow[ur, dashed, "\Phi"'] & \end{tikzcd} \tag{13}$$

de la siguiente manera: si $[x] \in H_n(C_\bullet; R)$ entonces

$$x = \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda \in ker(\oplus_\lambda \partial_n^\lambda) = \oplus \ker(\partial_n^\lambda) \subseteq \oplus_\lambda C_n^\lambda$$

donde las $x_\lambda \in \ker(\partial_n^\lambda) \subseteq C_n^\lambda$ y $x_\lambda \neq 0$ para solamente una cantidad finita de índices $\lambda \in \Lambda$. Por lo tanto $\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda[x_\lambda] \in M$ porque la suma es finita y porque $[x_\lambda] \in H_n(C_\bullet^\lambda; R)$. De esta manera podemos definir:

$$\Phi[x] = \Phi\left[\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda\right] := \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda[x_\lambda].$$

Claramente hace conmutar el diagrama (**??**) porque si $[x] \in H_n(C_\bullet^\lambda; R)$ entonces $x \in \ker(\partial_n^\lambda \subseteq C_n^\lambda)$ y así $\imath_n^\lambda(x) \in \oplus C_n^\lambda$ es la suma $\sum_{\mu\in\Lambda} x_\mu$ donde $x_\mu = 0$ para toda $\mu \neq \lambda$ y donde $x_\lambda = x$. Esto quiere decir que $\sum_{\mu\in\Lambda} f_\mu[x_\mu] = f_\lambda[x_\lambda] = f_\lambda[x]$ y así

$$\Phi\big[H_n(\imath^\lambda)[x]\big] = \Phi\left[\sum_{\mu\in\Lambda} x_\mu\right] = f_\lambda[x]$$

También es claro que es un morfismo de R-módulos porque está definido como la suma de morfismos de R-módulos:

$$\begin{aligned}\Phi[x] + \Phi[y] &= \Phi\left[\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda\right] + \Phi\left[\sum_{\lambda\in\Lambda} y_\lambda\right] = \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda[x_\lambda] + \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda[y_\lambda] = \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda[x_\lambda + y_\lambda] = \Phi\left[\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda + y\lambda\right] \\ &= \Phi\big([x] + [y]\big),\end{aligned}$$

porque $x_\lambda, y_\lambda, x_\lambda + y_\lambda \in \ker(\partial_n^\lambda)$ y f_λ es un morfismo de R-módulos. También:

$$\Phi(r[x]) = \Phi[rx] = \Phi\left[\sum_{\lambda\in\Lambda} rx_\lambda\right] = \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda[rx_\lambda] = \sum_{\lambda\in\Lambda} rf_\lambda[x_\lambda] = r\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda[x_\lambda] = r\Phi[x].$$

Lo único que hace falta probar es que Φ está bien definida. Sean $[x] = [x'] \in H_n(C_\bullet; R)$, es decir $x, x' \in \ker(\oplus_\lambda \partial_n^\lambda) = \oplus \ker(\partial_n^\lambda)$ y $x - x' \in$Im$(\oplus_\lambda \partial_{n+1}^\lambda = \oplus_\lambda$Im$\partial_{n+1}^\lambda$. Por lo tanto

$$x - x' = \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda - \sum_{\lambda\in\Lambda} x'_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda}(x_\lambda - x'_\lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \partial_{n+1}^\lambda(y_\lambda)$$

para algunas $y_\lambda \in C_{n+1}^\lambda$. Por lo tanto, para toda $\lambda \in \Lambda$, $x_\lambda - x'_\lambda = \partial_{n+1}^\lambda(y_\lambda)$ porque las representaciones en las sumas directas son únicas. En homología esto significa que $[x_\lambda] = [x'_\lambda]$ en $H_n(C_\bullet^\lambda; R)$ y así $f_\lambda[x_\lambda] = f_\lambda[x'_\lambda]$ para toda λ. Por lo tanto:

$$\Phi[x] = \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda[x_\lambda] = \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda[x'_\lambda] = \Phi[x']$$

y Φ está biend definida. □

Ejercicio 63. Ambas definiciones de la homología relativa son equivalentes.

Proof. Observa que $Z_n(X, A; R)$ es un submódulo de $S_n(X, R)$ porque si $\sigma, \tau \in Z_n(X, A; R)$ entonces

$$\begin{aligned} \partial_n(\sigma - \tau) = \partial_n(\sigma) - \partial_n(\tau) \in S_{n-1}(A; R) \quad &\implies \quad \sigma - \tau \in Z_n(X, A; R) \\ \partial_n(r\sigma) = r\partial_n(\sigma) \in S_{n-1}(A; R) \quad \forall r \in R \quad &\implies \quad r\sigma \in Z_n(X, A; R). \end{aligned}$$

Ahora defino $\Phi : Z_n(X, A; R) \to S_n(X; R)/S_n(A; R)$ como la restricción de la proyección $S_n(X; R) \twoheadrightarrow S_n(X; R)/S_n(A; R)$. Claramente es un morfismo de R-módulos.

