

Chapter 1

Grupo Fundamental

1.1 Lazos

Definición 1. Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$. Un *espacio basado* es la pareja (X, x_0) y un morfismo $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ entre espacios basados es una función continua $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(x_0) = y_0$.

Observemos que la clase de espacios basados junto con los morfismos de espacios basados forman una categoría que denotamos por \mathbf{Top}_* (aquí la notación viene de \mathbf{Top} , la categoría de espacios topológicos). Esto se sigue inmediatamente de que la composición de funciones continuas es continua.

Definición 2. Sea (X, x_0) un espacio basado. Un *lazo* en (X, x_0) es una función continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\alpha(0) = x_0 = \alpha(1)$, es decir, una curva cerrada. Al conjunto de todos los lazos en (X, x_0) se denota por

$$\Omega(X, x_0) := \{[0, 1] \xrightarrow{\alpha} X \mid \alpha \text{ es una lazo en } (X, x_0)\}.$$

Ejemplo 1.

1. La función constante $c(s) = x_0$ para toda $s \in [0, 1]$ es claramente un lazo en (X, x_0) . De hecho se considera como el lazo trivial y funcionará como elemento neutro en las construcciones que haremos más adelante.
2. El círculo \mathbb{S}^1 se puede pensar como un lazo en $(\mathbb{C}, 1)$, o en $(\mathbb{R}^2, (1, 0))$; la función $\alpha(s) = e^{2\pi i s}$ es continua y cumple que $\alpha(0) = e^0 = 1 = e^{2\pi i} = \alpha(1)$.

El espacio $\Omega(X, x_0)$, en general, es demasiado grande como para poder realmente detectar propiedades topológicas de X . Entonces vamos a subdividir $\Omega(X, x_0)$ en clases de equivalencia. Para esto queremos que dos lazos sean equivalentes si podemos “deformar” continua un lazo en otro; de esta manera podremos aislar las propiedades topológicas de X .

La idea de “deformar” un lazo α_0 al lazo α_1 es realmente cambiar continuamente de lazos hasta llegar a α_1 . Más precisamente, una deformación es una familia de lazos $\{\alpha_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ que empiezan en α_0 , varían continuamente mientras $t \rightarrow 1$ y terminan en α_1 . Escribimos la definición para hacer más preciso esta idea.

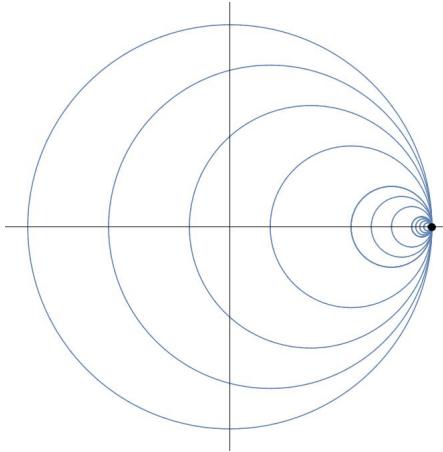
Definición 3. Sean $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$. Una *homotopía* entre α_0 y α_1 es una función continua $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que:

- Para toda $t \in [0, 1]$ fija, $\alpha_t(s) := H(s, t)$ es un lazo en (X, x_0) .
- $H(s, 0) = \alpha(s)$ y $H(s, 1) = \beta(s)$.

Si existe una homotopía entre dos lazos α y β , decimos que son *homotópicos* y lo denotamos por $\alpha \simeq \beta$.

Ejemplo 2.

Figure 1.1: \mathbb{S}^1 es homotópico a un punto.



- El lazo constante $c(s) = (1, 0)$ y el lazo \mathbb{S}^1 (del ejemplo 1) son homotópicos en el espacio basado $(X, x_0) = (\mathbb{R}^2, (1, 0))$ mediante la homotopía:

$$H(s, t) = (t + (1 - t) \cos 2\pi s, (1 - t) \sin 2\pi s).$$

Podemos pensar a H como la restricción de una función suave $\bar{H} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (con la misma regla de correspondencia) y así concluimos que H es continua. Observemos que para $t_0 \in [0, 1]$ fija cada $H(s, t_0)$ es un círculo con centro $(t_0, 0)$ y radio $1 - t_0$. Por lo tanto es un lazo en $(\mathbb{R}^2, (1, 0))$ porque

$$H(0, t_0) = (t_0 + (1 - t_0) \cos 2\pi 0, (1 - t_0) \sin 2\pi 0) = (1, 0) = H(1, t_0)$$

para toda $t_0 \in [0, 1]$ (H es una función periódica en s con periodo 1), véase la figura 1.1.

Por último $H(s, 0) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$ es el círculo \mathbb{S}^1 y $H(s, 1) = (1, 0) = c(s)$ es el punto y así, H es una homotopía entre \mathbb{S}^1 y el lazo constante $c(s)$. Por lo tanto $\mathbb{S}^1 \simeq c$ en $(\mathbb{R}^2, (1, 0))$.

- Si tomamos $(X, x_0) = (\mathbb{R} - \{0\}, 2)$, entonces el lazo $\alpha(s) = 2 + \sin 2\pi s$ es homotópico al lazo constante $c(s) = 2$, mediante la homotopía $H(s, t) = 2 + (1 - t) \sin 2\pi s$ (la prueba de este hecho es idéntico al ejemplo anterior; la idea es que el factor $1 - t$ hace que las oscilaciones del lazo cada vez se hacen más pequeñas hasta que termina por no oscilar y se fija en el 2). Por lo tanto $\alpha \simeq c$

Si cambiamos el punto base a $(\mathbb{R} - \{0\}, -2)$ entonces tendremos lo opuesto: $\alpha \not\simeq c$ (aquí el lazo constante cambia a $c(s) = -2$ para ser consistente con el cambio de espacio basado). Para ver esto fijamos $s_0 \in [0, 1]$. Cualquier homotopía H entre α y c nos induce una función continua $H_{s_0} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ cuyos valores extremos son:

$$H_{s_0}(1) = c(s_0) = -2 < 1 \leq \alpha(s_0) = H_{s_0}(0).$$

Por lo tanto el Teorema del valor intermedio nos dice que H_{s_0} debe asumir el valor 0 en algún punto $t \in [0, 1]$, pero nuestra homotopía vive en $\mathbb{R} - \{0\}$, es decir nunca vale 0; esto es una contradicción. Por lo tanto $\alpha \not\simeq c$ en $(\mathbb{R} - \{0\}, -2)$ pero sí son homotópicos en $(\mathbb{R} - \{0\}, 2)$. Este ejemplo ilustra porque es importante aclarar en qué espacio basado estamos considerando las homotopías.

Ejercicio 1. La relación $\alpha \simeq \beta$ en $\Omega(X, x_0)$ es una relación de equivalencia.

Proof. Debemos probar tres cosas:

- (Simetría) Afirmamos que para todo lazo α , tenemos que $\alpha \simeq \alpha$ mediante la homotopía $H(s, t) = \alpha(s)$. Claramente H es continua porque es independiente del parámetro t y α es una función continua sobre la variable s . Además, para toda t , $H(s, t) = \alpha_t(s) = \alpha(s)$ es un lazo. Por lo tanto H es una homotopía

- (Reflexividad) Supongamos que $\alpha \simeq \beta$ para dos lazos en $\Omega(X, x_0)$ mediante la homotopía H . Si definimos $\bar{H}(s, t) := H(s, 1-t)$, entonces claramente \bar{H} es continua porque es la composición de la función continua $t \mapsto 1-t$ y H , que por hipótesis es continua. Además, para toda t , $\bar{H}(s, t)$ es un lazo, en particular es el lazo $H(s, 1-t)$. Por último, $\bar{H}(s, 0) = H(s, 1) = \beta(s)$ y $\bar{H}(s, 1) = H(s, 0) = \alpha(s)$. Por lo tanto \bar{H} es una homotopía entre β y α .
- (Transitividad) Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega(X, x_0)$ tales que $\alpha \simeq \beta$ y $\beta \simeq \gamma$ mediante las homotopías H y G respectivamente. Definimos una nueva homotopía:

$$F(s, t) := \begin{cases} H(s, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(s, 2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Primero observemos que al dominio de definición de F (el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$) lo estamos partiendo en dos cerrados $[0, 1] \times [0, \frac{1}{2}]$ y $[0, 1] \times [\frac{1}{2}, 1]$, de tal manera que sobre la intersección de esos cerrados (ie. $[0, 1] \times \{\frac{1}{2}\}$), las homotopías H y G coinciden:

$$F\left(s, \frac{1}{2}\right) = H(s, 1) = \beta(s) = G(s, 0) = F\left(s, \frac{1}{2}\right).$$

Como H y G son continuas, tenemos que F está bien definida y es continua sobre el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

Por otro lado, para cada $t_0 \in [0, 1]$ fija tenemos que $F(s, t_0)$ es un lazo en $\Omega(X, x_0)$ porque $H(s, t_0)$ o $G(s, t_0)$ es un lazo (la opción depende de si $t \leq \frac{1}{2}$ o si $t \geq \frac{1}{2}$). Por último verificamos que F deforma α en γ :

$$F(s, 0) = H(s, 0) = \alpha(0) \quad \text{y} \quad F(s, 1) = G(s, 1) = \gamma(s).$$

Concluimos que $\alpha \simeq \gamma$ mediante la homotopía F .

□

Nota. Es útil tener notación para cuando $\alpha \simeq \beta$ mediante una homotopía H , entonces simplemente lo denotamos por $\alpha \simeq_H \beta$

Una vez establecida una relación de equivalencia, el siguiente paso es definir el espacio cociente:

Definición 4. El *grupo fundamental* de un espacio basado (X, x_0) se define como el cociente del espacio de lazos módulo homotopía:

$$\pi_1(X, x_0) := \Omega(X, x_0) / \simeq$$

y sus elementos los denotamos por $[\alpha]$ para algún representante $\alpha \in \Omega(X, x_0)$.

Inmediatamente podemos identificar un elemento en todo grupo fundamental: en cualquier espacio basado (X, x_0) siempre existe el lazo constante $c(s) = x_0$, por lo tanto $[c] \in \pi_1(X, x_0)$. Pronto veremos que el lazo constante va a ser el neutro del grupo fundamental, entonces de ahora en adelante usaremos la notación de teoría de grupos y denotaremos por e al lazo constante $e(s) = x_0$ del espacio basado (X, x_0) .

Se llama “grupo” fundamental porque le podemos definir una estructura de grupo de manera natural. Dos lazos los podemos operar de la siguiente manera: sean $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$, definimos

$$(\alpha * \beta)(s) := \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2s - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

En esencia, esta operación concatena dos lazos. Como $\alpha * \beta$ está definido por dos funciones continuas sobre dos cerrados cuya unión es el dominio de $\alpha * \beta$ y valen lo mismo sobre su intersección ($\alpha(2\frac{1}{2}) = \alpha(1) = x_0 = \beta(0) = \beta(2\frac{1}{2} - 1)$), podemos concluir que $\alpha * \beta$ es continua. Además, como:

$$(\alpha * \beta)(0) = \alpha(0) = x_0 = \beta(1) = (\alpha * \beta)(1),$$

tenemos que $\alpha * \beta$ es un lazo y la concatenación $* : \Omega(X, x_0) \times \Omega(X, x_0) \rightarrow \Omega(X, x_0)$ es una operación bien definida.

De hecho, la concatenación respeta homotopías, es decir que si $\alpha \simeq \alpha'$ y $\beta \simeq \beta'$ entonces $(\alpha * \beta) \simeq (\alpha' * \beta')$. Esto quiere decir que la concatenación en $\Omega(X, x_0)$ se factoriza a través del grupo fundamental, o en otras palabras, podemos concatenar clases de equivalencias. Esto nos dará una operación bien definida en $\pi_1(X, x_0)$.

Es importante pasar a $\pi_1(X, x_0)$ porque la concatenación no convierte $\Omega(X, x_0)$ en un grupo porque no tiene un elemento neutro: $\alpha * e \neq \alpha$ ya que son funciones distintas.

Para probar que $*$ es una operación bien definida en $\pi_1(X, x_0)$ supongamos que $\alpha \simeq_H \alpha'$ y $\beta \simeq_G \beta'$. Definimos:

$$F(s, t) := \begin{cases} H(2s, t) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(2s - 1, t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

como nuestro candidato a homotopía entre $\alpha * \beta$ y $\alpha' * \beta'$.

Primero observemos que F está definido en base a dos funciones continuas sobre dos cerrados que se intersectan en $\{\frac{1}{2}\} \times [0, 1]$, pero sobre esta intersección ambas funciones coinciden:

$$H\left(2\frac{1}{2}, t\right) = H(1, t) = x_0 = G(0, t) = G\left(2\frac{1}{2} - 1, t\right).$$

Por lo tanto F es continua sobre la unión de ambos cerrados: el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

Por último, si fijamos $t_0 \in [0, 1]$ y denotamos por H_{t_0} y G_{t_0} a los lazos inducidos por las homotopías con parámetro fijo, obtenemos:

$$F(s, t_0) := \begin{cases} H(2s, t_0) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(2s - 1, t_0) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} = (H_{t_0} * G_{t_0})(s)$$

que ya hemos visto que es un lazo en (X, x_0) . Por lo tanto F es una homotopía y así podemos concluir que

$$(\alpha * \beta) \xrightarrow{F} (\alpha' * \beta').$$

Con este resultado podemos definir una operación en el grupo fundamental: si $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$, definimos:

$$[\alpha][\beta] := [\alpha * \beta].$$

El argumento anterior prueba que esta operación está bien definida y así proponemos:

Teorema 1. *Sea (X, x_0) un espacio basado. El grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ junto con la operación $*$ (concatenación) es un grupo con neutro $[e]$, el lazo constante $e(s) = x_0$.*

Para probar esto vamos a requerir de más herramienta, empezando con generalizar la definición de homotopía a cualquier función continua $f : X \rightarrow Y$ y no necesariamente un lazo.

Antes de seguir, vale la pena enunciar y probar el siguiente resultado:

Proposición 1. La asignación

$$(X, x_0) \mapsto \Omega(X, x_0)$$

es un functor $\Omega : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}_*$ donde el punto base de $\Omega(X, x_0)$ es el lazo constante e_{x_0} .

Proof. Primero debo establecer qué sucede con los morfismos en \mathbf{Top}_* . Sea $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ un morfismo de espacios basados y sea $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ un lazo. Observa que $f \circ \alpha$ es un lazo en $\Omega(Y, y_0)$ porque (claramente) es continua y además

$$(f \circ \alpha)(0) = f(\alpha(0)) = f(x_0) = y_0 = f(x_0) = f(\alpha(1)) = (f \circ \alpha)(1).$$

Por lo tanto si escribo $\Omega f(\alpha) := f \circ \alpha$ tengo que $\Omega f : \Omega(X, x_0) \rightarrow \Omega(Y, y_0)$ es un morfismo de espacios basados.

Si Id_X es la identidad sobre (X, x_0) entonces $\Omega \text{Id}_X(\alpha) = \text{Id}_x \circ \alpha = \alpha$ y así $\Omega \text{Id}_X = \text{Id}_{\Omega(X, x_0)}$. Por último si $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$ son morfismos entonces:

$$\Omega(g \circ f)(\alpha) = (g \circ f) \circ \alpha = g \circ (f \circ \alpha) = (g \circ \Omega f)(\alpha) = \Omega g(\Omega f)(\alpha) = (\Omega g \circ \Omega f)(\alpha).$$

Con esto acabo. □

1.2 Homotopías

Definición 5. Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : X \rightarrow Y$ funciones continuas (\star) entre espacios topológicos X y Y . Decimos que f y g son *homotópicas*, denotado por $f \simeq g$, si existe una función continua $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$, que llamamos *homotopía*, tal que:

- Para cada parámetro $t \in [0, 1]$, la función $H_t : X \rightarrow Y$ definida por $H_t(x) := H(x, t)$ es continua (\star).
- $H_0 = f$ y $H_1 = g$.

Además decimos que la *homotopía es relativa a $A \subseteq X$* si para toda $x \in A$ tenemos que $f(x) = H_t(x)$ para toda $t \in [0, 1]$, es decir la homotopía fija a A .

Nota. La continuidad marcada por una (\star) en la definición anterior se puede cambiar a cualquier otra propiedad como ser homeomorfismos, ser morfismo de espacios basados, ser suave, etc.

Además, de ahora en adelante denotaremos $I = [0, 1]$. Antes con los lazos, esta notación podía confundirse en la definición de homotopía porque un intervalo es el dominio del lazo mientras que el otro intervalo parametriza la familia de lazos en la deformación.

Escribimos:

$$\text{Map}(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ es continua}\}.$$

Si además quiero que las funciones continuas f sean de espacios basados, escribo:

$$\text{Map}_*((X, x_0), (Y, y_0)) := \{f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0) \mid f \text{ es continua y } f(x_0) = y_0\}$$

A estos conjuntos se les puede dotar de la topología *compacto-abierto* que es la topología con sub-base: para todo compacto $K \subseteq X$ y todo abierto $U \subseteq Y$,

$$B_K(U) := \{f \in \text{Map}(X, Y) \mid f[K] \subseteq U\}.$$

Al igual que en el caso de lazos, tenemos:

Ejercicio 2. La relación $\alpha \simeq \beta$ en $\text{Map}(X, Y)$ es una relación de equivalencia.

Proof. Debemos probar tres cosas:

- (Simetría) Afirmamos que para toda $f \in \text{Map}(X, Y)$, tenemos que $f \simeq f$ mediante la homotopía $H(x, t) = f(x)$. Claramente H es continua porque es independiente del parámetro t y f es continua. Además $H_0 = f = H_1$, por lo tanto H es una homotopía.
- (Reflexividad) Supongamos que $f \simeq g$ para $f, g \in \text{Map}(X, Y)$ mediante la homotopía H . Si definimos $\tilde{H}(x, t) := H(x, 1 - t)$, entonces claramente \tilde{H} es continua porque es la composición de la función continua $t \mapsto 1 - t$ y H , que por hipótesis es continua. Además, para toda t , $\tilde{H}_t(x) = H_{1-t}(x)$, y así \tilde{H}_t es continua. Por último, $\tilde{H}_0 = H_1 = g$ y $\tilde{H}_1 = H_0 = f$. Por lo tanto \tilde{H} es una homotopía entre f y g .
- (Transitividad) Sean $f, g, h \in \text{Map}(X, Y)$ tales que $f \simeq g$ y $g \simeq h$ mediante las homotopías H y G respectivamente. Definimos una nueva homotopía:

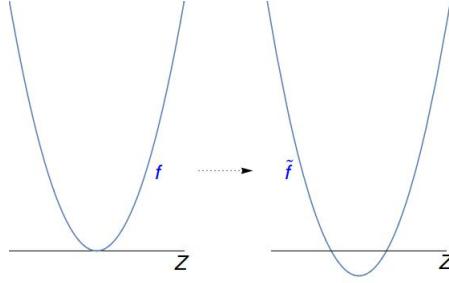
$$F(x, t) := \begin{cases} H(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Primero observemos que al dominio de definición de F (el espacio $X \times I$) lo estamos partiendo en dos cerrados $X \times [0, \frac{1}{2}]$ y $X \times [\frac{1}{2}, 1]$, de tal manera que sobre la intersección de esos cerrados (ie. $X \times \{\frac{1}{2}\}$), las homotopías H y G coinciden:

$$F\left(x, \frac{1}{2}\right) = H(x, 1) = g(x) = G(x, 0) = F\left(x, \frac{1}{2}\right).$$

Como H y G son continuas, tenemos que F está bien definida y es continua sobre $X \times I$.

Figure 1.2: Deformación de una función f para que sea transversal a Z (aquí está dibujado la imagen de f).



Por otro lado, para cada $t \in I$ fija tenemos que F_t es una función continua porque es igual a H_t o G_t que por hipótesis son continuas (la opción depende de que $t \leq \frac{1}{2}$ o que $t \geq \frac{1}{2}$). Por último verificamos que:

$$F_0(x) = H(x, 0) = H_0(x) = f(x) \quad \text{y} \quad F_1(x) = G(x, 1) = G_1(x) = h(x).$$

Concluimos que $f \simeq h$ mediante la homotopía F .

□

Con el resultado anterior podemos definir: para dos espacios topológicos X y Y tenemos:

$$[X, Y] := \text{Map}(X, Y)/\simeq$$

y éste viene con un mapeo natural: $f \mapsto [f]$. La ventaja de trabajar con $[X, Y]$ y no con $\text{Map}(X, Y)$ es que en general una función continua $f : X \rightarrow Y$ puede ser complicada de manejar, pero en general se va a poder deformar a una función $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ que sea más fácil de manipular. Un ejemplo clásico de esto es cuando una función f (suave) no es transversal a una subvariedad $Z \subset Y$ y lo deformamos para que \tilde{f} sí sea transversal a Z (figura 1.2).

La homotopía “preserva composiciones”:

Proposición 2. Sean X, Y y Z espacios topológicos con funciones continuas $f, \tilde{f} : X \rightarrow Y$ y $g, \tilde{g} : Y \rightarrow Z$ tales que $f \simeq \tilde{f}$ y $g \simeq \tilde{g}$. Entonces $g \circ f \simeq \tilde{g} \circ \tilde{f}$.

Proof. Supongamos que $F : X \times I \rightarrow Y$ y $G : Y \times I \rightarrow Z$ son las homotopías $f \simeq \tilde{f}$ y $g \simeq \tilde{g}$ respectivamente. Definimos una función $H : X \times I \rightarrow Z$ mediante la siguiente composición:

$$X \times I \xrightarrow{(F, \text{Id})} Y \times I \xrightarrow{G} Z \quad \text{con} \quad (x, t) \mapsto (F(x, t), t) \mapsto G(F(x, t), t).$$

H es continua porque es composición de funciones continuas (la primera es continua porque la imagen inversa de un abierto $U \times V$ de $Y \times I$ tiene como imagen inversa $F^{-1}[U] \times I$ que es abierto en $X \times I$ porque F es continua). Ahora, para $t \in I$ fija tenemos que $H_t = G_t(F_t(x))$ que es continua porque F_t y G_t lo son. Por último tenemos que $H_0 = G_0 \circ F_0 = g \circ f$ y $H_1 = G_1 \circ F_1 = \tilde{g} \circ \tilde{f}$ por hipótesis. Concluimos que $g \circ f \simeq \tilde{g} \circ \tilde{f}$. □

Ahora damos un criterio importante y útil para saber cuando dos funciones son homotópicos.

Teorema 2. Sea X un espacio topológico arbitrario y $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ un subespacio del espacio euclídeo. Si $f, g : X \rightarrow Y$ son continuas tales que para toda $x \in X$ el segmento de recta que une los puntos $f(x)$ y $g(x)$ en \mathbb{R}^n , que denotamos por $\mathcal{L}_x = f(x)g(x)$, está completamente contenido en Y , entonces $f \simeq g$. En símbolos:

$$\forall x \in X, \mathcal{L}_x \subseteq Y \implies f \simeq g.$$

Proof. Observemos que podemos parametrizar \mathcal{L}_x como la trayectoria $\mathcal{L}_x(t) = (1-t)f(x) + tg(x)$ que empieza en el punto $f(x)$ y termina en $g(x)$. Esto nos induce un candidato a homotopía:

$$H : X \times I \rightarrow Y \quad \text{con} \quad H(x, t) = \mathcal{L}_x(t) = (1-t)f(x) + tg(x).$$

Observemos que por hipótesis $\mathcal{L}_x \subseteq Y$ entonces H está bien definida (ie. su imagen efectivamente está contenido en su contradominio). Sólo falta ver que H es continua.

Podemos descomponer la regla de correspondencia de H de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{H} & Y \\ \downarrow & & \uparrow + \\ (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\cdot} & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ & & (1-t, f(x), t, g(x)) \mapsto ((1-t)f(x), tg(x)) \end{array}$$

La primera flecha hacia abajo es una función continua porque es el producto cartesiano de funciones continuas de variables independientes (por entrada), en particular de las cuatro funciones continuas $(x, t) \mapsto 1-t$, $(x, t) \mapsto f(x)$, $(x, t) \mapsto t$ y $(x, t) \mapsto g(x)$. Las siguientes dos flechas, correspondientes al producto por escalares y a la suma, representan funciones continuas (cf. ejercicio 3).

Por lo tanto H continua por ser composición de funciones continuas. Sólo falta verificar que:

$$H_0(x) = (1-0)f(x) + 0 \cdot g(x) = f(x) \quad \text{y} \quad H_1(x) = (1-1)f(x) + 1 \cdot g(x) = g(x).$$

Con esto concluimos que H es una homotopía entre f y g , y que $f \simeq g$. \square

Nota. Observemos que si $f(x) = g(x)$, entonces $H(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x) = f(x) - tf(x) + tf(x) = f(x) = g(x)$, entonces la homotopía H es relativo al conjunto $A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$.

Los conjuntos convexos $Y \subset \mathbb{R}^n$ cumplen que cualesquiera dos puntos (en particular $f(x)$ y $g(x)$ del teorema anterior) se pueden conectar mediante un segmento de recta completamente contenido en Y . Por lo tanto los conjuntos convexos cumplen de sobre las hipótesis del teorema anterior y así tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3. Si X es un espacio topológico y $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo, entonces $f \simeq g$ para cualesquier dos funciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$. En símbolos:

$$[X, Y] = \{e\}$$

donde $e : X \rightarrow Y$ es la función constante $e(x) = y_0$ para cualquier $y_0 \in Y$.

Probamos lo que nos hace falta:

Ejercicio 3. \mathbb{R}^n es un espacio vectorial topológico: la suma $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y el producto por escalares $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ son continuas.

Proof. Como \mathbb{R}^n es un espacio métrico y su topología usual es la inducida por la métrica euclídea, la base son las bolas abiertas:

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < \varepsilon\}.$$

Para probar que la suma es continua, voy a probar que la imagen inversa $X := (+)^{-1}[B_\varepsilon(x)]$ es abierta para toda $\varepsilon > 0$ y para toda $x \in \mathbb{R}^n$.

Sea $\varepsilon > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Tomo $y = (y_1, y_2) \in X$, es decir que

$$y_1 + y_2 \in B_\varepsilon(x) \iff |x - y_1 - y_2| = \varepsilon - \delta < \varepsilon$$

para alguna $\delta > 0$

Propongo al abierto $V := B_{\delta/2}(y_1) \times B_{\delta/2}(y_2) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ como vecindad de (y_1, y_2) contenida en X . Si efectivamente $V \subseteq X$, entonces X es abierto y acabo. Para probar que $V \subseteq X$ calculo: si $(z_1, z_2) \in V$ entonces $|y_i - z_i| < \delta/2$ y así:

$$\begin{aligned} |x - z_1 - z_2| &= |x - y_1 + y_1 - z_1 + y_2 - y_2 - z_2| \leq |x - y_1 - y_2| + |y_1 - z_1| + |y_2 - z_2| \\ \therefore |x - z_1 - z_2| &< \varepsilon - \delta + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Concluyo que la suma $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua.

Ahora aplicaré exactamente el mismo método para probar que el producto por escalares es continua: sea $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ y fijo $(t_0, y_0) \in Y := (\cdot)^{-1}[B_\varepsilon(x)] \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Entonces tengo que

$$t_0 y_0 \in B_\varepsilon(x) \iff |x - t_0 y_0| = \varepsilon - \delta < \varepsilon$$

para una $\delta > 0$ fija.

Ahora propongo al abierto $W := B_{\delta_1}(t_0) \times B_{\delta_2}(y_0)$ donde:

$$\delta_1 := \frac{\delta}{|y_0| + 1} \quad \text{y} \quad \delta_2 := \frac{\delta}{\delta + |t_0| + |t_0| |y_0|}.$$

Observa que ambos denominadores son estrictamente positivos por ser suma de un número positivo y otro no-negativo; el numerador de ambos es positivos. Esto quiere decir que $0 < \delta_1, \delta_2$ son radios posibles de una bola abierta. De aquí sólo debo probar que W está contenido en Y :

Sea $(t, y) \in W$. Por definición tengo $|t_0 - t| < \delta_1$ y $|y_0 - y| < \delta_2$. Observa que $|t| = |t_0 - t + t_0| \leq |t_0 - t| + |t_0| < \delta_1 + |t_0|$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} |x - ty| &= |x - t_0 y_0 + t_0 y_0 - ty_0 + ty_0 - ty| \\ &\leq |x - t_0 y_0| + |t_0 y_0 - ty_0| + |ty_0 - ty| \\ &\leq |x - t_0 y_0| + |t_0 - t| |y_0| + |t| |y_0 - y| \\ &< \varepsilon - \delta + \delta_1 |y_0| + \delta_2 \delta_1 + \delta_2 |t_0| \end{aligned}$$

Sustituyo las expresiones para δ_1 y δ_2 :

$$\begin{aligned} |x - ty| &< \varepsilon - \delta + \frac{\delta |y_0|}{|y_0| + 1} + \frac{\delta}{|y_0| + 1} \cdot \frac{\delta}{\delta + |t_0| + |t_0| |y_0|} + \frac{\delta |t_0|}{\delta + |t_0| + |t_0| |y_0|} \\ &< \varepsilon - \delta + \delta \frac{|y_0| (\delta + |t_0| + |t_0| |y_0|) + \delta + |t_0| (|y_0| + 1)}{(|y_0| + 1)(\delta + |t_0| + |t_0| |y_0|)}. \end{aligned}$$

Como todo el cociente se hace 1, obtengo:

$$|x - ty| < \varepsilon \implies ty \in B_\varepsilon(x) \implies (t, y) \in Y$$

y así $W \subset Y$.

Por lo tanto el producto por escalares es continua. □

1.3 $\pi_1(X, x_0)$ es un grupo.

En esta parte demuestro el Teorema 1. Sea (X, x_0) un espacio basado, abrevio $\Omega = \Omega(X, x_0)$ $\pi = \pi_1(X, x_0)$ y sea $[e] \in \pi$ la clase del lazo constante $e \in \Omega$. Defino la operación $[\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha * \beta]$. Para probar que la pareja (π, \cdot) es un grupo, hay que probar que cumple las siguientes tres propiedades:

1. La operación $*$ es asociativa.
2. El elemento $[e]$ cumple que $[\alpha][e] = [\alpha] = [e][\alpha]$ para toda $[\alpha] \in \pi$.
3. Para todo elemento $[\alpha] \in \pi$ existe un $[\alpha]^{-1} \in \pi$ tal que $[\alpha][\alpha]^{-1} = [e] = [\alpha]^{-1}[\alpha]$.

Para la primera propiedad, voy a demostrar asociatividad generalizada:

$$[\alpha_1] \cdots [\alpha_n] = ([\alpha_1] \cdots [\alpha_r]) \cdot ([\alpha_{r+1}] \cdots [\alpha_n]) \quad \forall [\alpha_i] \in \pi, \forall r \in \{1, \dots, n-1\}. \quad (1.1)$$

Llevado al espacio de lazos, la asociatividad se escribe como:

$$\alpha_1 * \cdots * \alpha_n \simeq (\alpha_1 * \cdots * \alpha_r) * (\alpha_{r+1} * \cdots * \alpha_n) \quad \forall \alpha_i \in \Omega, \forall r \in \{1, \dots, n-1\}. \quad (1.2)$$

Para probar esto primero necesito definir la concatenación para más de dos lazos:

Definición 6. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n : I \rightarrow X$ funciones continuas (ie. *trayectorias*) tales que $\alpha_i(0) = \alpha_{i-1}(1)$, es decir que el punto final de una trayectoria es el punto inicial de la que sigue. Defino:

$$(\alpha_1 * \dots * \alpha_n)(s) := \begin{cases} \alpha_1(ns) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{n} \\ \alpha_2(ns - 1) & \text{si } \frac{1}{n} \leq s \leq \frac{2}{n} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_r(ns - (r-1)) & \text{si } \frac{r-1}{n} \leq s \leq \frac{r}{n} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n(ns - (n-1)) & \text{si } \frac{n-1}{n} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Observa que la condición $(r-1)/n \leq s \leq r/n$ es equivalente a $0 \leq sn - (r-1) \leq 1$, entonces cada $\alpha_r(ns - (r-1))$ está bien definida. Además, en cada intersección de los intervalos $[(r-1)/n, rn]$, ie. en los puntos $s = r/n$, ambas funciones α_{r+1} y α_r coinciden:

$$\alpha_{r+1}\left(\frac{r}{n}\right) = \alpha_{r+1}\left(n\frac{r}{n} - r\right) = \alpha_{r+1}(0) = \alpha_r(1) = \alpha_r\left(n\frac{r}{n} - (r-1)\right) = \alpha_r\left(\frac{r}{n}\right).$$

Por lo tanto $\alpha_1 * \dots * \alpha_n$ es continua.

Para probar (1.2), voy a “reparametrizar” la curva $\alpha_1 * \dots * \alpha_n$ para que la igualdad se siga inmediatamente de la nueva fórmula.

Considera la siguiente función $f : I \rightarrow I$:

$$f_r(s) := \begin{cases} \frac{2rs}{n} & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 2s - 1 + \frac{2r}{n}(1-s) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (1.3)$$

Está definida mediante funciones lineales que coinciden en la intersección de sus dominios:

$$\frac{2r(1/2)}{n} = \frac{r}{n} = 2\frac{1}{2} - 1 + \frac{2r}{n}\left(1 - \frac{1}{2}\right).$$

Por lo tanto f_r es continua para $r \in \{1, \dots, r-1\}$.

Ahora, como $I \subset \mathbb{R}$ es convexo, el Teorema 2 me garantiza que f_r es homotópica a cualquier función continua $f : I \rightarrow I$, en particular la identidad Id_I . Por lo tanto $f_r \simeq \text{Id}_I$. Además, como $f_r(0) = 0$ y $f_r(1) = 1$ son los únicos dos puntos donde coinciden f_r y Id_I (la intersección de sus gráficas es $A = \{0, 1\}$), entonces la homotopía entre f_r y Id_I es relativo a A .

Por el momento asume que $(\alpha_1 * \dots * \alpha_n) \circ f_r = (\alpha_1 * \dots * \alpha_r) * (\alpha_{r+1} * \dots * \alpha_n)$ (esto lo probaré en el ejercicio 4). Como $f \simeq \text{Id}_I$, la proposición 2 garantiza que:

$$(\alpha_1 * \dots * \alpha_n) \circ \text{Id}_I \simeq (\alpha_1 * \dots * \alpha_n) \circ f = (\alpha_1 * \dots * \alpha_r) * (\alpha_{r+1} * \dots * \alpha_n).$$

Esta expresión es justo la fórmula (1.2) de la cual concluyo la asociatividad de (π, \cdot) . Pruebo lo que me falta:

Ejercicio 4. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n : I \rightarrow X$ trayectorias tales que $\alpha_r(0) = \alpha_{r-1}(1)$. Si $f_r : I \rightarrow I$ está definida como en 1.3, entonces:

$$(\alpha_1 * \dots * \alpha_n) \circ f_r = (\alpha_1 * \dots * \alpha_r) * (\alpha_{r+1} * \dots * \alpha_n).$$

Proof.

$$0 \leq s \leq \frac{1}{2} \implies 2s = \frac{n}{r}f_r(s), \quad \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \implies 2s - 1 = f_r(s) - \frac{2r}{n}(1-s)$$

También escribo explícitamente la definición de $\alpha_{r+1} * \dots * \alpha_n$:

$$(\alpha_r * \dots * \alpha_n)(s) := \begin{cases} \alpha_r((n-r)s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{n-r} \\ \alpha_{r+1}((n-r)s - 1) & \text{si } \frac{1}{n-r} \leq s \leq \frac{2}{n-r} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{r+k'}((n-r)s - (k'-1)) & \text{si } \frac{k'-1}{n-r} \leq s \leq \frac{k'}{n-r} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n((n-r)ns - ((n-r)-1)) & \text{si } \frac{(n-r)-1}{n-r} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

donde $r \in \{1, \dots, n-1\}$ y $k \in \{1, \dots, n-r\}$

Para probar el ejercicio, evalúo ambos lados en $s \in [0, 1]$. Para facilitar la cuenta, divido en dos casos: Primero supongo que $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$. Entonces el lado izquierdo se vuelve:

$$((\alpha_1 * \dots * \alpha_n) \circ f_r)(s) = (\alpha_1 * \dots * \alpha_n) \left(\frac{2rs}{n} \right) = \alpha_k \left(n \frac{2rs}{n} - (k-1) \right) = \alpha_k (2rs - k + 1)$$

donde $k \in \{1, \dots, n\}$ es un elemento tal que

$$\frac{k-1}{n} \leq \frac{2rs}{n} \leq \frac{k}{n} \iff \frac{k-1}{r} \leq 2s \leq \frac{k}{r} \quad (1.4)$$

Ahora, como $s \leq 1/2$, tengo:

$$((\alpha_1 * \dots * \alpha_r) * (\alpha_{r+1} * \dots * \alpha_n))(s) = (\alpha_1 * \dots * \alpha_r)(2s).$$

Como $2s$ cumple (1.4), puedo calcular explícitamente la función anterior:

$$(\alpha_1 * \dots * \alpha_r)(2s) = \alpha_k (r(2s) - (k-1)) = \alpha_k (2rs - k + 1)$$

y coincide con $((\alpha_1 * \dots * \alpha_n) \circ f_r)(s)$.

