0.1 El teorema de escisión

La idea general del teorema de escisón es que la homología de X relativo a A es lo mismo que si le quitamos a X un subconjunto $U \subset A$ y calculamos la homología de $X - U$ relativa a $A - U$. En palabras, la homología relativa a un subespacio no nota la diferencia si el quitas (ciertos) conjuntos contenidos en el subespacio.

Teorema 1. *Sea X un espacio y $U \subset A \subseteq X$ tal que $\bar{U} \subset \mathring{A}$. Entonces la inclusión $j : (X - U, A - U) \hookrightarrow (X, A)$ induce un isomorfismo en homologías, es decir:*

$$H_n(j) : H_n(X - U, A - U) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A)$$

es un isomorfismo.

La idea intuitiva es que si tenemos una cadena en X le podemos cortar los pedazos que están en U de tal manera que la homología relativa a A no se de cuenta.

Por ejemplo, supongamos que tenemos una cadena $\tau = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ como en el siguiente dibujo

Observa que la cadena $\tau' = \sigma_1'' + \sigma_2 + \sigma_3 \in S_n(X - U, A - U)$, obtenida "cortando" la cadena $\tau \in S_n(X, A)$ en el punto $u \in \mathrm{Im}\,(\sigma_1)$, es una preimagen de $[\tau] \in H_n(X, A)$ bajo $H_n(j)$. En efecto si identifico $[\tau'] = [j_\#(\tau')] = H_n(j)[\tau']$ entonces

$$\tau - \tau' = \sigma_1 - \sigma_1' - \sigma_1'' = \partial(\hat{\sigma}) - \sigma_1' \in B_n(X, A) \quad \Longrightarrow \quad [\tau] = [\tau'] \in H_n(X, A)$$

La idea del teorema de escisión es que esta elección de preimagen es única módulo clases de homología.

En lugar de probar el teorema de escisión commo viene enunciado en el teorema 1, vamos a probar un teorema más general; a ambas las llamaremos igual.

Primero definimos un subcomplejo del complejo singular $S_\bullet(X)$. Sea $\mathfrak{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ una familia de subespacios tales que $X = \cup_j \mathring{U}_j$ (por ejemplo $\mathfrak{U}$ puedes ser una cubierta abierta). Definimos el complejo de cadenas $S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X)$ de la siguiente manera:

$$S_n^{\mathfrak{U}}(X) = \Big\{ \tau = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n(X)} r_\sigma \sigma \in S_n(X) \mid \forall \sigma,\ \exists U_j \in \mathfrak{U} \text{ tal que } \mathrm{Im}\,(\sigma) \subseteq U_j \Big\}.$$

Por ejemplo:

Claramente es un R-submódulo de $S_n(X)$, entonces la inclusíon $\imath_\bullet : S_\bullet^{\mathfrak{U}} \hookrightarrow S_\bullet(X)$ es un morfismo de complejos de cadena. Estamos listos para enunciar el teorema de escisión general:

Teorema 2. *La inclusión $\imath_\bullet^{\mathfrak{U}} : S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X) \hookrightarrow S_\bullet(X)$ induce un ismorfismo en homologías, es decir:*

$$H_n(S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X)) \cong H_n(S_n(X)) \overset{def}{=} H_n(X).$$

Para probar este teorema, nos vamos a basar en una propiedad importante de los complejos de cadena:

Ejercicio 1. Sea $\varphi : \mathcal{C}_\bullet \to \mathcal{C}_\bullet'$ un morfismo de complejos de cadena. Si φ es una *equivalencia homotópica de cadenas* (es decir que existe un morfismo de complejos $\psi : \mathcal{C}_\bullet' \to \mathcal{C}_\bullet$ tal que $\psi \circ \varphi \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_\bullet}$ y $\varphi \circ \psi \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_\bullet'}$), entonces $H_n(\varphi) : H_n(\mathcal{C}_\bullet) \to H_n(\mathcal{C}_\bullet')$ es un isomorfismo de R-módulos.

Proof. Por el ejercicio **??**, cada morfismo de complejos de cadena induce un morfismo en homologías, es decir $\mathcal{C}_\bullet \mapsto H_n(\mathcal{C}_\bullet)$ es un funtor. Supongamos que el teorema de la invariancia de la homología singular (cf. teorema **??**) se vale en general (ie. si $f \simeq g$ como morfismos de complejos de cadena entonces $H_n(f) = H_n(g)$). Entonces, como $H_n(\_)$ es funtor, tendríamos que la hipótesis de que $\varphi \circ \psi \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_\bullet'}$ y que $\psi \circ \varphi \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_\bullet}$, implica lo que queremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Id}_{H_n(\mathcal{C}_\bullet)} = H_n(\mathrm{Id}_{\mathcal{C}_\bullet}) = H_n(\psi \circ \varphi) = H_n(\psi) \circ H_n(\varphi) \\ \mathrm{Id}_{H_n(\mathcal{C}_\bullet')} = H_n(\mathrm{Id}_{\mathcal{C}_\bullet'}) = H_n(\varphi \circ \psi) = H_n(\varphi) \circ H_n(\psi) \end{array} \right\} \quad \Longrightarrow \quad H_n(\varphi) \ \text{ es un isomorfismo.}$$

Por lo tanto el ejercicio se reduce a probar lo siguiente:

Si $\varphi : \mathcal{C}_\bullet \to \mathcal{C}'_\bullet$ y $\psi : \mathcal{C}'_\bullet \to \mathcal{C}_\bullet$ son morfismos de complejos de cadenas, entonces:

$$\varphi \simeq \psi \quad \Longrightarrow \quad H_n(\varphi) = H_n(\psi) \tag{1}$$

Empezamos:

Si $\varphi \simeq \psi$, existe una familia $\mathfrak{T} = \{T_n : C_n \to C'_{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de morfismos tales que cumple $\varphi_n - \psi_n = \partial'_{n+1}T_n + T_{n-1}\partial_n$, donde $\varphi = (\varphi_n)$. Por lo tanto si $[z] \in H_n(\mathcal{C}_\bullet)$ es arbitrario, donde $z \in Z_n(\mathcal{C}_\bullet) = \ker(\partial_n)$, entonces:

$$\begin{aligned} H_n(\varphi)[z] - H_n(\psi)[z] &= [\varphi_n(z)] - [\psi_n(z)] = [\varphi_n(z) - \psi_n(z)] = [\partial'_{n+1}(T_n(z)) + T_{n-1}(\partial_n(z))] \\ &= [\cancelto{0}{\partial'_{n+1}(T_n(z))}] + [T_{n-1}(\partial_n(z))] = 0 \end{aligned}$$

porque $\partial_n(z) = 0$ y T_{n-1} es un morfismo de R-módulos. $\square$

Gracias a este ejercicio, simplemente hay que probar que la inclusón $\imath := \imath^{\mathfrak{U}}_\bullet$ es una equivalencia homotópica de cadenas, es decir necesitamos encontrar un inverso homotópico de $\imath$. Más precisamente, necesitamos definir un morfismo $S_\bullet \to S^{\mathfrak{U}}_\bullet$ (ie. una transformación natural entre los funtores $S_\bullet(\_)$ y $S^{\mathfrak{U}}_\bullet(\_)$) que compuesto con $\imath$ sea homotópico a la identidad.

Antes que eso vamos a contruir el morfismo de complejos de cadena que simplemente es hacer subdivisión baricéntrica; una aplicación repetida de este morfismo nos llevará a definir el morfismo $S_\bullet \to S^{\mathfrak{U}}_\bullet$ que buscamos.

Para definir la subdivisión baricéntrica como un morfismo de complejos de cadena, vamos a seguir un método muy similar a la prueba de la invariancia homotópica de la homología singular (en particular en la construcción de la homotopía $\lambda^1_\# \simeq \lambda^0_\#$).

Definimos $\mathrm{sd}^X_\bullet : S_\bullet(X) \to S_\bullet(X)$ de la siguiente manera: queremos que sea un morfismo de cadenas entonces en particular queremos que

$$\begin{tikzcd} S_n(\Delta^n) \arrow[r, "\mathrm{sd}^{\Delta^n}_n"] \arrow[d, "\sigma_\#"'] & S_n(\Delta^n) \arrow[d, "(F^i_n)_\#"] \\ S_n(X) \arrow[r, "\mathrm{sd}^X_n"] & S_n(X) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S_n(\Delta^{n-1}) \arrow[r, "\mathrm{sd}^{\Delta^{n-1}}_{n-1}"] \arrow[d, "(F^i_n)_\#"'] & S_n(\Delta^{n-1}) \arrow[d, "\sigma_\#"] \\ S_n(\Delta^n) \arrow[r, "\mathrm{sd}^{\Delta^n}_n"] & S_n(\Delta^n) \end{tikzcd} \tag{2}$$

sean un diagraman conmutativon, entonces para definir $\mathrm{sd}^X_n(\sigma)$ basta definir $\mathcal{Q}_n : \mathrm{sd}^{\Delta^n}_n(\mathrm{Id}_{\delta^n})$ porque:

$$\mathrm{sd}^X_n(\sigma) = \mathrm{sd}^{\Delta^n}_n(\sigma_\#(\mathrm{Id}_{\Delta^n})) = \sigma_\#\big(\mathrm{sd}^{\Delta^n}_n(\mathrm{Id}_{\Delta^n})\big) = \sigma_\#(\mathcal{Q}_n)$$

Como $\mathcal{Q}_n$ es hacer la subdivisión baricéntrica normal de Δ^n, entonces es simplemente agregar el baricentro $\mathfrak{b}_n := \mathfrak{b}(\Delta^n)$ como vértice a la frontera de Δ^n, o más precisamente, a la frontera de la imagen de Id_{Δ^n}. Es decir, queremos definir $\mathcal{Q}_n = \mathfrak{b}_n \cdot \mathrm{sd}^{\Delta^n}_{n-1}(\partial_n(\mathrm{Id}_{\Delta^n}))$.