Primero pruebo que Φ es sobre. Sea $[\sigma] \in S_n(X; R)/S_n(A; R)$ y tomo la clase lateral $\Sigma := \sigma + S_n(A; R) \subseteq S_n(X; R)$. Todo elemtento de $\sigma' \in \Sigma$ es de la forma $\sigma' = \sigma + \tau$ donde $\tau \in S_n(A; R)$. Entonces

$$\partial_n(\sigma') = \partial_n(\sigma + \tau) = \partial_n(\sigma) + \partial_n(\tau) \quad \implies \quad \partial_n(\sigma' - \sigma) \in S_n(A; R).$$

Ahora observa que $[\sigma] = [\sigma' - \sigma]$ porque □

Ejercicio 64. La función

$$\Phi : \bigsqcup_{\lambda\in\lambda} \{\sigma \in \mathcal{S}_n(X_\lambda) \mid \mathrm{Im}(\sigma) \nsubseteq A_\lambda\} \longrightarrow \{\sigma \in \mathcal{S}_n(X) \mid \mathrm{Im}(\sigma) \nsubseteq A\} \quad \text{definido por} \quad \sigma \mapsto \imath^\lambda \circ \tau$$

es una biyección.

Primero escribo:

$$M_\lambda := \{\sigma \in \mathcal{S}_n(X_\lambda) \mid \mathrm{Im}(\sigma) \nsubseteq A_\lambda\} \quad \text{y} \quad N := \{\sigma \in \mathcal{S}_n(X) \mid \mathrm{Im}(\sigma) \nsubseteq A\},$$

entonces $\Phi : \sqcup M_\lambda \to N$. Primero veo que está bien definida. Sea $\sigma \in \sqcup M_\lambda$, es decir $\sigma \in M_\lambda$ para alguna $\lambda \in \Lambda$. Entonces Im$(\sigma) \nsubseteq A_\lambda$, es decir existe un elemento $x \in$Im(σ) tal que $x \notin A_\lambda = X_\lambda \cap A$, ie. $x \in (X_\lambda)^c \cup A^c$. Hay dos casos:

Si $x \notin A$ entonces Im$(\sigma) \nsubseteq A$ y bajo la inclusión $\imath^\lambda : X_\lambda \to X$ tenemos que Im$(\Phi(\sigma))$ =Im$(\imath^\lambda \circ \sigma)$ =Im$(\sigma) \nsubseteq A$ lo cual implica que $\Phi(\sigma) \in N$.

El segundo caso: $x \not\in X_\lambda$ no puede suceder, porque $x \in$Im(σ) y $\sigma : \Delta^n \to X_\lambda$ tiene como contradominio a X_λ, ie. Im$(\sigma) \subseteq X_\lambda$. Por lo tanto nada más puede suceder el primer caso donde ya probamos que Φ está bien definida.

La prueba de que Φ es una biyección es exactamente análogo a la prueba de la proposición **??**:

1. (Φ es inyectiva) Sean $\sigma, \tau \in \sqcup_\lambda M_\lambda$. Si ambos están en el mismo uniendo, ie. $\sigma, \tau \in M_\lambda$ para alguna $\lambda \in \Lambda$, entonces
$$\Phi(\sigma) = \Phi(\tau) \quad \implies \quad \imath^\lambda \circ \sigma = \imath^\lambda \circ \tau \quad \implies \quad \sigma = \tau$$
porque $\imath^\lambda$ es cancelable por la izquierda (por ser inyectivo).
Ahora, supongamos queσ y τ están en uniendos distintos y $(\imath^\lambda \circ \sigma) = (\imath^\mu \circ \tau)$. Como Im$(\imath^\lambda \circ \sigma) \subseteq X_\lambda$ y Im$(\imath^\mu \circ \tau) \subseteq X_\mu$ tenemos que
$$\mathrm{Im}(\imath^\lambda \circ \sigma) \subseteq X_\lambda \cap X_\mu = \emptyset!$$
lo cual es una contradicción. Por lo tanto sólo puede suceder el primer caso donde ya probamos que se cumple la inyectividad.

2. (Φ es sobreyectiva) Sea $\sigma \in N$. Como σ es continua y Δ^n es conectable por trayectorias, entonces $\sigma[\Delta^n]$ =Im(σ) es conectable por trayectorias. Por lo tanto existe una $\lambda \in \Lambda$ tal que $\mathrm{Im}(\sigma) \subseteq X_\lambda$ y σ se factoriza a través de la inclusión $\imath^\lambda$, ie. $\sigma = \imath^\lambda \circ \sigma'$ donde σ' es la corestricción de σ al contradominio X_λ. Así $\Phi(\sigma') = \imath^\lambda \circ \sigma' = \sigma$ y f es sobre.