En el segundo caso, supongo que $1/2 < s \leq 1$ y hago el mismo proceso:

$$\begin{aligned} ((\alpha_1 * \dots * \alpha_n) \circ f_r)(s) &= (\alpha_1 * \dots * \alpha_n) \left(2s - 1 + \frac{2r}{n}(1-s) \right) \\ &= \alpha_k \left(n \left(2s - 1 + \frac{2r}{n}(1-s) \right) - (k-1) \right) \\ &= \alpha_k (2ns - n + 2r(1-s) - k + 1) \end{aligned} \quad (1.5)$$

donde $k \in \{1, \dots, n\}$ es el único tal que

$$\frac{k-1}{n} \leq 2s - 1 + \frac{2r}{n}(1-s) < \frac{k}{n}.$$

Si le restas $(2r/n)(1-s)$ a la desigualdad, separas $2r = r + r$ y factorizas $n-r$, llegas a que:

$$\frac{k-1}{n} \leq 2s - 1 + \frac{2r}{n}(1-s) \leq \frac{k}{n} \iff \frac{k-r-1}{n-r} \leq 2s - 1 \leq \frac{k-r}{n-r} \quad (1.6)$$

Si haces $k' = k-r$ (o equivalentemente $k'+r=k$), entonces $(\alpha_{r+1} * \dots * \alpha_n)(2s-1)$ se evalúa en la trayectoria $\alpha_{r+k'}$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} ((\alpha_1 * \dots * \alpha_r) * (\alpha_{r+1} * \dots * \alpha_n))(s) &= (\alpha_{r+1} * \dots * \alpha_n)(2s-1) \\ &= \alpha_{r+k'} \left((n-r)(2s-1) - (k'-1) \right) \\ &= \alpha_k \left(2ns - n - 2rs + 2r - (k-r-1) \right) \\ &= \alpha_k (2ns - n + 2r(1-s) - k + 1) \end{aligned}$$

Esto coincide con (1.5) y termino. □

Para probar que (π, \cdot) cumple las otras dos propiedades, usaré un método similar al que acabo de usar: Sea $e = e_{x_0}$ el lazo constante $e(s) = x_0 \in X$ y sea $\alpha \in \Omega$ arbitrario. Quiero probar que:

$$[\alpha][e] = [\alpha] = [e][\alpha] \iff \alpha * e \simeq \alpha \simeq e * \alpha. \quad (1.7)$$

Defino la función $f_e : I \rightarrow I$ como

$$f_e(s) := \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 2s-1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}.$$

Observa que $0 = 2(1/2) - 1$ entonces f_e está definido por dos funciones lineales que coinciden en $s = 1/2$. Por lo tanto f_e es continua y por el Teorema 2 tengo que $f_e \simeq \text{Id}_I$. Uso la proposición 2 para deducir

$$\alpha \circ f_e \simeq \alpha \circ \text{Id}_I = \alpha.$$

Por último, calculo

$$(\alpha \circ f_e)(s) = \begin{cases} \alpha(0) = x_0 & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2s - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} = (e * \alpha)(s)$$

para concluir que $e * \alpha \simeq \alpha$ y así $[e][\alpha] = [\alpha]$. Para probar la igualdad en el otro orden, has una calca de esta prueba pero usando:

$${}_e f(s) := \begin{cases} 2s & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}.$$

Nota. Si $\alpha : I \rightarrow X$ es una trayectoria que empieza en $\alpha(0) = x_0$ y termina en $\alpha(1) = x_1$, entonces

$$e_{x_0} * \alpha \simeq \alpha \simeq \alpha * e_{x_1}.$$

Observa que $\alpha * e_{x_0}$ y $e_{x_1} * \alpha$ no están bien definidas en $s = 1/2$ y por lo tanto no representan funciones al menos de que $x_0 = x_1$, o en palabras: α es un lazo.

Lo último que debo probar es la existencia de inversos en π . Si α es un lazo, el candidato natural a ser su inverso bajo la concatenación, es simplemente el lazo en sentido contrario: para toda $\alpha \in \Omega$, defino:

$$\bar{\alpha}(s) = \alpha(1 - s).$$

Claramente $\bar{\alpha}$ es un lazo y además si $\alpha \simeq \beta$ mediante una homotopía H , entonces $\bar{\alpha} \simeq \bar{\beta}$ mediante la homotopía $\bar{H}(s, t) := H(1 - s, t)$. Como t se mantiene igual para H y \bar{H} , si H es relativo a $A \subseteq I$, entonces también lo será \bar{H} .

Ahora sigo la misma ruta que antes. Defino

$$\bar{f}(s) := \begin{cases} 2s & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 2(1 - s) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}.$$

Claramente en $s = 1/2$ coinciden ambas funciones lineales. Por lo tanto \bar{f} es continua y cumple que $\bar{f} \simeq 0$ donde $0 : I \rightarrow I$ es la función constante 0 porque $\bar{f}(0) = 0 = \bar{f}(1)$. Por lo tanto $\alpha \circ \bar{f} \simeq \alpha \circ 0 = e$ ya que $(\alpha \circ 0)(s) = \alpha(0) = x_0$.

Por último calculo

$$(\alpha \circ \bar{f})(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2(1 - s)) = \bar{\alpha}(2s - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} = (\alpha * \bar{\alpha})(s).$$

Con esto concluyo que $\alpha * \bar{\alpha} \simeq e$ y así $[\alpha][\bar{\alpha}] = [e]$. Para la igualdad en el otro orden, sólo observa que:

$$(\bar{\alpha} \circ \bar{f})(s) = \begin{cases} \bar{\alpha}(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \bar{\alpha}(2(1 - s)) = \alpha(2s - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} = (\bar{\alpha} * \alpha)(s).$$

Por lo tanto si defino $[\alpha]^{-1} := [\bar{\alpha}]$ obtengo la existencia de inversos en π :

$$\forall [\alpha] \in \pi \quad \exists [\alpha]^{-1} = [\bar{\alpha}] \in \pi \quad \text{tal que} \quad [\alpha][\alpha]^{-1} = [\alpha][\bar{\alpha}] = [e] = [\bar{\alpha}][\alpha] = [\alpha]^{-1}[\alpha]. \quad (1.8)$$

Con esto termino la prueba del Teorema 1:

$$(\pi_1(X, x_0), \cdot) \quad \text{con} \quad [\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha * \beta] \quad \text{es un grupo.}$$

1.4 El funtor $(X, x_0) \mapsto \pi_1(X, x_0)$

Como $\pi_1(X, x_0)$ es un grupo, pertenece como objeto a la categoría **Grupos** cuyos objetos son grupos y cuyos morfismos son los homomorfismos de grupo. Sea anotar que

$$\mathcal{F} : \mathbf{Top}_* \longrightarrow \mathbf{Grupos} \quad \text{con} \quad \mathcal{F}(X, x_0) = \pi_1(X, x_0)$$

sea un funtor. Para esto debemos definir un homomorfismo de grupos $\mathcal{F}(f)$ para cada morfismo de espacios basados f .

Sea $f \in \text{Hom}((X, x_0), (Y, y_0))$, es decir $f : X \rightarrow Y$ es continua y $f(x_0) = y_0$. Entonces si $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ es un lazo, tendremos que $f \circ \alpha$ es un lazo en (Y, y_0) . En efecto, $f \circ \alpha$ es continua y $(f \circ \alpha)(0) = f(\alpha(0)) = f(x_0) = f(\alpha(1))(f \circ \alpha)(1)$. Por lo tanto $a \mapsto f \circ \alpha$ es una función bien definida entre $\Omega(X, x_0)$ y $\Omega(Y, y_0)$.

Para ver que esa función induce una función entre los grupos fundamentales, hay que probar que la función respeta homotopías, es decir

$$\alpha \simeq \beta \implies (f \circ \alpha) \simeq (f \circ \beta).$$

Esto es consecuencia directa de la proposición 2. Por lo tanto

$$f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0) \quad \text{con} \quad f_{\#}([\alpha]) = [f \circ \alpha]$$

es una función bien definida. Observa que:

$$f_{\#}([\alpha][\beta]) = f_{\#}([\alpha * \beta]) = [f \circ (\alpha * \beta)] = [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] = [f \circ \alpha][f \circ \beta] = f_{\#}([\alpha])f_{\#}([\beta])$$

donde la tercera igualdad se da porque los lazos son iguales:

$$\begin{aligned} (f \circ (\alpha * \beta))(s) &= \begin{cases} f(\alpha)(2s) = f_{\#}(\alpha)(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ f(\beta)(2s - 1) = f_{\#}(\beta)(2s - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \\ &= (f_{\#}(\alpha) * f_{\#}(\beta))(s) = ((f \circ \alpha) * (f \circ \beta)). \end{aligned}$$

Además $f_{\#}([e_{x_0}]) = [f \circ e_{x_0}] = [e_{y_0}]$ porque $f(x_0) = y_0$.

Por lo tanto $f_{\#}$ es un homomorfismo de grupos y así \mathcal{F} está bien definido para ser funtor, sólo hacen falta dos propiedades.

Claramente

$$(\text{Id}_X)_{\#}([\alpha]) = [\text{Id}_X \circ \alpha] = [\alpha],$$

entonces $(\text{Id}_X)_{\#}$ es la función identidad en $\pi_1(X, x_0)$. Por último, si $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ y $g : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ son morfismos de espacios basados, entonces

$$(g \circ f)_{\#}([\alpha]) = [(g \circ f) \circ \alpha] = [g \circ (f \circ \alpha)] = g_{\#}([f \circ \alpha]) = g_{\#}(f_{\#}([\alpha])) = (g_{\#} \circ f_{\#})([\alpha])$$

y así concluyo que

$$(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}$$

Todo esto prueba:

Teorema 4. *La asignación $\mathcal{F} : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grupos}$ definido por*

$$(X, x_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi_1(X, x_0) \quad \left\{ (X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \right\} \longmapsto \left\{ \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_{\#}} \pi_1(Y, y_0) \right\}$$

es un funtor (covariante).

La importancia de este teorema es que ahora tenemos una forma de estudiar los grupos fundamentales. El teorema introduce un concepto importante para clasificar espacios:

Corolario 5. El grupo fundamental de un espacio basado es un invariante topológico, es decir, si (X, x_0) y (Y, y_0) son espacios basados, entonces:

$$(X, x_0) \approx (Y, y_0) \implies \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$$

Proof. Los isomorfismos de una categoría se preservan bajo funtores, más precisamente si $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ es un isomorfismo en \mathbf{Top}_* (ie. $f : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo y $f(x_0) = y_0$), entonces $\mathcal{F}(f) = f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ es un isomorfismo. \square

Nota. Este corolario nos da un criterio útil para saber cuando dos espacios basados no son homeomorfos: simplemente niega la implicación del corolario para escribir

$$\pi_1(X, x_0) \not\cong \pi_1(Y, y_0) \implies (X, x_0) \not\approx (Y, y_0).$$

Observa que el functor del grupo fundamental toma como objetos espacios basados, no sólo espacios topológicos. Esto nos restringe un poco la información que podemos deducir al calcular un grupo fundamental de un espacio. Esto se nota especialmente en el caso $(X, x_0) \neq (X, x_1)$ ya que los espacios topológicos pueden ser el mismo. Por suerte hay un (pseudo) remedio para esto:

Ejercicio 5. Sea X un espacio topológico y $x_0, x_1 \in X$ tales que existe una trayectoria $\sigma : I \rightarrow X$ tal que $\sigma(0) = x_0$ y $\sigma(1) = x_1$. Entonces:

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$$

mediante el isomorfismo $\hat{\sigma}([\alpha]) = [\bar{\sigma} * \alpha * \sigma]$

Proof. Primero verifico que $\hat{\sigma}$ está bien definida. Observemos que, como σ es continua, entonces $\bar{\sigma} * \alpha * \sigma$ también lo es. Observa que

$$(\bar{\sigma} * \alpha * \sigma)(0) = \bar{\sigma}(0) = x_1 = \sigma(1) = (\bar{\sigma} * \alpha * \sigma)(1).$$

Por lo tanto $\hat{\sigma}([\alpha]) \in \pi_1(X, x_1)$. Además, como $\hat{\sigma}$ está definida para clases de equivalencia hay que probar que respeta homotopías:

Sean $\alpha \simeq \beta$ lazos en (X, x_0) . Entonces $\alpha * \sigma \simeq \beta * \sigma$. Esto se parece mucho al resultado que usé para probar que la operación $[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta]$ está bien definida; la diferencia es que σ es una trayectoria en lugar de un lazo. Sin embargo la homotopía es la misma:

Si $\alpha \simeq_H \beta$ (relativo a $A = \{0, 1\}$) entonces $\alpha * \sigma \simeq_F \beta * \sigma$ donde

$$F(s, t) := \begin{cases} H(2s, t) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \sigma(2s - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}.$$

Volvemos a aplicar este resultado a $(\alpha * \sigma)$ y concluimos que $\bar{\sigma} * \alpha * \sigma \simeq \bar{\sigma} * \beta * \sigma$. Por lo tanto

$$\hat{\sigma}([\alpha]) = [\bar{\sigma} * \alpha * \sigma] = [\bar{\sigma} * \beta * \sigma] = \hat{\sigma}([\beta])$$

cuando $\alpha \simeq \beta$ y así $\hat{\sigma}$ está bien definido.

Para probar que es un homomorfismo de grupos, hay que probar la siguiente igualdad:

$$\hat{\sigma}([\alpha][\beta]) = \hat{\sigma}([\alpha])\hat{\sigma}([\beta]).$$

Aplico la asociatividad del grupo fundamental y la existencia de neutros para concluir que:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}([\alpha][\beta]) &= \hat{\sigma}([\alpha * \beta]) = [\bar{\sigma} * \alpha * \beta * \sigma] = [\bar{\sigma}][\alpha][\beta][\sigma] = [\bar{\sigma}][\alpha]\left([\sigma][\sigma]^{-1}\right)[\beta][\sigma] \\ &= [\bar{\sigma}][\alpha]\left([\sigma][\bar{\sigma}]\right)[\beta][\sigma] = \left([\bar{\sigma}][\alpha][\sigma]\right)\left([\bar{\sigma}][\beta][\sigma]\right) \\ &= \hat{\sigma}([\alpha])\hat{\sigma}([\beta]). \end{aligned}$$

\square

El funtor \mathfrak{F} preserva productos:

Proposición 3. Sea $\{(X_j, x_j)\}_{j \in J}$ una familia de espacios basados, entonces las proyecciones $p_i : \Pi(X_j, x_j) \rightarrow (X_i, x_i)$ inducen un isomorfismo natural

$$\pi_n\left(\prod_{j \in J}(X_j, x_j), \star\right) \cong \prod_{j \in J} \pi_n(X_j, x_j)$$

donde $\star = \{x_j\}_{j \in J}$ es el punto base canónico de $\Pi(X_j, x_j)$.

Proof. Aplico el funtor \mathfrak{F} a la familia $\{p_i : \Pi(X_j, x_j) \rightarrow (X_i, x_i)\}_{i \in J}$ para obtener una familia de homomorfismos de grupos

$$\{(p_i)_\# : \pi_n\left(\prod_{j \in J}(X_j, x_j), \star\right) \longrightarrow \pi_n(X_i, x_i)\}_{i \in J}.$$

Por la propiedad universal del producto en **Grupos** existe un único homomorfismo $\Phi : \pi_n(\Pi(X_j, x_j)) \rightarrow \pi_n(X_i, x_i)$ a través del cual se factorizan todas las proyecciones $(p_i)_\#$:

$$\begin{array}{ccc} (\prod(X_j, x_j), \star) & \xrightarrow{\pi_n} & \pi_n(\prod(X_j, x_j), \star) \xrightarrow{\Phi} \prod \pi_n(X_j, x_j) \\ p_i \downarrow & & (p_i)_\# \downarrow & q_i \swarrow & q_i \circ \Phi = (p_i)_\# \\ (X_i, x_i) & \xrightarrow{\pi_n} & \pi_n(X_i, x_i) & & \end{array}$$

donde las q_i 's son las proyecciones naturales del producto en **Grupos**. El homomorfismo Φ es un isomorfismo:

(Φ es sobre) Sea $\alpha = \{[\alpha_j]\}_{j \in J} \in \pi_n(X_j, x_j)$ un elemento arbitrario. Claramente induce una familia de funciones continuas $\{\alpha_j : \mathbb{S}^n \rightarrow X_j\}$. En **Top**, el producto cartesiano es el producto, entonces existe un único morfismo $\tilde{\alpha} : \mathbb{S}^n \rightarrow \Pi X_j$ que hace commutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \prod X_j \\ & \searrow \alpha_i & \swarrow p_i \\ & X_i & \end{array}$$

Observa que $[\tilde{\alpha}] \in \pi_n(\Pi X_j, \star)$, entonces:

$$\Phi[\tilde{\alpha}] = \{(q_i \circ \Phi)[\tilde{\alpha}]\}_{i \in J} = \{(p_i)_\#[\tilde{\alpha}]\}_{i \in J} = \{[p_i \circ \tilde{\alpha}]\}_{i \in J} = \{[\alpha_i]\}_{i \in J} = \alpha$$

Por lo tanto $[\tilde{\alpha}]$ está en la preimagen de α y así Φ es sobre.

(Φ es inyectiva) Sea $[\beta] \in \pi_n(\Pi X_j, \star)$ tal que $\Phi[\beta] = 1$, es decir, cada coordenada de $\Phi[\beta]$ es la clase del lazo constante $e_i : \mathbb{S}^n \rightarrow X_i$. Entonces:

$$\{[e_i]\}_{i \in J} = \Phi[\beta] = \{[p_i \circ \beta]\}_{i \in J}$$

o equivalentemente $e_i \simeq p_i \circ \beta$ para toda $i \in J$.

Esto quiere decir que existe una familia de homotopías $H_i : \mathbb{S}^n \times I \rightarrow X_i$ tales que $H_i(s, 0) = (p_i \circ \beta)(s)$ y $H_i(s, 1) = e_i(s) = x_i$. Además, como cada $p_i \circ \beta$ es basada en el punto $\bullet = (1, 0, \dots, 1) \in \mathbb{S}^n$, entonces cada homotopía es basada: $H_i(\bullet, t) = x_i$ para toda $t \in I$.

Por lo tanto $\{H_i\}_{i \in J}$ es una familia de morfismos en **Top***. Por la propiedad universal del producto, existe un único morfismo $H : \mathbb{S}^n \times I \rightarrow \Pi X_j$ tal que hace commutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n \times I & \xrightarrow{H} & \prod X_j \\ & \searrow H_i & \swarrow p_i \\ & X_i & \end{array}$$

Observa que

$$\begin{aligned} H_0(s) &= \{p_i(H(s, 0))\}_{i \in J} = \{H_i(s, 0)\}_{i \in J} = \{(p_i \circ \beta)(s)\}_{i \in J} = \beta(s) \\ H_1(s) &= \{p_i(H(s, 1))\}_{i \in J} = \{H_i(s, 1)\}_{i \in J} = \{e_i(s)\}_{i \in J} = e_*(s) \end{aligned}$$

donde $e_* : \mathbb{S}^n \rightarrow \Pi X_j$ es el lazo constante. Entonces H es una homotopía entre las funciones β y e_* . Por lo tanto $[\beta] = [e_*] = 1 \in \pi_n(\Pi X_j)$ y Φ es inyectiva.

□

1.5 Generalización del grupo fundamental a otras dimensiones

Para poder generalizar el grupo fundamental a otras dimensiones, necesito encontrar otra definición equivalente de la cual resulte obvio generalizar a otras dimensiones. Para este fin, considera el siguiente argumento:

Un lazo $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ es una función continua $\alpha : I \rightarrow X$ tal que $\alpha(0) = x_0 = \alpha(1)$. Esto significa que α se factoriza a través de $I/\partial I$. Más precisamente:

La función $\nu : I \rightarrow \mathbb{S}^1$ definido por $\nu(t) = e^{2\pi i t}$ es continua y sobre. Además, para toda $U \subseteq \mathbb{S}^1$ se tiene

$$U \text{ es abierto} \iff \nu^{-1}[U] \text{ es abierto.}$$

Por lo tanto ν es una proyección de espacios topológicos.

Esto quiere decir que \mathbb{S}^1 tiene la topología cociente: sobre I definimos la siguiente relación de equivalencia:

$$s \sim t \iff \nu(s) = \nu(t).$$

Esta relación parte el conjunto en todos los singuletes $\{s\}_{s \neq 0,1}$ y en $\partial I = \{0, 1\}$. Por lo tanto el espacio de clases cumple

$$\frac{I}{\partial I} \approx \mathbb{S}^1.$$

Además, cualquier función continua $\alpha : I \rightarrow X$ tal que $\alpha(0) = \alpha(1)$, ie. un lazo se factoriza a través de ν :

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \nu \downarrow & \nearrow \tilde{\alpha} & \\ \frac{I}{\partial I} & & \end{array} \quad \text{con } \alpha = \tilde{\alpha} \circ \nu$$

Por lo tanto hay una biyección natural

$$[(\mathbb{S}^1, 1), (X, x_0)] \xrightarrow{\Phi} \pi_1(X, x_0) \quad \text{con} \quad [\beta] \longmapsto [\beta \circ \nu]$$

con inverso $[\alpha] \mapsto [\tilde{\alpha}]$. Está bien definido por la proposición 2: $\alpha \simeq \beta \implies \alpha \circ \nu \simeq \beta \circ \nu$.

Además, esta biyección es un homeomorfismo.....

Proposición 4. Si $\Omega(X, x_0)$ y $\text{Map}_*((\mathbb{S}^1, 1), (X, x_0))$ tienen la topología compacto-abierta; si $\pi_1(X, x_0)$ y $[(\mathbb{S}^1, 1), (X, x_0)]$ tienen sus correspondientes topologías cociente, entonces

$$[(\mathbb{S}^1, 1), (X, x_0)] \approx \pi_1(X, x_0)$$

Proof. Primero pruebo que Φ es continuo. Sea $U \subseteq \pi_1(X, x_0)$, entonces su preimagen \bar{U} en

$$\Omega(X, x_0) = \{I \xrightarrow{\alpha} X \mid \alpha \text{ es continua y } \alpha(0) = \alpha(1)\},$$

con la topología de subespacio de $C^0(I, Y)$, es abierto, es decir es una unión arbitraria de intersecciones finitas de los abiertos $B_K(U)$:

$$\bar{U} = \bigcup_{j \in J} B_{K_j}(U_j)$$

con $K_j \subseteq I$ compacto y $U_j \subseteq Y$ abierto. Quiero probar que la preimagen bajo Φ de \bar{U} es un abierto. Como Φ es biyectiva, basta probar esto para $\bar{U} = B_K(U)$ (esto es porque la)..

□

Nota. Puedo intercambiar $(\mathbb{S}^1, 1)$ por $(I/\partial I, \star)$ donde $\star \in I/\partial I$ es la clase de equivalencia $[\partial I]$ ya que son homeomorfos como espacios basados.

Este resultado motiva la siguiente definición:

Definición 7. El grupo fundamental de dimensión n de un espacio basado (X, x_0) se define como

$$\pi_n(X, x_0) := [(\mathbb{S}^n, 1), (X, x_0)].$$

Primero analizamos qué sucede cuando $n = 0$ ya que este caso es distinto a los demás.

Recuerda que $\mathbb{S}^0 = \{x \in \mathbb{R} : |x| = 1\} = \{-1, 1\}$. Llamaré a estos puntos de otra manera para que las cuentas sean más nítidas: sean $1 = \star$ y $-1 = \bullet$. Con esta notación puedo escribir:

$$M := \text{Map}_* \left((\mathbb{S}^0, \star), (X, x_0) \right) = \{\mathbb{S}^0 \xrightarrow{f} X \mid f \text{ es continua y } f(\star) = x_0\}.$$

Entonces la única información que nos falta saber para determinar a f es el valor $f(\bullet) \in X$. Esto nos induce la función:

$$M \xrightarrow{\Psi} X \quad \text{con} \quad f \longmapsto f(\bullet).$$

Observa que si $f, g \in M$ son homotópicos, existe una función continua $H : \{\star, \bullet\} \times I \rightarrow X$ donde $H_0 = f$ y $H_1 = g$. Esto significa que la función $F_\bullet : I \rightarrow X$ definida por $F_\bullet(t) = H(\bullet, t)$, es continua. Además $F_\bullet(0) = H_0(\bullet) = f(\bullet) = \Psi(f)$ y $F_\bullet(1) = H_1(\bullet) = g(\bullet) = \Psi(g)$. Es decir F_\bullet es una trayectoria de $\Psi(f)$ a $\Psi(g)$ en X . Decimos que $\Psi(f)$ y $\Psi(g)$ son *conectables por trayectorias*.

Con esto podemos definir una relación de equivalencia natural en X : para todas $x, y \in X$

$$\begin{aligned} x \sim y &\iff x \text{ y } y \text{ son conectables por trayectorias} \\ &\iff \exists \sigma : I \rightarrow X \text{ continua tal que } \sigma(0) = x \text{ y } \sigma(1) = y. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el argumento del párrafo anterior nos dice que:

$$f \simeq g \implies \Psi(f) \sim \Psi(g)$$

y así, puedo definir Ψ para clases de equivalencia:

$$\Psi([f]_\sim) = [\Psi(f)]_\sim \quad \text{está bien definida.}$$

Debería de cambiar de notación a algo como $\hat{\Psi}$, pero no creo que cause problemas. Observa que $[f]_\sim \in M/\sim$ que es precisamente $\pi_0(X, x_0)$. Por lo tanto $\Psi : \pi_0(X, x_0) \rightarrow X/\sim$.

Pruebo que Ψ es biyectiva:

Para toda $[x]_\sim \in X/\sim$, toma $f_x \in M$ definida por $f_x(\bullet) = x$. Claramente

$$\Psi([f_x]_\sim) = [\Psi(f_x)]_\sim = [f_x(\bullet)]_\sim = [x]_\sim,$$

y así Ψ es sobreyectiva.

Sean $[\alpha], [\beta] \in \pi_0(X, x_0)$ tales que $\Psi([\alpha]) = \Psi([\beta])$, es decir que $\alpha(\bullet)$ y $\beta(\bullet)$ son conectables por trayectorias; supongamos que es mediante la trayectoria $\sigma : I \rightarrow X$. Defino la siguiente homotopía entre α y β :

$$H(s, t) := \begin{cases} x_0 & \text{si } s = \star \\ \sigma(t) & \text{si } s = \bullet \end{cases}$$

Esta es una homotopía porque es la unión disjunta de funciones continuas y es una calca de la homotopía F que construí para definir la relación de equivalencia en X . Por lo tanto $\alpha \simeq \beta$, entonces $[\alpha] = [\beta]$ y concluyo que Ψ es inyectiva.

Por último observa que X/\sim se puede ver como el espacio de componentes conexas del espacio X ya que al hacer cociente reducimos toda una componente conexa (arco-conexa) a un punto sobre ella.

Con todo esto he probado que

Proposición 5.

$$\pi_0(X, x_0) \xrightarrow{\Psi} \left\{ \begin{array}{l} \text{componentes} \\ \text{conexas de } X \end{array} \right\} \quad \text{es biyectiva.}$$

Los demás grupos fundamentales son muy parecidos a $\pi_1(X, x_0)$. La única diferencia es que los lazos ahora están definidos sobre $I^n / \partial I^n$ en lugar de sobre $I / \partial I$. Si defino la operación como:

$$(\alpha * \beta)(s_1, \dots, s_n) := \begin{cases} \alpha(2s_1, s_2, \dots, s_n) & \text{si } 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1 \end{cases}$$

donde $\alpha, \beta : I^n \rightarrow X$, entonces todas las propiedades de grupo de $\pi_n(X, x_0)$ son idénticas a las propiedades de $\pi_1(X, x_0)$. Las enumero para tenerlas a la mano:

$$\begin{aligned} (\pi_n(X, x_0), *) &\text{ es un grupo} \\ [e] = [e_{x_0}] &\text{ es el neutro} \\ \forall [\alpha], [\alpha]^{-1} = [\bar{\alpha}] & \end{aligned}$$

También observa que

$$(X, x_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi_n(X, x_0) \quad \left\{ (X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \right\} \longmapsto \left\{ \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{f_\#} \pi_n(Y, y_0) \right\}$$

es un funtor (covariante) de la categoría **Top_{*}** a la categoría de grupos. La prueba de esto es la misma que en el Teorema 4.

1.6 Producto cuña

A lo largo de las siguientes tres secciones voy a desarrollar herramienta topológica para poder estudiar a fondo la relación

$$\pi_n(X, x_0) := [(\mathbb{S}^n, 1), (X, x_0)]$$

y cómo usarlo para relacionar los diferentes grupos fundamentales de un espacio basado. La primera construcción es el producto cuña:

Sea $\{(X_j, x_j)\}_{j \in J}$ una familia de espacios basados, $\sqcup_j (X_j, x_j)$ su unión disjunta e identifico todos los puntos base en uno sólo. Más precisamente defino $B = \{x_j\}_{j \in J}$, el conjunto de todos los puntos bases y hago cociente sobre B (ie. identifico a todos los elementos en B y a los demás los identifico sólo con ellos mismos). Así si define el producto cuña:

$$\bigvee_{j \in J} (X_j, x_j) := \frac{\sqcup (X_j, x_j)}{\{x_j\}}$$

con la topología cociente.

Lema 6. *El producto cuña en **Top_{*}** es un coproducto, es decir para cualquier familia $\{(X_j, x_j)\}_{j \in J}$ de espacios basados existen morfismos $\{\mu_i : (X_i, x_i) \rightarrow \bigvee (X_j, x_j)\}_{j \in J}$ tales que cumplen la siguiente propiedad universal: Si (Y, y_0) es cualquier espacio basado junto con morfismos $\{f_i : (X_i, x_i) \rightarrow (Y, y_0)\}_{i \in J}$ entonces existe un único morfismo $\theta : \bigvee (X_j, x_j) \rightarrow (Y, y_0)$ que hace el siguiente diagrama comutar:*

$$\begin{array}{ccc} \bigvee (X_j, x_j) & \xrightarrow{\theta} & (Y, y_0) \\ \downarrow \mu_i & & \uparrow f_i \\ (X_i, x_i) & & \end{array} \tag{1.9}$$

Proof. Primero exibo los morfismos $\mu_i : (X_i, x_i) \rightarrow \bigvee (X_j, x_j)$: para toda $i \in J$, existe una inclusión natural:

$$u_i : (X_i, x_i) \longrightarrow \bigsqcup_{j \in J} (X_j, x_j)$$

que hace $x \mapsto x \in \sqcup (X_j, x_j)$. Si compongo esta inclusión con la identificación natural $\nu : \sqcup (X_j, x_j) \rightarrow \bigvee (X_j, x_j)$, puedo definir $\mu_i := \nu \circ u_i$. Afirmo que $\bigvee (X_j, x_j)$ junto con $\{\mu_i : (X_i, x_i) \rightarrow \bigvee (X_j, x_j)\}$ es un coproducto.

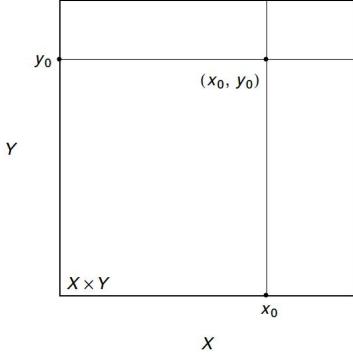


Figure 1.3: $X \vee Y \subset X \times Y$

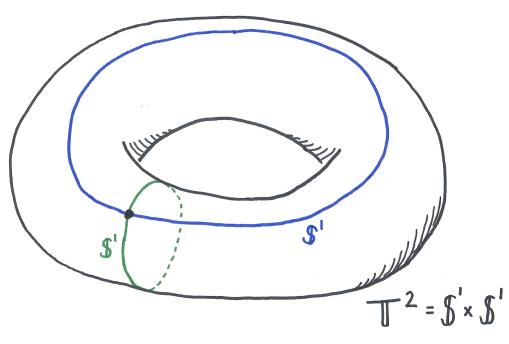


Figure 1.4: $S^1 \vee S^1 \subset T^2$

Sea (Y, y_0) un espacio basado con morfismos $\{f_i : (X_i, x_i) \rightarrow (Y, y_0)\}_{i \in J}$. Puedo definir de manera natural la función:

$$\sqcup f_j : \bigsqcup_{j \in J} (X_j, x_j) \longrightarrow (Y, y_0) \quad \text{con} \quad (\sqcup f_j(x)) = f_i(x) \quad \text{si } x \in X_i.$$

Como la unión es disjunta, $\sqcup f_j$ está bien definida y es continua (porque cada f_j lo es). Observa que por definición $f_i = \sqcup f_j \circ u_i$ donde u_i es la inclusión natural de (X_i, x_i) en $\sqcup (X_i, x_i)$.

Además, es una función basada porque $\sqcup f_j(x_i) = f_i(x_i) = y_0$ para toda $i \in J$. Esta última igualdad implica que $(\sqcup f_j)[B] = \{y_0\}$ y así $\sqcup f_j$ se factoriza a través de $\vee (X_j, x_j)$; a esta nueva función (continua de espacios basados) la llamo $\vee f_j$:

$$\begin{array}{ccc} \sqcup (X_j, x_j) & \xrightarrow{\sqcup f_j} & (Y, y_0) \\ \nu \downarrow & \nearrow \vee f_j & \\ \vee (X_j, x_j) & & \end{array} \quad \sqcup f_j = \vee f_j \circ \nu$$

Ahora sólo falta ver que $\theta = \vee f_j$ satisface el diagrama comutativo (1.9), es decir que $f_i = \vee f_j \circ \mu_i$. Esto se sigue inmediatamente de todas las definiciones que he dado y el diagrama comutativo anterior:

$$\vee f_j \circ \mu_i = \vee f_j \circ (\nu \circ u_i) = (\vee f_j \circ \nu) \circ u_i = \sqcup f_j \circ u_i = f_i.$$

Observa que si $\star \in \vee (X_j, x_j)$ es su punto base natural, entonces para $x_i \in (X_i, x_i)$ en la preimagen bajo (cualquier) μ_i tenemos que $\vee f_j(\star) = \vee f_j(\mu_i(x_i)) = f_i(x_i) = y_0$. Entonces $\vee f_j$ es un morfismo en \mathbf{Top}_* .

La unicidad de $\vee f_j$ se sigue de que el coproducto es un objeto inicial en una categoría adecuada. \square

Nota. Al morfismo $\vee f_j$ se le puede dar una fórmula: sea $[x] \in \vee (X_j, x_j)$, entonces $x \in \sqcup (X_j, x_j)$ y puedo asumir sin pérdida de generalidad que $x \in X_i$ para una $i \in J$. Observa que $\sqcup f_j(x) = f_i(x) \in Y$. Por construcción tengo que

$$\vee f_j([x]) = f_i(x) \quad \text{si } x \in (X_i, x_i).$$

Antes de seguir, observa que si considero el producto cuña de dos espacios (X, x_0) y (Y, y_0) entonces hay una manera canónica de ver $X \vee Y$ encajado en $X \times Y$ como el conjunto $(X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y)$. Ve la figura 1.3 para el caso general y la figura 1.4 para el caso particular $S^1 \vee S^1 \subset T^2$.

En efecto, si denoto $V := (X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y)$ y defino las siguientes dos funciones $f_X : X \rightarrow V$ y $f_Y : Y \rightarrow V$ como

$$f_X(x) = (x, y_0) \quad \text{y} \quad f_Y(y) = (x_0, y),$$

claramente tengo dos morfismos de espacios basados (ie. f_X y f_Y son continuas y basadas) y como el producto cuña es un coproducto en \mathbf{Top}_* existe un único morfismo $g := f_X \vee f_Y$ de $X \vee Y$ a V tal que:

$$g([z]) = \begin{cases} f_X(z) = (z, y_0) & \text{si } z \in X \\ f_Y(z) = (x_0, z) & \text{si } z \in Y \end{cases}$$

Para construir el inverso, observa que V se puede descomponer en una unión disjunta $V = ((X - x_0) \times \{y_0\}) \sqcup (\{y_0\} \times (Y - y_0)) \sqcup \{(x_0, y_0)\}$. Ahora defino la siguiente función:

$$h(x, y) := \begin{cases} [x] & \text{si } x \neq x_0, y = y_0 \\ [y] & \text{si } x = x_0, y \neq y_0 \\ \star & \text{si } x = x_0, y = y_0 \end{cases}$$

donde $\star \in X \vee Y$ es el punto base canónico (ie $\star = [x_0] = [y_0]$). Esta función es claramente continua porque sobre cada componente de V , h es la restricción de la función continua $X \rightarrow X \vee Y$, $Y \rightarrow X \vee Y$ y la función constante $(x_0, y_0) \mapsto \star$. Claramente:

$$(g \circ h)(x, y) = \begin{cases} g([x]) = (x, y_0) & \text{si } x \neq x_0, y = y_0 \\ g([y]) = (x_0, y) & \text{si } x = x_0, y \neq y_0 \\ g(\star) = (x_0, y_0) & \text{si } x = x_0, y = y_0 \end{cases} = \text{Id}_V$$

y

$$(h \circ g)([z]) = \begin{cases} h(z, y_0) = [z] & \text{si } z \in X \\ h(x_0, z) = [z] & \text{si } z \in Y \end{cases} = \text{Id}_{X \vee Y}.$$

por lo tanto $X \vee Y \approx V = (X \times \{y_0\}) \cup (\{y_0\} \times Y) \subset X \times Y$. Observa que la continuidad de g y h requieren que V tenga la topología de subespacio de la topología producto en $X \times Y$.

En general, si tomamos el producto cuña de una familia arbitraria de espacios basados, no necesariamente podemos encajar $\vee(X_j, x_j)$ en $\prod(X_j, x_j)$ (ie. que $\vee(X_j, x_j)$ sea homeomorfo a su imagen). Pero no todo se pierde:

Ejercicio 6. Sea $\{(X_j, x_j)\}_{j \in J}$ una familia de espacios basados y sean $\lambda_i : (X_i, x_i) \rightarrow \prod(X_j, x_j)$ las inclusiones naturales definidas por

$$\lambda_i(x) = \{z_j\}_{j \in J} \quad \text{con} \quad z_j = \begin{cases} x & \text{si } j = i \\ x_j & \text{si } j \neq i \end{cases}.$$

Entonces el morfismo inducido

$$\vee \lambda_j : \bigvee_{j \in J} (X_j, x_j) \longrightarrow \prod_{j \in J} X_j$$

es inyectivo.

Proof. Como en el lema 6, sean $\{\mu_j : (X_j, x_j) \rightarrow \vee(X_j, x_j)\}_{j \in J}$ los morfismos canónicos que hacen que $\vee(X_j, x_j)$ sea el coproducto en de $\{(X_j, x_j)\}$ en \mathbf{Top}_* . Además, sean $\pi_i : \prod(X_j, x_j) \rightarrow (X_i, x_i)$ las proyecciones canónicas definidas por

$$\pi_i(\{y_j\}_{j \in J}) = y_i \in (X_i, x_i).$$

Sean $[x], [x'] \in \vee(X_j, x_j)$ elementos distintos con $x \in (X_i, x_i)$ y $x' \in (X_l, x_l)$. Como las clases de x y x' son distintas, al menos una de ellos (sin pérdida de generalidad supongo que x) no es un punto base, ie. $x \neq x_i$.

Ahora si $i \neq l$ entonces:

$$\vee \lambda_j([x]) = \lambda_i(x) = \{z_j\} \neq \{z'_j\} = \lambda_l(x') = \vee \lambda_j([x'])$$

porque por definición los elementos $\{z_j\}$ y $\{z'_j\}$ difieren en la i -ésima entrada donde valen x y x_i respectivamente.