Podemos definir $\mathcal{Q}_n$ directamente por inducción para forzar las propiedades que queremos que tenga sd^X_n. Para $n = 0$, tenemos que $\mathcal{Q}_0 \in S_0(X)$ entonces necesariamente $\mathcal{Q}_0 = \mathrm{Id}_{\Delta^0}$ porque está es la única función $\Delta^0 \to \Delta^0$ que existe. En general tenemos:

$$\begin{aligned} \mathrm{sd}^{\Delta^n}_{n-1}(\partial_n(\mathrm{Id}_{\Delta^n})) &= \mathrm{sd}^{\Delta^n}_{n-1}\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i F^i_n\right) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (F^i_n)_\#\Big(\underbrace{\mathrm{sd}^{\Delta^{n-1}}_{n-1}(\mathrm{Id}_{\Delta^{n-1}})}_{\mathcal{Q}_{n-1}}\Big) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i (F^i_n)_\#(\mathcal{Q}_{n-1}) \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos definir

$$\mathcal{Q}_n := \underbrace{\mathfrak{b}_n \cdot \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i (F^i_n)_\#(\mathcal{Q}_{n-1})\right)}_{\mathfrak{z}_{n-1}}$$

Esta definición cumple una propiedad importante (casi idéntico al lema **??**):

Lema 3. $\partial_n(\mathfrak{Q}_n) = \mathfrak{z}_{n-1}$ *para* $n > 0$.

Proof. Claramente $\partial_0(\mathfrak{Q}_0) = 0$ y también

$$\partial_1(\mathfrak{Q}_1) = \partial_1\left(\mathfrak{b}_1 \cdot (F_1^0)_{\#}(\mathfrak{Q}_0) - \mathfrak{b}_1 \cdot (F_1^0)_{\#}(\mathfrak{Q}_0)\right) = \partial_1(\mathfrak{b}_1 \cdot e_1 - \mathfrak{b}_1 \cdot e_0) = e_1 - e_0 = \sum_{i=0}^{1}(-1)^i (F_1^i)_{\#}(\mathfrak{Q}_0) = \mathfrak{z}_1.$$

Ahora por inducción, supongamos que $\partial_n(\mathfrak{Q}_n) = \mathfrak{z}_{n-1}$. Observa que $\partial_{n-1}(\mathfrak{z}_{n-1}) = \partial_{n-1}(\partial_n(\mathfrak{Q}_n)) = 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
\partial_n(\mathfrak{z}_n) &= \partial_n\left(\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i (F_{n+1}^i)_{\#}(\mathfrak{Q}_n)\right) = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i (F_{n+1}^i)_{\#}(\partial_n(\mathfrak{Q}_n)) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i (F_{n+1}^i)_{\#}(\mathfrak{z}_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i (F_{n+1}^i)_{\#}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j (F_n^j)_{\#}(\mathfrak{Q}_{n-1})\right) \\
&= \sum_i \sum_j (-1)^{i+j}(F_{n+1}^i \circ F_n^j)_{\#}(\mathfrak{Q}_{n-1}) = 0
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se cumple por el ejercicio **??** (cf. el lema **??**). Ahora, con el lema **??**, podemos concluir que:

$$\partial_{n+1}(\mathfrak{Q}_{n+1}) = \partial_{n+1}(\mathfrak{b}_{n+1} \cdot \mathfrak{z}_n) = \mathfrak{z}_n - \mathfrak{b}_{n+1} \cdot \cancelto{0}{\partial_n(\mathfrak{z}_n)} = \mathfrak{z}_n.$$

□

Con esto ya podemos definir la subdivisión baricéntrica a nivel de complejos de cadena:

Definición 1. La subdivisión baricéntrica $\mathrm{sd}_\bullet^X : S_\bullet(X) \to S_\bullet^X$ de complejos de cadena se define como

$$\mathrm{sd}_n^X : S_n(X) \longrightarrow S_n(X) \quad \text{con} \quad \sigma \mapsto \sigma_{\#}(\mathfrak{Q}_n).$$

Ejercicio 2. sd_n^{-} es una transformación natural del funtor $S_n(\_) : \mathbf{Top} \to {}_R\mathbf{Mod}$ en si mismo.

Proof. Hay que probar que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
S_n(X) \arrow[r, "\mathrm{sd}_n^X"] \arrow[d, "f_{\#}"] & S_n(X) \arrow[d, "f_{\#}"'] \\
S_n(Y) \arrow[r, "\mathrm{sd}_n^Y"] & S_n(Y)
\end{tikzcd}$$

conmutata para cualesquiera dos espacios X y Y, y cualquier función continua $f : X \to Y$ entre ellos.

Sea $\tau = \sum_\sigma r_\sigma \sigma \in S_n(X)$, entonces:

$$\begin{aligned}
f_{\#}(\mathrm{sd}_n^X(\tau)) &= f_{\#}\left(\mathrm{sd}_n^X\left(\sum r_\sigma \sigma\right)\right) = f_{\#}\left(\sum r_\sigma \mathrm{sd}_n^X(\sigma)\right) = \sum r_\sigma f_{\#}\left(\sigma_{\#}(\mathrm{sd}_n^{\Delta^n}(\mathrm{Id}_{\Delta^n}))\right) \\
&= \sum r_\sigma (f \circ \sigma)_{\#}(\mathrm{sd}_n^{\Delta^n}(\mathrm{Id}_{\Delta^n})).
\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\mathrm{sd}_n^Y(f_{\#}(\tau)) &= \mathrm{sd}_n^Y\left(f_{\#}\left(\sum r_\sigma \sigma\right)\right) = \mathrm{sd}_n^Y\left(\sum r_\sigma f_{\#}(\sigma)\right) = \sum r_\sigma \mathrm{sd}_n^Y(f \circ \sigma) \\
&= \sum r_\sigma (f \circ \sigma)_{\#}(\mathrm{sd}_n^{\Delta^n}(\mathrm{Id}_{\Delta^n})).
\end{aligned}$$

y así $f_{\#}(\mathrm{sd}_n^X(\tau)) = \mathrm{sd}_n^Y(f_{\#}(\tau))$ para toda τ. Por lo tanto, $\mathrm{sd}_n^{-} : S_n(\_) \to S_n(\_)$ es una transformación natural. □