Ejercicio 65. La sucesión larga de homologías (**??**) es exacta en $H_{n-1}(A)$.

Proof. Para la primera contención, sea $[\sigma] \in H_n(X, A)$, en particular $\partial_n(\sigma) \in S_{n-1}(A)$. Entonces

$$H_{n-1}(\imath)\big(d_n[\sigma]\big) = H_{n-1}(\imath)[\partial_n(\sigma)] = [\imath_\#(\partial_n(\sigma))] = [(\imath \circ \partial_n)(\sigma))] = [\partial_n(\sigma)] = 0.$$

Por lo tanto $\mathrm{Im}\,(d_n) \subseteq \ker(H_{n-1}(\imath))$.

Para la otra contención, considera $[\sigma] \in \ker(H_{n-1}(\imath))$, ie. $H_{n-1}(\imath)[\sigma] = [\imath_\#(\sigma)] = [\imath \circ \sigma] = [0]$. Esto implica que $\imath \circ \sigma \in B_{n-1}(X)$, es decir que existe un $\tau \in S_n(X)$ tal que $\partial_n(\tau) = \imath_\#(\sigma)$. Como $j_\#$ es un morfismo de complejos de cadena, entonces:

$$\partial_n(j_\#(\tau)) = j_\#(\partial_n(\tau)) = j_\#(i_\#(\sigma)) = \bar{0} \in \frac{S_n(X)}{S_n(A)}$$

gracias a la exactitud de la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow S_{n-1}(A) \xrightarrow{\imath_\#} S_{n-1}(X) \xrightarrow{j_\#} \frac{S_{n-1}(X)}{S_{n-1}(A)} = S_{n-1}(X, A) \longrightarrow 0$$

y a que $\sigma \in Z_{n-1}(A) \subseteq S_{n-1}(A)$. Por lo tanto $j_\#(\tau) \in Z_n(X, A)$ y así:

$$d_n[j_\#\tau] = [\partial_n(j^\#(\tau))] = [j^\#()]$$

□

Ejercicio 66. El teorema de la invariancia de la homología singular también se cumple para la homología relativa, es decir si $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ son funciones continuas tales que $f \simeq g$ relativo a A, entonces $H_n(f) = H_n(g)$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Proof. □

Ejercicio 67. Sea $\mathcal{A}$ una categoría y $A, A' \in \mathrm{obj}\,(\mathcal{A})$. Si $f \in \mathrm{Hom}\,(A, A')$ es un isomorfismo, entonces $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(A')$ es un isomorfismo.

Proof. Por hipótesis $f : A \to A'$ es un isomorfismo, entonces existe un morfismo $g \in \mathrm{Hom}\,(A', A)$ tal que $gf = \mathrm{Id}_A$ y $fg = \mathrm{Id}_{A'}$. Aplicamos el funtor $\mathcal{F}$ a estas igualdades para obtener

$$\mathcal{F}(g)\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(gf) = \mathcal{F}(\mathrm{Id}_A) = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(A)} \quad \text{y} \quad \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(\mathrm{Id}_{A'}) = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(A')}$$

Por lo tanto existe un $\mathcal{F}(g) \in \mathrm{Hom}\,(()\,\mathcal{F}(A'), \mathcal{F}(A))$ tal que $\mathcal{F}(g)\mathcal{F}(f) = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(A)}$ y $\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g) = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(A')}$. Por lo tanto $\mathcal{F}(f)$ es un isomorfismo. □

Ejercicio 68. Los isomorfismos de h**Top** son las clases de homotopía de equivalencias homotópicas.

Proof. Sean $X, Y \in \mathrm{obj}\,(h\mathbf{Top}) = \mathrm{obj}\,(\mathbf{Top})$. Un morfismo $[f] \in \mathrm{Hom}\,(X, Y) = [X, Y]$ es un isomorfismo si y sólo si existe un $[g] \in [Y, X]$ tal que $[g][f] = [g \circ f] = [\mathrm{Id}_X]$ y $[f][g] = [g \circ f] = [\mathrm{Id}_Y]$, o equivalentemente $g \circ f \simeq \mathrm{Id}_X$ y $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_Y$. Por lo tanto $[f]$ es un isomorfismo si y sólo f es una equivalencia homotópica. □

Ejercicio 69. La transformación natural $\mathfrak{T} : \mathcal{I} \to \mathcal{F}$, definido por $\mathfrak{T} = \{T_V : V \to (V^*)^*\}_V$ donde $T_V(v)(\alpha) = \alpha(v)$ es una equivalencia natural.

Proof. Primero probamos que cada T_V es una transformación lineal. Sean $v, v' \in V$ y $\lambda \in k$, entonces:

$$T_V(\lambda v + v')(\alpha) = \alpha(\lambda v + v') = \lambda\alpha(v) + \alpha(v') = \lambda T_V(v) + T_V(v')$$

porque $\alpha \in \mathrm{Hom}\,(V^*, k)$ es una transformación lineal. Así, T_V es una transformación lineal.