Si $i = l$, entonces:

$$\vee \lambda_j([x]) = \lambda_i(x) = \{z_j\} \neq \{z'_j\} = \lambda_i(x') = \vee \lambda_j([x'])$$

porque los elementos $\{z_j\}$ y $\{z'_j\}$ difieren nada más en la i -ésima entrada donde valen x y x' respectivamente que por hipótesis son distintos porque $[x] \neq [x']$ y $x, x' \in X_i$.

Por lo tanto si $[x] \neq [x']$ tengo que $\vee \lambda_j([x]) \neq \vee \lambda_j([x'])$ y $\vee \lambda_j$ es inyectiva. □

1.7 La ley exponencial y la suspensión reducida

En la categoría de conjuntos se cumple que:

Ejercicio 7. Sean X, Y y Z conjuntos, entonces:

$$\text{Hom}(X \times Z, Y) \xrightarrow{\Phi} \text{Hom}(X, \text{Hom}(Z, Y))$$

$$(X \times Z \xrightarrow{f} Y) \longmapsto (X \xrightarrow{\Phi_f} \text{Hom}(Z, Y))$$

definido por $\Phi_f(x) : Z \rightarrow Y$ con $\Phi_f(x)(z) = f(x, z)$ es una biyección.

Proof. Doy un inverso de Φ : sea $g \in \text{Hom}(X, \text{Hom}(Z, Y))$ con $g(x) : Z \rightarrow Y$ y defino

$$\Psi(g) : X \times Z \longrightarrow Y \quad \text{con} \quad \Psi(g)(x, z) = g(x)(z).$$

Para $f \in \text{Hom}(X \times Z, Y)$ calculo:

$$\Psi(\Phi(f))(x, z) = \Psi(\Phi_f)(x, z) = \Phi_f(x)(z) = f(x, z) \implies \Psi(\Phi(f)) = f.$$

Por otro lado si $g \in \text{Hom}(X, \text{Hom}(Z, Y))$ entonces:

$$\Phi(\Psi(g))(x)(z) = \Phi_{\Psi(g)}(x)(z) = \Psi(g)(x, z) = g(x)(z) \implies \Phi(\Psi(g)) = g.$$

Por lo tanto $\Psi = \Phi^{-1}$ y Φ es una biyección. □

En la categoría **Top** si sustituimos $\text{Hom}(\cdot, \cdot)$ por $\text{Map}(\cdot, \cdot)$ entonces

$$\Phi : \text{Map}(X \times Z, Y) \longrightarrow \text{Map}(X, \text{Map}(Z \times Y)) \tag{1.10}$$

no es necesariamente una biyección porque la imagen de alguna $f \in \text{Map}(X \times Z, Y)$ bajo Φ no necesariamente es continua. Pero si le pedimos propiedades adicionales a Z podemos hacer que Φ sea biyectiva:

Teorema 7. Si Z es localmente compacto y Hausdorff, entonces Φ de (1.10) es biyectiva.

Para este caso particular vamos a hacer $Z = I$ que claramente es localmente compacto (pues es compacto) y Hausdorff, entonces el teorema es válido. Además, si quiero aplicarlo a lazos y al grupo fundamental, es necesario cambiar de categoría a **Top*** e identificar $I \rightarrow I/\partial I$. El lado derecho de 1.10 es fácil cambiarlo pero no es inmediatamente obvio que es lo hay que hacer del lado izquierdo para mantener la biyección:

$$\begin{array}{ccc} \text{Map}(X \times I, Y) & \xrightarrow{\Phi} & \text{Map}(X, \text{Map}(I, Y)) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ ? & \longleftrightarrow & \text{Map}_*((X, x_0), \Omega(Y, y_0)) \end{array}$$

Considera $f \in \text{Map}(X \times I, Y)$ arbitrario. Quiero que $\Phi_f(x) \in \Omega(Y, y_0)$, es decir $\Phi_f(x)(0) = f(x, 0) = y_0 = f(x, 1) = \Phi_f(x)(1)$ para toda $x \in X$. Una forma de forzar esto es identificar, en $X \times I$, todos los puntos de la forma $(x, 0)$ ó $(x, 1)$. Entonces el primer paso es hacer:

$$X \times I \rightsquigarrow X \times I / (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})$$

También quiero que Φ_f sea un morfismo de espacios basados, es decir que $\Phi_f(x_0)$ es el punto base de $\Omega(Y, y_0)$, ie. el lazo contante e_{y_0} . Esto significa que $\Phi_f(x_0)(t) = e_{y_0}(t) = y_0$ para toda $t \in I$. Similarmente fuerzo esta condición al identificar todo el conjunto $\{x_0\} \times I$ en $X \times I$:

$$X \times I \rightsquigarrow X \times I / (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \rightsquigarrow X \times I / (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (\{x_0\} \times I).$$

Resulta que esto es suficiente para traducir la biyección Φ de (1.10) al espacio de lazos. La construcción anterior tiene un nombre:

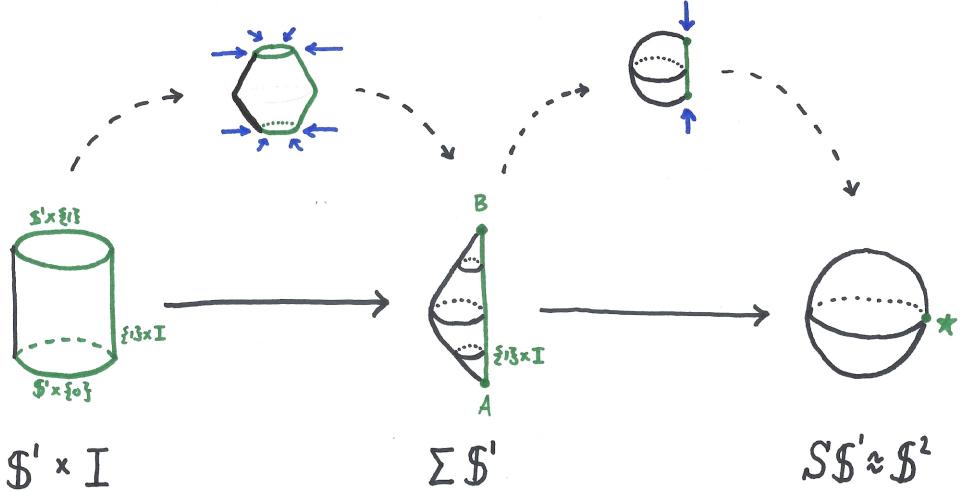


Figure 1.5: Construcción de $\mathcal{S}\mathbb{S}^1$.

Definición 8. Sea (X, x_0) un espacio basado, entonces la *suspensión reducida* de X es:

$$\mathcal{S}X := (X \times I) /_{(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (\{x_0\} \times I)}$$

y también es un espacio basado con base \star , el punto al que se identifica todo el conjunto $(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (\{x_0\} \times I)$.

Nota. A veces es útil definir el paso intermedio que se usó para definir la suspensión reducida. Si defino $A = X \times \{0\} \subset X \times I$ y $B = X \times \{1\} \subset X \times I$, entonces la *suspensión no-reducida* de X es el cociente:

$$\Sigma X := (X \times I) /_{A, B}.$$

Observa que no estoy identificando $A \cup B$ a un punto. Más bien estoy identificando A a un punto y B a otro punto. La figura 1.5 ilustra los pasos para construir la suspensión de \mathbb{S}^1 .

Vale la pena mencionar que la figura 1.5 también funciona para visualizar la construcción de la suspensión reducida del disco; el cilindro del inicio está lleno en este caso y por lo tanto la esfera al final está llena también, por lo tanto $\mathcal{S}\mathbb{D}^2 \approx B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ la bola de radio 1 con centro en el origen.

Con esta definición, puedo reescribir (1.10) como:

Ejercicio 8. Sean (X, x_0) y (Y, y_0) espacios basados, entonces:

$$\text{Map}_* \left((\mathcal{S}X, \star), (Y, y_0) \right) \xrightarrow{\Phi} \text{Map}_* \left((X, x_0), (\Omega(Y, y_0), e) \right)$$

$$\left(\mathcal{S}X \xrightarrow{f} Y \right) \longmapsto \left(X \xrightarrow{\Phi_f} \Omega(Y, y_0) \right)$$

definido por $\Phi_f(x)(t) = f[x, t]$ es una biyección. Aquí $[x, t]$ es una clase de equivalencia en $\mathcal{S}X$.

Proof. La prueba es muy similar al ejercicio 7; hay unos detalles adicionales que hay que verificar. Para probar que Φ es biyectiva, exhibo un inverso.

Sea $g \in \text{Map}_* \left((X, x_0), (\Omega(Y, y_0), e) \right) = \text{Map}_* \left(X, \Omega \right)$. Entonces $g(x) : I \rightarrow Y$ es un lazo (ie. $g(x)(0) = y_0 = g(x)(1)$ para toda $x \in X$) y $g(x_0) = e_{y_0}$ es el lazo constante. Defino la siguiente función:

$$\Psi(g) : \mathcal{S}X \longrightarrow Y \quad \text{con} \quad \Psi(g)[x, t] = g(x)(t).$$

Observa que está bien definido porque:

$$\Psi(g)[x, 0] = g(x)(0) = y_0 = g(x)(1) = \Psi(g)[x, 1] \quad \forall x \in X$$

y

$$\Psi(g)[x_0, t] = e_{y_0}(t) = y_0 \quad \forall t \in I.$$

Estas últimas dos igualdades implican que $\Psi(g)$ está bien definido sobre $\mathcal{S}X$.

Ahora verifico que $\Psi = \Phi^{-1}$. Para $f \in \text{Map}_*(\mathcal{S}X, Y)$ calculo:

$$\Psi(\Phi(f))[x, t] = \Psi(\Phi_f)[x, t] = \Phi_f(x)(t) = f[x, t] \implies \Psi(\Phi(f)) = f.$$

Por otro lado si $g \in \text{Map}_*(X, \Omega)$ entonces:

$$\Phi(\Psi(g))(x)(t) = \Phi_{\Psi(g)}(x)(t) = \Psi(g)[x, t] = g(x)(t) \implies \Phi(\Psi(g)) = g.$$

Por lo tanto $\Psi = \Phi^{-1}$ y Φ es una biyección. □

La suspensión reducida es un funtor $\mathcal{S} : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}_*$. En efecto, si $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ es un morfismo, entonces la función continua $(f \times \text{Id}_I) : X \times I \rightarrow Y \times I$ se factoriza a través de $\mathcal{S}X$, es decir:

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{f \times \text{Id}_I} & Y \times I \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{S}X & \xrightarrow{\mathcal{S}f} & \mathcal{S}Y \end{array}$$

Esto sucede porque

$$(f \times \text{Id}_I)(x, 0) = (f(x), 0), \quad (f \times \text{Id}_I)(x, 1) = (f(x), 1), \quad (f \times \text{Id}_I)(x_0, t) = (y_0, t) \quad \forall x \in X, t \in I,$$

es decir que el conjunto en $X \times I$ que se identifica a un punto se manda, bajo $f \times \text{Id}_I$, al conjunto de $Y \times I$ que se identifica a un punto.

Además claramente tengo que $\mathcal{S}\text{Id}_X = \text{Id}_{\mathcal{S}X}$ porque $\mathcal{S}\text{Id}_X$ es inducido por $\text{Id}_X \times \text{Id}_I = \text{Id}_{X \times I}$ y por último, si $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$, entonces $(g \circ f) \times \text{Id}_I = (g \times \text{Id}_I) \circ (f \times \text{Id}_I)$ y así $\mathcal{S}(g \circ f) = \mathcal{S}g \circ \mathcal{S}f$. Por lo tanto he probado que:

Proposición 6. La suspensión reducida es un funtor (covariante) $\mathcal{S} : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}_*$.

Podemos juntar esta proposición con la proposición 1 y el ejercicio 8 para deducir:

Corolario 8. Los funtores $\mathcal{S} : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}_*$ y $\Omega : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}_*$ son funtores adjuntos, más precisamente \mathcal{S} es adjunto izquierdo de Ω y Ω es adjunto derecho de \mathcal{S} :

$$\text{Hom}(\mathcal{S}X, Y) \longleftrightarrow \text{Hom}(X, \Omega Y)$$

donde he sustituido $\text{Map}_*(\cdot, \cdot)$ por la notación categórica.

Más que Map_* , me interesa las clases de equivalencia módulo homotopía. Resulta que la función Φ del ejercicio 8 se factoriza a través de las clases de homotopía. Más precisamente:

Ejercicio 9. Sean (X, x_0) y (Y, y_0) espacios basados, entonces la función inducida por Φ del ejercicio 8:

$$[(\mathcal{S}X, \star), (Y, y_0)] \longleftrightarrow [(X, x_0), (\Omega(Y, y_0), e)]$$

es una biyección.

Proof. Usaré la misma notación que el ejercicio 8 y todos los espacios son basados.

Sean $f, f' \in \text{Map}_*(\mathcal{S}X, Y)$ y $g, g' \in \text{Map}_*(X, \Omega Y)$. Si pruebo que

$$f \simeq f' \implies \Phi(f) \simeq \Phi(f') , \quad g \simeq g' \implies \Psi(g) \simeq \Psi(g')$$

entonces Φ y Ψ se factorizan naturalmente a través de los espacios cocientes, es decir que existen únicos:

$$\begin{array}{ccc} \text{Map}_*(\mathcal{S}X, Y) & \xrightarrow{\Phi} & \text{Map}_*(X, \Omega Y) \\ \pi_1 \downarrow & \dashrightarrow \bar{\Phi} & \downarrow \pi_2 \\ [\mathcal{S}X, Y] & & [X, \Omega Y] \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{Map}_*(X, \Omega Y) & \xrightarrow{\Psi} & \text{Map}_*(\mathcal{S}X, Y) \\ \pi_2 \downarrow & \dashrightarrow \bar{\Psi} & \downarrow \\ [X, \Omega Y] & & [\mathcal{S}X, Y] \end{array} \quad (1.11)$$

que hacen commutar los diagramas, es decir que $\Phi = \bar{\Phi} \circ \pi_1$ y $\Psi = \bar{\Psi} \circ \pi_2$. He denotado por π_i la función cociente. Observa que por definición $\bar{\Phi}([f]) = \Phi(f)$.

Supongo que $f \simeq f'$ mediante la homotopía $F : \mathcal{S}X \times I \rightarrow Y$. Para un parámetro fijo $t \in I$ tengo que $F_t \in \text{Map}_*(\mathcal{S}X, Y)$ entonces $\Phi(F_t) \in \text{Map}_*(X, \Omega Y)$ tiene sentido y es una función continua. Con esto defino $F' : X \times I \rightarrow \Omega Y$ con:

$$F'(x, t) := \Phi(F_t)(x)$$

que es continua porque cada $\Phi(F_t)$ lo es. Observa que $F'(x, 0) = \Phi(F_0)(x) = \Phi(f)(x)$ y $F'(x, 1) = \Phi(F_1)(x) = \Phi(f')(x)$ entonces F' es una homotopía entre $\Phi(f)$ y $\Phi(f')$, es decir $\Phi(f) \simeq \Phi(f')$.

Por otro lado supongo que $g \simeq_G g'$ con $G : X \times I \rightarrow \Omega Y$ una homotopía. Observa que para todo parámetro $G_t \in \text{Map}_*(X, \Omega Y)$ y así $\Psi(G_t) \in \text{Map}_*(\mathcal{S}X, Y)$ y es continua. Similarmente defino:

$$G'([x, s], t) := \Psi(G_t)[x, s]$$

donde $[x, s] \in \mathcal{S}X$. Observa que como cada $\Psi(G_t)$ es continua entonces G' también lo es. Además $G'([x, s], 0) = \Psi(G_0)[x, s] = \Psi(g)[x, s]$ y $G'([x, s], 1) = \Psi(G_1)[x, s] = \Psi(g')[x, s]$. Por lo tanto $\Psi(g) \simeq_{G'} \Psi(g')$.

Como $\text{Id} = \Psi \circ \Phi$, entonces:

$$\Phi(f) \simeq \Phi(f') \implies \Psi(\Phi(f)) = f \simeq f' = \Psi(\Phi(f'))$$

y así:

$$f \simeq f' \iff \Phi(f) \simeq \Phi(f')$$

o equivalentemente:

$$[f] = [f'] \iff [\Phi(f)] = [\Phi(f')].$$

Si uso la notación de los diagramas commutativos en (1.11), la equivalencia anterior quiere decir que la función

$$(\pi_2 \circ \bar{\Phi}) : [\mathcal{S}X, Y] \longrightarrow [X, \Omega Y]$$

es inyectiva porque

$$(\pi_2 \circ \bar{\Phi})([f]) = \pi_2(\bar{\Phi}([f])) = \pi_2(\Phi(f)) = [\Phi(f)].$$

Admeás, si $[g] \in [X, \Omega Y]$ entonces:

$$(\pi_2 \circ \bar{\Phi})([\Psi(g)]) = \pi_2(\bar{\Phi}(\Psi(g))) = \pi_2(\Phi(\Psi(g)))[\Phi(\Psi(g))] = [g]$$

y así $\pi_2 \circ \bar{\Phi}$ es sobreyectiva. Por lo tanto ésta es la biyección

$$[\mathcal{S}X, Y] \longleftrightarrow [X, \Omega Y].$$

□

Intuitivamente, el ejercicio 9 dice que la propiedad adjunta de los funtores \mathcal{S} y Ω se preserva bajo homotopías.

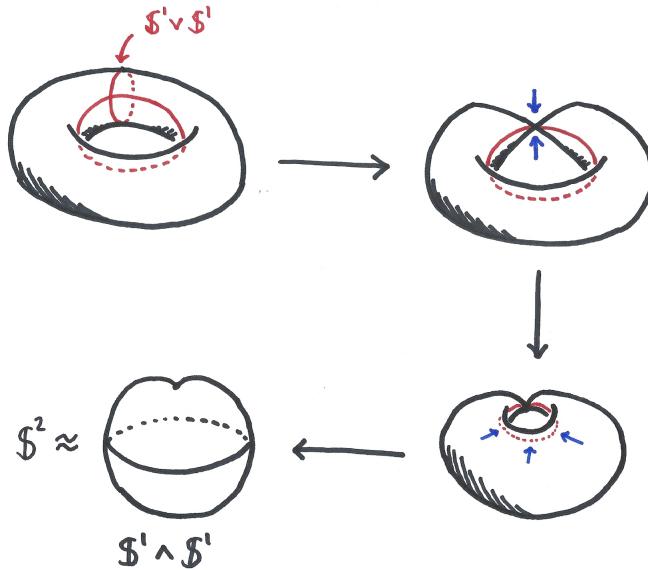


Figure 1.6: Construcción de $S^1 \wedge S^1$.

1.8 Producto “smash”

Las dos secciones anteriores me obligan a desarrollar una manera de calcular la suspensión reducida porque el lado izquierdo del ejercicio 9 se parece mucho a la definición 7; quiero una manera de encontrar una relación

$$[(SX, \star), (Y, y_0)] \rightsquigarrow [(\mathbb{S}^n, 1), (Y, y_0)] = \pi_n(Y, y_0)$$

Resulta que la suspensión se puede caracterizar mediante otra construcción topológica: el producto smash:

Definición 9. Sean (X, x_0) y (Y, y_0) espacios basados, entonces su *smash product* se define como el espacio cociente $X \times Y$ identificando $X \vee Y$ a un punto:

$$X \wedge Y := (X \times Y) /_{X \vee Y}.$$

Nota. Recuerda que la discusión que motiva el ejercicio 6 nos garantiza que $X \vee Y$ es homeomorfo al subespacio $(X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y)$ de $X \times Y$ y así el smash product está bien definido. Como consecuencia de esto, puedo reescribir el smash product como:

$$X \wedge Y := (X \times Y) /_{(X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y)}.$$

La figura 1.6 ilustra el proceso de identificación para obtener el smash product de dos círculos.

La relación entre la suspensión reducida y el smash product es evidente con el siguiente resultado:

Ejercicio 10. Para cualquier espacio basado (X, x_0) se tiene que

$$SX \approx X \wedge S^1$$

Proof. Usaré $I/\partial I$ en lugar de \mathbb{S}^1 , pero resumo la notación a $J := I/\partial I$. Denoto $\nu : I \rightarrow J$ como la función identificación; también tomo a $[0] = [1] \in J$ como el punto base. Considero la función:

$$\iota : X \times I \longrightarrow X \wedge J \quad \text{con} \quad \iota(x, t) = [x, [t]]$$

donde $[t] \in J$ y $[x, [t]]$ es la clase del punto $(x, [t]) \in X \times J$. Claramente es continua porque es la composición de las siguientes funciones continuas

$$X \times I \xrightarrow{\text{Id}_X \times \nu} X \times J \xrightarrow{\pi} X \wedge J$$

$$(x, t) \longmapsto (x, [t]) \longmapsto [x, [t]]$$

donde $\pi : X \times J \rightarrow X \wedge J$ es la proyección natural. Observa también, que como ν y π son sobreyectivas, ι es sobreyectiva.

Si denoto por \star al punto base canónico de $X \wedge J$, claramente se cumple que

$$\iota(x, 0) = [x, [0]] = \star = [x, [1]] = \iota(x, 1)$$

para toda $x \in X$ porque $(x, [0]), (x, [1]) \in X \vee J = (X \times \{\star\}) \cup (\{x_0\} \times J) \subset X \times J$ que es el conjunto que se identifica a un punto al contruir $X \wedge J$. Además tengo que

$$(x_0, [t]) \in X \vee J \implies \iota(x_0, t) = [x_0, [t]] = \star \quad \forall t \in I.$$

Todo esto junto implica que ι es constante sobre el conjunto $(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (\{x_0\} \times I)$ y así se factoriza a través de la suspensión reducida:

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{\iota} & X \wedge J \\ \nu \downarrow & \nearrow \bar{\iota} & \\ SX & & \end{array}$$

Si pruebo que ι es una identificación, entonces podré concluir que $\bar{\iota}$ es un homeomorfismo. Como ι es sobreyectiva, basta probar que es una función abierta:

Sea $U \subseteq X \times I$ abierto. Entonces existen abiertos $V_1 \subseteq X$ y $V_2 \subseteq I$ tales que $U = V_1 \times V_2$.

□

La siguiente proposición nos permite calcular la suspensión reducida de cualquier esfera:

Proposición 7.

$$\mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^n \approx \mathbb{S}^{n+1} \quad \forall n \geq 0$$

Proof. Encajo $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ como el conjunto de vectores unitarios y defino los hemisferios:

$$\mathbb{S}_\pm^{n+1} := \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{S}^{n+1} \mid \pm x_{n+2} > 0\}.$$

También encajo $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ como

$$\mathbb{S}^n := \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{S}^{n+1} \mid x_{n+2} = 0\},$$

en particular $\mathbb{S}^{n+1} = \mathbb{S}_+^{n+1} \cup \mathbb{S}_-^{n+1} \cup \mathbb{S}^n$. Por último encajo el disco unitario $\mathbb{D}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ como

$$\mathbb{D}^{n+1} := \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \sum x_i^2 \leq 1 \text{ y } x_{n+2} = 0\}.$$

Ahora defino dos funciones ρ_+ y ρ_- como $\rho_\pm : \mathbb{D}^{n+1} \rightarrow \mathbb{S}_\pm^{n+1}$ con regla de correspondencia:

$$\rho_\pm(x_1, \dots, x_{n+1}, 0) = \left(x_1, \dots, x_{n+1}, \pm \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2} \right).$$

Cada ρ_\pm es continua porque $\sum x_i^2 \leq 1$ y así son composición de funciones continuas. Además, son hoemoemorfismos porque ambas tienen el mismo inverso continuo: la proyección $\mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ que iguala la última coordenada a 0 (estas ρ 's se parecen mucho a las cartas de la esfera \mathbb{S}^{n+1} que la dotan de una estructura diferenciable, la única diferencia es que las cartas tienen como dominio el disco abierto y como imagen al interior de los hemisferios, véase el ejemplo 5 de la sección 1.10).

Sea $s_0 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ el punto base de \mathbb{S}^n y \mathbb{S}^{n+1} . Con esto defino la función $h : I \times \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ como:

$$h(t, x) := \begin{cases} \rho_-(2tx + (1-2t)s_0) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \rho_+(2(1-t)x + (2t-1)s_0) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Para probar que h es continua basta ver que ambas partes coinciden en $t = \frac{1}{2}$. Como $x = (x_1, \dots, x_{n+1}, 0) \in \mathbb{S}^n$ entonces $\sum x_i^2 = 1$ entonces:

$$\rho_-(2\frac{1}{2}x + (1-2\frac{1}{2})s_0) = \rho_-(x) = (x_1, \dots, x_{n+1}, -\sqrt{1 - \sum x_i^2}) = (x_1, \dots, x_{n+1}, 0) = x.$$

Similarmente:

$$\rho_+(2(1 - \frac{1}{2})x + (2\frac{1}{2} - 1)s_0) = \rho_+(x) = (x_1, \dots, x_{n+1}, \sqrt{1 - \sum x_i^2}) = (x_1, \dots, x_{n+1}, 0) = x.$$

Por lo tanto h es continua.

Además $h(0, x) = \rho_-(s_0) = s_0 = \rho_+(s_0) = h(1, x)$, entonces h se factoriza a través de:

$$\begin{array}{ccc} I \times \mathbb{S}^n & \xrightarrow{h} & \mathbb{S}^{n+1} \\ \nu \times \text{Id}_{\mathbb{S}^n} \downarrow & \nearrow & \\ \frac{I}{\partial I} \times \mathbb{S}^n & \xrightarrow{\bar{h}} & \end{array}$$

Observa que, como \mathbb{S}^n es compacto y Hausdorff y ν es una identificación, la función $\nu \times \text{Id}_{\mathbb{S}^n}$ también es una identificación.

Lo único que falta probar es que \bar{h} se factoriza a través de

$$\begin{array}{ccc} \frac{I}{\partial I} \times \mathbb{S}^n & \xrightarrow{\bar{h}} & \mathbb{S}^{n+1} \\ \pi \downarrow & \nearrow & \\ \frac{I/\partial I \times \mathbb{S}^n}{I/\partial I \vee \mathbb{S}^n} & \xrightarrow{\hat{h}} & \end{array}$$

y que \hat{h} es biyectiva. Estas dos cosas nos implican que \hat{h} es un homeomorfismo ya que sería una función continua y biyectiva con dominio compacto y Hausdorff (ie. $\frac{I/\partial I \times \mathbb{S}^n}{I/\partial I \vee \mathbb{S}^n} = \mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^n$) y por lo tanto $\mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^n \approx \mathbb{S}^{n+1}$. Lo que me falta lo pruebo en el siguiente ejercicio:

Ejercicio 11. Sea $\bar{h} : \frac{I}{\partial I} \times \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ como en la proposición 7. Entonces \bar{h} se factoriza a través de $\mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^n$ y que \hat{h} , la función inducida, es biyectiva.

□

Si junto el ejercicio 10 y la proposición 7, obtengo una fórmula para calcular la suspensión reducida de cualquier esfera:

Corolario 9.

$$\mathcal{SS}^n \approx \mathbb{S}^{n+1}$$

Con este corolario puedo reescribir la definición del grupo fundamental (como mencioné al principio de esta sección). Omito la notación de espacio basado: para toda $n \geq 1$ tengo

$$\pi_n(X, x_0) = [\mathbb{S}^n, X] = [\mathcal{SS}^{n-1}, X] \longleftrightarrow [\mathbb{S}^{n-1}, \Omega X] = \pi_{n-1}(\Omega X, e).$$

En particular para $n = 1$ concluyo que

$$\pi_1(X, x_0) \longleftrightarrow \pi_0(\Omega X, e).$$

Esto quiere decir que el grupo fundamental de un espacio está en biyección canónica con las componentes conexas de su espacio de lazos (cf. proposición 5). Tiene sentido este hecho porque, de alguna manera, las homotopías entre lazos funcionan como trayectorias que las une.

1.9 H -grupos y H -cogrupos

Hasta ahora, todas las relaciones entre los grupos fundamentales y las clases de funciones continuas de la forma $[(X, x_0), (Y, y_0)]$ han sido biyecciones; nunca he establecido más estructura salvo el de conjunto. En esta sección estudio cuando $[(X, x_0), (Y, y_0)]$ tiene estructura de grupo y como depende de las propiedades de X y de Y . Esto me permitirá clasificar los grupos fundamentales de manera algebraica. En el resto

de la sección, todos los espacios considerados son basados, entonces omito la notación de espacio basado: cambio (X, x_0) por X .

Como primer ejemplo, supongo que G es un grupo topológico con un producto $\mu : G \times G \rightarrow G$ y neutro $1 \in G$ (que funciona como base del espacio G). Entonces al conjunto $[X, G]$ se le puede dotar, de manera natural, una estructura de grupo:

$$[f] *_{\mu} [g] := [\mu \circ (f, g)] = \left[X \xrightarrow{(f, g)} G \times G \xrightarrow{\mu} G \right].$$

De hecho se cumple más: $\text{Map}_*(X, G)$ es un grupo con $(f *_{\mu} g)(x) := \mu(f(x), g(x))$. Observa que mantengo la misma notación para la operación apesar de que una está definida para funciones y la otra para clases de homotopía de funciones; esto no debería causar confusión.

La operación $*_{\mu}$ sobre $\text{Map}_*(X, G)$ es una operación de grupo. En efecto,

$$\begin{aligned} ((f *_{\mu} g) *_{\mu} h)(x) &= \mu((f *_{\mu} g)(x), h(x)) \\ &= \mu(\mu(f(x), g(x)), h(x)) \\ &= \mu(f(x), \mu(g(x), h(x))) \\ &= \mu(f(x), (g *_{\mu} h)(x)) \\ &= (f *_{\mu} (g *_{\mu} h))(x) \end{aligned}$$

y así $*_{\mu}$ es asociativa. Además la función constante (basado) $e : X \rightarrow G$ es el neutro: $(f *_{\mu} e)(x) = \mu(f(x), 1) = f(x) = \mu(1, f(x)) = (e *_{\mu} f)$. Además, para toda $f \in \text{Map}_*(X, G)$ la función $\bar{f}(x) = f(x)^{-1}$ es claramente el inverso de f porque tomar inversos en G es continua.

Esta conclusión es muy fuerte. Yo quiero estructura de grupo para $[X, Y]$, no para $\text{Map}_*(X, Y)$. Si relajo las condiciones para Y puedo incluir a más ejemplos.

Me interesan las relaciones de grupo topológico *módulo* homotopía. En lugar de la igualdad en la definición de grupo, por ejemplo la asociatividad $\mu(\mu, \text{Id}) = \mu(\text{Id}, \mu)$, me basta tomar la homotopía porque quiero trabajar con clases de funciones. Con esto puedo definir un “grupo módulo homotopía”. Más precisamente:

Definición 10. (Hopf) Sea (W, w_0) un espacio basado y $e_0 : W \rightarrow W$ es la función constante w_0 . (W, μ, λ) es un *H-grupo* si W viene equipada con dos funciones continuas (basadas) $\mu : W \times W \rightarrow W$ y $\lambda : W \rightarrow W$ que cumplen:

1. (Asociatividad) $\mu \circ (\mu \times \text{Id}_W) \simeq \mu \circ (\text{Id}_W \times \mu)$.
2. (Existencia de Neutro) $\mu \circ (\text{Id}_W, e_0) \simeq \text{Id}_W \simeq \mu \circ (e_0, \text{Id}_W)$.
3. (Existencia de Inversos) $\mu \circ (\text{Id}_W, \lambda) \simeq \text{Id}_W \simeq \mu \circ (\lambda, \text{Id}_W)$.

Un *H-grupo* es un grupo topológico módulo homotopías. Las tres propiedades se pueden resumir en las siguientes tres diagramas comutativos módulo homotopías (ie. cualquiera dos caminos que empiezan y terminan en los mismos puntos producen funciones homotópicas):

$$\begin{array}{ccc} W \times W \times W & \xrightarrow{\text{Id} \times \mu} & W \times W \\ \downarrow \mu \times \text{Id} & & \downarrow \mu \\ W \times W & \xrightarrow{\mu} & W \end{array} \quad \begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{(\text{Id}, e_0)} & W \times W & \xleftarrow{(e_0, \text{Id})} & W \\ \searrow \text{Id} & & \downarrow \mu & \swarrow \text{Id} & \\ & W & & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{(\text{Id}, \lambda)} & W \times W & \xleftarrow{(\lambda, \text{Id})} & W \\ \searrow \text{Id} & & \downarrow \mu & \swarrow \text{Id} & \\ & W & & & \end{array}$$

Asociatividad

Nuetro

Inversos

Nota. También decimos que W es un *H-grupo* commutativo si además

$$\begin{array}{ccc} W \times W & \xrightarrow{C} & W \times W \\ \searrow \mu & & \swarrow \mu \\ & W & \end{array}$$

es un diagrama comutativo módulo homotopías donde $C(x, y) = (y, x)$.

La siguiente proposición aclara el motivo para definir un H -grupo:

Proposición 8. Si (W, μ) es un H -grupo, entonces $[X, W]$ es un grupo con operación $[f] *_{\mu} [g] := [f *_{\mu} g] = [\mu \circ (f, g)]$.

Proof. Si aplico la proposición 2 a la asociatividad de la definición de H -grupo, obtengo:

$$\mu \circ (\mu \times \text{Id}_W) \circ (f, g, h) \simeq \mu \circ (\text{Id}_W \times \mu) \circ (f, g, h)$$

y así

$$\begin{aligned} (f *_{\mu} g) *_{\mu} h &= \mu \circ (f *_{\mu} g, h) = \mu \circ (\mu(f, g), h) = \mu \circ (\mu \times \text{Id}_W) \circ (f, g, h) \\ &\simeq \mu \circ (\text{Id}_W \times \mu) \circ (f, g, h) = \mu \circ (f, \mu(g, h)) = \mu \circ (f, g *_{\mu} h) \\ &\simeq f *_{\mu} (g *_{\mu} h). \end{aligned}$$

Por lo tanto $([f] *_{\mu} [g]) *_{\mu} [h] = [f] *_{\mu} ([g] *_{\mu} [h])$. Las otras propiedades de grupo se prueban de manera equivalente: aplica la proposición 2 a cada equivalencia de la definición de H -grupo. Entonces omito la verificación. \square

El ejemplo más importante de H -grupo para calcular el grupo fundamental es ΩX . Defino $\mu(\alpha, \beta) = \alpha * \beta$ y $\lambda(\alpha) = \bar{\alpha}$ que ya sabemos que están bien definidas (ie, $\alpha * \beta$ y $\bar{\alpha}$ son lazos).

Las propiedades de H -grupo se siguen inmediatamente de que $\pi_1(X, x_0)$ es un grupo con las operaciones $[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta]$ y $[\alpha]^{-1} = [\bar{\alpha}]$. Lo único que falta es probar que efectivamente $\mu : \Omega X \times \Omega X \rightarrow \Omega X$ y $\lambda : \Omega X \rightarrow \Omega X$ son funciones continuas:

Ejercicio 12. Sea ΩX el espacio de lazos de un espacio basado (X, x_0) , equipada con la topología compacto-abierta. Entonces las funciones

$$\mu : \Omega X \times \Omega X \longrightarrow \Omega X \quad y \quad \lambda : \Omega X \longrightarrow \Omega X$$

definidas por $\mu(\alpha, \beta) = \alpha * \beta$ y $\lambda(\alpha) = \bar{\alpha}$ son funciones continuas. En particular ΩX es un H -grupo.

Proof. Recuerda que la topología compacto-abierta tiene como subbase a todos los conjuntos de la forma

$$B(K, U) := \{\alpha \in \Omega X \mid \alpha[K] \subseteq U\}$$

donde $K \subseteq I$ es compacto y $U \subseteq X$ es abierto. A K la puedo separar como la unión de los dos compactos $K_1 := K \cap [0, \frac{1}{2}]$ y $K_2 = K \cap [\frac{1}{2}, 1]$ (K_i es compacto por ser subespacio cerrado de un compacto). Entonces $K = K_1 \cup K_2$ y $B(K, U) = B(K_1, U) \cap B(K_2, U)$ porque $\alpha[K_1], \alpha[K_2] \subseteq U$ si y sólo si $\alpha[K_1] \cup \alpha[K_2] = \alpha[K] \subseteq U$.

Por lo tanto para probar continuidad basta verificar que $\mu^{-1}[B(K, U)]$ y $\lambda^{-1}[B(K, U)]$ son abiertos en $\Omega X \times \Omega X$ y ΩX respectivamente, para todo compacto $K \subseteq I$ y abierto $U \subseteq X$.

Sea $K \subseteq I$ compacto y $U \subseteq X$ abierto. Afirmo que:

$$\mu^{-1}[B(K, U)] = B(2K_1, U) \times B(2K_2 - 1, U) \quad y \quad \lambda^{-1}[B(K, U)] = B(1 - K, U)$$

donde $2K_1$ es la imagen de K_1 bajo la función continua $x \mapsto 2x$; observa que $2K_1$ es compacto. De manera similar defino $2K_2 - 1$ y $1 - K$.

Para la primera igualdad observa que:

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) \in \mu^{-1}[B(K, U)] &\iff \mu(\alpha, \beta)[K] = (\alpha * \beta)[K] = (\alpha * \beta)[K_1] \cup (\alpha * \beta)[K_2] \subseteq U \\ &\iff (\alpha * \beta)[K_1] \subseteq U \quad y \quad (\alpha * \beta)[K_2] \subseteq U. \end{aligned}$$

Ahora si $s \in K_1$ entonces $(\alpha * \beta)(s) = \alpha(2s)$ y así $\alpha[2K_1] = (\alpha * \beta)[K_1]$. Por lo tanto

$$(\alpha * \beta)[K_1] = \alpha[2K_1] \subseteq U \iff \alpha \in B(2K_1, U),$$

y similarmente:

$$(\alpha * \beta)[K_2] = \beta[2K_2 - 1] \subseteq U \iff \beta \in B(2K_2 - 1, U),$$

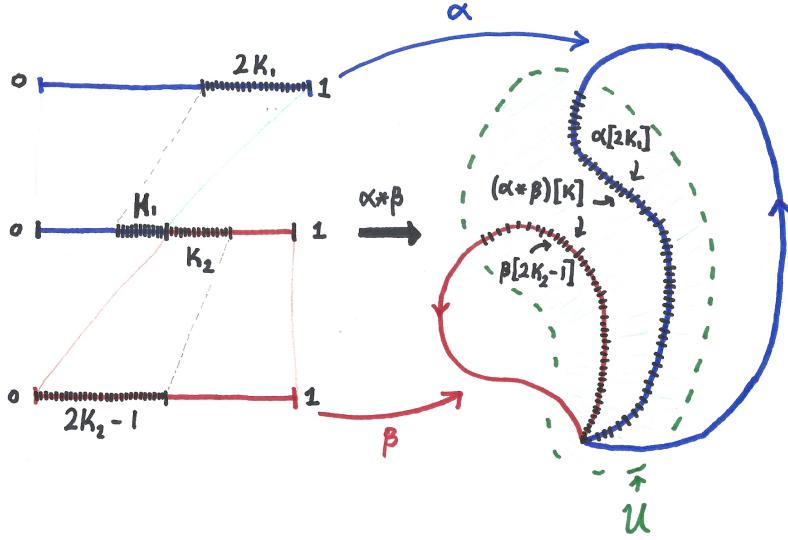


Figure 1.7: La multiplicación en ΩX es continua.