Lema 4. $sd_\bullet^X : S_\bullet(X) \to S_\bullet(X)$ *es un morfismo de complejos de cadenas y* $sd_\bullet^X \simeq Id_{S_\bullet(X)}$

Proof. Primero probamos que es un morfismo de complejos de cadenas, es decir que para toda n el diagrama

$$\mathcal{D}_n := \quad \begin{tikzcd} S_n(X) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\mathrm{sd}_n^X"] & S_{n-1}(X) \arrow[d, "\mathrm{sd}_{n-1}^X"] \\ S_n(X) \arrow[r, "\partial_n"] & S_{n-1}(X) \end{tikzcd}$$

es conmutativo; esto lo hacemos por inducción. El caso $n = 0$ es trivial porque $\partial_0 = 0$. Para el caso general, sea $\sigma \in S_n(X)$, entonces

$$\partial_n(\mathrm{sd}_n^X(\sigma)) = \partial_n(\sigma_\#(\mathcal{Q}_n)) = \partial_n\big(\sigma_\#(\mathfrak{b}_n \cdot \mathrm{sd}_{n-1}^{\Delta^n}(\partial_n(\mathrm{Id}_{\Delta^n})))\big) = \sigma_\#\Big(\partial_n(\mathfrak{b}_n \cdot \mathrm{sd}_{n-1}^{\Delta^n}(\partial_n(\mathrm{Id}_{\Delta^n})))\Big)$$

que por el lema **??** se hace:

$$\begin{aligned}\partial_n(\mathrm{sd}_n^X(\sigma)) &= \sigma_\#\big(\mathrm{sd}_{n-1}^{\Delta^n}(\partial_n(\mathrm{Id}_{\Delta^n}))\big) - \mathfrak{b}_n \cdot \partial_{n-1}\mathrm{sd}_{n-1}^{\Delta^n}(\partial_n(\mathrm{Id}_{\Delta^n})) \\ &= \sigma_\#\big(\mathrm{sd}_{n-1}^{\Delta^n}(\partial_n(\mathrm{Id}_{\Delta^n}))\big) - \mathfrak{b}_n \cdot \mathrm{sd}_{n-1}^{\Delta^n}(\cancelto{0}{\partial_{n-1}\partial_n(\mathrm{Id}_{\Delta^n})}) \\ &= \sigma_\#\big(\mathrm{sd}_{n-1}^{\Delta^n}(\partial_n(\mathrm{Id}_{\Delta^n}))\big).\end{aligned}$$

donde el intercambio de orden de ∂_{n-1} y $\mathrm{sd}_{n-1}^{\Delta^n}$ se vale por la hipótesis de inducción.

Como $\mathrm{sd}_\bullet^X$ es una transformación natural (ejercicio 2), entonces podemos intercambiar $\sigma_\#$ con $\mathrm{sd}_{n-1}^{\Delta^n}$ para concluir:

$$\partial_n(\mathrm{sd}_n^X(\sigma)) = \mathrm{sd}_{n-1}^X(\sigma_\#(\partial_n(\mathrm{Id}_{\Delta^n}))) = \mathrm{sd}_{n-1}^X(\partial_n(\sigma_\#(\mathrm{Id}_{\delta^n}))) = \mathrm{sd}_{n-1}^X(\partial_n(\sigma))$$

y el diagrama $\mathcal{D}_n$ es conmutativo.

En lo que sigue omitiré muchos detalles porque son exactamente los mismos detalles, y pasos, que usamos en la prueba de la invariancia homotópica: simplemente hay que cambiar $\lambda_\#^1$ por $\mathrm{sd}_\bullet^X$ y $\lambda_\#^0$ por $\mathcal{I} := \mathrm{Id}_{S_\bullet(X)}$. Incluso usaré la misma notación.

Ahora necesitamos una familia de morfismos $\mathfrak{T} = \{T_n^X : S_n(X) \to S_{n+1}(X)\}$ que que sea la homotopía entre $\mathrm{sd}_\bullet^X$ y $\mathcal{I}$, es decir que $\partial_{n+1}T_n^X + T_{n+1}^X\partial_n = \mathrm{sd}_n^X - \mathcal{I}$. Como queremos que T_n^X sea una transformación natural entre los funtores $S_n(\_)$ y $S_{n+1}(\_)$, entonces basta definir:

$$T_n^X(\sigma) := \sigma_\#\big(\underbrace{T_n^{\Delta^n}(\mathrm{Id}_{\Delta^n})}_{\mathcal{T}_n}\big) = \sigma_\#(\mathcal{T}_n)$$

donde las $\mathcal{T}_n$ cumplen

$$\partial_{n+1}(\mathcal{T}_n) + \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(F_n^i)_\#(\mathcal{T}_{n-1}) = \mathcal{Q}_n - \mathrm{Id}_{\Delta^n} \tag{3}$$

porque están definidas recursivamente como

$$\mathcal{T}_0 = \mathrm{Id}_{\Delta^0}$$

$$\mathcal{T}_n = \mathfrak{b}_n \cdot \underbrace{\Big(\mathcal{Q}_n - \mathrm{Id}_{\Delta^n} - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(F_n^i)_\#(\mathcal{Q}_{n-1})\Big)}_{\mathfrak{z}_n}.$$

que cumplen que $\partial_{n+1}(\mathcal{T}_n) = \mathfrak{z}_n$.