Ahora probamos que $\mathfrak{T} : \mathcal{I} \to \mathcal{F}$ es una transformación natural, es decir que para todas V y W k-espacios vectoriales de dimensión finita y para toda transformación lineal $f : V \to W$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T_V"] \arrow[d, "f"'] & (V^*)^* \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"] \\ W \arrow[r, "T_W"] & (W^*)^* \end{tikzcd} \tag{14}$$

Sea $v \in V$ y evaluamos el elemento $T_W(f(v)) \in (W^*)^* = \operatorname{Hom}(W^*, k)$ en un elemento $\beta : W \to k$ de $W^* = \operatorname{Hom}(W, k)$:

$$T_W(f(v))(\beta) \overset{\text{def}}{=} \beta(f(v)) = (\beta \circ f)(v),$$

mientras que

$$\mathcal{F}(f)\big(T_V(v)\big)(\beta) \overset{\text{def}}{=} T_V(v)(\beta \circ f) \overset{\text{def}}{=} (\beta \circ f)(v).$$

Por lo tanto $T_W(f(v)) = \mathcal{F}(f)(T_V(v))$ y el diagrama **??** conmuta.

Para probar que $\mathfrak{T}$ es una equivalencia natural, hay que probar que cada T_V es un isomorfismo. Primero pruebo que T_V es un monomorfismo:

$$T_V(v) = 0 \quad \iff \quad T_V(v)(\alpha) = \alpha(v) = 0 \forall \alpha \in V^*.$$

En particular si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V y $e_j : V \to k$ son las funcionales lineales asociadas a la base, ie. $e_i(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_i$, tenemos que $e_i(v) = 0$ para toda i y así $v = 0v_1 + \cdots + 0v_n = 0$. Como claramente $v = 0 \implies \alpha(v) = 0$ para toda $\alpha \in V^*$, tenemos que $T_V(v) = 0$ si y sólo si $v = 0$, es decir, T_V es inyectivo para toda v.

Como $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de V^*, la transformación lineal $v_1 \mapsto v_n$ es un isomorfismo, es decir $V \cong V^*$. Por lo tanto $\dim(V) = \dim(V^*) = \dim(V^{**})$ y como V es de dimensión finita, el monomorfismo T_V necesariamente es un isomorfismo y acabamos. $\square$

Ejercicio 70. Sea $\varphi : \mathcal{C}_\bullet \to \mathcal{C}'_\bullet$ un morfismo de complejos de cadena. Si φ es una *equivalencia homotópica de cadenas* (es decir que existe un morfismo de complejos $\psi : \mathcal{C}'_\bullet \to \mathcal{C}_\bullet$ tal que $\psi \circ \varphi \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_\bullet}$ y $\varphi \circ \psi \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{C}'_\bullet}$), entonces $H_n(\varphi) : H_n(\mathcal{C}_\bullet) \to H_n(\mathcal{C}'_\bullet)$ es un isomorfismo de R-módulos.

Proof. Por el ejercicio **??**, cada morfismo de complejos de cadena induce un morfismo en homologías, es decir $\mathcal{C}_\bullet \mapsto H_n(\mathcal{C}_\bullet)$ es un funtor. Supongamos que el teorema de la invariancia de la homología singular (cf. teorema **??**) se vale en general (ie. si $f \simeq g$ como morfismos de complejos de cadena entonces $H_n(f) = H_n(g)$). Entonces, como $H_n(\_)$ es funtor, tendríamos que la hipótesis de que $\varphi \circ \psi \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{C}'_\bullet}$ y que $\psi \circ \varphi \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_\bullet}$, implica lo que queremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Id}_{H_n(\mathcal{C}_\bullet)} = H_n(\mathrm{Id}_{\mathcal{C}_\bullet}) = H_n(\psi \circ \varphi) = H_n(\psi) \circ H_n(\varphi) \\ \mathrm{Id}_{H_n(\mathcal{C}'_\bullet)} = H_n(\mathrm{Id}_{\mathcal{C}'_\bullet}) = H_n(\varphi \circ \psi) = H_n(\varphi) \circ H_n(\psi) \end{array} \right\} \implies \quad H_n(\varphi) \text{ es un isomorfismo.}$$

Por lo tanto el ejercicio se reduce a probar lo siguiente:

Si $\varphi : \mathcal{C}_\bullet \to \mathcal{C}'_\bullet$ y $\psi : \mathcal{C}'_\bullet \to \mathcal{C}_\bullet$ son morfismos de complejos de cadenas, entonces:

$$\varphi \simeq \psi \quad \implies \quad H_n(\varphi) = H_n(\psi) \tag{15}$$

Empezamos:

