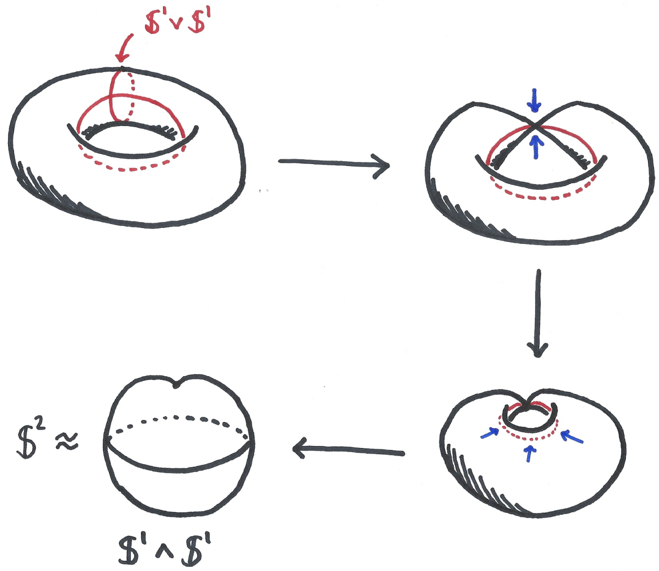

Figure 1: Construcción de $\mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^1$.

0.1 Producto "smash"

Las dos secciones anteriores me obligan a desarrollar una manera de calcular la suspensión reducida porque el lado izquierdo del ejercicio **??** se parece mucho a la definición **??**; quiero una manera de encontrar una relación

$$\Big[(\mathcal{S}X, \star), (Y, y_0)\Big] \rightsquigarrow \Big[(\mathbb{S}^n, 1), (Y, y_0)\Big] = \pi_n(Y, y_0)$$

Resulta que la suspensión se puede caracterizar mediante otra construcción topológica: el producto smash:

Definición 1. Sean (X, x_0) y (Y, y_0) espacios basados, entonces su *smash product* se define como el espacio cociente $X \times Y$ identificando $X \vee Y$ a un punto:

$$X \wedge Y := (X \times Y)/_{X \vee Y}.$$

Nota. Recuerda que la discusión que motiva el ejercicio **??** nos garantiza que $X \vee Y$ es homeomorfo al subespacio $(X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y)$ de $X \times Y$ y así el smash product está bien definido. Como consecuanecia de esto, puedo reescribir el smash product como:

$$X \wedge Y := (X \times Y)/_{(X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y)}.$$

La figura 1 ilustra el proceso de identificación para obtener el smash product de dos círculos.

La relación entre la suspensión reducida y el smash product es evidente con el siguiente resultado:

Ejercicio 1. Para cualquier espacio basado (X, x_0) se tiene que

$$\mathcal{S}X \approx X \wedge \mathbb{S}^1$$

Proof. Usaré $I/\partial I$ en lugar de $\mathbb{S}^1$, pero resumo la notación a $J := I/\partial I$. Denoto $\nu : I \to J$ como la función identificación; también tomo a $[0] = [1] \in J$ como el punto base. Considero la función:

$$\iota : X \times I \longrightarrow X \wedge J \quad \text{con} \quad \iota(x, t) = [x, [t]]$$

donde $[t] \in J$ y $[x,[t]]$ es la clase del punto $(x,[t]) \in X \times J$. Claramente es continua porque es la composición de las siguientes funciones continuas

$$\begin{array}{ccccc} X \times I & \xrightarrow{\mathrm{Id}_X \times \nu} & X \times J & \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} & X \wedge J \\ \\ (x,t) & \longmapsto & (x,[t]) & \longmapsto & [x,[t]] \end{array}$$

donde $\pi : X \times J \to X \wedge J$ es la proyección natural. Observa también, que como ν y π son sobreyectivas, ι es sobreyectiva.

Si denoto por $\star$ al punto base canónico de $X \wedge J$, claramente se cumple que

$$\iota(x,0) = [x,[0]] = \star = [x,[1]] = \iota(x,1)$$

para toda $x \in X$ porque $(x,[0]),(x,[1]) \in X \vee J = (X \times \{\star\}) \cup (\{x_0\} \times J) \subset X \times J$ que es el conjunto que se identifica a un punto al contruir $X \wedge J$. Además tengo que

$$(x_0,[t]) \in X \vee J \quad \Longrightarrow \quad \iota(x_0,t) = [x_0,[t]] = \star \quad \forall t \in I.$$

Todo esto junto implica que ι es constante sobre el conjunto $(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (\{x_0\} \times I)$ y así se factoriza a través de la suspensión reducida:

$$\begin{tikzcd} X \times I \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, two heads, "\nu"'] & X \wedge J \\ \mathcal{S}X \arrow[ur, dashed, "\bar{\iota}"'] & \end{tikzcd}$$

Si pruebo que ι es una identificación, entonces podré concluir que $\bar{\iota}$ es un homeomorfismo. Como ι es sobreyectiva, basta probar que es una función abierta:

Sea $U \subseteq X \times I$ abierto. Entonces existen abiertos $V_1 \subseteq X$ y $V_2 \subseteq I$ tales que $U = V_1 \times V_2$.

