0.1 Homología Singular

En esta sección introduzco otro tipo de homología que resultará ser la más manejable que la homología simplicial y que nos dará más resultados topológicos.

0.1.1 Complejos de cadena y sus homologías

Primera considera un complejo simplicial K y $C_n^<(K)$, las n-cadenas ordenadas. Si $v \in V_K$ es un vértice, entonces por definición $\{v\} \in K$. A este vértice le corresponde de manera canónica un $\tilde{v} \in |K|$ definido por:

$$\tilde{v} : V_k \longrightarrow I \quad \text{con} \quad \tilde{v}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u = v \\ 0 & \text{si } u \neq v \end{cases}.$$

Esto es muy similar a las funciones características de los módulos libres. Esta observación nos lleva a definir una función $\Delta^n \to |K|$ de la siguiente manera:

Definición 1. Sea $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ el n-simplejo geométrico estándar y $s = \{v_0, \ldots, v_n\} \in K$ un n-simplejo de K, entonces define

$$\sigma_s : \Delta^n \longrightarrow |K| \quad \text{con} \quad \sigma_s(t_0, \ldots, t_n) := \sum_{i=0}^{n} t_i \tilde{v}_i$$

La función σ_s está bien definido, ie. $\sigma_s(t_0, \ldots, t_n) \in |s| \subseteq |K|$, gracias al siguiente lema:

Lema 1. *Sean K un complejo simplicial y $s = \{v_0, \ldots, v_n\} \in K$ un n-simplejo. Entonces cualquier combinación lineal convexa de elementos de $|s|$ es un elemento de $|s|$, es decir: si $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in |s|$ y $\lambda_0, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ son tales que $\sum \lambda_i = 1$ entonces $\sum \lambda_i \alpha_i \in |s|$.*

Proof. Observa que la suma $\gamma := \sum \lambda_i \alpha_i$ tiene sentido porque $|k| \subset \mathbb{R}^{V_K}$ que es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Como cada α_i es una función con valores no-negativos y cada escalar λ_i es no-negativo, entonces $\gamma(v) = 0$ si y sólo si $\alpha_i(v) = 0$ para toda i, es decir $\mathrm{Sop}(\gamma) = \cap \mathrm{Sop}(\alpha_i) \subseteq s$ porque por hipótesis $\mathrm{Sop}(\alpha_i) \subseteq s$.

Además tenemos que:

$$\sum_{v \in V_K} \gamma(v) = \sum_{i=0}^{n} \gamma(v_i) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \alpha_j(v_i) = \sum_{j=0}^{n} \left(\lambda_j \sum_{i=0}^{n} \alpha_j(v_i) \right) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j = 1$$

porque $\sum_i \alpha_j(v_i) = 1$ porque $\alpha_i \in |s|$. Por lo tanto $\gamma \in |s|$. $\square$

Nota. Si $(v_0, \ldots, v_n) \in C_n^<(K)$ entonces $\sigma_{(v_0, \ldots, v_n)} : \Delta^n \to |K|$ es un encaje, pero si $[v_0, \ldots, v_n] \in C_n(K)$ entonces $\sigma_{[v_0, \ldots, v_n]}$ no necesariamente es un encaje.

Como vamos a estar trabajando con funciones continuas $\Delta^n \to |K|$, introduzco una notación más concisa:

Definición 2. Sea X un espacio topológico, denotamos

$$\mathcal{S}_n(X) := \mathrm{Map}(\Delta^n, X) = \{f : \Delta^n \to X \mid f \text{ es continua}\}.$$

Con esta notación, tenemos que $(v_0, \ldots, v_n) \mapsto \sigma_{(v_0, \ldots, v_n)}$ es una función y por la propiedad universal de los módulos libres se extiende a $C_n^<(K)$, entonces tenemos:

$$\begin{tikzcd} C_n^<(K) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d] & C_{n-1}^<(K) \arrow[d] \\ \mathcal{S}_n |K| \arrow[r, dashed, "?"] & \mathcal{S}_{n-1} |K|. \end{tikzcd}$$

El siguiente paso es definir es definir un análogo de las funciones frontera para $\mathcal{S}_n |K|$. Para esto requerimos las funciones *cara*:

$$F_n^i : \Delta^{n-1} \to \Delta^n \quad \text{definido por} \quad F_n^i(t_0, \ldots, t_{n-1}) = (t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{n-1}).$$

En palabras, F_n^i manda Δ^{n-1} a la $(n-1)$-cara opuesto al vértice e_i de Δ^n. En general, las funciones F_n^i se pueden definir afinmente:

$$F_n^i(e_j) = \begin{cases} e_j & \text{si } \ j < i \\ e_{j+1} & \text{si } \ j \geq i \end{cases}.$$

El siguiente dibujo ilustra el caso de $n = 2$:

Observa que para un $(n-1)$-simplejo $(v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n)$ de K, entonces

$$\sigma_{(v_0,\dots,\widehat{v_i},\dots,v_n)} = \sigma_{(v_0,\dots,v_n)} \circ F_n^i. \tag{1}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \sigma_{(v_0,\dots,\widehat{v_i},\dots,v_n)}(t_0, \dots, t_{n-1}) &= t_0\tilde{v}_0 + \cdots + t_{i-1}\tilde{v}_{i-1} + t_i\tilde{v}_{i+1} + \cdots + t_{n-1}\tilde{v}_n \\ &= t_0\tilde{v}_0 + \cdots + t_{i-1}\tilde{v}_{i-1} + 0\tilde{v}_i + t_i\tilde{v}_{i+1} + \cdots + t_{n-1}\tilde{v}_n \\ &= \sigma_{(v_0,\dots,v_n)}((t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1})) \\ &= \sigma_{(v_0,\dots,v_n)}(F_n^i(t_0, \dots, t_{n-1})). \end{aligned}$$

La fórmula (1) sugiere de manera inmediata cómo definir una función frontera para $\mathcal{S}_n\,|K|$:

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\sigma \circ F_n^i).$$

De hecho es muy fácil generalizarlo a cualquier espacio topológico.

Definición 3. Sea X un espacio topológico y $n \geq 0$. Los elementos de $\mathcal{S}_n(X)$ se llaman *n-simplejos singulares*. Definimos $S_n(X;R) := R\langle \mathcal{S}_n(X) \rangle$ y

$$\partial_n : S_n(X;R) \longrightarrow S_{n-1}(X;R) \quad \text{con} \quad \partial_n(f) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (f \circ F_n^i).$$

Si $n < 0$ escribimos $S_n(X;R) = 0$.

Para probar que:

$$\cdots \longrightarrow S_{n+1}(X;R) \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X;R) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X;R) \longrightarrow \cdots$$

es un complejos de cadenas necesitamos

Ejercicio 1. Para toda $j < i$ se cumple $F_n^i \circ F_{n-1}^j = F_n^j \circ F_{n-1}^i$.

Proof. ◻

De este ejercicio se sigue que

Ejercicio 2. Para toda $n \geq 1$ se cumple $\partial_{n+1} \circ \partial_n$, en particular $\operatorname{Im}(\partial_{n+1}) \subseteq \ker \partial_n$.

Proof. ◻

Por lo tanto $S_\bullet(X;R)$ es un complejo de cadenas. Gracias a esto podemos definir:

Definición 4. Sea X un espacio topológico y $S_\bullet(X;R)$ su *complejo singular*. Definimos $Z_n(X;R) := \ker(\partial_n)$, cuyos elementos se llaman *n-ciclos*, definimos $B_n(X;R) := \operatorname{Im}(\partial_{n+1})$, cuyos elementos se laman *n-fronteras* y definimos la *homología singular* de X como:

$$H_n(X;R) := \frac{Z_n(X;R)}{B_n(X;R)}$$

La asignación $X \mapsto S_\bullet(X;R)$ es un funtor entre espacios topológicos y complejos de cadenas de R-módulos:

Definición 5. Sea $f : X \to Y$ una función continua. Entonces f induce un morfismo de complejos de cadenas $f_\# : S_\bullet(X;R) \to S_\bullet(Y;R)$ definido de la siguiente manera: para cada n define $(f_\#)_n : S_n(X;R) \to S_n(Y;R)$ como $(f_\#)_n(\sigma) = f \circ \sigma$ donde $\sigma : \Delta^n \to X$ y extiende por linealidad.

Nota. En general voy a suprimir el subíndice n, es decir voy a escribir $f_\# = (f_\#)_n$. Esto es porque la regla de correspondencia no depende de n, simplemente es una composición.

Para probar que $f_\#$ es efectivamente un morfismo de complejos de cadena, hay que probar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} S_n(X;R) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_\#"'] & S_{n-1}(X;R) \arrow[d, "f_\#"] \\ S_n(Y;R) \arrow[r, "\partial_n"'] & S_{n-1}(Y;R) \end{tikzcd}$$

Pero esto se verifica inmediatamente:

$$f_\#(\partial_n(\sigma)) = f_\# \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\sigma \circ F_n^i) \right) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i f \circ (\sigma \circ F_n^i) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (f_\#(\sigma) \circ F_n^i) = \partial_n(f_\#(\sigma)).$$

Ahora, el ejercicio **??** nos dice que $f_\#$ induce un morfismo de R-módulos $H_n(f_\#) : H_n(X;R) \to H_n(Y;R)$. Por lo tanto:

$$X \mapsto H_n(X;R) \quad \text{con} \quad \left(X \xrightarrow{f} Y\right) \mapsto H_n(f_\#)$$

es un funtor. Esto significa que la homología es un invariante topológico:

Proposición 1.

$$X \approx Y \quad \Longrightarrow \quad H_n(X;R) \cong H_n(Y;R) \quad \forall n \geq 0.$$

La homología singular generaliza la homología simplicial:

Teorema 2. *Sea K un complejo simplicial. Entonces $H_n(K;R) \cong H_n(|K|;R)$, donde la primera homología es la simplicial y la segunda es la singular aplicado al espacio $|K|$. Este isomorfismo está inducido por*

$$C_n^<(K) \longrightarrow S_n(|K|;R) \quad \textit{definido por} \quad (v_0, \ldots, v_n) \mapsto \sigma)(v_0, \ldots, v_n).$$

Para porbar este teorema tendríamos que probar que los complejos $C_\bullet^<(K)$ y $S_\bullet(|K|)$ son homotópicos (cf. definición **??**).