Si $\varphi \simeq \psi$, existe una familia $\mathfrak{T} = \{T_n : C_n \to C'_{n+1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de morfismos tales que cumple $\varphi_n - \psi_n = \partial'_{n+1} T_n + T_{n-1} \partial_n$, donde $\varphi = (\varphi_n)$. Por lo tanto si $[z] \in H_n(\mathcal{C}_\bullet)$ es arbitrario, donde $z \in Z_n(\mathcal{C}_\bullet) = \ker(\partial_n)$, entonces:

$$\begin{aligned} H_n(\varphi)[z] - H_n(\psi)[z] &= [\varphi_n(z)] - [\psi_n(z)] = [\varphi_n(z) - \psi_n(z)] = [\partial'_{n+1}(T_n(z)) + T_{n-1}(\partial_n(z))] \\ &= \cancelto{0}{[\partial'_{n+1}(T_n(z))]} + [T_{n-1}(\partial_n(z))] = 0 \end{aligned}$$

porque $\partial_n(z) = 0$ y T_{n-1} es un morfismo de R-módulos. $\square$

Ejercicio 71. $\mathrm{sd}_n^{\_}$ es una transformación natural del funtor $S_n(\_) : \mathbf{Top} \to {}_R\mathbf{Mod}$ en si mismo.

Proof. Hay que probar que el diagrama

$$\begin{tikzcd} S_n(X) \arrow[r, "\mathrm{sd}_n^X"] \arrow[d, "f_\#"] & S_n(X) \arrow[d, "f_\#"'] \\ S_n(Y) \arrow[r, "\mathrm{sd}_n^Y"] & S_n(Y) \end{tikzcd}$$

conmutata para cualesquiera dos espacios X y Y, y cualquier función continua $f : X \to Y$ entre ellos.

Sea $\tau = \sum_\sigma r_\sigma \sigma \in S_n(X)$, entonces:

$$\begin{aligned} f_\#(\mathrm{sd}_n^X(\tau)) &= f_\#\left(\mathrm{sd}_n^X\left(\sum r_\sigma \sigma\right)\right) = f_\#\left(\sum r_\sigma \mathrm{sd}_n^X(\sigma)\right) = \sum r_\sigma f_\#\big(\sigma_\#(\mathrm{sd}_n^{\Delta^n}(\mathrm{Id}_{\Delta^n}))\big) \\ &= \sum r_\sigma (f\circ\sigma)_\#(\mathrm{sd}_n^{\Delta^n}(\mathrm{Id}_{\Delta^n})). \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \mathrm{sd}_n^Y(f_\#(\tau)) &= \mathrm{sd}_n^Y\left(f_\#\left(\sum r_\sigma\sigma\right)\right) = \mathrm{sd}_n^Y\left(\sum r_\sigma f_\#(\sigma)\right) = \sum r_\sigma \mathrm{sd}_n^Y(f\circ\sigma) \\ &= \sum r_\sigma (f\circ\sigma)_\#(\mathrm{sd}_n^{\Delta^n}(\mathrm{Id}_{\Delta^n})). \end{aligned}$$

y así $f_\#(\mathrm{sd}_n^X(\tau)) = \mathrm{sd}_n^Y(f_\#(\tau))$ para toda τ. Por lo tanto, $\mathrm{sd}_n^{\_} : S_n(\_) \to S_n(\_)$ es una transformación natural. ☐

Ejercicio 72. La función $t_\bullet : S_\bullet(X) \to S_{bullet}^{\mathfrak{U}}(X)$ definido por

$$t_n : S_n(X) \longrightarrow S_n^{\mathfrak{U}}(X) \quad \text{con} \quad \sigma \mapsto (\mathrm{sd}_n^X)^{\mathrm{r}(\sigma)}(\sigma)$$

no es una morfismo de complejos de cadena.

Proof. Sea $f : X \to Y$ una función continua arbitraria. Si $t_\bullet$ fuese un morfismo de complejos de cadena, entonces tendríamos que ☐

Ejercicio 73. El morfismo $t_\bullet : S_\bullet(X) \to S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X)$ pasa al cociente:

$$\overline{t_\bullet} : \frac{S_\bullet(X)}{S_\bullet(A)} \longrightarrow \frac{S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X)}{S_\bullet(A)}$$

y es una equivalencia homotópica de complejos de cadena, más precisamente $\bar{\imath}\circ\overline{t_\bullet} \simeq \mathrm{Id} \simeq \overline{t_\bullet}\circ\bar{\imath}$.