Gracias a esta propiedad la ecuación (3) se cumple y así $\mathfrak{T}$ es una homotopía $\mathrm{sd}_\bullet^X \sim \mathcal{I}$. □

Este lema es valioso, básicamente nos dice que podemos iterar la subdivisión baricéntrica sobre un complejo de cadenas sin alterar las homomología, en efecto: si $\mathrm{sd}_\bullet^X \simeq \mathrm{Id}$ entonces $H_n(\mathrm{sd}_\bullet^X) = H_n(\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$. Esto sugiere una manera de contruir una función $S_\bullet(X) \to S_\bullet^{\mathfrak{U}}$ que sea el inverso homotópico de la inclusión $\imath : S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X) \to S_\bullet(X)$: simplemente sigue subdividiendo una n-cadena hasta que todas sus caras sean suficientemente pequeñas para que lo que quede sea un elemento de $S_n^{\mathfrak{U}}(X)$.

Para formalizar esta noción de hacerse más pequeño, definimos:

Definición 2. Sea A un subespacio de un espacio métrico (X, d). El *diámetro* de A se define como

$$\mathrm{diam}(A) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in X\}.$$

Además, si X es compacto y $\mathfrak{U} := \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una cubierta abierta de X, existe una $\varepsilon > 0$ tal que si $\mathrm{diam}(A) < \varepsilon$, entonces $A \subseteq U_\lambda$ para alguna $\lambda \in \Lambda$; a esta ε se le llama el *número de Lebesgue* de $\mathfrak{U}$.

Si $\sigma : \Delta^n \to \mathbb{R}^N$ es un simplejo afín, entonces su subdivisión baricéntrica contiene subsimplejos de diámetro menor o igual a $(\frac{n}{n+1})\mathrm{diam}(\sigma[\Delta^n])$. Por lo tanto si subdividimos r veces el diámetro de sus subsimplejos es menor o igual a $(\frac{n}{n+1})^r\mathrm{diam}(\sigma[\Delta^n])$.

Esto nos permite demostrar rigurosamente nuestra intuición de que existen una cantidad finita de pasos de subdivisión baricéntrica que meten a un simplejo a $S_n^{\mathfrak{U}}(X)$.

Lema 5. *Sea $\mathfrak{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de subespacios de X tales que $X = \cup\mathring{U}_\lambda$, entonces*

$$\forall\sigma \in S_n(X) \quad \exists r \geq 0 \;\; \textit{tal que} \;\; \left(sd_n^X\right)^r(\Delta^n) \in S_n^{\mathfrak{U}}(X).$$

Proof. Observa que la cubierta abierta $\{\mathring{U}_\lambda\}_\lambda$ induce la cubierta abierta $\sigma^{-1}(\mathfrak{U}) = \{\sigma^{-1}[\mathring{U}_\lambda]\}$ de Δ^n. Como éste es compacto, la cubierta $\sigma^{-1}[\mathfrak{U}]$ tiene un número de Lebesgue $\varepsilon > 0$, como $(\frac{n}{n+1})^r \to 0$ cuando $r \to \infty$, y $\mathrm{diam}(\Delta^n)$ es constante, entonces existe una r suficientemente grande tal que

$$\mathrm{diam}\big(\big(\mathrm{sd}_n^{\mathbb{R}^N}\big)^r(\Delta^n)\big) = \left(\tfrac{n}{n+1}\right)^r \mathrm{diam}(\sigma[\Delta^n]) < \varepsilon.$$

Esto quiere decir que los subcomplejos de $\left(\mathrm{sd}_n^{\mathbb{R}^N}\right)^r(\Delta^n)$ tienen diámetro menor que ε.

Por lo tanto si τ es un subsimplejo de $(\mathrm{sd}_n^X)^r(\sigma) = \sigma_\#\big(\mathrm{sd}_n^{\mathbb{R}^N}\big)^r(\Delta^n)$, entonces $\tau = \sigma \circ \tau'$ donde τ' es un subsimplejo de $\left(\mathrm{sd}_n^{\mathbb{R}^N}\right)^r(\Delta^n)$, es decir que $\mathrm{diam}(\mathrm{Im}\,(\tau')) < \varepsilon$ que implica que para tod sub simplejo τ hay un U_λ tal que

$$\tau'[\Delta^n] \subseteq \sigma^{-1}[\mathring{U}_\lambda] \quad\implies\quad (\sigma\circ\tau')[\Delta^n] = \tau[\Delta^n] \subseteq \mathring{U}_\lambda \subset U_\lambda \quad\implies\quad (\mathrm{sd}_n^X)^r(\sigma) \in S_n^{\mathfrak{U}}(X).$$