Con esto concluyo que:

$$(\alpha, \beta) \in \mu^{-1}[B(K, U)] \iff (\alpha, \beta) \in B(2K_1, U) \times B(2K_2 - 1, U)$$

y así $\mu^{-1}[B(K, U)] = B(2K_1, U) \times B(2K_2 - 1, U)$ es abierto (por ser producto de subásimos).

Por último, como $\lambda(\alpha)(s) = \bar{\alpha}(s) = \alpha(1 - s)$, tengo que $\alpha[1 - K] = \bar{\alpha}[K]$. Análogamente concluyo que $\alpha \in \lambda^{-1}[B(K, U)]$ si y sólo si $\alpha \in B(1 - K, U)$ y así $\lambda^{-1}[B(K, U)] = B(1 - K, U)$ es abierto.

Con esto termino la prueba. La figura 1.7 ilustra esta demostración. \square

Si junto lo anterior con la proposición 8 he probado que

Corolario 10.

$$\pi_0(\Omega X, e_0) = [\mathbb{S}^0, \Omega X] \text{ es un grupo.}$$

Vale la pena mencionar cuando vale el regreso de la proposición 8:

Fijo (W, w_0) en la categoría **Top**_{*}. La asociación $(X, x_0) \mapsto \text{Map}_*(X, W)$ es claramente un functor contravariante a la categoría de conjuntos porque $\text{Map}_*[\cdot, W] = \text{Hom}(\cdot, W)$. Recuerda que si $f \in \text{Map}_*(X, Y)$ entonces $f^* := \text{Map}_*(f, W) : \text{Hom}(Y, W) \rightarrow \text{Hom}(X, W)$ definido por $f^*(h) = h \circ f$.

Resulta que el functor $\text{Map}_*(\cdot, W)$ puede pasar a clases de equivalencia precisamente cuando W es un H -grupo. Con esto me refiero a que la asociación $[\cdot, W] : \text{Top}_* \rightarrow \text{Grupos}$ inducida por $\text{Map}_*(\cdot, W) : \text{Top}_* \rightarrow \text{Conjuntos}$ es un functor.

Teorema 11. Sea (W, w_0) un espacio basado. Entonces:

$$W \text{ es un } H\text{-grupo} \iff [\cdot, W] : \text{Top}_* \rightarrow \text{Grupos} \text{ es un functor contravariante.}$$

Existe una construcción dual a la de H -grupo que nos permite estudiar cuando $[W, X]$ es un grupo, es decir cuando $[W, \cdot]$ es un functor a la categoría de grupos.

Lo que sigue es completamente análogo a la definición de H -grupo y todas las consecuencias de éste; basta cambiar la dirección de las flechas y cambiar productos por coproductos (ie. producto cuña, cf. lema 6). En particular la multiplicación $\mu : W \times W \rightarrow W$ se convierte en $\nu : W \rightarrow W \vee W$.

Definición 11. Sea (W, w_0) un espacio basado y $e_0 : W \rightarrow W$ la función constante w_0 . (W, ν, λ) es un H -cogrupo si W viene equipada con dos funciones continuas (basadas) $\nu : W \rightarrow W \vee W$ y $\lambda : W \rightarrow W$ que cumplen:

1. (Co-asociatividad) $(\nu \vee \text{Id}_W) \circ \nu \simeq (\text{Id}_W \vee \nu) \circ \nu$.

2. (Existencia de Co-neutro) $(\text{Id}_W, e_0) \circ \nu \simeq \text{Id}_W \simeq (e_0, \text{Id}_W) \circ \nu$.
3. (Existencia de co-inversos) $(\text{Id}_W, \lambda) \circ \nu \simeq \text{Id}_W \simeq (\lambda, \text{Id}_W) \circ \nu$.

Es decir los siguientes diagramas commutan módulo homotopías:

$$\begin{array}{ccc} W \vee W \vee W & \xleftarrow{\text{Id} \vee \nu} & W \vee W \\ \nu \vee \text{Id} \uparrow & & \uparrow \nu \\ W \vee W & \xleftarrow{\nu} & W \end{array}$$

Coasociatividad

$$\begin{array}{ccc} W & \xleftarrow{\text{Id}, e_0} & W \vee W & \xrightarrow{(e_0, \text{Id})} & W \\ & \searrow \text{Id} & \uparrow \nu & \swarrow \text{Id} & \\ & W & & W & \end{array}$$

Con-neutro

$$\begin{array}{ccccc} W & \xleftarrow{\text{Id}, \lambda} & W \vee W & \xrightarrow{(\lambda, \text{Id})} & W \\ & \searrow \text{Id} & \uparrow \mu & \swarrow \text{Id} & \\ & W & & W & \end{array}$$

Co-inversos

Tengo un dual a la proposición 8:

Proposición 9. Si (W, ν) es un H -cogrupo entonces $[W, X]$ es un grupo con la operación $[f] *_{\nu} [g] := [f *_{\nu} g] = [(f \vee g) \circ \nu]$.

Proof. Esta prueba es el dual de la prueba de la proposición 8; sólo escribo la asociatividad. Sean $f, g, h \in [W, X]$ entonces:

$$\begin{aligned} (f *_{\nu} g) *_{\nu} h &= ((f *_{\nu} g) \vee h) \circ \nu = (((f \vee g) \circ \nu) \vee h) \circ \nu \\ &\simeq (f \vee ((g \vee h) \circ \nu)) \circ \nu = (f \vee (g *_{\nu} h)) \circ \nu \\ &\simeq f *_{\nu} (g *_{\nu} h) \end{aligned}$$

donde la homotopía la obtengo al aplicar la proposición 2 a la composición de la función $f \vee g \vee h$ con ambas funciones que aparecen en la parte de co-asociatividad en la definición de H -cogrupo. \square

También tengo un dual del teorema 11:

Teorema 12. Sea (W, w_0) un espacio basado. Entonces:

$$W \text{ es un } H\text{-cogrupo} \iff [W, \cdot] : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grupos} \text{ es un funtor covariante.}$$

Como había un ejemplo natural de H -grupo, ie. el espacio de lazos, también hay un ejemplo natural de H -cogrupo: la suspensión reducida.

Para definir la ν requerida en la definición de H -cogrupo, primero defino $\nu : X \times I \rightarrow SX \vee SX \subset SX \times SX$ como

$$\nu(x, t) := \begin{cases} ([x, 2t], \star) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (\star, [x, 2t - 1]) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

donde $\star \in SX$ es el punto base canónico de la suspensión reducida.

Observa que cada componente de ν es continua porque son composición de funciones continuas, por ejemplo $(x, t) \mapsto (x, 2t) \mapsto [x, 2t] \mapsto ([x, 2t], \star)$. Además estas dos funciones continuas coinciden en la intersección de sus dominios:

$$\nu(x, \frac{1}{2}) = ([x, 1], \star) = (\star, \star) = (\star, [x, 0]).$$

Por lo tanto ν es continua.

También tengo que ν se factoriza a través de $B = (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (\{x_0\} \times I) \subset X \times I$ porque

$$\nu(x, 0) = ([x, 0], \star) = (\star, \star) = (\star, [x, 1]) = \nu(x, 1) \quad \forall x \in X$$

y

$$\nu(x_0, t) = \begin{cases} ([x_0, 2t], \star) = (\star, \star) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (\star, [x_0, 2t - 1]) = (\star, \star) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Por lo tanto existe una única función $\bar{\nu} : (X \times I)/B = SX \rightarrow SX \vee SX$ tal que:

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{\nu} & SX \vee SX \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{\nu} & \\ SX & & \end{array}$$

es un diagrama comutativo. Como ν es continua y π una identificación, $\bar{\nu}$ es continua.

Por otro lado, defino $\lambda : SX \rightarrow SX$ como $\lambda[x, s] = [x, 1 - s]$ que es continua porque es la composición de las funciones continuas $(x, s) \mapsto (x, 1 - s) \mapsto [x, 1 - s]$.

Por último nada más tengo que verificar las propiedades de H -cogrupo; sólo pruebo la co-asociatividad ya que las demás se demuestran de manera análoga.

Sea $[x, t] \in SX$ y calculo:

$$((\bar{\nu} \vee \text{Id}_{SX}) \circ \bar{\nu})[x, t] = (\bar{\nu} \vee \text{Id}_{SX})(\bar{\nu}[x, t]) = \begin{cases} (\bar{\nu} \vee \text{Id}_{SX})([x, 2t], \star) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (\bar{\nu} \vee \text{Id}_{SX})(\star, [x, 2t - 1]) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

donde $([x, 2t], \star) \in SX \times \{\star\} \subset SX \vee SX$ y así

$$(\bar{\nu} \vee \text{Id}_{SX})([x, 2t], \star) = \bar{\nu}[x, 2t] = \nu(x, 2t) =$$

Por otro lado

$$((\text{Id}_{SX} \vee \bar{\nu}) \circ \bar{\nu})[x, t] = (\text{Id}_{SX} \vee \bar{\nu})(\bar{\nu}[x, t]) = \begin{cases} (\text{Id}_{SX} \vee \bar{\nu})([x, 2t], \star) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (\text{Id}_{SX} \vee \bar{\nu})(\star, [x, 2t - 1]) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Con esto he probado que

Proposición 10. SX es un H -cogrupo con las operaciones $\nu : SX \rightarrow SX \vee SX$ y $\lambda : SX \rightarrow SX$. En particular $[SX, Y]$ es un grupo con la operación $[f] *_{\nu} [g] := [(f \vee g) \circ \bar{\nu}]$.

Aplico el Teorema 12 a la suspensión para probar:

Proposición 11.

$$\pi_n(X, x_0) = [\mathbb{S}^n, X] = [\mathcal{S}(\mathbb{S}^{n-1}), X] \text{ es un grupo } \forall n \geq 1.$$

Junto con 10, concluyo que todo grupo fundamental, de cualquier dimensión es un grupo y además, este hecho se debe a las propiedades intrínsecas de las esferas y que ΩX es un H -grupo.

Ahora que tengo una estructura natural de grupo para los conjuntos $[SX, Y]$ y $[X, \Omega Y]$, puedo comparar con el ejercicio 9: resulta que la biyección entre $[SX, Y]$ y $[X, \Omega Y]$ es un isomorfismo de grupos:

Teorema 13. Sean $[SX, Y]$ y $[X, \Omega Y]$ con su estructura natural de grupo (inducido por la estructura de H -cogrupo de SX y H -grupo de ΩY respectivamente). La biyección natural $\Phi : [SX, Y] \rightarrow [X, \Omega Y]$ es un isomorfismo de grupos, es decir

$$[SX, Y] \cong [X, \Omega Y].$$

Proof. Por el ejercicio 9 basta probar que Φ , es un homomorfismo de grupos. Primero sean $f, g : SX \rightarrow Y$ y calculo

$$(f \cdot g)[x, t] := ((f \vee g) \circ \bar{\nu})[x, t] = \begin{cases} (f \vee g)([x, 2t], \star) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (f \vee g)(\star, [x, 2t - 1]) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

como $([x, 2t], \star) \in SX \times \{\star\}$ y $(\star, [x, 2t - 1]) \in \{\star\} \times SX$, en el primer caso se evalúa con f y en el segundo caso se evalúa con g :

$$(f \cdot g)[x, t] = \begin{cases} f[x, 2t] & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g[x, 2t - 1] & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, como $\Phi(f \cdot g)(x)(t) = (f \cdot g)[x, t]$

Ahora considero $\Phi(f), \Phi(g) : X \rightarrow \Omega Y$ que están definidos como $\Phi(f)(x)(t) = f[x, t]$ y $\Phi(g)(x)(t) = g[x, t]$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} (\Phi(f) * \Phi(g))(x)(t) &= \left(\mu(\Phi(f)(x), \Phi(g)(x)) \right)(t) = (\Phi(f)(x) * \Phi(g)(x))(t) \\ &= \begin{cases} \Phi(f)(x)(2t) = f[x, 2t] & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \Phi(g)(x)(2t - 1) = g[x, 2t - 1] & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Con esto concluyo que $\Phi(f \cdot g) = \Phi(f) * \Phi(g)$ y la igualdad para clases de equivalencia es trivial. Por lo tanto Φ es un homomorfismo de grupos. \square

Este teorema me da una herramienta poderosa para caracterizar los grupos fundamentales de cualquier dimensión. Sigo los comentarios posteriores al corolario 9:

Aplico la fórmula para la suspensión de la esfera (corolario 9) y la propiedad adjunta de la suspensión y el espacio de lazos para escribir:

$$[\mathbb{S}^n, X] = [\mathcal{S}\mathbb{S}^{n-1}, X] \cong [\mathbb{S}^{n-1}, \Omega X] \quad \forall n \geq 1.$$

Inductivamente tengo:

$$[\mathbb{S}^n, X] \cong [\mathbb{S}^{n-1}, \Omega X] \cong \cdots \cong [\mathbb{S}^1, \Omega^{n-1} X] \cong [\mathbb{S}^0, \Omega^n X],$$

y así puedo concluir:

$$\pi_n(X, x_0) \cong \pi_0(\Omega^n X, \star).$$

En palabras esto quiere decir que todo grupo fundamental es el espacio de componentes conexas de algún espacio.

Esto es un resultado fuerte: me dice que calcular un grupo fundamental se reduce a calcular las componentes conexas del espacio $\Omega^n X$. En la práctica calcular su estructura de H -grupo (y así calcular la estructura de grupo de $\pi_n(X, x_0)$) es complicado pero puedo clasificarlo como espacio topológico con el siguiente lema importante:

Lema 14. Sean $(X, x_0), (Y, y_0)$ y (Z, z_0) espacios basados con X y Z compactos y Hausdorff. Entonces:

$$\text{Map}_*(X \wedge Z, Y) \approx \text{Map}_*(X, \text{Map}_*(Z, Y)),$$

ambas con la topología compacto-abierta. Además, el homeomorfismo es natural.

Si tomo $X = \mathbb{S}^{n-1}$ y $Z = \mathbb{S}^1$ (que son compactos y Hausdorff), entonces este lema dice:

$$\text{Map}_*(\mathbb{S}^n, Y) = \text{Map}_*(\mathbb{S}^{n-1} \wedge \mathbb{S}^1, Y) \approx \text{Map}_*(\mathbb{S}^{n-1}, \text{Map}_*(\mathbb{S}^1, Y)) = \text{Map}_*(\mathbb{S}^{n-1}, \Omega Y).$$

Inductivamente tengo que

$$\text{Map}_*(\mathbb{S}^n, Y) \approx \text{Map}_*(\mathbb{S}^{n-1}, \Omega Y) \approx \cdots \approx \text{Map}_*(\mathbb{S}^1, \Omega^{n-1} Y) \approx \text{Map}_*(\mathbb{S}^0, \Omega^n Y). \quad (1.12)$$

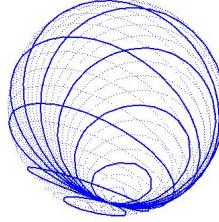
Observa que el penúltimo término de (1.12) es exactamente $\Omega(\Omega^{n-1} Y) = \Omega^n Y$. Por lo tanto tenemos la siguiente definición - proposición:

$$\Omega^n Y := \text{Map}_*(\mathbb{S}^n, Y) \quad (1.13)$$

lo cual tiene sentido: para $n = 2$, $\Omega^2 Y = \{\sigma : I \rightarrow \Omega Y \mid \sigma(0) = e_0 = \sigma(1)\}$, donde cada σ es una familia de lazos $\{\sigma_t\}_{t \in I}$ que varía continuamente con t . Además debe empezar y terminar en un punto: el lazo constante e_0 . Intuitivamente, esto significa que la familia de lazos barre una superficie 2-dimensional homeomorfa a \mathbb{S}^2 :

y por esto tiene sentido definir $\Omega^2 Y := \text{Map}_*(\mathbb{S}^2, Y)$.

Otra forma de verificar (1.12) es con el siguiente ejercicio:



Ejercicio 13. Sea (Y, y_0) un espacio basado y $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$, entonces la biyección canónica:

$$\text{Map}_*(\mathbb{S}^0, Y) \xrightarrow{\psi} Y \quad \text{con} \quad \psi(f) = f(-1)$$

es un homeomorfismo, ie. $\text{Map}_*(\mathbb{S}^0, Y) \approx Y$.

Proof. A cada $y \in Y$ le asocio la función $f_y : \mathbb{S}^0 \rightarrow Y$ con valores $f_y(1) = y_0$ y $f_y(-1) = y$. A la función $y \mapsto f_y$ la denoto por φ . Demotraré que φ es la inversa de ψ y que ambas son continuas.

La primera propiedad es clara porque

$$\varphi(\psi(f))(-1) = \varphi(f(-1)) = f_{f(-1)}(-1) = f(-1) \quad \text{y} \quad \psi(\varphi(y)) = \psi(f_y) = f_y(-1) = y.$$

Ahora observa que para $U \subseteq Y$ abierto,

$$\psi^{-1}[U] := \{f : \mathbb{S}^0 \rightarrow Y \mid f(-1) \in U\} = \{f : \mathbb{S}^0 \rightarrow Y \mid f[\{-1\}] \subseteq K\} = B(K, U) \subset \text{Map}_*(\mathbb{S}^0, Y)$$

donde $K = \{-1\}$ es un subconjunto compacto de \mathbb{S}^0 . Es decir que $\psi^{-1}[U]$ es un abierto subásico de la topología compacto-abierta. Por lo tanto ψ es continua.

Además, si $B(K, U) \subseteq \text{Map}_*(\mathbb{S}^0, Y)$ es un subásico. Aquí $K \subseteq \mathbb{S}^0$ es compacto, en particular es uno de los cuatro conjuntos $\emptyset, \{1\}, \{-1\}, \mathbb{S}^0$. También $U \subseteq Y$ es abierto. Por definición:

$$\varphi^{-1}[B(K, U)] = \{y \in Y \mid f_y[K] \subseteq U\}.$$

Calculo este conjunto por casos:

Para $y_0 \in U$, tengo

$$\varphi^{-1}[B(\emptyset, U)] = Y = \varphi^{-1}[B(\{1\}, U)] \quad , \quad \varphi^{-1}[B(\{-1\}, U)] = U = \varphi^{-1}[B(\mathbb{S}^0, U)],$$

y para $y_0 \notin U$, tengo

$$\varphi^{-1}[B(\emptyset, U)] = Y \quad , \quad \varphi^{-1}[B(\{-1\}, U)] = U \quad , \quad \varphi^{-1}[B(\{1\}, U)] = \emptyset = \varphi^{-1}[B(\mathbb{S}^0, U)].$$

Todos los casos dan conjuntos abiertos. Por lo tanto $\varphi^{-1}[B(K, U)]$ es abierto para toda K y U , y así φ es continua. Esto termina la prueba. \square

Este ejercicio y (1.13) nos implica que:

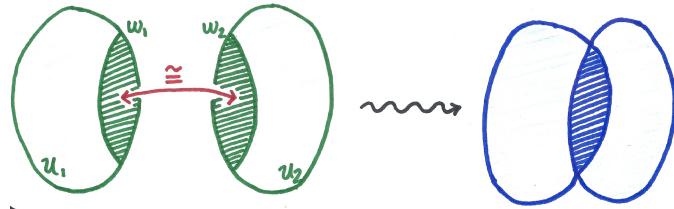
Corolario 15.

$$\pi_n(X, x_0) \cong \pi_0(\Omega^n X, x_0) \cong \pi_n(\text{Map}_*(\mathbb{S}^n, X))$$

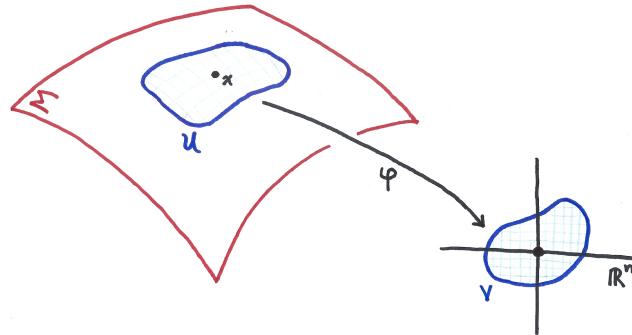
1.10 Variedades

En esta sección, desarrollaré la teoría de espacios topológicos que localmente son euclídeanos. La idea es pegar conjuntos abiertos de un \mathbb{R}^n mediante difeomorfismos (definiré este concepto más adelante): si U_1 y U_2 son conjuntos abiertos de \mathbb{R}^n con subconjuntos abiertos $W_i \subseteq U_i$ tales que hay un difeomorfismo $f : W_1 \rightarrow W_2$, entonces puedo identificar W_1 con W_2 para obtener un nuevo espacio:

Hago más preciso esta idea con la siguiente lista de definiciones:



Definición 12. Sea M un espacio paracompacto¹ (en particular es Hausdorff). Defino que M es un *variedad topológica* si para toda $x \in M$, existe una vecindad $U \subseteq M$ alrededor de x y un homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ donde $V \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto. A veces M se denota por M^n para determinar a qué espacio euclídeo se parece M localmente. La pareja (U, φ) es una *carta* de M alrededor de x y si $\Phi = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de cartas de M tales que $M = \cup U_\lambda$, se dice que Φ es un *atlas* de M .



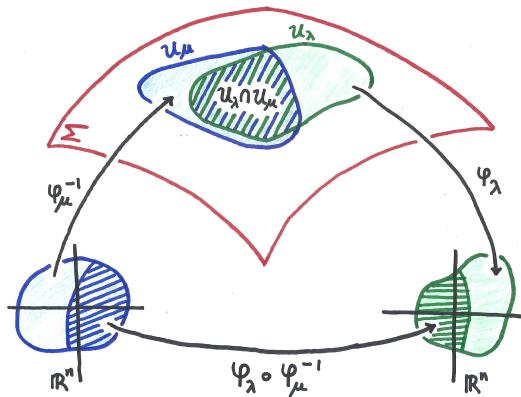
La estructura diferenciable de \mathbb{R}^n la codifica en una variedad topológica a través del atlas:

Definición 13. Sea $\Phi = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ un atlas de una variedad topológica M . El atlas Φ es un *atlas suave* (ie. de clase C^∞) si para cualesquiera $\lambda, \mu \in \Lambda$ tales que $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ se cumple que

$$\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1} : \varphi_\mu[U_\lambda \cap U_\mu] \rightarrow \varphi_\lambda[U_\lambda \cap U_\mu]$$

es una función de clase C^∞ . La función $\varphi_{\mu\lambda} := \varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1}$ se llama el *cambio de coordenadas* de la carta (U_μ, φ_μ) a la carta $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ (véase la figura ??). En otras palabras, el atlas Φ es suave si todos sus cambios de coordenadas son suaves.

Figure 1.8: Representación gráfica de los cambios de coordenadas de un atlas.



¹Un espacio X es paracompacto si toda cualquier cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ de X admite un refinamiento localmente finita, ie. que para todo punto $x \in X$, existe una vecindad $V \subseteq X$ de x que interseca sólo una cantidad finita de abiertos del refinamiento.

Observa que estudiar la diferenciabilidad de $\varphi_{\mu\lambda}$ tiene sentido porque su dominio $\varphi_\mu[U_\lambda \cap U_\mu]$ y su contradominio $\varphi_\lambda[U_\lambda \cap U_\mu]$ son subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^n .

Definición 14. Sea Φ un atlas suave de una variedad topológica M . El atlas Φ es una *estructura diferenciable* de M si Φ es maximal, es decir para toda carta arbitraria (U, ψ) que cumple que

$$\varphi \circ \psi^{-1} \quad \text{y} \quad \psi \circ \varphi^{-1} \quad \text{son suaves} \quad \forall (V, \varphi) \in \Phi,$$

entonces necesariamente $(U, \psi) \in \Phi$.

La maximalidad de un atlas Φ dice que toda carta (U, ψ) compatible con todas las cartas de Φ (ie. que los cambios de coordenadas sean suaves) tiene que ser un elemento de Φ . Intuitivamente, esto significa que a Φ , ya se le ha agregado todas las posibles cartas compatibles. Observa que cualquier atlas Φ se puede completar a un atlas maximal, simplemente agregandole todas las posibles cartas compatibles. En la práctica trabajaré con atlas pequeñas (finitas) y cuando hablo de la estructura diferenciable inducida por estos atlas, me refiero tácitamente al atlas maximal que genera el atlas pequeño.

Definición 15. Una *variedad diferenciable* es una pareja (M, Φ) donde M es una variedad topológica y Φ es una estructura diferenciable.

Ahora analizo unos ejemplos importantes de variedades diferenciables:

Ejemplo 3. (\mathbb{R}^n) Defino $\iota = \{(\mathbb{R}^n, \text{Id})\}$ que claramente es un atlas suave porque $\text{Id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo (suave). Entonces si ι' es el atlas maximal generado por ι tengo que (\mathbb{R}^n, ι') es una variedad diferenciable. A esta estructura diferenciable la llamo la *estructura diferenciable canónica* de \mathbb{R}^n .

Ejemplo 4. (\mathbb{S}^n) Primero observa que cualquier atlas de \mathbb{S}^n debe tener más de una carta porque si tuviera solamente una, ie. (\mathbb{S}^n, φ) , entonces φ sería un homeomorfismo entre \mathbb{S}^n y un abierto de \mathbb{R}^n , pero esto no puede suceder porque \mathbb{S}^n es compacto. Por lo tanto cualquier atlas de \mathbb{S}^n debe tener al menos dos cartas. A continuación construyo dos atlas para \mathbb{S}^n :

Primero defino dos abiertos que cubren a $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Sean $U_\pm := \mathbb{S}^n - \{0, \dots, 0, \pm 1\}$, es decir U_+ es la esfera menos el polo norte y U_- es la esfera menos el polo sur. Ahora defino:

$$\varphi_\pm : U_\pm \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{con} \quad \varphi_\pm(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 \mp x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 \mp x_{n+1}} \right) = \frac{1}{1 \mp x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n).$$

Ejercicio 14. El atlas $\Phi = \{(U_+, \varphi_+), (U_-, \varphi_-)\}$ de \mathbb{S}^n genera una estructura diferenciable.

Proof. Escribo $N_\pm = \{0, \dots, 0, \pm 1\}$ para los polos de \mathbb{S}^n . Primero verifico que φ_+ y φ_- son homeomorfismos. Escribo \mathcal{P}_\pm como los planos en \mathbb{R}^{n+1} definidos por $x_{n+1} = \pm 1$; estos planos son cerrados entonces $V_\pm := \mathbb{R}^{n+1} - \mathcal{P}_\pm$ son abiertos tales que $V_\pm \cap \mathbb{S}^n = U_\pm$.

Ahora, las funciones φ_\pm son funciones racionales (cocientes de polinomios) donde el denominador se anula en \mathcal{P}_\pm así que φ_\pm es continua (y suave) sobre V_\pm . Por lo tanto φ_\pm es continua sobre U_\pm .

Por otro lado, escribo $\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ y defino $\psi_\pm : \mathbb{R}^n \rightarrow U_\pm$ como

$$\psi_\pm(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{\|x\|^2 + 1}, \pm \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right) = \frac{1}{\|x\|^2 + 1}(2x_1, \dots, 2x_n, \pm(\|x\|^2 - 1)).$$

Primero observa que $x \mapsto \|x\|^2$ es una función polinomial entonces es continua. Esto implica que cada coordenada de ψ_\pm es una función racional donde cada denominador nunca se anula porque $\|x\|^2 + 1 > 0$. Entonces ψ_\pm es una función continua; de hecho por la misma razón es una función suave sobre todo \mathbb{R}^n .

Ahora verifico que el contradominio de ψ es efectivamente U_\pm : observa que $\|x\|^2 - 1 < \|x\|^2 + 1$ entonces el cociente $(\|x\|^2 - 1)/(\|x\|^2 + 1)$ nunca puede ser 1. El cociente sólo puede ser -1 si $\|x\|^2 = 0$, es decir $x = 0$. En este caso: $\psi_+(0) = N_-$ y $\psi_-(0) = N_+$ entonces puedo concluir que la última coordenada de ψ_\pm nunca es ± 1 y así el contradominio de ψ_\pm es un subconjunto de V_\pm .

Para ver que la imagen de ψ_{\pm} es U_{\pm} basta calcular la norma de $\psi_{\pm}(x)$. Escribo $t = (\|x\|^2 + 1)^{-1}$ para simplificar las cuentas:

$$\begin{aligned}\|\psi_{\pm}(x)\|^2 &= \|(2tx_1, \dots, 2tx_n, t(\|x\|^2 - 1))\|^2 \\ &= t^2(\|x\|^2 - 1)^2 + 4t^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ &= t^2(\|x\|^4 - 2\|x\|^2 + 1 + 4\|x\|^2) \\ &= t^2(\|x\|^2 + 1)^2 \\ &= 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\varphi_{\pm}(x) \in U_{\pm}$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$, y concluyo que $\psi_{\pm} : \mathbb{R}^n \rightarrow U_{\pm}$ es una función continua.

Ahora verifico que ψ_{\pm} es el inverso de φ_{\pm} . Denoto $s = (1 \mp x_{n+1})^{-1}$ para simplificar la notación y calculo:

$$\begin{aligned}\psi_{\pm}(\varphi_{\pm}(x_1, \dots, x_{n+1})) &= \psi_{\pm}((sx_1, \dots, sx_n)) = \psi_{\pm}(sx) \\ &= \frac{1}{\|sx\|^2 + 1}(2sx_1, \dots, 2sx_n, \pm(\|sx\|^2 - 1))\end{aligned}\tag{1.14}$$

donde

$$\begin{aligned}\frac{2sx_i}{\|sx\|^2 + 1} &= \frac{2sx_i}{s^2\|x\|^2 + 1} = \frac{2x_i}{s\|x\|^2 + s^{-1}} = \frac{2x_i}{s(1 - x_{n+1}^2) + s^{-1}} \\ &= \frac{2x_i}{s(1 - x_{n+1})(1 + x_{n+1}) + (1 \mp x_{n+1})} = \frac{2x_i}{(1 \pm x_{n+1}) + (1 \mp x_{n+1})} = \frac{2x_i}{2} \\ &= x_i \quad \forall i = 1, \dots, n\end{aligned}\tag{1.15}$$

porque $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$ implica que $\|(x_1, \dots, x_n)\|^2 = 1 - x_{n+1}^2$. Además:

$$\begin{aligned}\frac{\|sx\|^2 - 1}{\pm(\|sx\|^2 + 1)} &= \frac{s^2\|x\|^2 - 1}{\pm s^2\|x\|^2 \pm 1} = \frac{\|x\|^2 - s^{-2}}{\pm\|x\|^2 \pm s^{-2}} = \frac{(1 - x_{n+1}^2) - (1 \mp x_{n+1})^2}{\pm(1 - x_{n+1}^2) \pm (1 \mp x_{n+1})^2} \\ &= \frac{1 - x_{n+1}^2 - 1 \pm 2x_{n+1} - x_{n+1}^2}{\pm 1 \mp x_{n+1}^2 \pm 1 - 2x_{n+1} \pm x_{n+1}^2} = \frac{\pm 2x_{n+1}(1 \mp x_{n+1})}{\pm 2(1 \mp x_{n+1})} \\ &= x_{n+1}.\end{aligned}\tag{1.16}$$

Por lo tanto si sustituyo (1.15) y (1.16) en (1.14) obtengo:

$$\psi_{\pm}(\varphi_{\pm}(x_1, \dots, x_{n+1})) = (x_1, \dots, x_{n+1}) \implies \psi_{\pm} \circ \varphi_{\pm} = \text{Id}_{\mathbb{R}^{n+1}}$$

Por otro lado si retomo la notación $t = (\|x\|^2 + 1)^{-1}$ para $x = (x_1, \dots, x_n)$ tengo:

$$\begin{aligned}\varphi_{\pm}(\psi_{\pm}(x)) &= \varphi_{\pm}(2tx_1, \dots, 2tx_n, \pm t(\|x\|^2 - 1)) = \left(\frac{2tx_i}{1 \mp (\pm t\|x\|^2 \mp t)} \right)_{i=1}^n \\ &= \left(\frac{2tx_i}{1 - t\|x\|^2 + t} \right)_{i=1}^n = \left(\frac{2x_i}{t^{-1} - \|x\|^2 + 1} \right)_{i=1}^n \\ &= \left(\frac{2x_i}{\|x\|^2 + 1 - \|x\|^2 + 1} \right)_{i=1}^n = \left(\frac{2x_i}{2} \right)_{i=1}^n \\ &= x\end{aligned}$$

$$\therefore \varphi_{\pm} \circ \psi_{\pm} = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$$

Resumo lo que he hecho: $\varphi_{\pm} : U_{\pm} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\psi_{\pm} : \mathbb{R}^n \rightarrow U_{\pm}$ son funciones continuas y suaves (por ser racionales en cada coordenada) e inversos entre sí, es decir $\varphi_{\pm}^{-1} = \psi_{\pm}$.

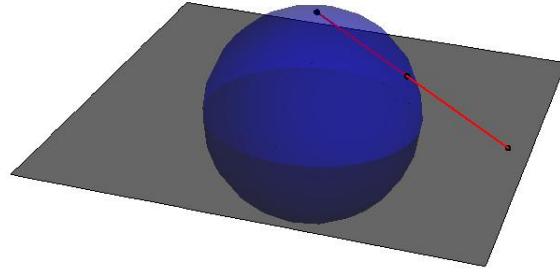
Además, esto prueba que los cambios de coordenadas $\varphi_+ \circ \varphi_-^{-1} = \varphi_+ \circ \psi_-$ y $\varphi_- \circ \varphi_+^{-1} = \varphi_- \circ \psi_+$ son suaves porque son composición de funciones suaves. Observa que tácitamente estoy restringiendo las ψ_{\pm}

a $\mathbb{R}^n - \{0\}$ para que los cambios de coordenadas estén bien definidos; esto no afecta la diferenciabilidad de éstas.

Con esto termino de probar que Φ es un atlas suave y así genera un atlas maximal que es una estructura diferenciable de \mathbb{S}^n . \square

A estas cartas se les llaman *proyecciones estereográficas*: en general la función φ_+ le asigna a $x \in \mathbb{S}^n$ el punto de intersección del subespacio $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ con la recta que une el polo norte con $y \in \mathbb{S}^n$:

De hecho esta construcción es lo que me permitió darle una fórmula explícita a las funciones inversas de las proyecciones estereográficas: parametrizé el segmento de recta que empieza en el polo norte, y termina en un punto $x \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, después calculé el valor del parámetro para que me de un punto sobre la esfera. Resumo este proceso en el siguiente dibujo:



Ejemplo 5. (\mathbb{S}^n) En la proposición 7 de la sección 1.8 introduce las funciones ρ_{\pm} que relacionaban los hemisferios de la esfera con el disco como subconjunto de \mathbb{R}^n . Con estas funciones doy otro atlas para la esfera que resulta útil (cambiaré un poco la notación): sea $\mathbb{D}_n \subset \mathbb{R}^n$ el disco unitario de radio 1 alrededor del 0 y sea $\overset{\circ}{\mathbb{D}}$ el interior del disco y defino $V_i^{\pm} := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid \pm x_i > 0\}$ como los distintos hemisferios abiertos (de dimensión n) de la esfera. Con esto escribo

$$h_i^{\pm} : V_i^{\pm} \longrightarrow \overset{\circ}{\mathbb{D}} \quad \text{con} \quad h_i^{\pm}(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1})$$

donde la notación \hat{x}_i significa que omito esa coordenada del vector, es decir $(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$. Aquí uso la letra h para denotar “hemisferio”.

Como todo elemento $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$ tiene al menos una coordenada distinto de cero, por ejemplo x_i , entonces $x \in V_i^+$ o $x \in V_i^-$ y así $\mathbb{S}^n = \cup V_i^{\pm}$ entonces $\mathcal{H} = \{(h_i^{\pm}V_i^{\pm}), (h_i^{\pm}, V_i^{\pm})\}_{i=1}^{n+1}$ es un atlas con $2(n+1)$ cartas. En efecto, cada h_i^{\pm} es un homeomorfismo porque las funciones:

$$\rho_i^{\pm} : \overset{\circ}{\mathbb{D}} \longrightarrow V_i^{\pm} \quad \text{con} \quad \rho_i^{\pm}(x_1, \dots, x_n) = \left(x_1, \dots, x_{i-1}, \pm \sqrt{1 - \sum x_k^2}, x_i, \dots, x_n \right)$$

es el inverso de h_i^{\pm} (ve la proposición 7 para ver porque ρ_i^{\pm} , y así h_i^{\pm} , es un homeomorfismo). En otras palabras, ρ_i^{\pm} inserta el término $(\sum x_k^2)^{1/2}$ en la i -ésimo lugar para obtener un vector en $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Con esto tengo que $\rho_i^{\pm} = (h_i^{\pm})^{-1}$.

El atlas \mathcal{H} es suave porque para $i < j$ tengo:

$$\begin{aligned} h_i^{\pm} \circ (h_j^{\pm})^{-1}(x) &= h_i^{\pm} \circ \rho_j^{\pm}(x_1, \dots, x_n) = h_i^{\pm} \left(x_1, \dots, x_{j-1}, \pm \sqrt{1 - \sum x_k^2}, x_j, \dots, x_n \right) \\ &= (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \pm \sqrt{1 - \sum x_k^2}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

que es claramente una función suave porque $\sum x_k^2 \leq 1$ ya que x es un elemento del disco unitario. Los otros casos $j > i$, $j = i$ o h_j^{\mp} son equivalentes o triviales. Por lo tanto todos los cambios de coordenadas son suaves y así \mathcal{H} es un atlas suave.

He dado dos atlas para \mathbb{S}^n , Φ y \mathcal{H} , pero resulta que definen la misma estructura diferenciable, entonces las variedades diferenciables (\mathbb{S}^n, Φ) y $(\mathbb{S}^n, \mathcal{H})$ son exactamente el mismo porque el atlas maximal que

generan Φ y \mathcal{H} son el mismo. Para probar esto, sólo hay que probar que los cambios de coordenadas $\varphi_{\pm} \circ (h_i^{\pm})^{-1}$ y $h_i^{\pm} \circ \varphi_{\pm}^{-1}$ son suaves y así garantizamos que todas las cartas de Φ y \mathcal{H} son elementos del atlas maximal que generan ambos.