Proof. Como $t_\bullet|_{S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X)} = \mathrm{Id}$ y $S_\bullet(A) \subseteq S_\bullet(X-U) + S_\bullet = S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X)$, entonces

$$t_\bullet[S_\bullet(A)] = S_\bullet(A)$$

y así $t_\bullet$ pasa al cociente, es decir existe un único $\overline{t_\bullet}$ tal que:

$$\begin{tikzcd} S_\bullet(X) \arrow[r, "t_\bullet"] \arrow[d, two heads] & S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X) \arrow[r, two heads] & \frac{S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X)}{S_\bullet(A)} \\ \frac{S_\bullet(X)}{S_\bullet(A)} \arrow[urr, dashed, "\overline{t_\bullet}"'] & & \end{tikzcd}$$

Como

$$t_\bullet|_{S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X)} = \mathrm{Id} \quad\Longrightarrow\quad \imath\circ t_\bullet = \mathrm{Id} \quad\Longrightarrow\quad \bar{\imath}\circ\overline{t_\bullet} = \mathrm{Id}$$

y así tenemos trivialmente que $\mathrm{Id} \simeq \bar{\imath}\circ\overline{t_\bullet}$. Para probar el inverso, hay que dar una homotopía de complejos de cadena entre $\overline{t_\bullet}$ y $\bar{\imath}$; esta homotopía va a ser la inducida por $\bar{\mathfrak{R}} = \{\overline{R_n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ donde $\mathfrak{R} = \{R_n\}$ es la hommotopía $t_\bullet \simeq \mathrm{Id}$.

De hecho, si probamos que las $R_n : S_n(X) \to S_n(X)$ pasan al cociente entonces:

$$\begin{aligned}(\overline{R_{n-1}}\partial_n + \partial_{n+1}\overline{R_n})[\sigma] &= \overline{R_{n-1}}[\partial_n(\sigma)] + \partial_{n+1}[R_n(\sigma)] = [R_{n-1}(\partial_n(\sigma))] + [\partial_{n+1}R_n(\sigma)] \\ &= [\sigma - t_n(\sigma)] = [\sigma] - [t_n(\sigma)] = \mathrm{Id}(\sigma) - \overline{t_n}(\sigma) \\ \therefore \mathrm{Id} \simeq \mathrm{Id} \circ \overline{t_\bullet}\end{aligned}$$

porque $t_n(\sigma) = \sigma + \partial_{n+1}R_n(\sigma) + R_{n-1}\partial_n(\sigma)$ por definición. □

Ejercicio 74. Las tres definiciones de homología reducida son equivalentes.

Proof. El teorema **??** dice que existe una sucesión exacta larga:

$$\cdots \longrightarrow H_n(\{x\}) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X, \{x\}) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(\{x\}) \longrightarrow H_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots.$$

Pero ya hemos calculado la homología de un punto (cf. proposición **??**), entonces la sucesión exacta larga se reduce a:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X, \{x\}) \xrightarrow{d_n} 0 \longrightarrow \cdots$$

y para $n = 0, 1$ la sucesión exacta larga termina en

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow H_1(X) \longrightarrow H_1(X, \{x\}) \xrightarrow{d_1} R \longrightarrow H_0(X) \longrightarrow H_0(X, \{x\}) \longrightarrow 0.$$

Para $n > 1$ podemos concluir que $H_n(X) \cong H_n(X, \{x\})$ □

Ejercicio 75.

Proof. □

Ejercicio 76. r es continua.

Proof. Simplemente parametrizamos a r. Veo todo encajado en $\mathbb{R}^n$, entonces puedo escribir $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Parametrizo el rayo $\mathcal{L}_x = \{x+t(f(x)-x) \mid t \geq 0\}$ como $\mathcal{L}_x(t) = x+t(f(x)-x)$, entonces la intersección del rayo con $\partial\mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1}$ es el conjunto de puntos del rayo que son unitarios, por lo tanto $\mathcal{L}_x(t) = x + t(f(x) - x)$ está en la intersección si y sólo si

$$\begin{aligned}1 &= \|\mathcal{L}_x(t)\|^2 = \langle x + t(f(x) - x), x + t(f(x) - x)\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + 2t\langle x, f(x) - x\rangle + t^2\langle f(x) - x, f(x) - x\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2t\big(\langle x, f(x)\rangle - \|x\|^2\big) + t^2\|f(x) - x\|^2 \\ \therefore 0 &= \underbrace{\big(\|x\|^2 - 1\big)}_{c} + \underbrace{\big(2\langle x, f(x)\rangle - 2\|x\|^2\big)}_{b}t + \underbrace{\|f(x) - x\|^2}_{a}t^2.\end{aligned}$$

Es decir t satisface un polinomio de grado 2. Observa que los coeficientes son funciones continuas de x ya que tomar normas es continuo y porque el producto interior $\langle x, f(x)\rangle = x_1f_1(x) + \cdots + x_nf_n(x)$ es una combinación lineal de funciones continuas (ie. las componentes f_i de f que es continua). Por lo tanto $a = a(x)$, $b = b(x)$ y $c = c(x)$ son funciones continuas.