□

Este lema sugiere definir el mínimo número de subdivisiones necesarias para que un simplejo sea elemento de $S_n^{\mathfrak{U}}(X)$:

$$\mathfrak{r} : S_n(X) \to \mathbb{N} \quad \text{con} \quad \sigma \mapsto \min\Big\{r \in \mathbb{N} \mid (\mathrm{sd}_n^X)^r(\sigma) \in S_n^{\mathfrak{U}}(X)\Big\}$$

Lo ideal sería definir $\sigma \mapsto (\mathrm{sd}_n^X)^{\mathfrak{r}(\sigma)}(\sigma)$ como el morfismo de cadenas $S_\bullet(X) \to S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X)$ que buscamos, pero no se puede hacer tan directamente:

Ejercicio 3. La función $t_\bullet : S_\bullet(X) \to S_{bullet}^{\mathfrak{U}}(X)$ definido por

$$t_n : S_n(X) \longrightarrow S_n^{\mathfrak{U}}(X) \quad \text{con} \quad \sigma \mapsto (\mathrm{sd}_n^X)^{\mathfrak{r}(\sigma)}(\sigma)$$

no es una morfismo de complejos de cadena.

Proof. Sea $f : X \to Y$ una función continua arbitraria. Si $t_\bullet$ fuese un morfismo de complejos de cadena, entonces tendríamos que □

Esto se puede arreglar. Consideramos la homotopía $\mathfrak{T} = \{T_n^X : S_n(X) \to S_{n+1}(X)\}$ de la prueba del lema 4 y definimos:

$$R_n : S_n(X) \to S_n(X) \quad \text{con} \quad R_n(\sigma) := \sum_{i=0}^{\mathfrak{r}(\sigma)-1} T_n^X\big((\mathrm{sd}_n^X)^i(\sigma)\big).$$

Observa que

$$R_{n-1}(\partial_n(\sigma)) = R_{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma^{(i)}\right) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i R_{n-1}(\sigma^{(i)}) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \sum_{j=0}^{\mathfrak{r}(\sigma^{(i)})-1} T_{n-1}^X\big((\mathrm{sd}_{n-1}^X)^j(\sigma^{(i)})\big).$$

Por otro lado:

$$\partial_{n+1}(R_n(\sigma)) = \sum_{i=0}^{\mathfrak{r}(\sigma)-1} (\partial_{n+1}T_n^X)\big((\mathrm{sd}_n^X)^i(\sigma)\big).$$

Recuerda que los morfismos T_n^X cumplen $\partial_{n+1}T_n^X + T_{n-1}^X\partial_n = \mathrm{sd}_n^X - \mathrm{Id}$, o equivalentemente $\partial_{n+1}T_n^X = \mathrm{sd}_n^X - \mathrm{Id} - T_{n-1}^X\partial_n$. Si sustituimos esto en la fórmula anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\partial_{n+1}(R_n(\sigma)) &= \sum_{i=0}^{\mathfrak{r}(\sigma)-1} (\mathrm{sd}_n^X - \mathrm{Id} - T_{n-1}^X\partial_n)\big((\mathrm{sd}_n^X)^i(\sigma)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{\mathfrak{r}(\sigma)} (\mathrm{sd}_n^X)^i(\sigma) - \sum_{i=0}^{\mathfrak{r}(\sigma)-1} (\mathrm{sd}_n^X)^i(\sigma) - \sum_{i=0}^{\mathfrak{r}(\sigma)-1} T_{n-1}^X(\partial_n(\mathrm{sd}_n^X)^i)(\sigma) \\
&= (\mathrm{sd}_n^X)^{\mathfrak{r}(\sigma)}(\sigma) - \sigma - \sum_{i=0}^{\mathfrak{r}(\sigma)-1} T_{n-1}^X(\partial_n(\mathrm{sd}_n^X)^i)(\sigma)
\end{aligned}$$

donde la última suma es:

$$\sum_{i=0}^{\mathfrak{r}(\sigma)-1} T_{n-1}^X(\partial_n(\mathrm{sd}_n^X)^i)(\sigma) = \sum_{i=0}^{\mathfrak{r}(\sigma)-1} T_{n-1}^X((\mathrm{sd}_{n-1}^X)^i\partial_n)(\sigma) = \sum_{i=0}^{\mathfrak{r}(\sigma)-1} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j T_{n-1}^X\big((\mathrm{sd}_{n-1}^X)^i(\sigma^{(i)})\big)$$

porque sd_n^X conmuta con ∂_n.