Ejercicio 15. Los atlas Φ y \mathcal{H} de \mathbb{S}^n son compatibles.

Proof. Debo probar que los cambios de coordenadas $\varphi_{\pm} \circ (h_i^{\pm})^{-1}$ y $h_i^{\pm} \circ \varphi_{\pm}^{-1}$ son suaves; sólo me enfocaré en los casos cuando el signo de las cartas h_i^{\pm} es $+$, la prueba con el otro signo es análoga porque las reglas de correspondencia de h_i^+ y h_i^- son exactamente iguales.

Ahora si $i \neq n+1$, entonces para toda $x \in V_i^+$ tengo que $\pm x_i > 0$ y así $\pm x_{n+1} \neq 1$ porque si se da la igualdad tendré $\|x\|^2 \geq x_i^2 + x_{n+1}^2 > 1$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $x \in U_{\pm}$ y así $V_i^+ \subset U_+, U_-$ para toda $i = 1, \dots, n$. Si $i = n+1$ entonces los polos $N^+ \in V_{n+1}^+$ y $N^- \notin V_{n+1}^+$. Por lo tanto:

$$U_* \cap V_i^+ = \begin{cases} V_i^+ & \text{si } i = 1, \dots, n \\ V_{n+1}^+ & \text{si } * = -, \quad i = n+1 \\ V_{n+1}^+ - \{N^+\} & \text{si } * = +, \quad i = n+1 \end{cases}$$

Observa que el dominio de $\varphi_{\pm} \circ (h_i^+)^{-1}$, para $i \neq n+1$, es $h_i^+[V_i^+] = \overset{\circ}{\mathbb{D}}$, entonces para $x = (x_1, \dots, x_n)$ en el interior del disco unitario tengo (escribo $r = (1 - \sum x_k)^{1/2}$ para simplificar la notación)

$$\varphi_{\pm} \circ (h_i^+)^{-1}(x) = \varphi_{\pm} \circ \rho_i^+(x) = \varphi_{\pm}(x_1, \dots, x_{i-1}, r, x_i, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1}{1 \mp x_n}, \dots, \frac{r}{1 \mp x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{1 \mp x_n} \right)$$

que es claramente suave porque $1 > \|x\| \leq \mp x_n$.

Si $i = n+1$ tengo dos casos, el dominio de $\varphi_- \circ (h_{n+1}^+)^{-1}$ sigue siendo el disco abierto unitario, entonces:

$$\varphi_- \circ (h_{n+1}^+)^{-1}(x) = \varphi_-(x_1, \dots, x_n, r) = \left(\frac{x_1}{1+r}, \dots, \frac{x_n}{1+r} \right),$$

pero siempre tengo que $r > 0$ porque x está en el interior del disco unitario. Por lo tanto $\varphi_- \circ (h_{n+1}^+)^{-1}$ es suave.

Por otro lado el dominio de $\varphi_+ \circ (h_{n+1}^+)^{-1}$ es

$$h_{n+1}^+[V_{n+1}^+ - \{N^+\}] = \overset{\circ}{\mathbb{D}} - \{h_{n+1}^+(N^+)\} = \overset{\circ}{\mathbb{D}} - \{(0, \dots, 0, \hat{1})\} = \overset{\circ}{\mathbb{D}} - \{0\},$$

entonces si $x \neq 0$ tengo que $r \neq 1$ y así

$$\varphi_+ \circ (h_{n+1}^+)^{-1}(x) = \varphi_+(x_1, \dots, x_n, r) = \left(\frac{x_1}{1-r}, \dots, \frac{x_n}{1-r} \right),$$

es suave porque los denominadores nunca se anulan. Con esto concluyo que todos los cambios de coordenadas $\varphi_{\pm} \circ (h_i^+)^{-1}$ son suaves.

Para ver la diferenciabilidad de los cambios de coordenadas $h_i^+ \circ \varphi_{\pm}^{-1}$ veré que estas funciones son restricciones de funciones suaves definidos sobre todo \mathbb{R}^n .

Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Como $\varphi_{\pm}^{-1} = \psi_{\pm}$ es una función suave, y proyectar sobre un subespacio $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (ie. olvidar la i -ésima coordenada) es suave, la composición:

$$x \mapsto \left(\frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{\|x\|^2 + 1}, \pm \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right) \mapsto \left(\frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}, \dots, \frac{\widehat{2x_1}}{\|x\|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{\|x\|^2 + 1}, \pm \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right)$$

es suave (observa que no hay problema si $i = n+1$ como en el caso anterior). Por lo tanto, si restringo esta composición a $\varphi_{\pm}[U_{\pm} \cap V_i^+] \subset \mathbb{R}^n$ obtengo el cambio de coordenadas $h_i^+ \circ \varphi_{\pm}^{-1} = h_i^+ \circ \psi_{\pm}$ que, por lo tanto, es suave.

Con todo esto concluyo que todos los posibles cambios de coordenadas entre los atlas Φ y \mathcal{H} son suaves. Por lo tanto ambos atlas generan el mismo atlas maximal y así la misma estructura diferenciable de \mathbb{S}^n , es decir Φ y \mathcal{H} son compatibles. \square

Ejemplo 6. (\mathbb{R}) Defino el atlas Θ con única carta $(\mathbb{R}, x \mapsto x^3)$. Claramente es un atlas porque $x \mapsto x^3$ es un homeomorfismo (con inverso $x \mapsto x^{1/3}$ que es continua). Además Θ es suave porque nada más tiene una carta. A diferencia del ejemplo 3 (con $n = 1$), este atlas no es compatible con el atlas canónico ι de \mathbb{R} :

Ejercicio 16. Los atlas ι y Θ de \mathbb{R} no son compatibles, es decir algún cambio de coordenadas no es una función suave.

Proof. Denoto f como la función $x \mapsto x^3$, es decir (\mathbb{R}, f) es la carta de Θ . Ahora, f^{-1} no es una función suave en $x = 0$ porque su derivada:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

no está bien definida en $x = 0$ porque se hace arbitrariamente grande alrededor del 0, es decir $(f^{-1})'(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow 0$. Por lo tanto el cambio de coordenadas $\text{Id}_{\mathbb{R}} \circ f^{-1} = f^{-1}$, que está definido sobre $f^{-1}[\mathbb{R} \cap \mathbb{R}] = \mathbb{R}$, no es suave sobre todo su dominio.

Esto quiere decir que la carta (\mathbb{R}, f) no está en el atlas maximal generado por el atlas canónico ι y así las estructuras diferenciables de las variedades (\mathbb{R}, ι) y (\mathbb{R}, Θ) no son la misma. \square

El atlas \mathcal{H} de la esfera me permite definirle una estructura diferenciable sobre el espacio proyectivo real:

Definición 16. El *espacio proyectivo real* de dimensión n , denotado por $\mathbb{R}P^n$ es el espacio cociente:

$$\mathbb{R}P^n := \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}/\sim$$

donde $x \sim y$ si existe un escalar $\lambda > 0$ tal que $x = \lambda y$. A la proyección canónica, la denoto por $p : (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}P^n$.

Observa que toda $x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ cumple $[x] = [\|x\|^{-1}x]$, donde $\hat{x} := \|x\|^{-1}x$ es un elemento de \mathbb{S}^n . Por lo tanto $[x_1] \neq [x_2]$ implica $[\|x_1\|^{-1}x_1] \neq [\|x_2\|^{-1}x_2]$ y en particular $\hat{x}_1 \neq \hat{x}_2$. Como \mathbb{S}^n es Hausdorff, existen vecindades U_1 y U_2 que separan los \hat{x}_1 y \hat{x}_2 y así $V_i = \{[z] \mid \hat{z} \in U_i\}$ son abiertos de $\mathbb{R}P^n$ que separan a $[x_1]$ de $[x_2]$: claramente $p[V_i]$ es el cono abierto generado por todas las rectas que pasan por el origen y pasan por V_i y si $[z] \in V_1 \cap V_2$ entonces $\hat{z} \in U_1 \cap U_2 = \emptyset$ por lo tanto $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

El proceso de tomar cocientes la podemos separar en dos: la idea es que estamos contrayendo todas las rectas que pasan por el origen a puntos. Como cada recta de estas tienen dos vectores directores unitarios, podemos primero contraer cada recta a dos puntos sobre la esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ y despues identificar ambos vectores directores. Si x es un vector unitario director de una recta, entonces $-x$ es el otro vector director unitario.

Estas ideas sugieren que el espacio proyectivo real de dimensión n es la esfera \mathbb{S}^n módulo antípodas, es decir $x \sim -x$. De hecho, esto es verdadero:

Ejercicio 17. A la esfera \mathbb{S}^n le defino la relación de equivalencia $x \sim -x$ donde relaciono cada punto con su antípoda. En este caso se cumple que:

$$\mathbb{R}P^n \approx \mathbb{S}^n/\sim$$

Proof. Considera la restricción $\hat{\nu} := \nu|_{\mathbb{S}^n} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ de la proyección canónica $\nu : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$. Claramente es una función sobre porque $[x] = [\|x\|^{-1}x] \in \mathbb{R}P^n$, además

$$\hat{\nu}(x) = \hat{\nu}(y) \iff \exists \lambda \neq 0 \text{ tal que } \lambda x = y \iff x \sim y$$

donde la última equivalencia se cumple porque $x, y \in \mathbb{S}^n$ y necesariamente $\lambda = \pm 1$. Por lo tanto $\hat{\nu}$ se factoriza a través de la proyección $q : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n/\sim$, es decir existe una única función continua biyectiva φ tal que hace comutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \xrightarrow{\hat{\nu}} & \mathbb{R}P^n \\ q \downarrow & \nearrow \varphi & \\ \mathbb{S}^n/\sim & & \end{array}$$

Como \mathbb{S}^n es compacto y $\mathbb{R}P^n$ es Hausdorff, φ es un homeomorfismo. \square

Esta nueva descripción del espacio proyectivo nos permite darle una estructura diferenciable a $\mathbb{R}P^n$ con el atlas \mathcal{H} de \mathbb{S}^n .

Ejemplo 7. Los dos hemisferios V_i^+ y V_i^- se identifican bajo el cociente $\mathbb{S}^n /_{-x \sim x}$ porque $x \in V_i^+ \iff -x \in V_i^-$. Por lo tanto $q[V_i^+] = q[V_i^-] =: V_i$ es un abierto del espacio proyectivo. Como las V_i^\pm cubrían a \mathbb{S}^n , entonces las V_i cubren a $\mathbb{R}P^n$.

Para toda $x \in \mathbb{R}P^n$ tengo que $q^{-1}[x] = \{x, -x\}$ lo cual implica que q es inyectiva restringido a un conjunto $V \subseteq \mathbb{S}^n$ si y sólo si existen $x \in V \implies -x \notin V$. Las V_i^\pm cumplen esto ya que

$$x \in V_i^\pm \implies m \pm x_i > 0 \implies \mp x_i < 0 \implies -x \notin V_i^\mp$$

Entonces la restricción $q_i := q|_{V_i^+}$ tiene inverso izquierdo. Lo llamo \tilde{g}_i .

Para cada $V_i \subset \mathbb{R}P^n$ defino la carta (V_i, h_i) como:

$$\begin{array}{ccc} V_i^+ & \xrightarrow{h_i^+} & \overset{\circ}{\mathbb{D}} \\ \tilde{g}_i \downarrow q_i & \nearrow h_i & \\ V_i & & \end{array}$$

Claramente h_i es un homeomorfismo. El atlas $\mathfrak{h} = \{(V_i, h_i)\}_{i=1}^n$ de $\mathbb{R}P^n$ es una estructura diferenciable porque \mathcal{H} es una estructura diferenciable sobre \mathbb{S}^n .

Una manera de construir nuevas variedades diferenciables es con el producto cartesiano:

Proposición 12. Sean M y N variedades suaves de dimensión m y n respectivamente. Si M tiene el atlas $\mathcal{M} = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ y N tiene el atlas $\mathcal{N} = \{(V_\omega, \psi_\omega)\}_{\omega \in \Omega}$ entonces $M \times N$ es una variedad suave de dimensión $n+m$ con atlas

$$\mathcal{M} \times \mathcal{N} := \{(U_\lambda \times V_\omega, \varphi_\lambda \times \psi_\omega)\}_{(\lambda, \omega) \in \Lambda \times \Omega}$$

Otra manera de construir variedades es tomar subconjuntos abiertos de variedades:

Ejercicio 18. Sea M una variedad suave de dimensión m con atlas $\mathfrak{A} = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$. Todo subconjunto abierto U de M también es una variedad suave con el atlas $\mathfrak{A}_U = \{(U_\lambda \cap U, (\varphi_\lambda)|_U)\}_{\lambda \in \Lambda}$.

Proof. Como cada $\varphi_\lambda : U_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo sobre su imagen, entonces la restricción $(\varphi_\lambda)|_U : U_\lambda \cap U \rightarrow \varphi_\lambda[U_\lambda \cap U]$ es un homeomorfismo. Como la familia $\{U_\lambda\}$ es una cubierta abierta de M , la familia $\{U_\lambda \cap U\}$ de abiertos cubren a U . Por lo tanto \mathfrak{A}_U es un atlas.

Ahora considera un cambio de coordenadas arbitrario

$$f = (\varphi_\lambda)|_U \circ (\varphi_\mu)|_U^{-1} : (\varphi_\mu)|_U[U_\lambda \cap U_\mu \cap U] \longrightarrow (\varphi_\lambda)|_U[U_\lambda \cap U_\mu \cap U]$$

y observa que es igual a la función $(\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1})|_U$ que es la restricción de un cambio de coordenadas del atlas $f\mathfrak{A}$. Como éste es suave, el cambio de coordenada f del atlas \mathfrak{A}_U también es suave. Por lo tanto \mathfrak{A}_U es un atlas diferenciable sobre U . \square

Ahora defino los morfismos entre variedades suaves:

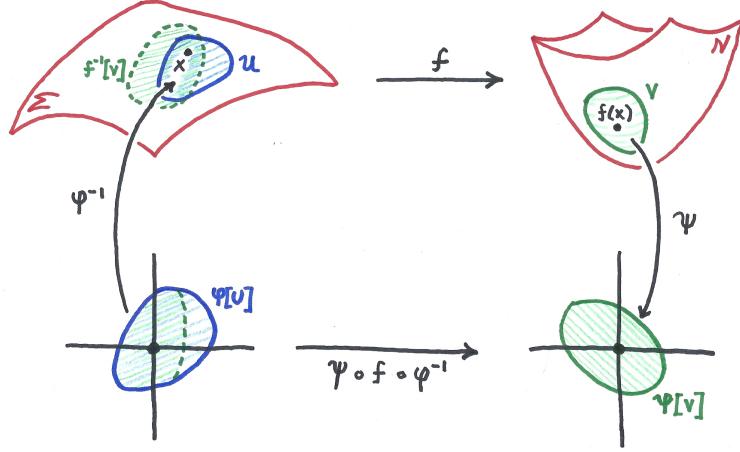
Definición 17. Sean M^m y N^n variedades suaves y $f : M \rightarrow N$ una función continua. La función f es *suave* si para toda $x \in M$ hay una carta (U, φ) de M alrededor de x y una carta (V, ψ) de N alrededor de $f(x)$ tal que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi[U \cap f^{-1}[V]] \longrightarrow \psi[V]$$

es una función suave en \mathbb{R}^m .

Claramente la categoría \mathbf{Var}^∞ de variedades suaves es una categoría con las funciones suaves como morfismos. Un isomorfismo en esta categoría se llama *difeomorfismo* y si existe un difeomorfismo entre dos variedades M y N lo denoto por $M \cong N$.

Ejercicio 19. Las variedades suaves $\mathbb{R}_t := (\mathbb{R}, t)$ y $\mathbb{R}_\Theta := (\mathbb{R}, \Theta)$ son difeomorfos.



Proof. Defino $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como $f(x) = x^{1/3}$ y $g(x) = x^3$. Observa que (\mathbb{R}, g) es la única carta de Θ , entonces denotaré por g_Θ como la carta y g como la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ apesar de que sean la misma función. Claramente $f \circ g = \text{Id}_\mathbb{R} = g \circ f$ y el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{R}_t & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}_\Theta & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}_t & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}_\Theta \\
 \downarrow \text{Id} & & \downarrow g_\Theta & & \downarrow \text{Id} & & \downarrow g_\Theta \\
 \mathbb{R} & \xrightarrow[g_\Theta \circ f \circ \text{Id}^{-1}]{} & \mathbb{R} & \xrightarrow[\text{Id} \circ g \circ g_\Theta^{-1}]{} & \mathbb{R} & \xrightarrow[g_\Theta \circ f \circ \text{Id}^{-1}]{} & \mathbb{R}
 \end{array}$$

es comunitativo. Los dos cambios de coordenadas son claramente suaves porque

$$g \circ f \circ \text{Id}^{-1} = \text{Id} = \text{Id} \circ g \circ g_\Theta^{-1}$$

Por lo tanto f y g son funciones suaves tales que $f \circ g = \text{Id} = g \circ f$ entonces R_t y \mathbb{R}_Θ son difeomorfos. \square

Es importante notar que la clase de variedades suaves con funciones suaves como morfismos forma una categoría que llamo **Variedades**. Esto se debe a que la identidad $\text{Id} : M \rightarrow M$ siempre es suave y la composición de dos funciones suaves es suave. Al conjunto de morfismos entre dos objetos en **Variedades** la llamo

$$C^\infty(M, N) = \left\{ M \xrightarrow{f} N \mid f \text{ es suave} \right\}.$$

En particular el conjunto $C^\infty(M, \mathbb{R})$ nos dice mucho sobre las propiedades de M . Como R es una variedad suave, $C^\infty(\cdot, \mathbb{R})$ es un functor contravariante a la categoría de \mathbb{R} -álgebra. En efecto:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad y \quad (fg)(x) := f(x)g(x)$$

le definen una estructura de anillo comunitativo con 1 a $C^\infty(M, \mathbb{R})$ y además, el subanillo de las funciones constantes es isomorfo a \mathbb{R} y así $C^\infty(M, \mathbb{R})$ es un \mathbb{R} -álgebra.

$C^\infty(M, \mathbb{R})$ también tiene estructura de \mathbb{R} -espacio vectorial, entonces podemos definir su espacio dual:

$$C^\infty(M, \mathbb{R})^* := \left\{ C^\infty(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{v} \mathbb{R} \mid v \text{ es lineal} \right\}$$

Una vez mencionado esto, defino:

Definición 18. Una *derivación* en $x \in M$ es un funcional lineal $d : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ con $f \mapsto df$ que cumple la regla de Liebniz: $d(fg) = g(x)df + f(x)dg$. El conjunto de todas las derivaciones en x se llama el *espacio tangente* de M en x :

$$T_x M := \left\{ d \in C^\infty(M, \mathbb{R})^* \mid d(fg) = g(x)df + f(x)dg \quad \forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \right\}$$

Observa que $T_x M$ es un subespacio vectorial de $C^\infty(M, \mathbb{R})^*$ porque si $d, d' \in T_x M$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ es un escalar entonces

$$\begin{aligned}(d + \lambda d')(fg) &= d(fg) + \lambda d'(fg) \\&= g(x)df + f(x)dg + \lambda g(x)d'f + \lambda f(x)d'g \\&= g(x)(df + \lambda d'f) + f(x)(dg + \lambda d'g) \\&= g(x)(d + \lambda d')(f) + f(x)(d + \lambda d')(g)\end{aligned}$$

y $T_x M$ es cerrado bajo combinaciones lineales. Además es claro que el funcional lineal 0 cumple la regla de Leibniz.

Tomar derivadas parciales es el primer ejemplo de una derivación: Sea M una variedad suave y $x \in M$. Si (U, φ) una carta alrededor de x entonces $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ y así es de la forma $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ donde $x_i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Con esto defino el siguiente funcional lineal:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_x (f) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(x))$$

donde la segunda derivada es la usual de \mathbb{R}^n . El funcional lineal $\partial/\partial x_i|_x$ es una derivación porque la derivada usual es lineal y como toda carta se puede expresar con n coordenadas, entonces

$$\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_x, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_x \right\}$$

es una base de $T_x M$.

Si considero la categoría de variedades suaves basadas, denotado por **Variedades_{*}**, parece que $(M, x) \mapsto T_x M$ es un functor a la categoría de espacios vectoriales sobre \mathbb{R} , pero para probar esto necesito saber cómo transforma este functor a las funciones suaves $f : (M, x) \rightarrow (N, y)$.

Definición 19. Sea $F : (M, x) \rightarrow (N, y)$ una función suave entre variedades suaves basadas. Entonces el *diferencial* de F en x lo defino como la función:

$$D_x F : T_x M \longrightarrow T_y N \quad \text{con} \quad (D_x F(d))(f) = d(f \circ F)$$

Ejercicio 20. Para toda $x \in M$, $D_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ es lineal.

Proof. Sean $d, d' \in T_x M$ derivaciones y $\lambda \in \mathbb{R}$ un escalar. Entonces para toda $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}D_x F(d + \lambda d')(f) &= (d + \lambda d')(f \circ F) = d(f \circ F) + \lambda d'(f \circ F) = D_x F(d)(f) + \lambda D_x F(d')(f) \\&\therefore D_x F(d + \lambda d') = D_x F(d) + \lambda D_x F(d')\end{aligned}$$

entonces $D_x F$ es una transformación lineal. □

Ahora defino lo necesario para estudiar las 'inclusiones' en la categoría de las variedades suaves:

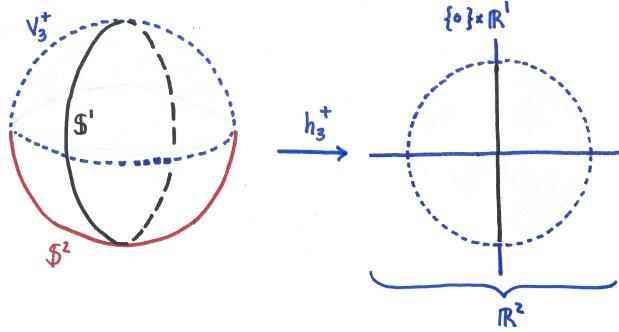
Definición 20. Sea M de dimensión m y $N \subseteq M$ un subespacio de M . Entonces N es una *subvariedad* de dimensión $n \leq m$ si para toda $x \in N$ existe una carta (U, φ) de M alrededor de x tal que:

$$\varphi[U \cap N] = \varphi[U] \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^m$$

donde $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$.

El siguiente ejemplo ilustra bien esta definición: Si hago $\mathbb{S}^1 = (\cos 2\pi t, 0, \sin 2\pi t) \subset \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ (mediante el difeomorfismo $e^{2\pi i t} \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, 0)$), entonces las únicas cartas que intersectan a \mathbb{S}^1 son V_1^\pm y V_2^\pm , entonces (por ejemplo):

$$\begin{aligned}h_i^\pm[V_i^\pm \cap \mathbb{S}^1] &= \left\{ \begin{array}{ll} (x_2, x_3) = (\sin 2\pi t, 0) & , \quad t \in [0, 1] \quad \text{si } i = 1 \\ (x_1, x_3) = (\cos 2\pi t, 0) & , \quad t \in [0, 1] \quad \text{si } i = 2 \end{array} \right\} \\&= (-1, 1) \times \{0\} \\&= \overset{\circ}{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{R}^1 \times \{0\}) \\&= h_i^\pm[V_i^\pm] \cap (\mathbb{R}^1 \times \{0\}) \quad (i = 1, 2)\end{aligned}$$



es decir que \mathbb{S}^1 es una subvariedad de \mathbb{S}^2 . Similarmente \mathbb{S}^n es una subvariedad de \mathbb{S}^m para toda $n \leq m$. El siguiente dibujo ilustra este ejemplo:

Esto sugiere la descripción: una subvariedad N vive en M como $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ vive en \mathbb{R}^m .

Además si $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ es el atlas suave de M , entonces N tiene estructura diferenciable con el atlas restringido

$$\mathfrak{A}|_N := \{(U_\alpha \cap N, (\varphi_\alpha)|_{U_\alpha \cap N})\}_{\alpha \in A}.$$

Con el atlas $\mathfrak{A}|_N$, la inclusión $\iota : N \rightarrow M$ se vuelve suave. Este tipo de inclusión se generaliza. Si una variedad N' es difeomorfa una subvariedad $N \subseteq M$ (equipada de su atlas $\mathfrak{A}|_N$), mediante un difeomorfismo f , entonces la función $\iota' := \iota \circ f$ la puedo pensar como una “inclusión”.

Definición 21. Una función suave $f : N \rightarrow M$ es un *encaje* si la imagen $f[N] \subseteq M$ es una subvariedad de M y además $N \cong f[N]$. En este caso lo denoto por $N \hookrightarrow M$.

Por lo tanto para todo encaje f existe una factorización $f = \iota \circ f'$ donde f' es el difeomorfismo $N \rightarrow f[N]$ y $\iota : f[N] \rightarrow M$ es la inclusión. En palabras esto quiere decir que un encaje $N \hookrightarrow M$ es una transformación que te permite ver a N como subvariedad de M .

Parece que la definición de encaje es muy restrictiva pero Whitney probó que:

Teorema 16. (Whitney) *Toda variedad suave de dimensión m se puede encajar en \mathbb{R}^{2m} , es decir para toda variedad M^m , existe $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m}$.*

Este teorema es muy fuerte por varias razones. Primero, esto significa que cualquier variedad la podemos identificar con una subvariedad de un espacio euclídeo. Segundo, la dimensión de este espacio euclídeo se puede minimizar a dos veces la dimensión de la variedad original. Por ejemplo $\mathbb{R}P^2 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^3$ porque la imagen tendría que autointersección (y así fallaría la inyección). Entonces $2m$ es la mínima dimensión necesaria para poder encajar cualquier variedad en un espacio euclídeo.

Definición 22. Sea $f : M \rightarrow N$ una función suave. Un punto $y \in N$ es un *valor regular* si para todo elemento $x \in f^{-1}[\{y\}]$ el diferencial $D_x f$ es sobreyectivo. Si esto no se cumple, entonces y es un *valor crítico*.

La importancia de los valores regulares se muestra con el siguiente teorema:

Teorema 17. *Sea $f : M^m \rightarrow N^n$ una función suave y $y \in N$ un valor regular. Entonces $L = f^{-1}[\{y\}] \subseteq M$ es una variedad de dimensión $m - n$.*

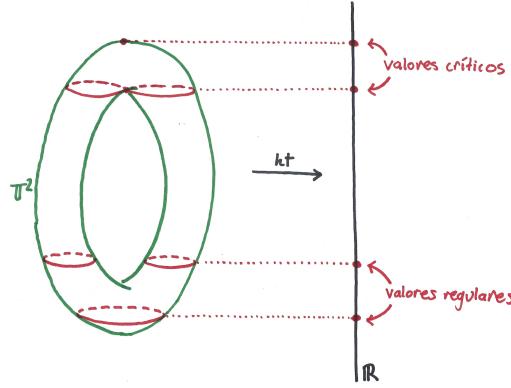
Este teorema y la definición de valor regular se muestra en la figura ??:

El famoso Teorema de Sard dice que casi todo valor $y \in N$ es regular: si $C \subset N$ es el conjunto de puntos críticos, ie no-regular, de una función suave $f : M \rightarrow N$, entonces para toda carta (U, φ) de N que intersecta C , el teorema de Sard dice que $\varphi[U \cap C] \subset \mathbb{R}^n$ es de medida cero.

Con esto defino que cualquier subconjunto $X \subseteq N$ de una variedad es de medida cero si bajo cualquier carta, su imagen en \mathbb{R}^m es de medida cero. Así enuncié el teorema de Sard:

Teorema 18. (Sard) *Sea $f : M \rightarrow N$ una función suave. El conjunto de valores críticos es de medida cero. En particular el conjunto de valores regulares es denso en N .*

Figure 1.9: Los valores regulares y las fibras de la función altura $ht : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.



Una consecuencia importante de este teorema es que se puede calcular el grupo de homotopía:

$$\pi_m(\mathbb{S}^n, 1) = 0 \quad \forall m < n \quad (1.17)$$

Si $[\alpha] \in \pi_m(\mathbb{S}^n, 1)$, claramente α no tiene porque ser suave, pero si lo fuera, Sard dice que $\alpha : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^n$ tiene un valor regular $y \in \mathbb{S}^n$. Ahora si $x \in \alpha^{-1}[\{y\}]$ entonces $d_x \alpha : T_x \mathbb{S}^m \rightarrow T_y \mathbb{S}^n$ es sobre, pero esto nunca puede pasar porque $T_x \mathbb{S}^m \cong \mathbb{R}^m$ y $n > m$. Por lo tanto $f^{-1}[\{y\}] = \emptyset$, es decir que $\alpha[\mathbb{S}^m] \subseteq \mathbb{S}^n - \{y\} \subset \mathbb{S}^n$.

Co-restrinjo $\alpha : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$ a $\alpha' : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^n - \{y\}$. Como $\mathbb{S}^n - \{y\} \cong \mathbb{R}^n$ mediante la proyección estereográfica, entonces $\alpha' \simeq \text{cte}$. Además, como α y α' tienen la misma regla de correspondencia:

$$\alpha = \iota \circ \alpha' \simeq \iota \circ \text{cte} = \text{cte}$$

donde $\iota : \mathbb{S}^n - \{y\} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ es la inclusión. Por lo tanto $[\alpha] = 0$.

Acabo de probar que si toda clase de equivalencia $[\alpha] \in \pi_m(\mathbb{S}^n, 1)$ tiene un representante $\alpha : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^n$ suave, entonces $\pi_m(\mathbb{S}^n, 1) = 0$. En otras palabras la ecuación (1.17) se sigue de:

Teorema 19. *Sea $f : M \rightarrow N$ una función continua (o basada) entre variedades suaves. Entonces existe una $f' : M \rightarrow N$ suave tal que $f \simeq f'$.*

Otra consecuencia importante del teorema de Sard requiere de orientación. Primero defino orientación para espacios vectoriales y luego lo defino para variedades mediante los espacios tangentes.

Sea V un espacio vectorial real de dimensión n y denoto por \mathfrak{B} como el conjunto de todas las bases de V . Observa que \mathfrak{B} es isomorfo al espacio de matrices invertibles $\text{GL}(n, \mathbb{R})$. Defino sobre \mathfrak{B} la siguiente relación:

$$\{v_1, \dots, v_n\} \sim \{w_1, \dots, w_n\} \iff \text{la matriz de cambio de base tiene determinante positivo.}$$

Ejercicio 21. La relación \sim definido sobre \mathfrak{B} es de equivalencia.

Proof. Primero comento que \mathfrak{B} está en biyección con las matrices invertibles: si $\beta = \{v_1, \dots, v_n\} \in \mathfrak{B}$ con $v_j = (v_{1j}, \dots, v_{nj}) \in V$, denoto por (v_{ij}) a la matriz que obtengo de tomar a v_j como columnas. Por lo tanto:

$$\Phi : \mathfrak{B} \longrightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R}) \quad \text{con} \quad f(\beta) = (v_{ij})$$

es una biyección. Por lo tanto identificaré \mathfrak{B} con $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$ (de hecho existe una estructura de grupo sobre \mathfrak{B} que hace que Φ sea un isomorfismo de grupos).

Observa que $H = \text{GL}^+(n, \mathbb{R}) = \{A \in G \mid \det A > 0\}$ es un subgrupo de G entonces la función $(A, \beta) \mapsto A\beta = A(v_{ij})$ es una acción de grupo. En efecto: $\text{Id}\beta = \text{Id}(v_{ij}) = (v_{ij}) = \beta$ y $(AB)\beta = (AB)(v_{ij}) = A(B(v_{ij})) = A(B\beta)$.

Además \sim es la relación de equivalencia que define esta acción: sean $\beta = (v_{ij})$ y $\gamma = (w_{ij})$ dos bases y Q su matriz de cambio de base, ie. $Q\beta = \gamma$. Entonces:

$$\beta \sim \gamma \iff \det Q > 0 \iff Q \in H \iff \gamma \in \mathcal{O}(\beta)$$

donde $\mathcal{O}(\beta)$ denota la órbita de β . Por lo tanto \sim es una relación de equivalencia ya que está inducida por una acción de grupo. \square

Ejercicio 22. El espacio de clases \mathfrak{B}/\sim tiene dos elementos.

Proof. Uso la misma notación que el ejercicio pasado. Debo probar que sólo hay dos órbitas, es decir que toda matriz de G está relacionada con Id o con Id^- que defino como

$$\text{Id}^- := \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Sea $\beta = (v_{ij}) \in \mathfrak{B}$ una base arbitraria con $\Delta = \det(v_{ij})$ y sea $A = (v_{ij})^{-1}$. Entonces $A(v_{ij}) = \text{Id}$ y similarmente si multiplico Id^- por la derecha a ambos lados, obtengo $A'(v_{ij}) = \text{Id}^-$ donde $A' := \text{Id}^- A$ y $\det A' = \det(\text{Id}^-) \Delta = -\Delta$.

Estas dos igualdades quieren decir que A es la matriz de cambio de base de (v_{ij}) a Id , y A' es la matriz de cambio de base de (v_{ij}) a Id^- . Por lo tanto si $\Delta > 0$ entonces aplica la primera frase y $(v_{ij}) \sim \text{Id}$; si $\Delta < 0$, entonces $\det A' > 0$ y $(v_{ij}) \sim \text{Id}^-$. En símbolos: para toda $\beta \in \mathfrak{B}$

$$[\beta] = \begin{cases} [\text{Id}] & \text{si } \Delta > 0 \\ [\text{Id}^-] & \text{si } \Delta < 0 \end{cases}$$

y así concluyo que $\mathfrak{B}/\sim = \{[\text{Id}], [\text{Id}^-]\}$. □

Para fines prácticos denoto $\mathfrak{B}/\sim = \{1, -1\}$

Definición 23. Sea V un espacio vectorial real de dimensión n . Una *orientación* de V es la elección de un elemento de $\mathfrak{B}/\sim = \{1, -1\}$.

Definición 24. Sean V y W espacios vectoriales reales de dimensión n con orientaciones $[\beta]$ y $[\gamma]$ (donde $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ y γ son bases de V y W respectivamente). Una transformación lineal $T : V \rightarrow W$ preserva orientación si

$$T(\beta) = \{T(v_1), \dots, T(v_n)\} \sim \gamma$$

es decir que la imagen de β tiene la misma orientación que γ .

Con estas dos definiciones puedo generalizar orientación a una variedad:

Definición 25. Sea M una variedad suave. Una *orientación* de M es una familia $\mathfrak{O} = \{\mathfrak{o}_x\}_{x \in M}$ donde cada \mathfrak{o}_x es una orientación de $T_x M$ tal que para toda $x \in M$ existe una carta (U, φ) de M alrededor de x tal que $D_x \varphi : T_x M \rightarrow T_{\varphi(x)} \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ preserva orientación donde \mathbb{R}^n está orientado canónicamente. Una variedad junto con una orientación se llama *variedad orientada* y se denota como la pareja (M, \mathfrak{O}) .

Una vez definido orientación puedo seguir con otra aplicación del teorema de Sard:

Quiero analizar la ecuación (1.17) cuando $n = m$. Tomo $[\alpha] \in \pi_n(\mathbb{S}^n, 1)$ con $\alpha : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ suave (estoy usando el teorema 19) y $y \in \mathbb{S}^n$ un valor regular. Por el teorema (17) tengo que $M_y = f^{-1}[\{y\}]$ es una subvariedad de \mathbb{S}^n de dimensión 0. Observa que M es compacto (por ser un subconjunto cerrado de un compacto), entonces $M_y = \{y_1, \dots, y_k\}$ es finito.

Se puede definir una función $\text{grad} : C^\infty(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n) \rightarrow \mathbb{Z}$ de la siguiente manera: para $\alpha : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$, toma $y \in \mathbb{S}^n$ un valor regular. Para cada $x \in M_y = f^{-1}[y]$ calculo

$$\text{grad}_x(\alpha) := \begin{cases} +1 & \text{si } D_x \alpha \text{ preserva orientación} \\ -1 & \text{si } D_x \alpha \text{ no preserva orientación} \end{cases}$$

y defino:

$$\text{grad}(\alpha) = \sum_{x \in f^{-1}[y]} \text{grad}_x(\alpha)$$

Para probar que grad está bien definida necesito probar que no depende del valor regular y que elegí.

Ejemplo 8. Sea $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ definido por $z \mapsto z^3$, claramente es suave. Si encajo \mathbb{S}^1 en \mathbb{R}^2 como $z = x + iy = (x, y)$, entonces α es la restricción de $f(x, y) = (x + iy)^3 = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$, definido sobre todo \mathbb{R}^2 , al círculo unitario. Entonces tengo que

$$D_z\alpha = D_{(x,y)}f = 3 \begin{pmatrix} x^2 - y^2 & -2xy \\ 2xy & x^2 - y^2 \end{pmatrix} = 3z^2$$

cuyo determinante es

$$\Delta = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 > 0 \quad \forall x + iy \in \mathbb{S}^1.$$

Esto quiere decir que $D_{(x,y)}$ preserva orientación en cada punto de \mathbb{S}^1 . Por lo tanto en la fórmula de $\text{grad}(\alpha)$ aparecen puros $+1$'s, es decir $\text{grad}(\alpha) = \#(\alpha^{-1}[z])$

Además $D_z\alpha$ es claramente sobre $(3z^2)$ es una rotación seguida de una expansión; ambas son funciones biyectivas del plano). Por lo tanto todo $z \in \mathbb{S}^1$ es un punto regular.

Por la fórmula de Moivre, sabemos calcular los tres elementos de $x \in \alpha^{-1}[z]$, de hecho para cada $z_0 \in \mathbb{S}^1$ fija, $\alpha^{-1}[z_0]$ es simplemente las raíces del polinomio $z^3 - z_0$ y por el teorema fundamental del álgebra tiene 3 raíces (contando multiplicidad). Por la fórmula de Moivre, sabemos que son tres raíces distintas:

$$\alpha^{-1}[z] = \left\{ e^{2\pi it/3}, e^{2\pi i(t+1)/3}, e^{2\pi i(t+2)/3} \right\}.$$

Por lo tanto el grado de α está bien definido para cualquier valor regular y vale $\text{grad}(\alpha) = 3$. Esto sugiere la idea de que α enrollar el círculo tres veces:

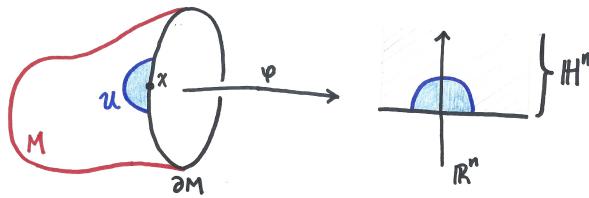
Teorema 20. (Hopf) La función $g : \pi_n(\mathbb{S}^n, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ es un isomorfismo de grupos, es decir:

$$\pi_n(\mathbb{S}^n, 1) \cong \mathbb{Z}$$

1.10.1 Variedades con frontera

Es útil introducir variedades con frontera, especialmente para la sección 1.12. La definición es casi idéntica a la definición usual de variedad, pero antes de empezar sólo recuerdo que el semiplano $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n$ se define como $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$.