Observa que el discriminante del polinomio $p(t) := c(x) + b(x)t + a(x)t^2$ es positivo porque $a > 0$ por hipótesis (ie. f no tiene puntos fijos), y porque $x \in \mathbb{D}^n$ implica que $\|x\|^2 - 1 \leq 0$; estas dos cosas juntas nos garantizan que $b^2 - 4ac > 0$. Por lo tanto el polinomio $p(t)$ tiene dos raices reales. Un de ellas es

$$t_x := \frac{-b(x) + \sqrt{b(x)^2 - 4a(x)c(x)}}{2a(x)}$$

La otra raíz es necesariamente negativa porque el numerador tendría dos restas. Observa que, como función de x, t_x es continua porque es la composición de funciones continuas y porque $a(x) \neq 0$ y porque $b(x)^2 - 4a(x)c(x) \geq 0$ para toda x. Por lo tanto la función $s : \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definido por $x \mapsto t_x$ es continua.

Por contrucción sabemos que $\mathcal{L}_x(t_x) \in \mathbb{S}^{n-1}$. Por lo tanto $r(x) = \mathcal{L}_x(t_x)$ donde $\mathcal{L}_x(t)$ es una función continua (es lineal) y donde t_x es continua por construcción. Con esto concluimos que r es continua. □

Ejercicio 77. La inclusión $\imath : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ es un retracto por deformación.

Proof. La función $r : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{S}^{n-1}$, definida por $x \mapsto x/\|x\|$ es claramente continua y cumple que $r(\imath(x)) = x$ porque $\|\imath(x)\| = 1$. Por lo tanto $r \circ \imath = \mathrm{Id}$.

Por otro lado, $H : (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times I \to \mathbb{R}^n - \{0\}$ definido por

$$H(x,t) = \frac{x}{1-t+t\|x\|} \quad \text{con} \quad H(x,0) = x \ , \ H(x,1) = \frac{x}{\|x\|} = \imath\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \imath r(x)$$

Observa que

$$1 - t + t\|x\| = 0 \qquad \iff \qquad t = \frac{1}{1-\|x\|} > 1,$$

entonces H está bien definida y es continua. Por lo tanto $\imath \circ r \simeq_H \mathrm{Id}$. □

Ejercicio 78. La acción $\mathrm{SO}(n) \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ definido por $(A,x) \mapsto Ax$ es transitiva.

Proof. Sea $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Por el proceso de ortogonalización de Graham-Schmidt existe una base ortonormal $\{x, x_2, \ldots, x_n\}$ de $\mathbb{R}^n$. Define A_x como la matriz con los vectores $x, x_2, \ldots, x_n$ como columnas. Como la base es ortonormal $A_x \in \mathrm{SO}(n)$ para toda x. Entonces $A_x e_1 = x$ donde $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ y así $e_1 = A_x^{-1} x$ donde $A_x^{-1} \in \mathrm{SO}(n)$. Por lo tanto $e_1 \in \mathcal{O}(x)$ para toda x, ie. $e_1 \in \cap_x \mathcal{O}(x)$. Como órbitas distintas son disjuntas, esto quiere decir que solamente hay una órbita. Por lo tanto la acción es transitiva. □

Ejercicio 79. Sea $n = 2m+1$ impar y define $v : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ como

$$v(x_0, x_1, \ldots, x_{2m+1}) = (-x_1, x_0, -x_3, x_2, -x_5, x_4, \ldots, -x_{2m+1}, x_{2m}).$$

Prueba que el campo V no se anula y es tangente a la esfera.

Proof. Observa que

$$\|v(x)\|^2 = \sum_{i \text{ par}} x_i^2 + \sum_{i \text{ impar}} (-x_i)^2 = \sum_{i=0}^{2m+1} x_i^2 = \|x\|^2.$$

Por lo tanto

$$v(x) = 0 \qquad \iff \qquad 0 = \|v(x)\| = \|x\| \qquad \iff \qquad x = 0,$$

pero esto no sucede para $x \in \mathbb{S}^{2m+1}$. Por lo tanto $v : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ no se anula.

Por último hay que verificar que $v(x) \in T_x\mathbb{S}^n = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, y \rangle = 0\}$. Si divides los sumandos de $\langle x, v(x) \rangle$ en grupos de dos es fácil calcular la suma:

$$\langle x, v(x) \rangle = \sum_{i=0}^{m} \big(x_{2i}(-x_{2i+1}) + x_{2i+1}x_{2i}\big) = 0.$$

□

Ejercicio 80. Sean $A \subseteq X$ un cerrado, $f : A \to Y$ una función contnua y $p : X \sqcup U \twoheadrightarrow X \cup_f Y$ la identificación canónica. Entonces $p|_{X-A}$ es un encaje abierto y $p|_Y$ es un encaje cerrado.

Proof.