Por lo tanto:

$$(\partial_{n+1}R_n + R_{n-1}\partial_n)(\sigma) = \sigma - \underbrace{\left[(\mathrm{sd}_n^X)^{\mathfrak{r}(\sigma)}(\sigma) + \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \sum_{i=\mathfrak{r}(\sigma^{(i)})}^{\mathfrak{r}(\sigma)} T_{n-1}^X\big((\mathrm{sd}_{n-1}^X)^i(\sigma^{(i)})\big)\right]}_{t_n(\sigma)}. \tag{4}$$

Entonces si redefinimos $t_\bullet$ como lo que está en corchetes, tendremos que $\mathrm{Id} \simeq t_\bullet$ mediante la familia $\{R_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de morfismos. Entonces si definimos:

$$t_n : S_n(X) \to S_n(X) \quad \text{con} \quad t_n(\sigma) = \sigma - (\partial_{n+1}R_n + R_{n-1}\partial_n)(\sigma)$$

estamos en posición para probar el teorema de escisión general:

Proof. (teorema 2) Observa que $t_\bullet = (t_n)$ es un morfismo de complejos de cadena porque

$$(\partial_n t_n)(\sigma) = \partial_n(\sigma - (\partial_{n+1}R_n + R_{n-1}\partial_n)(\sigma)) = \partial_n(\sigma) + \partial_n R_{n-1}\partial_n(\sigma),$$

y porque

$$t_{n-1}\partial_n(\sigma) = \partial_n(\sigma) + \partial_n R_{n-1}\partial_n(\sigma) + \cancelto{0}{R_{n-2}\partial_{n-1}\partial_n(\sigma)}.$$

Ahora, si $\mathrm{Im}\,(t_\bullet) \subset S_n^{\mathfrak{U}}$, entonces $t_\bullet$ se factoriza a través de la inclusión $S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X) \hookrightarrow S_\bullet(X)$. Por lo tanto $\mathrm{Id} \simeq t_\bullet = \imath \circ t_\bullet$. Para ver la expresión inversa, sabemos que

$$\sigma \in S_{n-1}^{\mathfrak{U}}(X) \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{r}(\sigma) = 0 \quad \Longrightarrow \quad R_n(\sigma) = 0$$

porque la suma que define $R_n(\sigma)$ es vacía. Una consecuencia directa de esto es que

$$\sigma \in S_n^{\mathfrak{U}}(X) \quad \Longrightarrow \quad \partial_n(\sigma) \in S_{n-1}^{\mathfrak{U}}(X) \quad \Longrightarrow \quad R_{n-1}(\partial_n(\sigma)) = 0$$

Por lo tanto

$$t_n(\sigma) = \sigma + \partial_{n+1}R_n(\sigma) + R_{n-1}\partial_n(\sigma) = \sigma \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Id} = t_\bullet \circ \imath = t_\bullet|_{S_\bullet^{\mathfrak{U}}} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Id} \sim \imath \circ t_\bullet.$$

y podemos conlcuir que $\mathrm{Id} \simeq \imath \circ t_\bullet$. Esto quiere decir que $\imath$ es una equivalencia homotópica y por el ejercicio 1 $H_n(\imath)$ es un isomorfismo.

En este último párrafo probamos que si $\mathrm{Im}\,(t_\bullet) \subseteq S_n^{\mathfrak{U}}(X)$ entonces $H_n(\imath)$ es un isomorfismo como queremos. El primer término de la definición de $t_n(\sigma)$ claramente cumple $(\mathrm{sd}_n^X)^{\mathfrak{r}(\sigma)}(\sigma) \in S_n^{\mathfrak{U}}(X)$. El segundo término es una suma de elementos de la forma $(\mathrm{sd}_{n-1}^X)^j(\sigma^{(i)})$ donde $\mathfrak{r}(\sigma^{(i)}) \leq j$, ie. $(\mathrm{sd}_{n-1}^X)^j(\sigma^{(i)})$. Ahora sea $\sigma \in S_n^{\mathfrak{U}}(X)$ arbitrario, entonces por definición $T_n^X(\sigma) = \sigma_\#(\mathfrak{T}_n)$ pero como $\mathrm{Im}\,(\sigma) \subseteq U_\lambda$ entonces $\mathrm{Im}\,(\sigma_\#(\mathfrak{T}_n)) \subseteq U_\lambda$ y así $T_n^X(\sigma) \in S_n^{\mathfrak{U}}(X)$. Si juntamos los dos enunciados cuncluimos que $t_n(\sigma)$ es una suma de elmentos de $S_n^{\mathfrak{U}}(X)$. Deducimos que $t_n(\sigma) \in S_n^{\mathfrak{U}}(X)$ para toda $\sigma \in S_n(X)$ y acabamos. $\square$

Por último vamos a probar ell caso particular del teorema de escisión:

Proof. (teorema 1) Definimos $\mathfrak{U} := \{X - U, A\}$ como la cubierta. Esta elección es válida porque $\bar{U} \subset \mathring{A}$ implica que $X = (X \overset{\circ}{-} U) \cup \mathring{A} = (X - \bar{U}) \cup \mathring{A}$.

La inclusión $j : (X - U, A - U) \hookrightarrow (X, A)$ induce un morfismo $j_\# : S_\bullet(X - U) \to S_\bullet(X)$ que cumple que

$$j_\#[S_\bullet(A - U)] \subseteq S_\bullet(A).$$

Por lo tanto $j_\#$ pasa al cociente:

$$\overline{j_\#} : \frac{S_\bullet(X - U)}{S_\bullet(A - U)} \longrightarrow \frac{S_\bullet(X)}{S_\bullet(A)}.$$

Hay que probar que $\overline{j_\#}$ es un isomorfismo.