Definición 26. Sea M un espacio topológico paracompacto. M es una *variedad con frontera* si para todo $x \in M$ existe una vecindad abierta U de x y una función continua $\varphi : U \rightarrow \mathbb{H}^n$ que es un homeomorfismo sobre su imagen. La *frontera* de M se define como $\partial M := \{x \in M \mid \exists(U, \varphi) \text{ tal que } \varphi(x) = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)\}$



Ojo: probar que ∂M está bien definido es muy complicado

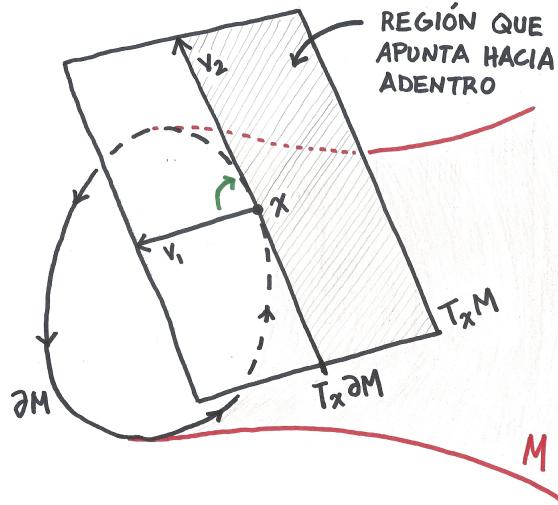
Nota. De ahora en adelante “variedad” siempre significa una variedad sin frontera como en la definición original y “variedad con frontera” siempre se refiere a la definición anterior.

La frontera ∂M de una variedad con frontera M^n es naturalmente una variedad de dimensión $n - 1$, entonces viene equipado de un espacio tangente $T_x \partial M$ para cada $x \in \partial M$. Además, $x \in \partial M \subset M$ también tiene asociado el espacio tangente $T_x M$. Por lo tanto $T_x \partial M$ es un subespacio de $T_x M$ de codimensión 1 y así, divide el espacio tangente en dos semiplanos.

Dado un vector $v \in T_x M - T_x \partial M$, éste puede estar en sólo uno de estos semiplanos. Decimos que v apunta hacia adentro si la variedad M está en la dirección de v y decimos que v apunta hacia afuera en el otro caso (ve la siguiente figura).

La orientación de una variedad se puede traducir a una variedad con frontera. Sea M una variedad con frontera y supongo que tiene una orientación $\mathfrak{O}_M := \{\mathfrak{o}_x\}_{x \in M}$. Entonces puedo definir una orientación para ∂M de la siguiente manera:

Para $x \in \partial M \subset M$, tomo la orientación $\mathfrak{o}_x = [\beta]$ donde $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de $T_x M$ de tal manera que v_1 es un vector que apunta hacia afuera. Entonces defino la orientación $\mathfrak{o}'_x \in \mathfrak{O}_{\partial M}$ como $\mathfrak{o}'_x = [\{v_2, \dots, v_n\}]$.



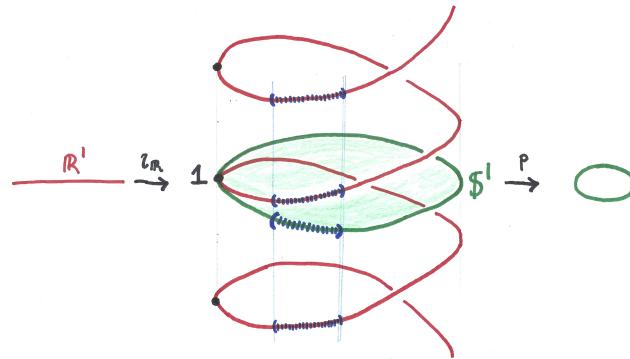
1.11 Cubrientes

Para calcular grupos de homotopías, es muy útil la idea de cubrientes. Empiezo con un ejemplo:

Considera el mapeo exponencial $\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$, que hace $t \mapsto e^{2\pi it} = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ (estoy identificando $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ con $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$). Como \mathbb{R} se puede encajar en \mathbb{R}^3 como $\iota(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t)$ entonces el mapeo exponencial ϵ lo puedo pensar como la composición del encaje ι seguida de la restricción de la proyección $p : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2)$ en \mathbb{R}^3 porque:

$$(p \circ \iota)(t) = p(\iota(t)) = p(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \quad \therefore \epsilon = p \circ \iota.$$

El siguiente dibujo ilustra esta construcción:



Para resumir: enajo $\iota : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ y $j : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ mediante:

$$\iota(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t) \quad y \quad j(e^{i\theta}) = (\cos \theta, \sin \theta, 0).$$

Identifico $\mathbb{R} = \iota[\mathbb{R}]$ y $\mathbb{S}^1 = j[\mathbb{S}^1]$. Si $\bar{p} = p|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ es la restricción de la proyección $p : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2)$ en \mathbb{R}^3 , entonces claramente $\epsilon = \bar{p}$.

Esta función cumple una propiedad muy importante:

Ejercicio 23. Para toda $x \in \mathbb{S}^1$, existe una vecindad abierta $U \subseteq \mathbb{S}^1$ de x tal que $\epsilon^{-1}[U] = \bigcup U_n$ con $U_n \cap U_m = \emptyset$ donde $\epsilon_n := \epsilon|_{U_n} : U_n \rightarrow U$ es un homeomorfismo.

Proof. Veo a \mathbb{S}^1 encajado en el plano complejo y sea $e^\theta \in \mathbb{S}^1$. Sin pérdida de generalidad puedo asumir que $e^\theta \neq -1$ porque de otra manera nada más encajo \mathbb{S}^1 como $-\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$.

Observa que $e^\theta \in \mathbb{C} - \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ entonces la rama principal del argumento está bien definida y $\arg(e^\theta) = \vartheta \in (-\pi, \pi)$ donde $\theta = \vartheta + 2\pi n$ para alguna $n \in \mathbb{Z}$ (aquí \arg es una función continua).

De esta manera para cada $z \in \mathbb{S}^1 - \{-1\}$ hay un único $\vartheta \in (-\pi, \pi)$ tal que $z = e^\vartheta$, ie. $\arg(z) = \vartheta$. Con esto puedo definir una función continua $\delta : \mathbb{S}^1 - \{-1\} \rightarrow (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ como

$$\delta(z) = \delta(e^\vartheta) = \frac{\vartheta}{2\pi}.$$

Claramente es continua y además es el inverso de la restricción $\bar{\epsilon} := \epsilon|_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$ porque si $t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, o equivalentemente $2\pi t \in (-\pi, \pi)$, y si $z = e^\vartheta \in \mathbb{S}^1 - \{-1\}$ entonces:

$$\delta(\bar{\epsilon}(t)) = \delta(e^{2\pi t}) = \frac{2\pi t}{2\pi} = t \quad \text{y} \quad \bar{\epsilon}(\delta(e^\vartheta)) = \bar{\epsilon}\left(\frac{\vartheta}{2\pi}\right) = e^{2\pi \frac{\vartheta}{2\pi}} = e^\vartheta.$$

Por lo tanto $\mathbb{S}^1 - \{-1\} \approx (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ mediante la restricción de ϵ .

Ahora escribo $U = \mathbb{S}^1 - \{-1\}$ como la vecindad abierta de algún elemento $z \neq -1$ arbitrario de \mathbb{S}^1 . Observa que

$$\epsilon^{-1}[U] = \{t \in \mathbb{R} \mid e^{2\pi t} \neq -1\} = \{t \in \mathbb{R} \mid t \notin (\frac{1}{2} + \mathbb{Z})\} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$$

donde $\frac{1}{2} + \mathbb{Z} = \{\frac{1}{2} + n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{Z}\}$; escribo $U_n := (-\frac{1}{2} + n, \frac{1}{2} + n)$. Claramente las U_n 's son disjuntas porque cada una pertenece a un elemento distinto de la partición $\{[n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de \mathbb{R} .

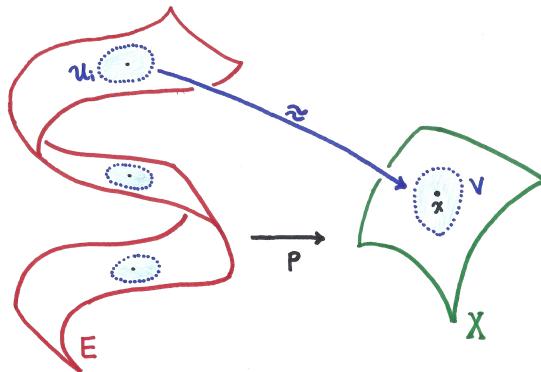
Además sea $\varphi_{-n} : U_n \rightarrow (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ la traslación $\varphi_{-n}(t) = t - n$. Claramente es un homeomorfismo porque es la restricción de un homeomorfismo con el codominio igual a su imagen. Por lo tanto

$$\epsilon_n := \epsilon|_{U_n} = \bar{\epsilon} \circ \varphi_{-n} \quad \text{porque} \quad \bar{\epsilon}(\varphi_{-n}(t)) = \bar{\epsilon}(t - n) = e^{2\pi(t-n)} = e^{2\pi t} = \epsilon_n(t).$$

Esto quiere decir que $\epsilon_n : U_n \rightarrow U$ es un homeomorfismo por ser la composición de homeomorfismos. \square

Defino explícitamente esta propiedad:

Definición 27. Sean E y X espacios topológicos y $p : E \rightarrow X$ una función continua. La terna (E, p, X) es un *cubriente* si toda $x \in X$ tiene una vecindad abierta $V \subseteq X$ tal que su preimagen es una unión disjunta de abiertos de E , ie. $p^{-1}[V] = \bigsqcup U_j$, tal que la restricción $p|_{U_j} : U_j \rightarrow V$ es un homeomorfismo.



Cada ingrediente de la definición tiene un nombre: E es el *espacio total*, X es el *espacio base*, la función $p : E \rightarrow X$ es una *aplicación cubriente*, las componentes conexas U_i de $p^{-1}[V]$ se llaman *hojas*. Además, para un punto $x \in X$ su imagen inversa $E_x := p^{-1}[x]$ se llama la *fibración* de p sobre x . A veces diré que la función $p : E \rightarrow X$ es un cubriente para referirme al cubriente (E, p, X) ; esto es porque la notación de función ya muestra los tres elementos de la definición de cubriente.

Las fibras de un cubriente son discretas:

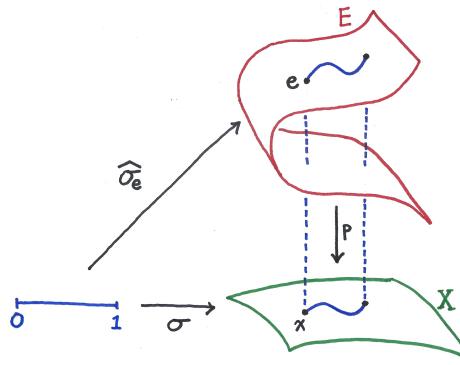
Proposición 13. Sea $p : E \rightarrow X$ un cubriente, $x \in X$ y $E_x \subset E$ la fibra de p sobre x . La topología de E_x como subespacio de E es la topología discreta.

Proof. Sea $V \subset X$ una vecindad de x tal que $p^{-1}[V] = \bigsqcup U_j$ con $p|_{U_j}$ es un homeomorfismo sobre su imagen. Ahora, si $e \in E_x$ entonces está en un único U_j . Por lo tanto si $e' \in E_x \cap U_j$ entonces $p(e) = p(e')$, pero $p|_{U_j}$ es inyectivo entonces $e = e'$. Con esto concluyo que los singuletes $\{e\} = E_x \cap U_j$ son abiertos y que E_x es un espacio discreto. \square

Ejemplo 9. Todo homeomorfismo es un cubriente. Por el ejercicio 23, la exponencial $\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ es un cubriente.

Cubrientes cumplen una propiedad fundamental para el estudio de grupos de homotopías:

Teorema 21. (*Levantamiento de trayectorias*) Sea $p : E \rightarrow X$ un cubriente y $\sigma : I \rightarrow X$ una trayectoria que empieza en $x = \sigma(0)$. Para toda $e \in E_x$ existe una única trayectoria $\hat{\sigma}_e : I \rightarrow E$ que extiende a σ , es decir $p \circ \hat{\sigma}_e = \sigma$.



Proof. Por la definición de cubriente, toda $\sigma(s) \in X$, tiene una vecindad $V_s \subseteq X$ tal que la restricción de la aplicación cubriente p a cada componente conexa de $p^{-1}[V]$ es un homeomorfismo. Como la imagen de σ es compacto, existen $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{n-1} < s_n = 1$ tal que $\{V_{s_k}\}_{k=0,\dots,n}$ es una cubierta de la trayectoria. Observa que dos abiertos consecutivos $V_{s_{k-1}}$ y V_{s_k} deben intersectarse porque si son disjuntas, $\{V_{s_{k-1}}, V_{s_k}\}$ sería una desconexión de conjunto conexo $\sigma[s_{k-1}, s_k]$.

Ahora, si elijo un $e \in E_x$, entonces existe un único componente U_0 de $p^{-1}[V_{s_0}]$ tal que $e \in U_0$. Además, como $p|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_{s_0}$ es un homeomorfismo, entonces defino

$$\hat{\sigma}_e^0 : [0, s_1] \longrightarrow V_{s_0} E \quad \text{con} \quad \hat{\sigma}_e^0(s) = (p|_{U_0})^{-1}(\sigma(s))$$

Observa que $p(\hat{\sigma}_e^0(s_1)) = \sigma(s_1) \in V_{s_1}$, entonces se determina un único componente U_1 de $p^{-1}[V_{s_1}]$ tal que $\hat{\sigma}_e^0(s_1) \in U_1$. De la misma manera, $p|_{U_1}$ es un homeomorfismo y defino

$$\hat{\sigma}_e^1 : [s_1, s_2] \longrightarrow V_{s_1} E \quad \text{con} \quad \hat{\sigma}_e^1(s) = (p|_{U_1})^{-1}(\sigma(s)).$$

De manera inductiva defino las (únicas) n funciones continuas $\hat{\sigma}_e^k : [s_k, s_{k+1}] \rightarrow U_k$ que coinciden en sus intersecciones. Entonces existe una única función continua $\hat{\sigma}_e : I \rightarrow \bigcup U_k \subseteq E$ que se restringe a cada $\hat{\sigma}_e^k$.

Por último, para toda $s \in I$, existe una k tal que $s \in [s_k, s_{k+1})$ entonces:

$$(p \circ \hat{\sigma}_e)(s) = p(\hat{\sigma}_e^k(s)) = p(p|_{U_k})^{-1}(\sigma(s)) = \sigma(s)$$

y la trayectoria $\hat{\sigma}_e$ es la buscada. \square

Se puede generalizar el concepto de un cubriente:

Definición 28. Una función continua $p : E \rightarrow X$ es una *fibración* si dadas funciones $g, f : Y \rightarrow E$ y una homotopía $H : Y \times I \rightarrow X$ entre $p \circ f : Y \rightarrow X$ y $p \circ g : Y \rightarrow X$, existe una única homotopía $\hat{H} : Y \times I \rightarrow E$ entre f y g que extiende a H , es decir se tiene el siguiente diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow (\text{Id}, 0) & \nearrow \hat{H} & \downarrow p \\ Y \times I & \xrightarrow{H} & X \end{array} \quad p \circ \hat{H} = H.$$

Teorema 22. Todo cubriente $p : E \rightarrow X$ es una fibración.

En el caso del teorema del levantamiento, la elección de $e \in E$ es equivalente a tomar $Y = \{e\}$.

Ahora me enfoco en usar los cubrientes para calcular los grupos fundamentales:

Proposición 14. Sea $p : E \rightarrow X$ un cubriente con (X, x) un espacio basado y $e \in E_x$. Entonces el morfismo inducido $(p_\#) : \pi_n(E, e) \rightarrow \pi_n(X, x)$ es un monomorfismo de grupos para toda n .

Proof. Sea $[\alpha] \in \pi_n(E, e)$ (en particular $\alpha : \mathbb{S}^n \rightarrow E$) tal que $(p_\#)[\alpha] = [p \circ \alpha] = 1$, es decir que $p \circ \alpha \simeq \text{cte}_x : \mathbb{S}^n \rightarrow \{x\} \subset X$. Sea $H : I \times I \rightarrow E$ tal homotopía con $H_0(t) = \text{cte}_x(t) = x$ y $H_1(t) = (p \circ \alpha)(t)$.

Por el teorema 22, $p : E \rightarrow X$ es una fibración y si tomo $Y = I$ entonces existe una homotopía $\hat{H} : I \times I \rightarrow E$ entre α y el lazo constante $\text{cte}_e(s) = e \in E$ (que es el que cumple $p \circ \text{cte}_e = \text{cte}_x$). Por lo tanto $(p_\#)[\alpha] = [p \circ \alpha] = [\text{cte}_e] = 1 \in \pi_n(E, e)$ y $p_\#$ es un monomorfismo. \square

Ahora si restrinjo al caso $n > 1$ el morfismo $(p_\#) : \pi_n(E) \rightarrow \pi_n(X, x)$ es un isomorfismo! Esto sucede porque bajo ciertas condiciones, cualquier función continua $f : Y \rightarrow X$, en particular $Y = \mathbb{S}^n$, se factoriza a través del cubriente $p : E \rightarrow X$:

Teorema 23. Sea $p : E \rightarrow X$ un cubriente visto en **Top_{*}** con (E, e) y (X, x) tal que $e \in E_x$. Si (Y, y) es conexo y localmente conectable por trayectorias y $f : Y \rightarrow X$ es basada, entonces:

$$\begin{array}{ccc} E & & \\ \exists! \hat{f} \nearrow & \downarrow p & \iff f_\#[\pi_1(Y)] \subseteq p_\#[\pi_1(E)] \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Ejercicio 24. Prueba “ \implies ” del teorema 23.

Proof. Sea $f_\#[\alpha] = [f \circ \alpha] \in f_\#[\pi_1(Y)] \subseteq \pi_1(X)$ con $\alpha : I \rightarrow Y$ un lazo y sea $\hat{f} : Y \rightarrow E$ la función basada garantizada por la hipótesis. Observa que $\hat{f}_\#[\alpha] = [\hat{f} \circ \alpha] \in \pi_1(E)$. Como $X \mapsto \pi_1(X)$ es functorial, entonces $p_\# \circ \hat{f}_\# = f_\#$. En particular $f_\#[\alpha] = p_\#(\hat{f}_\#[\alpha]) \in p_\#[\pi_1(E)]$. \square

Nota. Para la ida no se requirió que Y fuese conexa y localmente conectable por trayectorias.

El regreso de del teorema 23 se hace de la siguiente manera:

Sea $\sigma : I \rightarrow Y$ una trayectoria que empieza en $\sigma(0) = y$ y termina en $\sigma(1) = y'$. Entonces $\widehat{f_*}(\sigma) := f \circ \sigma : I \rightarrow X$ es una trayectoria y por el teorema del levantamiento existe una única trayectoria $\widehat{f_*}(\sigma)_e : I \rightarrow E$ que extiende a $f_*(\sigma)$. Con esto defino:

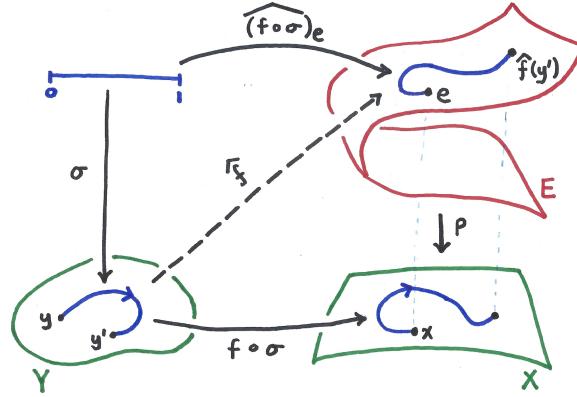
$$\hat{f} : Y \longrightarrow E \quad \text{con} \quad \hat{f}(y') = \widehat{f_*}(\sigma)(1)$$

Ve:

Observa que \hat{f} está bien definido porque si $\tau : I \rightarrow Y$ es otra trayectoria que empieza en y y termina en y'

Corolario 24. Sea $p : E \rightarrow X$ un cubriente. Entonces para toda $n > 1$, el monomorfismo $p_\# : \pi_n(E) \rightarrow \pi_n(Y)$ es un isomorfismo, en símbolos:

$$p : E \rightarrow X \quad \text{es un cubriente} \quad \implies \quad \pi_n(E) \cong \pi_n(X) \quad (n > 1).$$



Proof. Nada más tengo que probar que $p_{\#}$ es sobre. Observa que \mathbb{S}^n es conexa y y conectable por trayectorias. Además $\pi_1(\mathbb{S}^n) = 0$ por la ecuación (1.17) entonces para toda $\alpha : \mathbb{S}^n \rightarrow X$ tengo $\alpha_{\#}[\pi_1(\mathbb{S}^n)] = 0 \subset p_{\#}[\pi_1(E)]$, por el teorema 23 existe un $\hat{\alpha} : \mathbb{S}^n \rightarrow E$ que extiende α . Claramente

$$p_{\#}[\hat{\alpha}] = [p \circ \hat{\alpha}] = [\alpha]$$

y $p_{\#}$ es sobre. \square

Ejemplo 10. $\pi_n(\mathbb{S}^1) = 0$ para toda $n > 1$ porque la exponencial $\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ es un cubriente y \mathbb{R} es contraible.

El único grupo de homotopía que falta calcularle a \mathbb{S}^1 es $\pi_1(\mathbb{S}^1)$. Para esto desarrollo la teoría de acciones de grupos.

1.11.1 Acciones de grupos

En esta parte generalizo las acciones de grupos a espacios topológicos.

Definición 29. Sea G un grupo topológico con neutro $1 \in G$ y X un espacio topológico. Una *acción izquierda* de G en X es una función continua $G \times X \rightarrow X$ con $(g, x) \mapsto gx$ que cumple dos propiedades:

- (i) $1x = x$ para toda $x \in X$.
- (ii) $(gg')x = g(g'x)$ para todas $g, g' \in G$.

En general una acción de grupo se define sin topologías pero este caso es un caso particular de la definición anterior si G y X tienen la topología discreta.

Ejemplo 11. Si $G = \text{GL}_n(\mathbb{R})$ y $X = \mathbb{R}^n$ entonces la multiplicación de matrices $(A, x) \mapsto Ax$ es una acción de grupo.

Ejercicio 25. Sea $X^n = X \times \cdots \times X$ y $G = S_n$ el grupo simétrico (de permutaciones de un conjunto con n elementos). Entonces $X^n \times S_n \rightarrow X^n$ definido por

$$((x_1, \dots, x_n), \sigma) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

es una acción derecha de S_n sobre X^n .

Proof. Primero observa que el neutro $1 \in S_n$ es la identidad, entonces

$$(x_1, \dots, x_n)1 = (x_{1(1)}, \dots, x_{1(n)}) = (x_1, \dots, x_n).$$

Ahora sea $\sigma, \tau \in S_n$. Entonces

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n)(\sigma\tau) &= (x_{(\sigma\tau)(1)}, \dots, x_{(\sigma\tau)(n)}) = (x_{\sigma(\tau(1))}, \dots, x_{\sigma(\tau(n))}) = (x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)})\sigma \\ &= ((x_1, \dots, x_n)\sigma)\tau. \end{aligned}$$

Esta prueba muestra que esta acción no es izquierda porque tendría $(\sigma\tau)x = \tau(\sigma(x))$, es decir que la segunda propiedad de acción izquierda no se cumple porque se invierte el orden de las acciones.

Nada más falta probar que $X^n \times S_n \rightarrow X^n$ es continua. Sea $U_1 \times \cdots \times U_n \subseteq X^n$ un abierto arbitrario, es decir $U_i \subseteq X$ es abierto para toda $i = 1, \dots, n$. Entonces $((x_1, \dots, x_n), \sigma)$ está en la preimagen de la acción si $x_{\sigma(i)} \in U_i$ para toda i , pero esto es equivalente a que

$$x_i \in U_{\sigma^{-1}(i)} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

La equivalencia se da porque si $x_i \in U_i$ para toda i , entonces $x_{\tau(i)} \in U_{\tau(i)}$ para toda permutación τ ; en particular $\tau = \sigma^{-1}$.

Por lo tanto la preimagen de U en $X \times S_n$ es:

$$\bigcup_{\sigma \in S_n} ((U_{\sigma^{-1}(1)} \times \cdots \times U_{\sigma^{-1}(n)}) \times \{\sigma\})$$

que es abierto ya que $\{\sigma\} \subset S_n$ es abierto porque S_n tiene la topología discreta. \square

Definición 30. Sea $G \times X \rightarrow X$ una acción izquierda de un grupo G y $x \in X$ un elemento arbitrario. El *grupo de isotropía* de x es el conjunto de elementos de G que fijan a x bajo la acción, es decir:

$$G_x := \{g \in G \mid gx = x\}.$$

Ejercicio 26. El grupo de isotropía de x siempre es un subgrupo.

Proof. Si $1 \in G$ es el neutro, entonces por definición $1x = x$, entonces $1 \in G_x$. Ahora sean $g, h \in G_x$, en particular $hx = x$. Esto implica que

$$(gh^{-1})x = g(h^{-1}x) = g(h^{-1}(hx)) = g((h^{-1}h)x) = g(1x) = gx = x.$$

Por lo tanto $gh^{-1} \in G_x$ y G_x es un subgrupo de G . \square

Definición 31. Sea $G \times X \rightarrow X$ una acción izquierda de un grupo G y $x \in X$ un elemento arbitrario. La *órbita* de x es el subconjunto de X definido por

$$\mathcal{O}(x) := \{gx \in X \mid g \in G\}.$$

Resulta que las órbitas de una acción de grupos sobre X partitionan a X :

Ejercicio 27. La relación

$$x \sim y \iff \exists g \in G \text{ tal que } gx = y \iff y \in \mathcal{O}(x)$$

definida sobre X es una relación de equivalencia.

Proof. Pruebo algo equivalente: $\{\mathcal{O}(x)\}_{x \in X}$ es una partición de X . Si $x \in X$, entonces $1x = x$ y así $x \in \mathcal{O}(x)$. Por lo tanto

$$X = \bigcup_{x \in X} \mathcal{O}(x). \tag{1.18}$$

Ahora sean $x, y \in X$ tales que $\mathcal{O}(x) \cap \mathcal{O}(y) \neq \emptyset$; sea $z \in X$ un elemento en esta intersección. Esto implica que existen $g, h \in G$ tal que $gz = x$ y $hz = y$. Por lo tanto

$$(hg^{-1})x = (hg^{-1})(gz) = (hg^{-1}g)z = (h1)z = h(z) = hz = y$$

y así $y \in \mathcal{O}(x)$. Con esto tengo que $g'y \in \mathcal{O}(x)$ implica $g'y = (g'hs^{-1})x$ y $g'y \in \mathcal{O}(x)$ entonces $\mathcal{O}(y) \subseteq \mathcal{O}(x)$. De manera análoga tengo que $\mathcal{O}(x) \subseteq \mathcal{O}(y)$.

Por lo tanto si $\mathcal{O}(x) \cap \mathcal{O}(y)$ se intersectan, entonces son iguales. Por lo tanto la unión en la ecuación (1.18) es disjunta y así $\{\mathcal{O}(x)\}_{x \in X}$ es una partición en X . Esto significa que la relación inducida $x \sim y \iff y \in \mathcal{O}(x)$ es una relación de equivalencia. \square

Definición 32. Sea $G \times X \rightarrow X$ una acción de grupos entonces el espacio de cocientes módulo la relación de equivalencia $x \sim y \iff y \in \mathcal{O}(x)$ se llama el *espacio de órbitas* y viene equipada de la topología cociente; se denota por X/G .

Nota. Las fibras de la identificación $\nu : X \rightarrow X/G$ son las órbitas $\nu^{-1}[x] = \mathcal{O}(x)$.

Para calcular las órbitas de una acción $G \times X \rightarrow X$ restrinjo la acción a $G \times \{x\} \rightarrow X$, entonces la imagen es exactamente la órbita de x . Como $G \approx G \times \{x\}$, la restricción de la acción se puede ver como la función continua:

$$\alpha_x : G \longrightarrow \mathcal{O}(x) , \quad \alpha_x(g) = gx.$$

Además $\alpha_x(g) = \alpha_x(h) \iff gx = hx \iff gh^{-1} \in G_x$. Por lo tanto se factoriza a través de la identificación $\nu : G \rightarrow G/G_x$. Por lo tanto el siguiente diagrama commuta:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\alpha_x} & \mathcal{O}(x) \\ \nu \downarrow & \nearrow \bar{\alpha}_x & \\ G/G_x & & \end{array} \quad \alpha_x = \bar{\alpha}_x \circ \nu.$$

Está definida por $\alpha_x(gG_x) = \alpha_x(g) = gx$. Como α_x es continua, $\bar{\alpha}_x$ es continua. Claramente es sobreyectiva porque $\mathcal{O}(x)$ es por definición la imagen de α_x . Además:

Ejercicio 28. $\bar{\alpha}_x : (G/G_x) \rightarrow \mathcal{O}(x)$ es inyectiva. Por lo tanto es una función continua y biyectiva.

Proof. Como $\bar{\alpha}_x(gG_x) = \alpha_x(g) = gx$, entonces

$$\bar{\alpha}_x(gG_x) = \bar{\alpha}_x(hG_x) \iff \alpha_x(g) = \alpha_x(h) \iff gx = hx \iff (gh^{-1})x = x \iff gh^{-1} \in G_x$$

dice que α_x está bien definida y es inyectiva. Además es sobreyectiva porque $\mathcal{O}(x)$ se define como la imagen de α_x . Por lo tanto α_x es biyectiva.

Por último, $\alpha_x = \bar{\alpha}_x \circ \nu$ donde $\nu : G \rightarrow G/G_x$ es la identificación inducida por α_x , entonces, como α_x es continua, $\bar{\alpha}_x$ es continua. \square

Nota. Si X es Hausdorff y G es compacto (y por lo tanto también G/G_x), entonces por el resultado anterior $\bar{\alpha}_x$ es un homeomorfismo, ie $(G/G_x) \approx \mathcal{O}(x)$.

Definición 33. Una acción $G \times X \rightarrow X$ de grupos es *libre* si $gx = x \implies g = 1$ o equivalentemente $G_x = 1$. Es *transitiva* si para cualesquiera $x, y \in X$ existe un $g \in G$ tal que $xg = y$ o equivalentemente $X = \mathcal{O}(x)$.

Si $G \times X \rightarrow X$ es una acción libre, la nota anterior dice que si G es compacto y X hausdorff, entonces $G \approx \mathcal{O}(x)$. Observa que este homeomorfismo depende de que $x \in X$ elegimos. Por lo tanto $\mathcal{O}(x)$ no hereda una estructura de grupo topológico. Pero las fibras de la identificación $X \rightarrow X/G$ son $\mathcal{O}(x) \approx G$. Por lo tanto si G tiene la topología discreta, entonces $\nu : X \rightarrow X/G$ es casi un cubriente; necesitamos que las fibras se vean así localmente.

Definición 34. Sea G un grupo discreto. Una acción $G \times X \rightarrow X$ es *propiamente discontinua* si para toda $x \in X$ tiene una vecindad abierta $U \subseteq X$ tal que

$$gU \cap U = \emptyset \quad \forall g \neq 1$$

donde gU es la imagen de la restricción de la acción a $G \times U$.

Ejercicio 29. Sea G un grupo discreto y $\alpha : G \times X \rightarrow X$ una acción de grupos. Entonces:

$$\alpha \text{ es propiamente discontinua} \implies \alpha \text{ es libre.}$$

Proof. Sea $x \in X$ y $U \subseteq X$ una vecindad garantizada por la definición de propiamente discontinua. Ahora sea $g \in G$ tal que $gx = x$. Entonces $gU = U \implies U \cap gU \neq \emptyset$ por lo tanto necesariamente $g = 1$ y α es una acción libre. \square

La importancia de acciones propiamente discontinuas lo muestra el siguiente teorema:

Teorema 25. *La identificación $X \rightarrow X/G$ es un cubriente cuando la acción es propiamente discontinua:*

$$G \times X \rightarrow X \text{ es propiamente discontinua} \implies \nu : X \rightarrow X/G \text{ es un cubriente.}$$

Ejemplo 12. Considera la acción de $G = \mathbb{Z}_2$ sobre $X = \mathbb{S}^n$ definida como $(\pm 1, x) \mapsto \pm x$. Esta acción es libre porque en \mathbb{S}^n , siempre se cumple que $-x \neq x$. Además, \mathbb{S}^n es Hausdorff y G es compacto (por ser finito y discreto), entonces el teorema anterior aplica:

$$\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n / \mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^2 \text{ es un cubriente.}$$

Los espacios cubrientes nos permiten estudiar los grupos fundamentales porque para todo cubriente existe una acción de grupo especial:

Definición 35. Sean $p : E \rightarrow X$ un cubriente, $x \in X$ fijo y E_x la fibra de p sobre x . El grupo fundamental $\pi_1(X, x)$ actúa sobre la fibra E_x de la siguiente manera:

$$E_x \times \pi_1(X) \rightarrow E_x , \quad (e, [\sigma]) \mapsto \hat{\sigma}_e(1)$$

donde $\hat{\sigma}_e : I \rightarrow E$ es el levantamiento de σ a E garantizado por el teorema 21.

Ejercicio 30. Sea $p : E \rightarrow X$ un cubriente. Si E es conectable por trayectorias entonces la acción $E_x \times \pi_1(X) \rightarrow E_x$ es transitiva.

Proof. Sean $e, e' \in E_x$. Como E es conectable por trayectorias, existe un $\tau : I \rightarrow E$ tal que $\tau(0) = e$ y $\tau(1) = e'$. Entonces $\sigma := p \circ \tau$ es un lazo en X porque

$$\sigma(0) = p(\tau(0)) = p(e) = x = p(e') = p(\tau(1)) = \sigma(1).$$

Por lo tanto si elijo $e \in E$, el lazo σ se levanta a una única trayectoria $\hat{\sigma}_e$ tal que $\hat{\sigma}_e(0) = e$ y $p \circ \hat{\sigma}_e = \sigma$. Pero τ también cumple estas propiedades ($\sigma = p \circ \tau$ por definición y $\tau(0) = e$). Por la unicidad del levantamiento tengo que $\hat{\sigma}_e = \tau$, por lo tanto:

$$e[p \circ \tau] = e[\sigma] = \hat{\sigma}_e(1) = \tau(1) = e'$$

y la acción es transitiva. □

Ejercicio 31. Sean $p : E \rightarrow X$ un cubriente y $p_{\#} : \pi_1(E, e) \rightarrow \pi_1(X, x)$ el homomorfismo inducido donde $x \in X$ es fija y $e \in E_x$. Si denoto $G = \pi_1(X, x)$, el grupo de isotropía de e bajo la acción inducida por el cubriente es:

$$G_e = p_{\#}[\pi_1(E, e)].$$

Proof.

(\subseteq) Sea $[\sigma] \in G_e$ con $\sigma : I \rightarrow X$ un lazo y $\hat{\sigma}_e : I \rightarrow E$ su levantamiento, en particular $\hat{\sigma}_e(0) = e$. Como $[\sigma] \in G_e$, entonces:

$$e[\sigma] = \hat{\sigma}_e(1) = e$$

y así $\hat{\sigma}_e$ es un lazo en E , ie. $[\hat{\sigma}_e] \in \pi_1(E)$. Por último, como $\hat{\sigma}_e$ es el levantamiento de σ , entonces $p \circ \hat{\sigma}_e = \sigma$ y así:

$$p_{\#}[\hat{\sigma}_e] = [p \circ \hat{\sigma}_e] = [\sigma].$$

Por lo tanto $[\sigma] \in p_{\#}[\pi_1(E)]$.

(\supseteq) Sea $p_{\#}[\sigma] = [p \circ \sigma] \in p_{\#}[\pi_1(E)]$ donde $[\sigma] \in \pi_1(E, e)$, ie. $\sigma(0) = e = \sigma(1)$. Si escribo $\tau := p \circ \sigma$ para el lazo en X , su levantamiento es $\hat{\tau}_e$ donde $p \circ \hat{\tau}_e = \tau$ y $\hat{\tau}_e(0) = e$. Observa que σ también cumple estas dos propiedades entonces la unicidad del levantamiento dice que $\hat{\tau}_e = \sigma$. Por lo tanto:

$$e[p \circ \sigma] = e[\tau] = \hat{\tau}_e(1) = \sigma(1) = e \implies [p \circ \sigma] \in G_e.$$

□

Si aplico estos dos resultados al ejemplo 12 puedo calcular el grupo fundamental del espacio proyectivo:
Proposición 15. Para toda $n > 1$, $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2$.

Proof. Por el ejemplo 12, la identificación $p : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ es un cubriente inducido por la acción de \mathbb{Z}_2 sobre \mathbb{S}^n . Si escribo $G = \pi_1(\mathbb{R}P^n)$ entonces G actúa sobre las fibras $E_{[x]} = \{x, -x\}$.

