0.1 El funtor $(X, x_0) \mapsto \pi_1(X, x_0)$

Como $\pi_1(X, x_0)$ es un grupo, pertenece como objeto a la categoría **Grupos** cuyos objetos son grupos y cuyos morfismos son los homomorfismos de grupo. Sea antoja que

$$\mathcal{F} : \mathbf{Top}_* \longrightarrow \mathbf{Grupos} \quad \text{con} \quad \mathcal{F}(X, x_0) = \pi_1(X, x_0)$$

sea un funtor. Para esto debemos definir un homomorfismo de grupos $\mathcal{F}(f)$ para cada morfismo de espacios basados f.

Sea $f \in \operatorname{Hom}\left((X, x_0), (Y, y_0)\right)$, es decir $f : X \to Y$ es continua y $f(x_0) = y_0$. Entonces si $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ es un lazo, tendremos que $f \circ \alpha$ es un lazo en (Y, y_0). En efecto, $f \circ \alpha$ es continua y $(f \circ \alpha)(0) = f(\alpha(0)) = f(x_0) = f(\alpha(1))(f \circ \alpha)(1)$. Por lo tanto $a \mapsto f \circ \alpha$ es una función bien definida entre $\Omega(X, x_0)$ y $\Omega(Y, y_0)$.

Para ver que esa función induce una función entre los grupos fundamentales, hay que probar que la función respeta homotopías, es decir

$$\alpha \simeq \beta \quad \Longrightarrow \quad (f \circ \alpha) \simeq (f \circ \beta).$$

Esto es consecuencia directa de la proposición **??**. Por lo tanto

$$f_\# : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0) \quad \text{con} \quad f_\#\big([\alpha]\big) = [f \circ \alpha]$$

es una función bien definida. Observa que:

$$f_\#\big([\alpha][\beta]\big) = f_\#\big([\alpha * \beta]\big) = \big[f \circ (\alpha * \beta)\big] = \big[(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)\big] = [f \circ \alpha][f \circ \beta] = f_\#\big([\alpha]\big) f_\#\big([\beta]\big)$$

donde la tercera igualdad se da porque los lazos son iguales:

$$\begin{aligned}\big(f \circ (\alpha * \beta)\big)(s) &= \begin{cases} f(\alpha)(2s) = f_\#(\alpha)(2s) & \text{si } \ 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ f(\beta)(2s-1) = f_\#(\beta)(2s-1) & \text{si } \ \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases} \\ &= \Big(f_\#(\alpha) * f_\#(\beta)\Big)(s) = \Big((f \circ \alpha) * (f \circ \beta)\Big).\end{aligned}$$

Además $f_\#([e_{x_0}]) = [f \circ e_{x_0}] = [e_{y_0}]$ porque $f(x_0) = y_0$.

Por lo tanto $f_\#$ es un homomorfismo de grupos y así $\mathcal{F}$ está bien definido para ser funtor, sólo hacen falta dos propiedades.

Claramente

$$(\mathrm{Id}_X)_\#\big([\alpha]\big) = [\mathrm{Id}_X \circ \alpha] = [\alpha],$$

entonces $(\mathrm{Id}_X)_\#$ es la función identidad en $\pi_1(X, x_0)$. Por último, si $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ y $g : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ son morfismos de espacios basados, entonces

$$(g \circ f)_\#\big([\alpha]\big) = \big[(g \circ f) \circ \alpha\big] = \big[g \circ (f \circ \alpha)\big] = g_\#\Big([f \circ \alpha]\Big) = g_\#\Big(f_\#\big([\alpha]\big)\Big) = (g_\# \circ f_\#)\big([\alpha]\big)$$

y así concluyo que

$$(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$$

Todo esto prueba:

Teorema 1. *La asignación $\mathcal{F} : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Grupos}$ definido por*

$$(X, x_0) \xmapsto{\ \mathcal{F}\ } \pi_1(X, x_0) \qquad \Big\{(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0)\Big\} \longmapsto \Big\{\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_\#} \pi_1(Y, y_0)\Big\}$$

es un funtor (covariante).

La importancia de este teorema es que ahora tenemos una forma de estudiar los grupos fundamentales. El teorema introduce un concepto importante para clasificar espacios:

Corolario 2. *El grupo fundamental de un espacio basado es un* invariante topológico*, es decir, si* (X, x_0) *y* (Y, y_0) *son espacios basados, entonces:*

$$(X, x_0) \approx (Y, y_0) \quad \Longrightarrow \quad \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$$

Proof. Los isomorfismos de una categoría se preservan bajo funtores, más precisamente si $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ es un isomorfismo en $\mathbf{Top}_*$ (ie. $f : X \to Y$ es un homeomorfismo y $f(x_0) = y_0$), entonces $\mathcal{F}(f) = f_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ es un ismorfismo. □