Observa que

$$S_n^{\mathfrak{U}}(X) = S_n(X - U) + S_n(A) \subset S_n(X) \quad \text{y} \quad S_n(X - U) \cap S_n(A) = S_n((X - U) \cap A) = S_n(A - U).$$

El segundo teorema de isomorfismo dice que la inclusión $i : S_\bullet(X - U) \hookrightarrow S_\bullet(X - U) + S_\bullet(A) = S_n^{\mathfrak{U}}(X)$ induce un isomorfismo:

$$\bar{i} : \frac{S_\bullet(X - U)}{S_\bullet(A - U)} \xrightarrow{\cong} \frac{S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X)}{S_\bullet(A)}.$$

Por otro lado, la inclusión $\imath : S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X) \to S_\bullet(X)$ induce un morfismo:

$$\bar{\imath} : \frac{S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X)}{S_\bullet(A)} \longrightarrow \frac{S_n(X)}{S_n(A)}$$

porque $\imath[S_\bullet(A)] \subseteq S_\bullet(A)$. Observa que

$$\begin{tikzcd}
\frac{S_\bullet(X-U)}{S_\bullet(A-U)} \arrow[rr, "\overline{j_\#}"] \arrow[dr, "\bar{i}"'] & & \frac{S_\bullet(X)}{S_\bullet(A)} \\
& \frac{S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X)}{S_\bullet(A)} \arrow[ur, "\bar{\imath}"'] &
\end{tikzcd} \qquad \overline{j_\#} = \bar{\imath} \circ \bar{i}$$

es un diagrama conmutativo porque $j_\# = \imath \circ i$. Tomando homologías, obtenemos:

$$\begin{tikzcd}
H_n(X - U, A - U) \arrow[rr, "H_n(\overline{j_\#})"] \arrow[dr, "H_n(\bar{i})"'] & & H_n(X, A) \\
& H_n\left(\frac{S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X)}{S_\bullet(A)}\right) \arrow[ur, "H_n(\bar{\imath})"'] &
\end{tikzcd}$$

Como $\bar{\imath}$ es un isomorfismo de complejos de cadena, entonces $H_n(\bar{i})$ es un isomorfismo. Por lo tanto si probamos que $H_n(\bar{\imath})$ es un isomorfismo pdoríamos conlcuir que $H_n(\overline{j_\#})$ es un isomorfismo y acabaríamos.

Resulta que $\bar{\imath}$ es una equivalencia homotópica de complejos de cadena con inverso $\bar{t_\bullet}$, el inducido por $t_\bullet : S_\bullet(X) \to S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X)$. Si este es el caso, entonces $H_n(\bar{\imath})$ es un isomorfismo y acabamos. Por lo tanto redujimos el problema a:

Ejercicio 4. El morfismo $t_\bullet : S_\bullet(X) \to S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X)$ pasa al cociente:

$$\overline{t_\bullet} : \frac{S_\bullet(X)}{S_\bullet(A)} \longrightarrow \frac{S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X)}{S_\bullet(A)}$$

y es una equivalencia homotópica de complejos de cadena, más precisamente $\bar{\imath} \circ \overline{t_\bullet} \simeq \mathrm{Id} \simeq \overline{t_\bullet} \circ \bar{\imath}$.

Proof. Como $t_\bullet|_{S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X)} = \mathrm{Id}$ y $S_\bullet(A) \subseteq S_\bullet(X-U) + S_\bullet = S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X)$, entonces

$$t_\bullet[S_\bullet(A)] = S_\bullet(A)$$

y así $t_\bullet$ pasa al cociente, es decir existe un único $\overline{t_\bullet}$ tal que:

$$\begin{tikzcd}
S_\bullet(X) \arrow[r, "t_\bullet"] \arrow[d, two heads] & S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X) \arrow[r, two heads] & \frac{S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X)}{S_\bullet(A)} \\
\frac{S_\bullet(X)}{S_\bullet(A)} \arrow[urr, dashed, "\overline{t_\bullet}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Como

$$t_\bullet|_{S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X)} = \mathrm{Id} \quad \Longrightarrow \quad \imath \circ t_\bullet = \mathrm{Id} \quad \Longrightarrow \quad \bar{\imath} \circ \overline{t_\bullet} = \mathrm{Id}$$

y así tenemos trivialmente que $\mathrm{Id} \simeq \bar{\imath} \circ \overline{t_\bullet}$. Para probar el inverso, hay que dar una homotopía de complejos de cadena entre $\overline{t_\bullet}$ y $\bar{\imath}$; esta homotopía va a ser la inducida por $\bar{\mathfrak{R}} = \{\overline{R_n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ donde $\mathfrak{R} = \{R_n\}$ es la hommotopía $t_\bullet \simeq \mathrm{Id}$.

De hecho, si probamos que las $R_n : S_n(X) \to S_n(X)$ pasan al cociente entonces:

$$\begin{aligned}
(\overline{R_{n-1}}\partial_n + \partial_{n+1}\overline{R_n})[\sigma] &= \overline{R_{n-1}}[\partial_n(\sigma)] + \partial_{n+1}[R_n(\sigma)] = [R_{n-1}(\partial_n(\sigma))] + [\partial_{n+1}R_n(\sigma)] \\
&= [\sigma - t_n(\sigma)] = [\sigma] - [t_n(\sigma)] = \mathrm{Id}(\sigma) - \overline{t_n}(\sigma)
\end{aligned}$$

porque $t_n(\sigma) = \sigma + \partial_{n+1}R_n(\sigma) + R_{n-1}\partial_n(\sigma)$ por definición. $\square$

$\square$