Por el ejercicio 30, como \mathbb{S}^n es conectable por trayectorias, esta acción es transitiva y así $\mathcal{O}([x]) = E_{[x]}$. El ejercicio 28 garantiza que G/G_e y $E_{[x]}$ están en biyección, es decir el grupo G/G_e tiene dos elementos; por lo tanto es isomorfo a \mathbb{Z}_2 . Por último, el ejercicio 31 dice que $G_e = p_{\#}[\pi_1(\mathbb{S}^n)] = p_{\#}[1] = 1$ (donde $\pi_1(\mathbb{S}^n) = 1$ por la fórmula 1.17) entonces $G/G_e \cong G$ y concluyo que $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$. □

Ya tengo la herramienta necesaria para poder calcular el último grupo fundamental de \mathbb{S}^1 que falta calcular:

Por el ejercicio 23, la exponencial $\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ es un cubriente, entonces hay acción α sobre la fibra $\mathbb{R}_1 = \epsilon^{-1}(1) = \mathbb{Z}$ asociada al cubriente. Además esta acción es transitiva por el ejercicio 30 y así $\mathcal{O}(n) = \mathbb{Z}$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Si escribo $G = \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ entonces $\alpha_n : G \rightarrow \mathcal{O}(n) = \mathbb{Z}$, induce una biyección continua $\bar{\alpha}_n : (G/G_n) \rightarrow \mathbb{Z}$. Observa que \mathbb{R} es contraible, entonces el ejercicio 21 garantiza que $G_n = \epsilon_{\#}[\pi_1(\mathbb{R}, 0)] = \epsilon_{\#}[1] = 1$. Por lo tanto $G \cong G/G_n$ y $\bar{\alpha}_n : G \rightarrow \mathbb{Z}$ es una biyección continua para toda n . En general $\bar{\alpha}_n$ está definido por $\bar{\alpha}_n[\sigma] = n[\sigma] = \hat{\sigma}_n(1)$. Resulta que:

Ejercicio 32. $\bar{\alpha}_0 : G \rightarrow \mathbb{Z}$ es un homomorfismo de grupos.

Proof. Sean $[\sigma], [\tau] \in G$. Primero calculo (usando las propiedades de acciones de grupo):

$$\bar{\alpha}_0[\sigma * \tau] = 0 \cdot [\sigma * \tau] = (0 \cdot [\sigma]) \cdot [\tau] = \hat{\sigma}_0(1) \cdot [\tau] = \hat{\tau}_0(1)$$

donde $n = \bar{\alpha}_0[\sigma] = \hat{\sigma}_0(1) \in \mathbb{Z}$. La imagen de $\hat{\tau}_n : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ es simplemente la imagen de $\hat{\tau}_0$ trasladado por n , en particular

$$\hat{\tau}_n(1) = n + \hat{\tau}_0(1) = \hat{\sigma}_0(1) + \hat{\tau}_0(1) = \bar{\alpha}_0[\sigma] + \bar{\alpha}_0[\tau]$$

Más formalmente, el lazo $\hat{\tau}'_0 := n + \hat{\tau}_0$ también cumple las propiedades de ser un levantamiento de τ que inicia en n . □

Por lo tanto he demostrado que

Proposición 16. $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

Los cubrientes forman una categoría:

Definición 36. Sea X un espacio topológico fijo. La categoría de cubrientes sobre X , denotado por $\mathbf{Cub}(X)$, tiene como objetos los cubrientes (E, p, X) y morfismos las funciones continuas $f : (E, p, X) \rightarrow (E', p', X)$ que hacen commutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & X & \end{array}$$

Teorema 26. Sea X un espacio conexo, localmente conectable por trayectorias y semilocalmente 1-conexo (alrededor de cada punto existe una vecindad $U \subseteq X$ cuya inclusión $i : U \rightarrow X$ induce el morfismo cero, es decir $i_{\#} = 0$). Existe una biyección

$$\mathbf{Cub}(X) \longleftrightarrow \{H \leq \pi_1(X)\}_{gHg^{-1}}$$

Ejemplo 13. Si $n > 1$, $\mathbf{Cub}(\mathbb{S}^n) = \{\text{Id}\}$ porque $\pi_1(\mathbb{S}^n) = 0$.

1.12 Cobordismo

1.12.1 Conos

Definición 37. El *cono* de un espacio X se define como:

$$CX := (X \times I) /_{X \times \{1\}}$$

Si el espacio es basado, ie (X, x) , entonces su cono se define como

$$C(X, x) := (X \times I) /_{(X \times \{1\}) \cup (\{x\} \times I)}$$

Ve la figura ??.

Nota. Observa que el cono viene equipado de una inclusión natural $\iota : X \hookrightarrow CX$ con la regla $x \mapsto [x, 0]$.

Ejercicio 33. El cono de cualquier espacio X es contraíble.

Proof. Demostraré que $\text{Id}_{CX} \simeq \text{cte}_*$ donde $* = [x, 1] \in CX$. Defino la homotopía $H : (X \times I) \times I \rightarrow CX$ con

$$H((x, s), t) = [x, t + (1 - t)s].$$

Claramente $H_0 = \text{Id}$ y $H_1 = \text{cte}_*$. Además $H((x, 1), t) = [x, 1]$ para toda x . Por lo tanto H se factoriza a través de $X \times \{1\}$:

$$\begin{array}{ccc} (X \times I) \times I & \xrightarrow{H} & CX \\ \nu \downarrow & \nearrow \bar{H} & \\ CX \times I & & \end{array}$$

También $\bar{H}_0 = \text{Id}_{CX}$ y $\bar{H}_1 = \text{cte}_*$. \bar{H} es continua porque H es continua. Por lo tanto \bar{H} es una homotopía y $\text{Id}_{CX} \simeq \text{cte}_*$. \square

Lema 27. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua. f es contraíble si y sólo si f se extiende a CX , es decir:

$$f \simeq \text{cte} \iff \begin{array}{ccc} CX & & \\ \uparrow \iota & \searrow \hat{f} & \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Proof. (\implies) Supongo que $f \simeq \text{cte}$ mediante la homotopía $H : X \times I \rightarrow Y$. Como $H_1(x) = H(x, 1) = \text{cte}(x) = y_0 \in Y$, entonces H se factoriza a través de $(X \times I) /_{(X \times \{1\})} = CX$:

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{H} & Y \\ \nu \downarrow & \nearrow \bar{H} & \\ CX & & \end{array}$$

Aquí \bar{H} es continua porque H es continua y ν es una identificación.

Como $H_0 = f$, entonces \bar{H} restringido a $X \times \{0\}$ es f , o equivalentemente $\bar{H} \circ \iota = f$. Por lo tanto \bar{H} es la extensión de f buscada.

(\iff) Sea $\hat{f} : CX \rightarrow Y$ una extensión de f y defino $H = \hat{f} \circ \nu$. Observa que

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= \hat{f}[\nu(x, 0)] = \hat{f}(\iota(x)) = f(x) \\ H(x, 1) &= \hat{f}(\iota(x, 1)) = \hat{f}(*). \end{aligned}$$

donde $* = [x, 1] \in CX$. Por lo tanto si cte es la función constante y_0 , entonces $f \simeq \text{cte}$. \square

Ejercicio 34. Si $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ es basado, entonces $f \simeq \text{cte}_y$ si y sólo si f se extiende a un $\hat{f} : C(X, x) \rightarrow (Y, y)$.

Proof. (\Rightarrow) Supongo que $f \simeq \text{cte}_y$ mediante la homotopía basada $H : (X, x) \times I \rightarrow (Y, y)$. Como $H_1(x') = H(x', 1) = \text{cte}_y(x') = y$ y $H_1(x, t) = y$ para toda $x' \in X$ y $t \in I$, H se factoriza a través de $(X \times \{1\}) \cup (\{x\} \times I)$:

$$\begin{array}{ccc} (X, x) \times I & \xrightarrow{H} & (Y, y) \\ \nu \downarrow & \nearrow \bar{H} & \\ C(X, x) & & \end{array}$$

Aquí \bar{H} es continua porque H es continua y ν es una identificación.

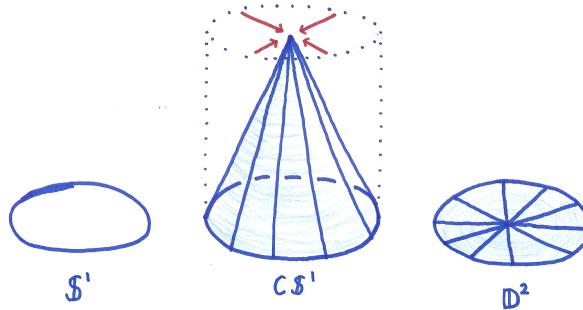
Como $H_0 = f$, entonces \bar{H} restringido a $X \times \{0\}$ es f , o equivalentemente $\bar{H} \circ \iota = f$. Por lo tanto \bar{H} es la extensión de f buscada.

(\Leftarrow) Sea $\hat{f} : C(X, x) \rightarrow (Y, y)$ una extensión de f y defino $H = \hat{f} \circ \nu$. Observa que

$$\begin{aligned} H(x', 0) &= \hat{f}[x', 0] = \hat{f}(\iota(x')) = f(x') \quad \forall x' \in X \\ H(x', 1) &= \hat{f}(*) = y_0 \quad \forall x' \in X \\ H(x, t) &= y \quad \forall t \in I \end{aligned}$$

donde $* = [x', 1] \in CX$. Por lo tanto H es una homotopía basada, es decir $f \simeq \text{cte}_y$. □

Ejemplo 14. $C\mathbb{S}^1 \approx \mathbb{D}^2$



1.12.2 Clases de cobordismo

Recuerda que si N es una variedad suave, entonces $N \times I$ es una variedad suave con frontera $\partial N \sqcup \partial N$. En particular

$$\partial(\mathbb{S}^n \times I) = (\mathbb{S}^n \times \{0\}) \cup (\mathbb{S}^n \times \{1\}) = \mathbb{S}^n \sqcup \mathbb{S}^n.$$

Por lo tanto una homotopía $H : \mathbb{S}^n \times I \rightarrow X$ entre dos funciones $\alpha, \beta : \mathbb{S}^n \rightarrow X$ se cumple

$$H|_{\mathbb{S}^n \times \{0\}} = \alpha \quad \text{y} \quad H|_{\mathbb{S}^n \times \{1\}} = \beta,$$

donde podemos ver a los conjuntos $\mathbb{S}^n \times \{0\}$ y $\mathbb{S}^n \times \{1\}$ como la frontera de la variedad $\mathbb{S}^n \times I$. En otras palabras puedo decir que α y β están relacionados porque existe una variedad (ie. $\mathbb{S}^n \times I$) que tiene como frontera los dominios de α y β , y una función H definida sobre esa variedad que se restringe a α y a β .

Hago más precisa esta idea:

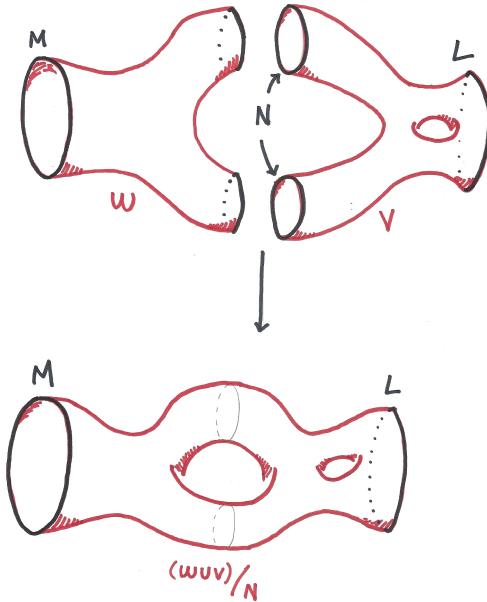
Definición 38. Sea X un espacio topológico. Si M^n es una variedad suave y compacta, la pareja (M, f) es simplemente una función continua $f : M \rightarrow X$ donde M es considerada como subvariedad de algún espacio euclídeo. La *relación de cobordismo* es la siguiente relación de equivalencia sobre tales parejas:

$$(M^n, f) \sim (N^n, g) \iff \exists F : W^{n+1} \rightarrow X; \text{ continua tal que } \begin{cases} (i) & \partial W \cong M \sqcup N \\ (ii) & F|_M = f \text{ y } F|_N = g \end{cases}$$

donde W es una variedad suave, compacta, con frontera y de dimensión $n + 1$.

Observa que sí es una relación de equivalencia. Claramente es simétrica por definición. Es reflexiva porque $(M, f) \sim (M, f)$ mediante la variedad $W = M \times I$, que tiene frontera $\partial W = M \sqcup M$, y la función $F : W \rightarrow X$ definida por $F(x, t) = f(x)$. La transitividad es difícil de probar porque requiere un resultado muy fuerte de topología diferencial.

Sean $(M, f) \sim (N, g)$ y $(N, g) \sim (L, h)$ mediante $F : W \rightarrow X$ y $G : V \rightarrow X$ respectivamente. Lo ideal es “pegar” W y V a lo largo de N :



para obtener la variedad suave $(W \cup V)/_N =: Y$, y así poder definir

$$H : Y \rightarrow X \quad \text{con} \quad Y(x) = \begin{cases} F(x) & \text{si } x \in W \\ G(x) & \text{si } x \in V \end{cases}$$

que claramente implica que $(M, f) \sim (L, h)$. Lo único que faltaría probar es que Y es una variedad suave, pero esto es consecuencia de los siguientes dos teoremas:

Teorema 28. *Toda variedad suave M con frontera tiene un collar, es decir existe un encaje $(\partial M \times [0, 1]) \hookrightarrow M$.*

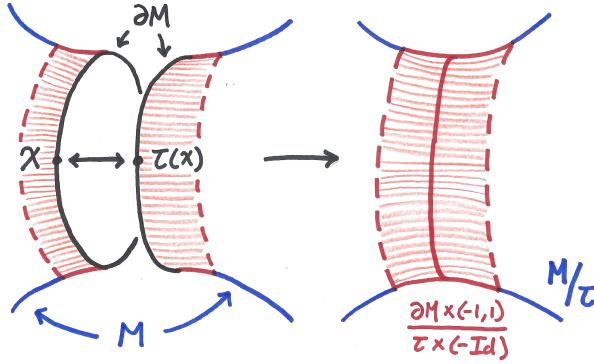
Teorema 29. *Sea M una variedad suave con frontera, $\kappa : (\partial M \times [0, 1]) \rightarrow M$ un collar y $\tau : \partial M \rightarrow \partial M$ una función suave libre de puntos fijos tal que $\tau \circ \tau = Id$. Entonces el espacio cociente $M/\tau := M/x \sim \tau(x)$ tiene una única estructura diferenciable tal que la inclusión $M - \partial M \subset M/\tau$ y la función*

$$\hat{\kappa} : \frac{\partial M \times (-1, 1)}{\tau \times (-Id)} \longrightarrow \frac{M}{\tau} \quad \text{con} \quad \hat{\kappa}[x, t] = \begin{cases} \kappa(x, t) & \text{si } t \geq 0 \\ \kappa(\tau(x), -t) & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

son encajes.

En palabras, este último teorema dice que un collar permite identificar la frontera mediante una involución sin puntos fijos de tal manera que el resto de la variedad (ie. $M - \partial M$) no cambia y que los collares se pegan para dar un abierto de la variedad.

Nota. Para la transitividad, estoy usando como variedad a $W \sqcup V$ y como involución $\tau : N \rightarrow N$ que simplemente cambia de copia de N (observa que este no tiene puntos fijos porque el dominio y el contradominio de τ son copias distintas de N como subvariedad de $W \sqcup V$).



Definición 39. Al conjunto de clases de equivalencia $[M, f]$ donde M es cerrada de dimensión n y $f : M \rightarrow X$, se denota $\eta_n(X)$. Es un grupo abeliano con la suma

$$[M, f] + [N, g] := [M \sqcup N, f \sqcup g]$$

y neutro $0 = [\mathbb{S}^n, \text{cte}]$.

En efecto, $(M \sqcup \mathbb{S}^n, f \sqcup \text{cte}) \sim (M, f)$ mediante la variedad $(M \times I) \sqcup \mathbb{D}^{n+1}$, que tiene frontera $M \sqcup (M \sqcup \mathbb{S}^n)$, y la función

$$F(x) = \begin{cases} f(y) & \text{si } x = (y, t) \in M \times I \\ \text{cte} & \text{si } x \in \mathbb{D}^{n+1} \end{cases}.$$

Nota. Para evitar problemas conjuntistas, estoy asumiendo que todas las n -variedades cerradas están encajadas en \mathbb{R}^{2n} .

Ejercicio 35. Todo elemento de $\eta_n(X)$ es su propio inverso, es decir $-[M, f] = [M, f]$.

Proof. Observa que $[M, f] + [M, f] = [M \sqcup M, f \sqcup f]$. Ahora considera la variedad $N = (M \times I) \sqcup \mathbb{D}^{n+1}$ de dimensión $n+1$. Ahora defino $F : N \rightarrow X$ como

$$F(x) = \begin{cases} f(y) & \text{si } x = (y, t) \in M \times I \\ \text{cte} & \text{si } x \in \mathbb{D}^{n+1} \end{cases}.$$

Claramente es continua porque $F = (f \circ p) \sqcup \text{cte}$ donde $f \circ p$ es la composición $M \times I \xrightarrow{p} M \xrightarrow{f} X$. Además $\partial N = (M \sqcup M) \sqcup \mathbb{S}^n$ y por último $F|_{M \sqcup M} = f \sqcup f$ y $F|_{\mathbb{S}^n} = \text{cte}$ porque $M \sqcup M \subset (M \times I)$ y $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{D}^{n+1}$ donde F vale, por definición, $f \sqcup f$ y cte respectivamente.

Por lo tanto $[M \sqcup M, f \sqcup f] \sim [\mathbb{S}^n, \text{cte}] = 0$ y así $-[M, f] = [M, f]$. \square

Proposición 17. En $\eta_n(X)$, $[M, f] = 0$ si y sólo si existe una $(n+1)$ -variedad compacta N y una función continua $F : N \rightarrow X$ tal que $\partial N \cong M$ y $F|_M = f$.

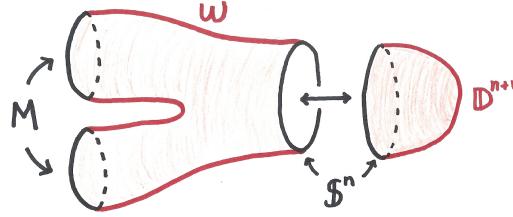
Proof.

\Rightarrow Por hipótesis existe una variedad W^{n+1} compacta y una función continua $F : W \rightarrow X$ tal que $\partial W \cong M \sqcup \mathbb{S}^n$, $F|_M = f$ y $F|_{\mathbb{S}^n} = \text{cte}$. Como $\partial \mathbb{D}^{n+1} = \mathbb{S}^n$ entonces mediante un collar puedo pegar \mathbb{D}^{n+1} y W a lo largo de \mathbb{S}^n . A esta nueva variedad la llamo N , es decir $N = (W \cup \mathbb{D}^{n+1})/\mathbb{S}^n$. También defino $G : N \rightarrow X$ como $G = F \sqcup \text{cte}$. Como $G|_{\mathbb{S}^n} = \text{cte} = F|_{\mathbb{S}^n}$ entonces G pasa al cociente y es continua. Claramente $G|_M = F|_M = f$.

\Leftarrow Sea N la variedad garantizada por hipótesis y defino $W = N \sqcup \mathbb{D}^{n+1}$ junto con $G : W \rightarrow X$ como $G = F \sqcup \text{cte}$. Observa que $\partial W = \partial N \sqcup \partial \mathbb{D}^{n+1} \cong M \sqcup \mathbb{S}^n$. Además:

$$\begin{aligned} G|_M &= G|_{\partial N} = F|_{\partial N} = F|_M = f \\ G|_{\mathbb{S}^n} &= G|_{\partial \mathbb{D}^{n+1}} = (G|_{\mathbb{D}^{n+1}})|_{\partial \mathbb{D}^{n+1}} = (\text{cte})|_{\partial \mathbb{D}^{n+1}} = \text{cte}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $[M, f] = [\mathbb{S}^n, \text{cte}] = 0$.



□

Observa que si $\varphi : X \rightarrow Y$ es continua, entonces éste induce un morfismo de grupos $\varphi_* : \eta_n(X) \rightarrow \eta_n(Y)$ definido por $\varphi_*[M, f] \mapsto [M, \varphi \circ f]$. Entonces $\eta_n : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ab}$ es un functor:

Ejercicio 36. La asignación $X \mapsto \eta_n(X)$ es functorial, es decir $\text{Id}_* = \text{Id}$ y $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$.

Proof. Sean $[M, f] \in \eta_n(X)$ y $\varphi : X \rightarrow Y$, $\psi : Y \rightarrow Z$ funciones continuas.

$$(\text{Id}_X)_*[M, f] = [M, \text{Id}_X \circ f] = [M, f] \implies (\text{Id}_X)_* = \text{Id}_{\eta_n(X)}.$$

Además:

$$(\varphi \circ \psi)_*[M, f] = [M, (\varphi \circ \psi) \circ f] = [M, \varphi \circ (\psi \circ f)] = \varphi_*[M, \psi \circ f] = \varphi_*(\psi_*[M, f])$$

Por lo tanto $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$ y acabo. □

Nota. Este último ejercicio prueba que $X \mapsto \eta_n(X)$ es un functor entonces preserva isomorfismos, es decir:

$$X \approx Y \implies \eta_n(X) \cong \eta_n(Y)$$

o en otras palabras, η_n es un invariante topológico.

De hecho, η_n es más que un invariante topológico, es un invariante homotópico. Para probar esto necesito:

Proposición 18. Sean $\varphi, \psi : X \rightarrow Y$ funciones continuas. Entonces $\varphi \simeq \psi \implies \varphi_* = \psi_*$.

Proof. Sea $[M, f] \in \eta_n(X)$, entonces $\varphi_*[M, f] = [M, \varphi \circ f]$ y $\psi_*[M, \psi \circ f]$. Por hipótesis $\varphi \simeq \psi$ mediante alguna homotopía $H : X \times I \rightarrow Y$ (en particular $H_0 = \varphi$ y $H_1 = \psi$). Ahora considera $F : M \times I \rightarrow Y$ definido por la composición

$$M \times I \xrightarrow{f \times \text{Id}} X \times I \xrightarrow{H} Y .$$

Observa que $F(x, 0) = H(f(x), 0) = \varphi(f(x))$ y $F(x, 1) = H(f(x), 1) = \psi(f(x))$, es decir:

$$F|_{M \times \{0\}} = \varphi \circ f \quad y \quad F|_{M \times \{1\}} = \psi \circ f.$$

Como $\partial(M \times I) = (M \times \{0\}) \sqcup (M \times \{1\}) = M \sqcup M$ y F es continua, entonces $[M, \varphi \circ f] \sim [M, \psi \circ f]$ y así $\varphi_*[M, f] = \psi_*[M, f]$ para toda $[M, f] \in \eta_n(X)$. □

Ejercicio 37. Para toda n , se tiene que $X \simeq Y \implies \eta_n(X) \cong \eta_n(Y)$, es decir que η_n es un invariante homotópico.

Proof. Por hipótesis existen $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ continuas tales que $f \circ g \simeq \text{Id}_Y$ y $g \circ f \simeq \text{Id}_X$. La proposición pasada y el ejercicio 36 garantizan que:

$$\text{Id}_{\eta_n(Y)} = (\text{Id}_Y)_* = (f \circ g)_* = f_* \circ g_* \quad y \quad \text{Id}_{\eta_n(X)} = (\text{Id}_X)_* = (g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

lo cual implica que $f_* : \eta_n(X) \rightarrow \eta_n(Y)$ y $g_* : \eta_n(Y) \rightarrow \eta_n(X)$ son isomorfismos. Por lo tanto $\eta_n(X) \cong \eta_n(Y)$. □

Esta idea se puede generalizar. En lugar de tomar M^n sin frontera para las clases $[M, f]$, puedo tomar M con frontera tal que $f[\partial M] \subseteq A$ donde $A \subseteq X$ es un conjunto cerrado fijo. Estas clases se denotan por $\eta_n(X, A)$. Estos grupos son importantes porque forman una sucesión exacta larga:

$$\cdots \longrightarrow \eta_n(A) \longrightarrow \eta_n(X) \longrightarrow \eta_n(X, A) \xrightarrow{\delta} \eta_{n-1}(A) \longrightarrow \eta_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

donde $\delta[M, f] = [\partial M, f|_{\partial M}]$. Los grupos $\eta_n(X, A)$ cumplen la propiedad de *escisión*:

Teorema 30. *Sea $U \subset A \subseteq X$ tal que $\bar{U} \subseteq \bar{A}$. Entonces la inclusión $\iota : (X - U, A - U) \hookrightarrow (X, A)$ induce un isomorfismo $\eta_n(X - U, A - U) \cong \eta_n(X, A)$.*

En general si $h_*(X, A) = \{h_n(X, A)\}_{n=0}^\infty$ es una familia de grupos abelianos tales que $(X, A) \mapsto h_N(X, A)$ es functorial, existe una sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow h_n(A) \longrightarrow h_n(X) \longrightarrow h_n(X, A) \longrightarrow h_{n-1}(A) \longrightarrow h_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

y cada h_n cumple la propiedad de escisión, se dice que $h_*(X, A)$ es una teoría de homología.

Ahora calculo η_n de un punto. Para esto, denoto $\eta_n := \eta_n(\{x\})$. Observa que los elementos de η_n son de la forma $[M, \text{cte}]$. Por lo tanto $[M] = [N]$ si y sólo si existe una variedad W^{n+1} y una función $F : W \rightarrow \{x\}$ continua (ie. $F = \text{cte}$) tal que $\partial W = M \sqcup N$. Como F es necesariamente constante, dos elementos $[M, \text{cte}]$ y $[N, \text{cte}]$ de η_n son iguales si son frontera de una variedad de dimensión $n + 1$. Vale la pena mencionar que si $M = \partial N$ entonces $[M, \text{cte}] = 0 = [\mathbb{S}^n, \text{cte}]$; nada más toma $W = N \sqcup \mathbb{D}^{n+1}$.

Como todas las funciones en este caso son constantes, denotaré a la clase $[M, \text{cte}] \in \eta_n$ simplemente por $[M]$ y se llama la *clase de bordismo de M*. Calcular las clases de bordismo de variedades de dimensión cero es sencillo:

Ejercicio 38. La función $\Phi : \eta_0 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ definido por $[M] \mapsto \#M \pmod{2}$ es un isomorfismo.

Proof. Primero observa que para todo elemento $[M] \in \eta_0$, M es compacto, entonces M es un conjunto finito de puntos. Así tiene sentido definir Φ .

Para probar que Φ está bien definido, supongo que $[M] = [N]$ para variedades cerradas $M = \{x_1, \dots, x_m\}$ y $N = \{y_1, \dots, y_n\}$. Esto quiere decir que hay una 1-variedad W tal que $\partial W = M \sqcup N$. Como W es una 1-variedad, entonces necesariamente es la unión disjunta de intervalos (ie. trayectorias) y de círculos. Como $\partial \mathbb{S}^1 = \emptyset$, puedo asumir que W es simplemente la unión disjunta de trayectorias.

La frontera de una trayectoria es la unión disjunta de su punto inicial y su punto final (ya que por suposición esta trayectoria no puede ser un lazo). Por lo tanto por cada pareja de puntos en $M \sqcup N$ hay una trayectoria (que es una componente de W) que las une. Además esta trayectoria es única, ya que si hay dos trayectorias que tienen el mismo punto inicial (o final), este punto deja de ser parte de la frontera.

Con esto puedo concluir que las componentes de W inducen un apareamiento entre los elementos de $M \sqcup N$ sin dejar un punto libre (ya que de lo contrario W no sería de dimensión 1). Por lo tanto $M \sqcup N$, que tiene $n + m$ elementos, tiene una cantidad par de puntos. Por lo tanto n y m necesariamente tienen la misma paridad, o en otras palabras $m \equiv n \pmod{2}$. Con esto concluyo que $\Phi[M] = \Phi[N]$ y Φ está bien definido.

Observa que

$$\Phi([M] + [N]) = \Phi[M \sqcup N] = \#(M \sqcup N) = \#M + \#N = \Phi[M] + \Phi[N]$$

entonces al reducir módulo 2 obtengo que Φ es un homomorfismo de grupos.

Claramente es sobre porque

$$\begin{aligned} \Phi[\{x_0\}] &= \#\{x_0\} \equiv 1 \pmod{2} \\ \Phi[\{x_0, x_1\}] &= \#\{x_0, x_1\} = 2 \equiv 0 \pmod{2}. \end{aligned}$$

Por último, si $\Phi[M] = 0$ entonces $\#M$ es par, es decir M es un conjunto par de puntos, digamos $2n$. Si $W = I \sqcup \dots \sqcup I$ es la unión disjunta de n intervalos entonces M es difeomorfo a

$$\partial W = \bigsqcup_{j=1}^n \partial I = \bigsqcup_{j=1}^n \{0, 1\}$$

y así M es la frontera de una 1-variedad. Por lo tanto $[M] = 0$ y $\ker \Phi = 0$.

Con esto he probado que Φ es un isomorfismo y que $\eta_0 \cong \mathbb{Z}_2$. \square

Para calcular η_1 , sólo basta recordar la clasificación de variedades cerradas de dimensión 1: si $[M] \in \eta_1$ entonces $M \cong \mathbb{S}^1 \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{S}^1$ y así $[M] = [\mathbb{S}^1 \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{S}^1] = [\mathbb{S}^1] + \cdots + [\mathbb{S}^1] = 0 + \cdots + 0 = 0$ para toda $[M] \in \eta_1$. Por lo tanto $\eta_1 = 0$.

Para dimensión 2, uso la clasificación de superficies cerradas: para toda $[M] \in \eta_2$ tengo que M es una suma conexa de toros o una suma conexa de planos proyectivos. En el primer caso, M es la frontera de la suma conexa de toros rellena y así $[M] = 0$. Por lo tanto $\eta_2 = \mathbb{Z}_2$, generado por $[\mathbb{R}P^2]$.

En general,

$$\eta_* := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \eta_n$$

es un grupo abeliano graduado con graduación $\eta_n \times \eta_m \rightarrow \eta_{n+m}$ definido por $([M], [N]) \mapsto [M \times N]$.

Teorema 31. (Thom) Sean $\{x_2, x_4, x_5, \dots\}$ variables independientes con subíndices $n \neq 2^m - 1$ para toda m . Entonces $\eta_* \cong \mathbb{Z}_2[x_2, x_4, x_5, \dots]$ donde el isomorfismo se puede tomar de tal manera que la imagen de x_n es un elemento de η_n y que $x_{2n} \mapsto [\mathbb{R}P^{2n}]$.

De este teorema se tiene inmediatamente que $\eta_3 = 0$ porque no hay un polinomio $\pm x_2 \pm x_4 \pm x_5 \pm \cdots$ que corresponda a un $[M] \in \eta_3$ donde M es de dimensión 3.

Ejercicio 39. $\eta_4 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Proof. □

1.12.3 Cobordismo con Orientación

Hay una teoría similar al cobordismo si incluimos orientación:

Definición 40. Sobre el conjunto de parejas $((M, \mathfrak{O}_M), f)$, donde M es una variedad cerrada con orientación \mathfrak{O}_M y $f : M \rightarrow X$ es una función continua, defino la siguiente relación de equivalencia: $((M^n, \mathfrak{O}_M), f) \sim ((N^n, \mathfrak{O}_N), g)$ si y sólo si

$$\exists F : W^{n+1} \rightarrow X; \text{ continua tal que } \begin{cases} (i) & (\partial W, \mathfrak{O}_{\partial W}) \cong (M, \mathfrak{O}_M) \sqcup (N, \mathfrak{O}_N) \\ (ii) & F|_M = f \text{ y } F|_N = g \end{cases}$$

donde W es una variedad suave, compacta, con frontera y el difeomorfismo entre las fronteras preserva las orientaciones.

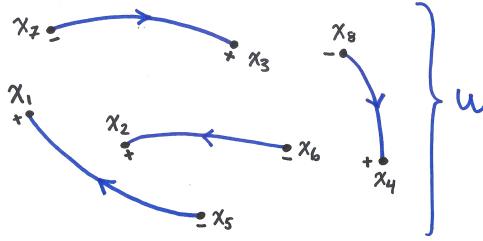
De la misma manera que definí η_n , defino Ω_n como las clases $[(M, \mathfrak{O}_M), f]$ sobre $X = \{x\}$. En este caso, Ω_0 también son 0-variedades compactas, ie. conjuntos finitos pero como también están orientadas, cada punto viene con un signo. Por ejemplo si $M = \{x_1, x_2\}$ entonces una orientación de M puede ser $(M, \mathfrak{O}_M) = \{(x_1, -1), (x_2, +1)\}$.

Más precisamente, si $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ es una variedad compacta de dimensión 0, una orientación \mathfrak{O}_M es un conjunto $\{\mathfrak{o}_1, \dots, \mathfrak{o}_n\}$ donde $\mathfrak{o}_j \in \{-1, +1\}$. Entonces la variedad orientada se escribe como $(M, \mathfrak{O}_M) = \{(x_j, \mathfrak{o}_j)\}$. Por lo tanto puedo reordenar los elementos de M tal que aparecen primero los que tienen orientación positiva. Es decir, puedo escribir $M = \{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+m'}\}$ donde $\mathfrak{o}_j = +1$ para $j \in \{1, \dots, m\}$ y $\mathfrak{o}_{m+j} = -1$ para $j \in \{1, \dots, m'\}$.

Ahora me pregunto cuando (M, \mathfrak{O}_M) es la frontera de una 1-variedad orientada (W, \mathfrak{O}_W) . Primero observa que toda 1-variedad compacta es la unión disjunta (finita) de intervalos/trayectorias y círculos, pero como sólo me interesa la frontera de W y $\partial \mathbb{S}^1 = \emptyset$, puedo considerar solamente las W cuyas componentes son únicamente intervalos/trayectorias (sin ser lazos). Además puedo asumir que W está encajado en algún \mathbb{R}^N entonces sí puedo asumir que los componentes de W efectivamente son trayectorias, ie. imágenes suaves del intervalo $[0, 1]$.

En este caso, ∂W es la unión disjunta de los puntos iniciales y finales de cada componente de W . Además ningún punto en ∂W puede estar en dos trayectorias distintas ya que sucede uno de dos casos prohibidos: las trayectorias se intersectan y producen una variedad no diferenciable; el punto es inicial de una trayectoria y final de otra trayectoria que se pegan suavemente, pero en este caso este punto no está en ∂W . Por lo tanto cada pareja de elementos distintos de ∂W están conectados por una única trayectoria en \mathbb{R}^N que es una componente abierta de W . Además, una orientación de W induce una orientación en

Figure 1.10:



∂W : simplemente le asigna un -1 a los puntos iniciales y un $+1$ a los puntos finales. Para aclarar esta discusión, considera la figura 1.10 donde la frontera de W es

$$(\partial W, \Omega_{\partial W}) = \{(x_1, +1), (x_2, +1), (x_3, +1), (x_4, +1), (x_5, -1), (x_6, -1), (x_7, -1), (x_8, -1)\}$$

Observa que si (M, Ω_M) es la frontera de la 1-variedad orientada (W, Ω_W) entonces M tiene la misma cantidad de puntos orientados positivamente que de puntos orientados negativamente; ya que las trayectorias inducen una biyección entre los puntos iniciales (ie. los puntos orientados negativamente) y los puntos finales (ie. los puntos orientados positivamente). En particular tengo:

Proposición 19. Si (M, Ω_M) es una 0-variedad cerrada tal que $(M, \Omega_M) \cong (\partial W, \Omega_{\partial W})$, donde el difeomorfismo preserva orientación, entonces

$$\#\{x \in M \mid \sigma_x = +1\} = \#\{x \in M \mid \sigma_x = -1\}.$$

Más generalmente tengo:

Ejercicio 40. Para cada 0-variedad orientada (M, Ω_M) donde $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ y $\Omega_M = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ (con cada $\sigma_j \in \{-1, 1\}$), defino la función $\Phi : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ como

$$\Phi[M, \Omega_M] = \sum_{j=1}^n \sigma_j.$$

Prueba que Φ es un isomorfismo, y en particular $\Omega_0 \cong \mathbb{Z}$.

Proof. Primero pruebo que Φ está bien definido. Sean $[M, \Omega_M] = [N, \Omega_N]$, entonces $M \sqcup N$ es la frontera de una 1-variedad orientada (W, Ω_W) . Como en la discusión anterior, escribo $M \sqcup N = \{x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_{s+s'}\}$ donde la orientación de x_j es positiva para $j \in \{1, \dots, s\}$ y negativa para el resto. Por la proposición 19, sé que $s = s'$.

Por otro lado supongo que M tiene m puntos orientados positivamente y m' puntos orientados negativamente, en particular $\Phi[M, \Omega_M] = m - m'$. Similarmente también supongo que $\Phi[N, \Omega_N] = n - n'$ (con la misma notación, es decir N tiene n puntos positivos y n' puntos negativos). Claramente la cantidad de puntos en $M \sqcup N$ orientados positivamente es $s = m + n$. Similarmente $s' = m' + n'$. Por lo tanto si sustituyo esto en la fórmula garantizada por la proposición 19, obtengo que

$$s = s' \implies m + n = m' + n' \implies m - m' = n - n' \implies \Phi[M, \Omega_M] = \Phi[N, \Omega_N]$$

y concluyo que Φ está bien definida.

Ahora supongo que $\Phi[M, \Omega_M] = m - m' = n - n' = \Phi[N, \Omega_N]$, entonces $m + n = m' + n'$ y así $M \sqcup N$ tiene la misma cantidad de puntos orientados positivamente que de puntos orientados negativamente. Entonces existe una biyección

$$\{x \in M \sqcup N \mid \sigma_x = +1\} \longleftrightarrow \{x \in M \sqcup N \mid \sigma_x = -1\}.$$

Por lo tanto con esta asociación puedo contruir trayectorias que inicia en un punto orientado negativamente y terminan en el punto orientado positivamente que está asociado al punto inicial. De esta manera la

unión disjunta de estas trayectorias está orientada y la orientación que induce sobre su frontera, ie. $M \sqcup N$, es exactamente la orientación de $M \sqcup N$.

Por lo tanto $M \sqcup N$ es la frontera de una 1-variedad compacta orientada y así $[M, \Omega_M] = [N, \Omega_N]$ y Φ es inyectiva.

Φ es claramente sobreyectiva porque

$$\begin{aligned}\Phi[\{(x_1, +1), \dots, (x_1, +1)\}] &= 1 + \dots + 1 = n \\ \Phi[\{(x_1, -1), \dots, (x_1, -1)\}] &= -1 - \dots - 1 = -n \\ \Phi[\{(x_1, +1), (x_2, -1)\}] &= 1 - 1 = 0.\end{aligned}$$

□

1.13 Complejos Simpliciales

1.13.1 Complejos simpliciales geométricos

Definición 41. Un subconjunto $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^n$ es *afín-independiente* (AI) si el conjunto de diferencias $\{a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$ es linealmente independiente en \mathbb{R}^n .