Nota. Este corolario nos da un criterio útil para saber cuando dos espacios basados no son homeomorfos: simplemente niega la implicación del corolario para escribir

$$\pi_1(X, x_0) \ncong \pi_1(Y, y_0) \quad \Longrightarrow \quad (X, x_0) \not\approx (Y, y_0).$$

Observa que el funtor del grupo fundamental toma como objetos espacio basados, no sólo espacios topológicos. Esto nos restringe un poco la información que podemos deducir al calcular un grupo fundamental de un espacio. Esto se nota especialemtente en el caso $(X, x_0) \neq (X, x_1)$ ya que los espacios topológicos pueden ser el mismo. Por suerte hay un (pseudo) remedio para esto:

Ejercicio 1. Sea X un espacio topológico y $x_0, x_1 \in X$ tales que existe una trayectoria $\sigma : I \to X$ tal que $\sigma(0) = x_0$ y $\sigma(1) = x_1$. Entonces:

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$$

mediante el ismorfismo $\hat{\sigma}\big([\alpha]\big) = [\bar{\sigma} * \alpha * \sigma]$

Proof. Primero verifico que $\hat{\sigma}$ está bien definida. Observemos que, como σ es continua, entonces $\bar{\sigma} * \alpha * \sigma$ también lo es. Observa que

$$(\bar{\sigma} * \alpha * \sigma)(0) = \bar{\sigma}(0) = x_1 = \sigma(1) = (\bar{\sigma} * \alpha * \sigma)(1).$$

Por lo tanto $\hat{\sigma}([\alpha]) \in \pi_1(X, x_1)$. Además, como $\hat{\sigma}$ está definida para clases de equivalencia hay que probar que respeta homotopías:

Sean $\alpha \simeq \beta$ lazos en (X, x_0). Entonces $\alpha * \sigma \simeq \beta * \sigma$. Esto se parece mucho al resultado que usé para probar que la operación $[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta]$ está bien definida; la diferencia es que σ es una trayectoria en lugar de un lazo. Sin embargo la homotopía es la misma:

Si $\alpha \simeq_H \beta$ (relativo a $A = \{0, 1\}$) entonces $\alpha * \sigma \simeq_F \beta * \sigma$ donde

$$F(s,t) := \begin{cases} H(2s, t) & \text{si } \ 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \sigma(2s-1) & \text{si } \ \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}.$$

Volvemos a aplicar este resultado a $(\alpha * \sigma)$ y concluimos que $\bar{\sigma} * \alpha * \sigma \simeq \bar{\sigma} * \beta * \sigma$. Por lo tanto

$$\hat{\sigma}\big([\alpha]\big) = [\bar{\sigma} * \alpha * \sigma] = \bar{\sigma} * \beta * \sigma = \hat{\sigma}\big([\beta]\big)$$

cuando $\alpha \simeq \beta$ y así $\tilde{\sigma}$ está bien definido.

Para probar que es un homomorfismo de grupos, hay que probar la siguiente igualdad:

$$\hat{\sigma}\big([\alpha][\beta]\big) = \hat{\sigma}\big([\alpha]\big)\hat{\sigma}\big([\beta]\big).$$

Aplico la asociatividad del grupo fundamental y la existencia de neutros para concluir que:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}\big([\alpha][\beta]\big) = \hat{\sigma}\big([\alpha * \beta]\big) &= [\bar{\sigma} * \alpha * \beta * \sigma] = [\bar{\sigma}][\alpha][\beta][\sigma] = [\bar{\sigma}][\alpha]\Big([\sigma][\sigma]^{-1}\Big)[\beta][\sigma] \\ &= [\bar{\sigma}][\alpha]\Big([\sigma][\bar{\sigma}]\Big)[\beta][\sigma] = \Big([\bar{\sigma}][\alpha][\sigma]\Big)\Big([\bar{\sigma}][\beta][\sigma]\Big) \\ &= \hat{\sigma}\big([\alpha]\big)\hat{\sigma}\big([\beta]\big). \end{aligned}$$

□

El funtor $\mathfrak{F}$ preserva productos:

Proposición 1. Sea $\{(X_j, x_j)\}_{j\in J}$ una familia de espacios basados, entonces las proyecciones $p_i : \Pi(X_j, x_j) \to (X_i, x_i)$ inducen un isomorfismo natural

$$\pi_n\Big(\prod_{j\in J}(X_j, x_j), \star\Big) \cong \prod_{j\in J}\pi_n(X_j, x_j)$$

donde $\star = \{x_j\}_{j\in J}$ es el punto base canónico de $\Pi(X_j, x_j)$.