($p|_{X-A}$ es abierta) Primero observa que si $x \in X - A \subseteq X \sqcup Y$, entonces $[x] \in X \cup_f Y$ tiene solamente un representante porque $x \notin A$ ni $x \notin Y$. Por lo tanto para el conjunto $\mathrm{Im}\,(p|_{X-A}) = \{[x] \mid x \in X - A\}$, se cumple que $x = x' \iff [x] = [x']$, es decir que p es biyectiva. Por lo tanto si $U \subseteq X - A$ es un abierto, entonces $p[U]$ es abierto si y sólo si $p^{-1}[p[U]] = U$ es abierto. Con esto conluyo que $p|_{X-A}$ es una función abierta.

($p|_{X-A}$ es encaje) Si definimos $q : \mathrm{Im}\,(p|_{X-A}) \to X - A$ como $[x] \mapsto x$, entonces claramente es un inverso de $p|_{X-A}$ y es continua porque si $U \subseteq X - A$ es un abierto, entonces $q^{-1}[U] = \{[x] \in \mathrm{Im}\,(p|_{X-A}) \mid x \in u\}$ es abierto porque p es una identificación. Por lo tanto $p|_{X-A}$ es un homeomorfismo sobre su imagen, ie. un encaje.

($p|_Y$ es cerrada) Sea $C \subseteq Y$ un cerrado y consideremos $[t] \in X \cup_f Y$ un punto de acumulación de $p[C]$. En particular hay una sucesión $\{[c_n]\}_n$, donde $c_n \in C$, que converge a $[t]$. Primero observa que $t \notin X - A$ porque de lo contrario habría una vecindad abierta $V \subsetneq X - A$ de t que bajo p es un abierto (pues $p|_{X-A}$ es un encaje abierto), es decir $p[V]$ es una vecindad abierta de $[t]$ pero $p[C] \cap p[V] \subseteq p[C \cap V] = \emptyset$. Esto implica que $\{[c_n]\}$ no puede converger a t! Por lo tanto hemos reducido el problema a considerar dos casos:

(a) Supongamos que $t \in Y$ y sea $U \subseteq Y$ una vecindad de t. Definimos $V :=$
Entonces $X \sqcup U \subseteq X \sqcup Y$ es un abierto, pero como

$$p^{-1}[p[X \sqcup U]] = \{z \in X \sqcup Y \mid [z] = [z'] \text{ para alguna } z' \in X \sqcup U\} = X \sqcup U.$$

podemos concluir que $p[X \sqcup U]$ es una vecindad abierta de $X \cup_f Y$. Como contiene a $[t]$ existe un elemento de la sucesión $[c_n] \in p[X \sqcup U]$, pero esto significa que existe un $z \in X \sqcup U$ tal que $[c_n] = [z]$. Si $z \in U$ entonces $z = c_n \in U$ a así $\{c_n\} \to t$. Si $z \in X$ entonces $[c_n] = [z] = [f(t)]$ ie. $c_n \in U$. Como C es cerrado concluimos que $t \in C$ y así $[t] \in p[C]$.

(b) Si $t \in A$ tenemos que $[t] = [f(t)]$ y el caso anterior nos dice que $[f(t)] \in p[C]$.

($p|_Y$ es encaje) Sabemos que

$$\operatorname{Im}(p|_Y) = \{[z] \in X \cup_f Y \mid [z] = [y] \text{ para alguna } y \in Y\}$$

es decir es el conjunto de clases de elementos relacionados a un elemento de Y. Estos pueden estar en Y o en A Define $q : \operatorname{Im}(p|_Y) \to X \sqcup Y$ definido por

$$q[z] = \begin{cases} z & \text{si } z \in Y \\ f(z) & \text{si } z \in A \end{cases}$$

Primero observa que es el inverso de $p|_Y$ porque

$$p|_Y(q[z]) = \begin{cases} p|_Y(z) = [z] & \text{si } z \in Y \\ p|_Y(f(z)) = [f(z)] = [z] & \text{si } z \in A \end{cases}$$

y porque $q(p|_Y(y)) = q[y] = y$. Está bien definida porque si $[z] = [z'] \in \operatorname{Im}(p|_Y)$ existen $y, y' \in Y$ tales que $[y] = [z] = [z'] = [y']$, pero dos elementos y y y' en un mismo sumando de $X \sqcup Y$ no pueden estar relacionados si son distintos. Por lo tanto $y = y'$. Hay dos casos: si $z \in Y$ entonces $y = z$, si $z \in A$ entonces $f(z) \in Y$ y $[f(z)] = [z] = [y]$ implica que $f(z) = y$. Por lo tanto q, que es esencialmente el mapeo $[z] \mapsto y$, está bien definida.

q es continua porque si $U \subseteq Y$ es un abierto, entonces

$$q^{-1}[U] = \{[z] \in X \cup_f Y \mid q[z] \in U\} = p[U] \cup p[f^{-1}[U]]$$

$\square$