$\square$

La siguiente proposición nos permite calcular la suspensión reducida de cualquier esfera:

Proposición 1.

$$\mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^n \approx \mathbb{S}^{n+1} \quad \forall n \geq 0$$

Proof. Encajo $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ como el conjunto de vectores unitarios y defino los hemisferios:

$$\mathbb{S}^{n+1}_{\pm} := \{(x_1,\ldots,x_{n+2}) \in \mathbb{S}^{n+1} \mid \pm x_{n+2} > 0\}.$$

También encajo $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ como

$$\mathbb{S}^n := \{(x_1,\ldots,x_{n+2}) \in \mathbb{S}^{n+1} \mid x_{n+2} = 0\},$$

en particular $\mathbb{S}^{n+1} = \mathbb{S}^{n+1}_+ \cup \mathbb{S}^{n+1}_- \cup \mathbb{S}^n$. Por último encajo el disco unitario $\mathbb{D}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ como

$$\mathbb{D}^{n+1} := \{(x_1,\ldots,x_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \Sigma x_i^2 \leq 1 \text{ y } x_{n+2} = 0\}.$$

Ahora defino dos funciones ρ_+ y ρ_- como $\rho_\pm : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^{n+1}_\pm$ con regla de correspondencia:

$$\rho_\pm(x_1,\ldots,x_{n+1},0) = \left(x_1,\ldots,x_{n+1}, \pm\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2}\right).$$

Cada $\rho_\pm$ es continua porque $\sum x_i^2 \leq 1$ y así son composición de funciones continuas. Además, son hoemoemorfismos porque ambas tienen el mismo inverso continuo: la proyección $\mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^{n+1}$ que iguala la última coordenada a 0 (estas $\rho's$ se parecen mucho a las cartas de la esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ que la dotan de una estructura diferenciable, la única diferencia es que las cartas tienen como dominio el disco abierto y como imagen al interior de los hemisferios).

Sea $s_0 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ el punto base de $\mathbb{S}^n$ y $\mathbb{S}^{n+1}$. Con esto defino la función $h : I \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ como:

$$h(t,x) := \begin{cases} \rho_-(2tx + (1-2t)s_0) & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \rho_+(2(1-t)x + (2t-1)s_0) & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}.$$

Para probar que h es continua basta ver que ambas partes coinciden en $t = \frac{1}{2}$. Como $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}, 0) \in \mathbb{S}^n$ entonces $\Sigma x_i^2 = 1$ entonces:

$$\rho_-(2\tfrac{1}{2}x + (1 - 2\tfrac{1}{2})s_0) = \rho_-(x) = (x_1, \ldots, x_{n+1}, -\sqrt{1 - \Sigma x_i^2}) = (x_1, \ldots, x_{n+1}, 0) = x.$$

Similarmente:

$$\rho_+(2(1 - \tfrac{1}{2})x + (2\tfrac{1}{2} - 1)s_0) = \rho_+(x) = (x_1, \ldots, x_{n+1}, \sqrt{1 - \Sigma x_i^2}) = (x_1, \ldots, x_{n+1}, 0) = x.$$

Por lo tanto h es continua.

Además $h(0,x) = \rho_-(s_0) = s_0 = \rho_+(s_0) = h(1,x)$, entonces h se factoriza a través de:

$$\begin{tikzcd} I \times \mathbb{S}^n \arrow[r, "h"] \arrow[d, two heads, "\nu \times \mathrm{Id}_{\mathbb{S}^n}"'] & \mathbb{S}^{n+1} \\ \frac{I}{\partial I} \times \mathbb{S}^n \arrow[ur, dashed, "\bar{h}"'] & \end{tikzcd}$$

Observa que, como $\mathbb{S}^n$ es compacto y Hausdorff y ν es una identificación, la función $\nu \times \mathrm{Id}_{\mathbb{S}^n}$ también es una identificación.

Lo único que falta probar es que $\bar{h}$ se factoriza a través de

$$\begin{tikzcd} \frac{I}{\partial I} \times \mathbb{S}^n \arrow[r, "\bar{h}"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & \mathbb{S}^{n+1} \\ \frac{I/\partial I \times \mathbb{S}^n}{I/\partial I \vee \mathbb{S}^n} \arrow[ur, dashed, "\hat{h}"'] & \end{tikzcd}$$

y que $\hat{h}$ es biyectiva. Estas dos cosas nos implican que $\hat{h}$ es un homeomorfismo ya que sería una función continua y biyectiva con dominio compacto y Hausdorff (ie. $\frac{I/\partial I \times \mathbb{S}^n}{I/\partial I \vee \mathbb{S}^n} = \mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^n$) y por lo tanto $\mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^n \approx \mathbb{S}^{n+1}$. Lo que me falta lo pruebo en el siguiente ejercicio:

Ejercicio 2. Sea $\bar{h} : \frac{I}{\partial I} \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ como en la proposición 1. Entonces $\bar{h}$ se factoriza a través de $\mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^n$ y que $\hat{h}$, la función inducida, es biyectiva.

□

Si junto el ejercicio 1 y la proposición 1, obtengo una fórmula para calcular la suspensión reducida de cualquier esfera:

Corolario 1.

$$\mathcal{S}\mathbb{S}^n \approx \mathbb{S}^{n+1}$$

Con este corolario puedo reescribir la definición del grupo fundamental (como mencioné al principio de esta sección). Omito la notación de espacio basado: para toda $n \ge 1$ tengo

$$\pi_n(X, x_0) = \left[\mathbb{S}^n, X\right] = \left[\mathcal{S}\mathbb{S}^{n-1}, X\right] \longleftrightarrow \left[\mathbb{S}^{n-1}, \Omega X\right] = \pi_{n-1}(\Omega X, e).$$

En particular para $n = 1$ concluyo que

$$\pi_1(X, x_0) \longleftrightarrow \pi_0(\Omega X, e).$$

Esto quiere decir que el grupo fundamental de un espacio está en biyección canónico con las componentes conexas de su espacio de lazos (cf. proposición **??**). Tiene sentido este hecho porque, de alguna manera, las homotopías entre lazos funcionan como trayectorias que las une.