En palabras esto significa que un conjunto $\{a_0, \dots, a_n\}$ es AI si el conjunto $\{a_1, \dots, a_n\}$ bajo la traslación $a_0 \mapsto 0$, es linealmente independiente. En particular, si $\{a_1, \dots, a_n\}$ es linealmente independiente en \mathbb{R}^n , entonces $\{0, a_1, \dots, a_n\}$ es AI.

Observa que en la definición de AI, puedo tomar cualquier espacio ambiente \mathbb{R}^N con la condición $N \geq n$.

Ejercicio 41. Prueba que $\{a_0, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^n$ es AI si y sólo si para todas λ_i 's tales que $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 0$ se cumple que $\sum \lambda_i a_i = 0 \implies \lambda_i = 0$ para toda $i \in \{0, \dots, n\}$.

Proof. Sea $\{a_0, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^n$

(\implies) Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $\sum \lambda_i = 0$ y supongo que $\sum \lambda_i a_i = 0$. Entonces

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_0) = -a_0 \sum_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = -a_0(-\lambda_0) - \lambda_0 a_0 = 0.$$

Como $\{a_0, \dots, a_n\}$ es AI, $\{a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$ es linealmente independiente y así concluyo que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Por último, sustituyo esto en $\sum \lambda_i = 0$ para concluir que también $\lambda_0 = 0$.

(\iff) Sea $\sum \mu_i (a_i - a_0) = 0$ una combinación lineal. Entonces

$$\sum_{i=1}^n \mu_i a_i = a_0 \sum_{i=1}^n \mu_i. \tag{1.19}$$

Ahora defino $\lambda_i := \mu_i$ para $i \in \{1, \dots, n\}$ y defino $\lambda_0 = -\mu_1 - \dots - \mu_n$. Observa que $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 0$ por definición. Además la ecuación (1.19) se convierte en:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = a_0(-\lambda_0) \implies \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i = 0.$$

Por hipótesis esto implica que $\lambda_i = 0$ para toda $i \in \{0, \dots, n\}$. En particular $\mu_1 = \dots = \mu_n = 0$ y $\{a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$ es linealmente independiente. Por lo tanto $\{a_0, \dots, a_n\}$ es AI.

□

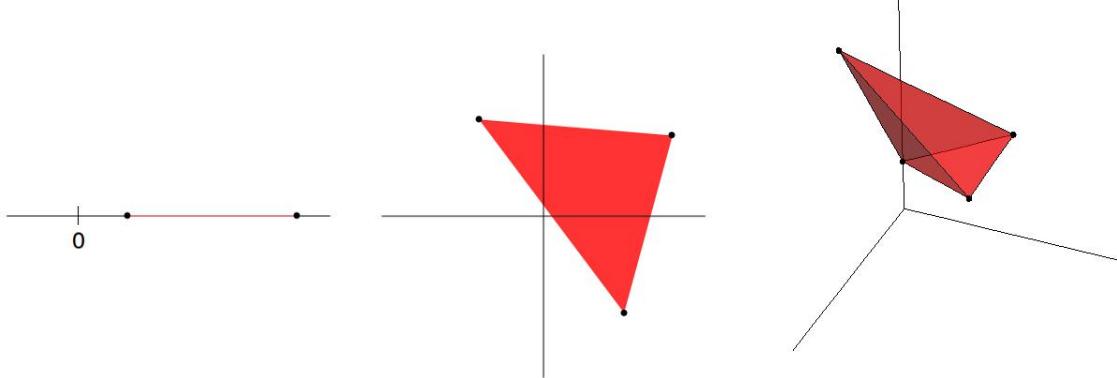
Este ejercicio dice que la condición AI es casi equivalente a la independencia lineal, la única restricción es que los coeficientes de la combinación lineal (igualada a cero) deben sumar 0. Esta condición adicional literalmente “traslada” la condición de independencia lineal al punto a_0 .

Definición 42. Un *n-simplejo geométrico* en \mathbb{R}^N (en particular $N \geq n$) es un subconjunto $\sigma_n \subset \mathbb{R}^N$ de la forma:

$$\sigma_n = \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i \mid \{a_0, \dots, a_n\} \text{ es AI, } \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

y se denota como $\sigma_n = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$ (ve la figura 1.11).

Figure 1.11: Ejemplos de n -simplejos geométricos de dimensión 1,2 y 3



Nota. Esta definición es exactamente la definición de la cerradura convexa del conjunto $\{a_0, \dots, a_n\}$, ie. $\text{Conv}(a_0, \dots, a_n) = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$.

Recuerda que la cerradura convexa de un conjunto $X \subset \mathbb{R}^N$ (en este caso tomo $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ finito) es la intersección de todos los conjuntos convexos que lo contienen. Más precisamente si escribo $\mathfrak{C} = \{Y \subseteq \mathbb{R}^N \mid Y \text{ es convexo y } X \subseteq Y\}$, entonces

$$\text{Conv}(X) = \bigcap_{Y \in \mathfrak{C}} Y. \quad (1.20)$$

Es sencillo probar (1.20): primero observa que $\text{Conv}(X)$ es un conjunto convexo porque si $\lambda = \sum \lambda_i x_i, \mu = \sum \mu_i x_i \in \text{Conv}(X)$ entonces

$$t\lambda + (1-t)\mu = \sum_{i=1}^n (t\lambda_i + (1-t)\mu_i)x_i \in \text{Conv}(X) \quad \forall t \in [0, 1]$$

ya que

$$\sum_{i=1}^n t\lambda_i + (1-t)\mu_i = t \sum_{i=1}^n \lambda_i + (1-t) \sum_{i=1}^n \mu_i = t + (1-t) = 1.$$

Por lo tanto $\text{Conv}(X) \in \mathfrak{C}$ y la contención \supseteq de (1.20) se cumple. Para la otra contención considera $Y \in \mathfrak{C}$ y observa que si $\sum \lambda_i x_i \in \text{Conv}(X)$ entonces $\sum \lambda_i x_i \in Y$ porque $x_1, \dots, x_n \in Y$, $\sum \lambda_i = 1$ y Y es convexo; por lo tanto $\text{Conv}(X) \subseteq Y$ para toda $Y \in \mathfrak{C}$.

Por último, la intersección de conjuntos convexos es convexo (razón: si $x, y \in \bigcap Y_i$ con Y_i convexo, entonces la recta \mathcal{L} que un x, y está contenido en cada Y_i y así $\mathcal{L} \subseteq \bigcap Y_i$), entonces he probado que:

Proposición 20. El n -simplejo geométrico $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$ es el conjunto convexo más pequeño que contiene al conjunto $\{a_0, \dots, a_n\}$, en general:

$$\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle = \text{Conv}(a_0, \dots, a_n) = \bigcap_{Y \in \mathfrak{C}} Y$$

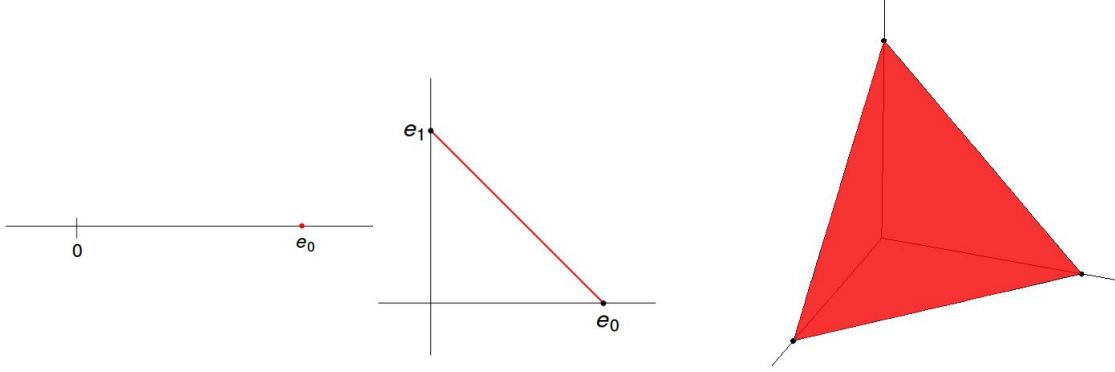
donde \mathfrak{C} es la familia de conjuntos convexos Y que contienen a $\{a_0, \dots, a_n\}$.

Hay una clase de n -simplejos muy importantes:

Definición 43. El n -simplejo geométrico *estándar*, denotado por $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, es el n -simplejo generado por la base canónica de \mathbb{R}^{n+1} , ie. $\Delta^n := \langle e_0, \dots, e_n \rangle$.

Ve la figura 1.12 para los primeros ejemplos.

Figure 1.12: Ejemplos de n -simplejos geométricos estándares de dimensión 0,1 y 2



Observa que podemos encajar Δ^n en \mathbb{R}^n en lugar de \mathbb{R}^{n+1} como $\Delta^n = \langle 0, e_1, \dots, e_n \rangle$; en este caso $\Delta^n = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum \lambda_i \leq 1, \lambda_i \geq 0\}$. Estas dos maneras de definir los simplejos estándares son equivalentes entonces usaré ambas descripciones intercambiablemente.

Los n -simplejos geométricos estándares nos permite clasificar topológicamente todos los n -simplejos geométricos mediante la siguiente proposición:

Proposición 21. Sean $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$ y $\tau = \langle b_0, \dots, b_n \rangle$ dos n -simplejos en \mathbb{R}^N . Entonces $\sigma \approx \tau$ donde el homeomorfismo sólo depende de los vértices. En este caso se dice que σ y τ son *afinamente homeomorfos*.

Ejercicio 42. La función $f : \sigma \rightarrow \tau$ definida por $f(\sum \lambda_i a_i) = \sum \lambda_i b_i$ es un homeomorfismo.²

Proof. Primero observa que si $x = \sum \lambda_i a_i \in \sigma$, entonces $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_n$ y así:

$$\begin{aligned} x &= \lambda_0 a_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = a_0(1 + \sum_{i=1}^n (-\lambda_i)) + \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = a_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_0) \\ \therefore x - a_0 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_0) \end{aligned}$$

Ahora defino $T_{a_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ como la traslación $x \mapsto x - a_0$. Por lo tanto $T_{a_0}[\sigma] = \langle 0, a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0 \rangle$ donde $A = \{a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$ es una base. Después defino $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ como la transformación lineal que cambia la base A en la base $B = \{b_1 - b_0, \dots, b_n - b_0\}$, en particular $F(a_i - a_0) = b_i - b_0$. Por último sea $T_{-b_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la traslación $x \mapsto x + b_0$. Claramente cada una de estas tres funciones son homeomorfismos entonces su composición es un homeomorfismo de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n .

Para $x = \sum \lambda_i a_i \in \sigma$ calculo:

$$\begin{aligned} (T_{-b_0} \circ F \circ T_{a_0})(x) &= (T_{-b_0} \circ F)(x - a_0) = (T_{-b_0} \circ F) \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_0) \right) \\ &= T_{-b_0} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i (b_i - b_0) \right) = b_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i (b_i - b_0) = \sum_{i=0}^n \lambda_i b_i = f(x) \\ \therefore (T_{-b_0} \circ F \circ T_{a_0})|_\sigma &= f \end{aligned}$$

²En clase probamos esto usando el hecho que los n -simplejos geométricos son compactos (cf. ejercicio 43), pero modifiqué esta prueba para no usar la compacidad para poder demostrar el ejercicio 43 con este ejercicio y así evitar un círculo lógico.

y así f es casi un homeomorfismo, lo único que hace falta calcular es la imagen de f . Pero esto es sencillo:

$$\text{Im}(f) = \{f(\sum \lambda_i a_i) \mid \sum \lambda_i a_i \in \sigma\} = \{\sum \lambda_i b_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1\} = \tau.$$

Por lo tanto:

$$(T_{-b_0} \circ F \circ T_{a_0})|_\sigma = f : \sigma \rightarrow \tau$$

es un homeomorfismo por ser restricción del homeomorfismo $T_{-b_0} \circ F \circ T_{a_0}$ (co-restringido a su imagen). \square

Un corolario inmediato de este ejercicio es que todo n -simplejo geométrico $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$ es homeomorfo al complejo geométrico estándar Δ^n . Por lo tanto la topología de Δ^n completamente determina la topología de los n -simplejos geométricos:

Ejercicio 43. Todo n -simplejo geométrico $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$ es cerrado, convexo y compacto como subespacio de \mathbb{R}^N .

Proof. Como $\sigma = \text{Conv}(a_0, \dots, a_n)$ (por la proposición 20), entonces σ es convexo.

Para probar compacidad, basta probar que los n -simplejos geométricos estándares son compactos ya que todo n -simplejo geométrico es homeomorfo a Δ^n (cf. ejercicio 42).

Sea $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ el plano definido por $x_1 + \dots + x_n = 1$ y $C \subset \mathbb{R}^n$ el primer cuadrante, ie. $C = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0\}$. Observa que ambos conjuntos son cerrados. Ahora pruebo que:

$$\Delta^n = \langle 0, e_1, \dots, e_n \rangle = \mathcal{P} \cap C$$

y así Δ^n es cerrado.

- (\subseteq) Sea $x = \sum \lambda_i e_i$ donde $0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ y $\lambda_i \geq 0$. Como $\{e_1, \dots, e_n\}$ es la base estándar, entonces $x = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ y claramente se cumple que $x \in \mathcal{P} \cap C$.
- (\supseteq) Sea $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{P} \cap C$, entonces $x_1 + \dots + x_n = 1$ y $x_i \geq 0$. Si tomo $\lambda_i = x_i$ entonces $x = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum \lambda_i e_i \in \Delta^n$.

Por último observa que si $x = \sum \lambda_i e_i \in \Delta^n$ entonces:

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|\lambda_i e_i\| = \sum_{i=1}^n |\lambda_i| = \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

ya que $0 \leq \lambda_i$. Por lo tanto Δ^n es un conjunto cerrado y acotado en \mathbb{R}^n , entonces Δ^n es compacto. \square

Definición 44. Sea $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$ un n -simplejo geométrico y $m \leq n$. Una m -cara τ de σ es el m -simplejo geométrico asociado a algún subconjunto $\{a_{i_0}, \dots, a_{i_m}\}$ de $\{a_0, \dots, a_n\}$, es decir $\tau = \langle a_{i_0}, \dots, a_{i_m} \rangle \subseteq \sigma$.

Definición 45. El *baricentro* de un n -simplejo geométrico $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$ es el punto

$$\mathbf{b}(\sigma) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n a_i$$

Observa que el baricentro $\mathbf{b}(\sigma)$ es un elemento de σ porque $\sum \frac{1}{n+1} = 1$.

Los n -simplejos por sí solos no son muy interesantes topológicamente (acabamos de clasificarlos todos!), pero forman parte de una construcción muy importante:

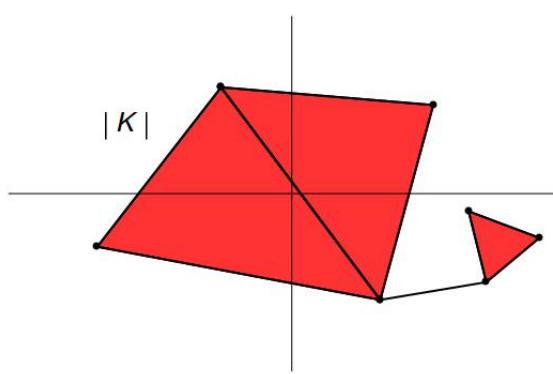
Definición 46. Un *complejo simplicial geométrico* en \mathbb{R}^N es una familia finita K de simplejos geométricos (de dimensión $\leq N$) que cumple dos propiedades:

- (i) K contiene todas las caras de todos sus elementos, es decir si $\sigma \in K$ y $\tau \subset \sigma$ es una cara, entonces $\tau \in K$.
- (ii) La intersección de cualesquiera dos $\sigma, \tau \in K$ es una cara común de σ y τ (también incluyo el caso cuando la intersección es vacía).

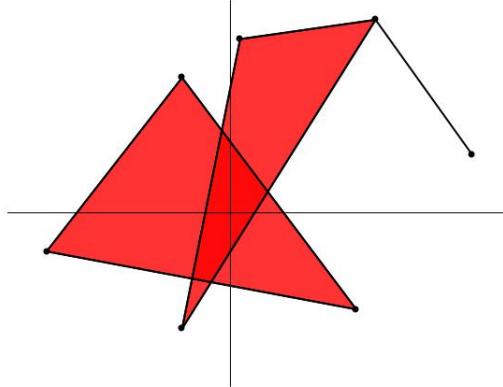
Intuitivamente, la primera propiedad nada más garantiza que estás trabajando con todos los posibles sub-simplejos del complejo. La segunda condición te dice que los simplejos se pegan bien, es decir a lo largo de caras (que por la primera propiedad son elementos de K).

Para visualizar un complejo simplicial geométrico K , dibjuamos su “realización geométrica” $|K| := \{x \in \mathbb{R}^N \mid \exists \sigma \in K \text{ tal que } x \in \sigma\} = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$.

(a) Sí es complejo simplicial geométrico.



(b) No es complejo simplicial geométrico.



Esta construcción se puede generalizar considerablemente.

1.13.2 Complejos simpliciales abstractos

Definición 47. Une *complejo simplicial* (abstracto) K es una familia de subconjuntos finitos no vacíos de un conjunto V_K , cuyos elementos se llaman *vértices*, que satisface:

- (i) K contiene todos los singuletes de V_K , es decir $v \in V_k \implies \{v\} \in K$.
- (ii) K es cerrado bajo subconjuntos, es decir si $L \in K$ y $L' \subseteq L$ entonces $L' \in K$.

Esta definición efectivamente generaliza la definición de complejo simplicial geométrico; la idea es que para pasar de complejos simpliciales geométricos a complejos simpliciales abstractos basta tomar los “vértices” de los simplejos geométricos en lugar de todas las combinaciones convexas de ellas.

Ejercicio 44. Todo complejo simplicial geométrico determina un complejo simplicial abstracto.

Proof. Sea $K = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ un complejo simplicial geométrico con $\sigma_i = \langle a_0^i, \dots, a_{n_i}^i \rangle$; los veo encajados en algún \mathbb{R}^N , ie. $a_j^i \in \mathbb{R}^N$ para toda $i \in \{1, \dots, n\}$ y para toda $j \in \{0, \dots, n_i\}$. Para cada simplejo $\sigma_i \in K$ defino el conjunto de sus vértices como $\sigma'_i = \{a_0^i, \dots, a_{n_i}^i\}$.

En general escribo el conjunto de vértices como

$$V := \bigcup_{i=1}^n \sigma'_i = \{a_j^i\}_{i,j} \subset \mathbb{R}^N$$

y defino $K' = \{\sigma'_i\}_{i=1}^n$.

Ahora pruebo que K' cumple las dos propiedades de ser un complejo simplicial abstracto. Primero observa que para un vértice arbitrario $a_j^i \in V$, el simplejo $\langle a_j^i \rangle$ es una 0-cara del simplejo geométrico $\sigma_i = \langle a_0^i, \dots, a_{n_i}^i \rangle$ entonces por definición el 0-simplejo geométrico $\langle a_j^i \rangle$ es un elemento de K , ie. $\langle a_j^i \rangle = \sigma_l$ para alguna $l \in \{1, \dots, n\}$. Por lo tanto $\sigma'_l = \{a_j^i\} \in K'$.

Para probar la segunda propiedad sea $L = \sigma'_i = \{a_0^i, \dots, a_{n_i}^i\} \in K'$ y sea $L' \subseteq L$. Entonces L' genera una cara del simplejo geométrico σ_i . Por definición, el simplejo generado por L' es un elemento de K , ie. L genera a algún $\sigma_k \in K$. Por lo tanto $L' = \sigma'_k \in K'$ y termino. \square

Cada complejo simplicial K tiene una realización topológica, ie. tiene asociado canónicamente un espacio topológico que se denota por $|K|$.

Definición 48. Sea K un complejo simplicial con conjunto de vértices V_K , entonces se define:

$$|K| := \left\{ \sigma : V_K \rightarrow I \subset \mathbb{R} : \sigma^{-1}(0, 1] \in K, \sum_{v \in V_K} \sigma(v) = 1 \right\} \subset \{f : V_K \rightarrow \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^{V_K}$$

que tiene una métrica definida por:

$$d : |K| \times |K| \rightarrow \mathbb{R} , \quad d(\sigma, \tau) = \sqrt{\sum_{v \in V_K} (\sigma(v) - \tau(v))^2}.$$

El espacio topológico inducido por esta métrica se denota por $|K|_d$.

Observa que las sumas en la definición anterior están bien definidas porque para $\sigma \in |K|$ se tiene que $\sigma(v) \neq 0$ para sólo una cantidad finita de vértices ya que por definición $\{v \in V_K \mid \sigma(v) \neq 0\} = \sigma^{-1}(0, 1] \in K$ y los elementos de K son conjuntos finitos.

Nota. El conjunto $\sigma^{-1}(0, 1]$ es exactamente el soporte de la función σ , ie.

$$\sigma^{-1}(0, 1] = \text{Sop}(\sigma) := \{v \in V_K \mid \sigma(v) \neq 0\}.$$

Entonces usaré ambas descripciones intercambiablemente.

Ejercicio 45. d es una métrica sobre $|K|$.

Proof. Sean $\sigma, \sigma' \in |K|$. Pruebo que d cumple las tres propiedades de ser una métrica.

1. Si $d(\sigma, \sigma') = 0$ entonces $\sum(\sigma(v) - \sigma'(v))^2 = 0$ y como cada sumando es no-negativo, necesariamente se tiene que $\sigma(v) - \sigma'(v) = 0$ para toda $v \in V_K$. Por lo tanto $\sigma = \sigma'$ como funciones. Para la otra dirección, $\sigma = \sigma'$ implica que $(\sigma(v) - \sigma'(v))^2 = 0$ para toda $v \in V_K$ y así $d(\sigma, \sigma') = \sum 0 = 0$.
2. Como $(\sigma(v) - \sigma'(v))^2 = (\sigma'(v) - \sigma(v))^2$ para toda v , puedo sumar sobre V_K y obtengo que $d(\sigma, \sigma') = d(\sigma', \sigma)$.
3. La desigualdad del triángulo se cumple por la misma razón que se cumple con la métrica euclídea: sean $\sigma, \sigma', \sigma'' \in |K|$ y $L := \sigma^{-1}(0, 1] \cup (\sigma')^{-1}(0, 1] \cup (\sigma'')^{-1}(0, 1]$ que es finito porque es la unión finita de elementos de K ; sea $N = \#(L)$ y $L = \{v_1, \dots, v_N\}$ una enumeración. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} d(\sigma, \sigma'') &= \sqrt{\sum_{i=1}^N (\sigma(v_i) - \sigma''(v_i))^2} \\ &= \|(\sigma(v_1) - \sigma''(v_1), \dots, \sigma(v_N) - \sigma''(v_N))\| \\ &= \|(\sigma(v_1), \dots, \sigma(v_N)) - (\sigma''(v_1), \dots, \sigma''(v_N))\| \end{aligned}$$

donde la última expresión es la distancia usual euclídea entre los puntos $(\sigma(v_1), \dots, \sigma(v_N))$ y $(\sigma''(v_1), \dots, \sigma''(v_N))$ de \mathbb{R}^N . Aquí se vale la desigualdad del triángulo entonces:

$$\begin{aligned} d(\sigma, \sigma'') &\leq \|(\sigma(v_1), \dots, \sigma(v_N)) - (\sigma'(v_1), \dots, \sigma'(v_N))\| + \\ &\quad \|(\sigma'(v_1), \dots, \sigma'(v_N)) - (\sigma''(v_1), \dots, \sigma''(v_N))\| \\ &\leq \|(\sigma(v_1) - \sigma'(v_1), \dots, \sigma(v_N) - \sigma'(v_N))\| + \|(\sigma'(v_1) - \sigma''(v_1), \dots, \sigma(v_N) - \sigma''(v_N))\| \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^N (\sigma(v_i) - \sigma'(v_i))^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^N (\sigma'(v_i) - \sigma''(v_i))^2} \\ &\leq d(\sigma, \sigma') + d(\sigma', \sigma''). \end{aligned}$$

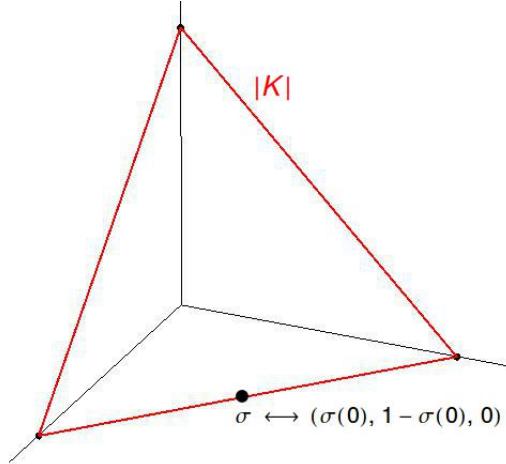
□

Aunque la definición de $|K|$ parece complicada, sí concuerda con la intuición, especialmente cuando V_K es finito. Por ejemplo:

Ejemplo 15. Sea $V_K = \{0, e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2$ y $K = \{\{0\}, \{e_1\}, \{e_2\}, \{0, e_1\}, \{0, e_2\}, \{e_1, e_2\}\}$. Como V_K es finito (con tres elementos), entonces una función $\sigma : V_K \rightarrow I$ la puedo representar como una terna $\sigma = (\sigma(0), \sigma(e_1), \sigma(e_2))$. Como $V_K \notin K$ entonces al menos una coordenada de σ debe ser 0. Por lo tanto, la segunda propiedad que cumple σ , (ie. la suma de las tres coordenadas da 1) me permite describir completamente $|K|$. Por ejemplo si $\sigma(0) = 0$ entonces $\sigma(e_1) = 1 - \sigma(e_2)$, por lo tanto cualquier $\sigma \in |K|$ que cumple que $\sigma(0) = 0$ está completamente determinado por un parámetro $t = \sigma(e_1) \in I$, es decir $\sigma = (0, t, 1-t)$. De esta manera tengo que:

$$|K| = \{(0, t, 1-t) \mid t \in \mathbb{R}\} \bigcup \{(t, 0, 1-t) \mid t \in \mathbb{R}\} \bigcup \{(t, 1-t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

que es la orilla de $\Delta^2 \subset \mathbb{R}^3$. También observa que la métrica d de $|K|$ coincide con la métrica usual de \mathbb{R}^3



ya que los sumandos $\sigma(v) - \tau(v)$ dentro del radical son simplemente las diferencias de las coordenadas de σ y τ vistas como puntos en \mathbb{R}^3 .

Como el caso finito es sencillo, formalizo este caso:

Definición 49. Sea K un complejo simplicial y $L \in K$, entonces

$$|L| := \{\sigma \in |K| : \sigma^{-1}(0, 1] \subseteq L\} = \{\sigma \in |K| : \text{Sop}(\sigma) \subseteq L\}.$$

La importancia de analizar $|L|$ para $L \in K$ es evidente del siguiente ejercicio:

Ejercicio 46. Sea $L = \{v_0, \dots, v_n\} \in K$, la función

$$\varphi : |L|_d \rightarrow \Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{definida por} \quad \sigma \mapsto (\sigma(v_0), \dots, \sigma(v_n))$$

es una isometría. En particular $|L|_d \approx \Delta^n$ es un homeomorfismo.

Proof. Primero verifico que $\Delta^n \approx |\Delta^n|_d$ (donde la topología usual de Δ^n es la de subespacio de \mathbb{R}^n).

Como L es finito cada φ está bien definida. Para ver que φ preserva la métrica, tomo $\sigma, \tau \in |L|$ arbitrarios y calculo:

$$d_{\Delta^n}(\varphi(\sigma), \varphi(\tau)) = d_{\mathbb{R}^{n+1}}(\sigma(v_0), \dots, \sigma(v_n)), (\tau(v_0), \dots, \tau(v_n))) = \sqrt{\sum_{i=0}^n (\sigma(v_i) - \tau(v_i))^2}$$

Observa que $V_L = L$ entonces la suma dentro del radical es la suma de $(\sigma(v) - \tau(v))^2$ sobre $v \in V_L$. Por lo tanto

$$d_{\Delta^n}(\varphi(\sigma), \varphi(\tau)) = \sqrt{\sum_{v \in V_L} (\sigma(v) - \tau(v))^2} = d_{|L|}(\sigma, \tau)$$

y φ preserva la métrica. En particular es continua e inyectiva.

Ahora considera la función

$$\psi : \Delta^n \rightarrow |K|_d \quad \text{definida por} \quad (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \mapsto \psi(\lambda_0, \dots, \lambda_n)(v) = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } v = v_i \in L \\ 0 & \text{si } v \notin L \end{cases}$$

Está bien definida porque los elementos $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \Delta^n$ cumplen $\sum \lambda_i = 1$ y $\lambda_i \geq 0$, además de que $\psi(\lambda) = \psi(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in |K|$ es cero fuera de L , ie. $\psi(\sigma)|_{V_K - L} = 0$ o equivalentemente $\text{Sop}(\varphi(\lambda)) \subseteq L$. En particular $\text{Im}(\psi) \subseteq |L|$, entonces puedo suponer que ψ tiene como contradominio a $|L|_d$, es decir $\psi : \Delta^n \rightarrow |L|_d$.

Por definición:

$$\begin{aligned} d_{|K|}(\varphi(\lambda), \varphi(\mu)) &= \sqrt{\sum_{v \in V_K} (\varphi(\lambda)(v) - \varphi(\mu)(v))^2} = \sqrt{\sum_{v \in L} (\varphi(\lambda)(v) - \varphi(\mu)(v))^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=0}^n (\varphi(\lambda)(v_i) - \varphi(\mu)(v_i))^2} = \sqrt{\sum_{i=0}^n (\lambda_i - \mu_i)^2} \\ &= d_{\mathbb{R}^{n+1}}((\lambda_0, \dots, \lambda_n), (\mu_0, \dots, \mu_n)) \\ &= d_{\Delta^n}(\lambda, \mu). \end{aligned}$$

Por lo tanto ψ preserva la métrica. En particular es continua e inyectiva.

Por último observa que:

$$\begin{aligned} \psi(\varphi(\sigma))(v_i) &= \psi(\sigma(v_0), \dots, \sigma(v_n))(v_i) = \sigma(v_i) \implies \psi(\varphi(\sigma)) = \sigma \\ \varphi(\psi(\lambda)) &= (\psi(\lambda)(v_0), \dots, \psi(\lambda)(v_n)) = (\lambda_0, \dots, \lambda_n)\lambda. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{\Delta^n}$ y $\psi \circ \varphi = \text{Id}_{|L|_d}$.

Para terminar resumo lo que tengo: hay dos funciones $\varphi : |L|_d \rightarrow \Delta^n$ y $\psi : \Delta^n \rightarrow |L|_d$ que son inversas entre sí. Además cada una preserva la métrica. Por lo tanto ambas son isometrías. \square

Nota. Observa que $|K|$ es la unión de todos los subespacios $|L|$, entonces el ejercicio anterior prueba que:

$$|K| = \bigcup_{L \in K} |L| \approx \bigcup \Delta^n,$$

es decir que la realización topológica de un complejo simplicial es una unión de simplejos geométricos estándares.

El ejercicio 46 y la nota anterior nos permite definirle una topología a $|K|$ sin mencionar métricas:

Definición 50. Sea K un complejo simplicial. Para cada $L \in K$, asígnale a $|L|$ la topología inducida por el homeomorfismo $|L| \approx \Delta^n$. Entonces la *topología coherente* de $|K|$ está definido por:

$$U \subseteq |K| \text{ es abierto} \iff U \cap |L| \text{ es abierto } \forall L \in K$$

Nota. De ahora en adelante, $|K|$ se refiere a la realización topológica del complejo simplicial K con la topología coherente y $|K|_d$ a la realización topológica con la topología inducida por la métrica d del ejercicio 45.

Nota. Vale la pena mencionar que una función $f : |K| \rightarrow X$ es continua si y sólo si $f|_{|L|} : |L| \rightarrow X$ es continua para toda $L \in K$. Esto quiere decir que $\text{Id} : |K| \rightarrow |K|_d$ es continua porque $\text{Id}|_{|L|} : |L| \rightarrow |L|_d$ es continua por definición de la topología de $|L|$ (como $|L| \approx \Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, la métrica d restringida a $|L|$ coincide exactamente con la euclídea de \mathbb{R}^{n+1}). Por lo tanto la topología coherente es más fina que la topología inducida por la métrica d , es decir tiene más abiertos.

Definición 51. Un complejo simplicial K es *localmente finito* si para cada $v \in V_K$ sólo hay una cantidad finita de $L \in K$ tales que $v \in L$, es decir que el conjunto $\{L \in K \mid v \in L\}$ es finito para todo vértice v .

La importancia de esta condición se muestra en el siguiente teorema:

Teorema 32. *Sea K un complejo simplicial. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. K es localmente finito.
2. $|K|$ es compacto.
3. $\text{Id} : |K| \rightarrow |K|_d$ es un homeomorfismo, es decir que la topología coherente coincide con la topología inducida por la métrica d .
4. $|K|$ es metrizable.
5. $|K|$ satisface el primer axioma de numerabilidad, ie. todo punto $\sigma \in |K|$ tiene una base local numerable.

1.13.3 Triangulaciones y nervios

Definición 52. Un espacio X es *triangulable* si existe un complejo simplicial K tal que $|K| \approx X$.

Ejercicio 47. Sea $V_K = \{0, e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2$ y $K = \{\{0\}, \{e_1\}, \{e_2\}, \{0, e_1\}, \{0, e_2\}, \{e_1, e_2\}\}$ (cf. ejemplo 15). Prueba que $|K| \approx \mathbb{S}^1$, es decir que \mathbb{S}^1 es triangulable.

Proof. □

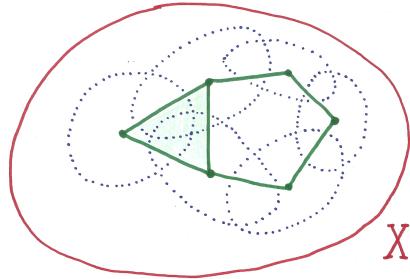
Este ejercicio se generaliza a variedades:

Teorema 33. *Toda variedad suave es triangulable.*

Ahora doy un ejemplo de un complejo simplicial abstracto:

Definición 53. (Alexandrov y Čech) Sean X un espacio topológico y $\mathcal{C} = \{C_j\}_{j \in J}$ una familia de subespacios (en general se toma una cubierta abierta). El *nervio* de \mathcal{C} , denotado por \mathcal{NC} es el complejo simplicial con vértices $V_{\mathcal{NC}} = J$, el conjunto de índices, y n -simplejos de la forma $L = \{j_0, \dots, j_n\}$ donde $C_{j_0} \cap \dots \cap C_{j_n} \neq \emptyset$.

Por ejemplo, un sub-complejo simplicial de un nervio se puede ver como:



1.13.4 Homología Simplicial

Primero estudio la orientación de los complejos simpliciales.

Definición 54. Sea K un complejo simplicial y $\sigma \in K$ un n -simplejo. Además sea Σ el conjunto de funciones biyectivas $\underline{n} \rightarrow \sigma$, donde $\underline{n} = \{0, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$. Entonces hay una relación de equivalencia:

$$f \simeq g \iff fg^{-1} \in S_{n+1} \text{ es una permutación par.}$$

Ejercicio 48. Prueba que solamente hay dos clases de equivalencia que son $[f]$ y $[\bar{f}]$ donde $\bar{f} = \tau \circ f$ donde $\tau \in S_{n+1}$ es la permutación que transpone el 0 y el 1 y fija a los demás.

Proof. Sea A_{n+1} el grupo alternante, ie. las permutaciones pares del grupo simétrico S_{n+1} . Defino la siguiente acción derecha:

$$\Sigma \times A_{n+1} \longrightarrow \Sigma \quad \text{con} \quad (f, \alpha) \longmapsto f \circ \alpha.$$

Claramente es una acción derecha porque $(f, 1) \mapsto f \circ 1 = f$ y

$$\begin{aligned} ((f, \alpha), \beta) &\mapsto (f \circ \alpha, \beta) = (f \circ \alpha) \circ \beta = f \circ (\alpha \circ \beta) \\ \therefore (f\alpha)\beta &= f(\alpha\beta). \end{aligned}$$

Ahora sea $f \in \Sigma$. Calculo su grupo de isotropía:

$$(A_{n+1})_f = \{\alpha \in A_{n+1} \mid f \circ \alpha = f\} = \{1\}.$$

Esto es porque si $\alpha \in A_{n+1}$ mueve un elemento entonces $f \circ \alpha$ y f difieren en ese elemento. Más precisamente, si $\alpha \neq 1$, existen $i \neq j \in \underline{n}$ tal que $\alpha(i) = j$ y por lo tanto $(f \circ \alpha)(i) = f(\alpha(i)) = f(j) \neq f(i)$, ie. $f \circ \alpha \neq f$, porque f es biyectiva. Este argumento prueba que la acción de A_{n+1} sobre Σ es libre.

Por el ejercicio 28, hay una biyección (continua) entre

$$\frac{A_{n+1}}{(A_{n+1})_f} = \frac{A_{n+1}}{1} \cong A_{n+1} \longleftrightarrow \mathcal{O}(f)$$

Esto quiere decir que todas las órbitas de la acción tienen $(n+1)!/2$ elementos, ie. la cardinalidad de A_{n+1} (esto se sigue del teorema de Langrange porque $(S_{n+1} : A_{n+1}) = 2$ ya que A_{n+1} es el kernel del morfismo $S_{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ que regresa el signo de la permutación). Además observa que:

$$\mathcal{O}(f) = \{g \in \Sigma \mid \exists \alpha \in A_{n+1} \text{ tal que } g \circ \alpha = f\} = \{g \in \Sigma \mid \exists \alpha \in A_{n+1} \text{ tal que } \alpha = g^{-1}f\} = [f] \in \Sigma/\sim$$

Ahora, Σ tiene $(n+1)!$ elementos por ser el conjunto de funciones biyectivas entre dos conjuntos con $n+1$ elementos. Como las órbitas forman una partición de Σ y las órbitas tienen la mitad de los elementos de Σ , sólo puede haber dos órbitas.

Sea $f \in \Sigma$ y $[f] \in \Sigma/\sim$. Si pruebo que $[f] \neq [\bar{f}]$ entonces tendré dos órbitas distintas y así las tendrá todas. Observa que:

$$f \circ \bar{f}^{-1} = f \circ (\tau \circ f)^{-1} = f \circ (f^{-1} \circ \tau^{-1}) = \tau^{-1} = \tau.$$

Como τ es una transposición, es una permutación impar. Por lo tanto $f \not\sim \bar{f}$ y acabo. □