Proof. Aplico el funtor $\mathfrak{F}$ a la familia $\{p_i : \Pi(X_j, x_j) \to (X_i, x_i\}_{i\in J}$ para obtener una familia de homomorfismos de grupos

$$\Big\{(p_i)_\# : \pi_n\Big(\prod(X_j, x_j), \star\Big) \longrightarrow \pi_n(X_i, x_i)\Big\}_{i\in J}.$$

Por la propiedad universal del producto en **Grupos** existe un único homomorfismo $\Phi : \pi_n(\Pi(X_j, x_j) \to (X_i, x_i)) \to \Pi\pi_n(X_i, x_i)$ a través del cual se factorizan todas las proyecciones $(p_i)_\#$:

$$\begin{tikzcd}
\big(\prod(X_j, x_j), \star\big) \arrow[r, "\pi_n"] \arrow[d, "p_i"'] & \pi_n\big(\prod(X_j, x_j), \star\big) \arrow[r, dashed, "\Phi"] \arrow[d, "(p_i)_\#"'] & \prod \pi_n(X_j, x_j) \arrow[dl, "q_i"] \\
(X_i, x_i) \arrow[r, "\pi_n"] & \pi_n(X_i, x_i) &
\end{tikzcd}
\qquad q_i \circ \Phi = (p_i)_\#$$

donde las q_i's son las proyecciones naturales del producto en **Grupos**. El homomorfismo Φ es un isomorfismo:

(Φ es sobre) Sea $\alpha = \{[\alpha_j]\}_{j\in J} \in \Pi\pi_n(X_j, x_j)$ un elemento arbitrario. Claramente induce una familia de funciones continuas $\{\alpha_j : \mathbb{S}^n \to X_j\}$. En **Top**, el producto cartesiano es el producto, entonces existe un único morfismo $\widetilde{\alpha} : \mathbb{S}^n \to \Pi X_j$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^n \arrow[rr, dashed, "\widetilde{\alpha}"] \arrow[dr, "\alpha_i"'] & & \prod X_j \arrow[dl, "p_i"] \\
& X_i &
\end{tikzcd}$$

Observa que $[\widetilde{\alpha}] \in \pi_n(\Pi X_j, \star)$, entonces:

$$\Phi[\widetilde{\alpha}] = \big\{(q_i \circ \Phi)[\widetilde{\alpha}]\big\}_{i\in J} = \big\{(p_i)_\#[\widetilde{\alpha}]\big\}_{i\in J} = \big\{[p_i \circ \widetilde{\alpha}]\big\}_{i\in J} = \big\{[\alpha_i]\big\}_{i\in J} = \alpha$$

Por lo tanto $[\widetilde{\alpha}]$ está en la preimagen de α y así Φ es sobre.

(Φ es inyectiva) Sea $[\beta] \in \pi_n(\Pi X_j, \star)$ tal que $\Phi[\beta] = 1$, es decir, cada coordenada de $\Phi[\beta]$ es la clase del lazo constante $e_i : \mathbb{S}^n \to X_i$. Entonces:

$$\big\{[e_i]\big\}_{i\in J} = \Phi[\beta] = \big\{[p_i \circ \beta]\big\}_{i\in J}$$

o equivalentemente $e_i \simeq p_i \circ \beta$ para toda $i \in J$.

Esto quiere decir que existe una familia de homotopías $H_i : \mathbb{S}^n \times I \to X_i$ tales que $H_i(s, 0) = (p_i\circ\beta)(s)$ y $H_i(s, 1) = e_i(s) = x_i$. Además, como cada $p_i \circ \beta$ es basada en el punto $\bullet = (1, 0, \ldots, 1) \in \mathbb{S}^n$, entonces cada homotopía es basada: $H_i(\bullet, t) = x_i$ para toda $t \in I$.

Por lo tanto $\{H_i\}_{i\in J}$ es una familia de morfismos en $\mathbf{Top}_*$. Por la propiedad universal del producto, existe un único morfismo $H : \mathbb{S}^n \times I \to \Pi X_j$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^n \times I \arrow[rr, dashed, "H"] \arrow[dr, "H_i"'] & & \prod X_j \arrow[dl, "p_i"] \\
& X_i &
\end{tikzcd}$$

Observa que

$$\begin{aligned}
H_0(s) &= \big\{p_i(H(s,0))\big\}_{i\in J} = \big\{H_i(s,0)\big\}_{i\in J} = \big\{(p_i \circ \beta)(s)\big\}_{i\in J} = \beta(s) \\
H_1(s) &= \big\{p_i(H(s,1))\big\}_{i\in J} = \big\{H_i(s,1)\big\}_{i\in J} = \big\{e_i(s)\big\}_{i\in J} = e_\star(s)
\end{aligned}$$

donde $e_\star : \mathbb{S}^n \to \Pi\, X_j$ es el lazo constante. Entonces H es una homotopía entre las funciones β y $e_\star$. Por lo tanto $[\beta] = [e_\star] = 1 \in \pi_n(\Pi\, X_j)$ y Φ es inyectiva.

$\square$