Ahora calculamos las homologías en ciertos casos particulares para ilustrar lo manejable que es está definición a diferencia de la homología simplicial.

Proposición 2.

$$H_n\big(\{p\};R\big) \cong \begin{cases} R & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Proof. Consideramos $S_\bullet(\{p\};R)$, el complejo singular del espacio $\{p\}$:

$$\cdots \longrightarrow S_n(\{p\};R) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(\{p\};R) \longrightarrow \cdots \longrightarrow S_0(\{p\};R) \longrightarrow 0$$

Como $\mathcal{S}_n(\{p\}) = \{\text{cte}\}$ para toda n, entonces

$$S_n(\{p\};R) = R\langle \text{cte} \rangle \cong R \quad \forall n \geq 0$$

bajo el isomorfismo $r\text{cte} \mapsto r$.

Por otro lado, para $n > 0$ claramente tenemos que $\text{cte} = \text{cte} \circ F_n^i$, entonces:

$$\partial_n(\text{cte}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\text{cte} \circ F_n^i) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \text{cte} = \begin{cases} \text{cte} & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

porque la suma anterior es una suma alternada con $n+1$ términos. Por lo tanto $\partial_n : R\langle \text{cte}\rangle \to R\langle \text{cte}\rangle$ es un isomorfismo si n es par (ya que hace cte $\mapsto$ cte) y $\partial_n = 0$ para n impar. De aquí podemos concluir que para $n > 0$:

$$Z_n\big(\{p\};R\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ S_n(\{p\};R) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad \text{y} \quad B_n\big(\{p\};R\big) = \begin{cases} S_n(\{p\};R) & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases},$$

la última igualdad se da porque $n+1$ es par cuando n es impar y $n+1$ es impar cuando n es par. Tomando cocientes concluimos que

$$H_n\big(\{p\};R\big) = \left.\begin{cases} 0/0 & \text{si } n \text{ es par} \\ S_n(\{p\};R)/S_n(\{p\};R) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}\right\} = 0 \quad (\forall n > 0)$$

Para $n = 0$, simplemente sustituimos $S_1(\{p\};R) \cong S_0(\{p\};R) \cong R$ en el complejo singular $S_\bullet(\{p\};R)$:

$$\cdots \longrightarrow R \xrightarrow{\partial_1} R \xrightarrow{0} 0$$

y así $Z_0(\{p\};R) = \ker 0 = R$. Ya teníamos que $B_0(\{p\};R) = \mathrm{Im}(\partial_1) = 0$ entonces $H_0(\{p\};R) = R/0 \cong R$. $\square$

Proposición 3. Si X es un espacio conectable por trayectorias, entonces $H_0(X;R) \cong R$.

Proof. Observa que $\mathcal{S}_0(X) = \mathrm{Map}[\Delta^0, X] = X$ porque $\Delta^0 = \{e_0\}$ y toda función $\{e_0\} \to X$ está completamente determinado por su imagen. Por lo tanto

$$S_0(X;R) = R\langle X\rangle = \left\{ \sum_{x\in X} r_x x \mid r_x \in R, r_x \neq 0 \text{ para solamente una cantidad finita de } x \in X \right\}$$

Ahora considera el siguiente morfismo de R-módulos:

$$\varepsilon : S_0(X;R) \longrightarrow R \quad \text{definido por} \quad \sum_{x\in X} r_x x \mapsto \sum_{x\in X} r_x,$$

que es claramente sobreyectiva. Observa que si $\sum_\sigma r_\sigma \sigma \in S_1(X;R)$, donde $\sigma : \Delta^1 \to X$, entonces:

$$\begin{aligned}
\partial_1\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_1(X)} r_\sigma \sigma\right) &= \sum_\sigma r_\sigma \partial_1(\sigma) \\
&= \sum_\sigma r_\sigma(\sigma(e_1) - \sigma(e_0)) \\
&= \sum_\sigma r_\sigma \sigma(e_1) - \sum_\sigma r_\sigma \sigma(e_0) \\
\therefore (\varepsilon\circ\partial_1)\left(\sum_\sigma r_\sigma\sigma\right) &= \varepsilon\left(\sum_\sigma r_\sigma\sigma(e_1)\right) - \varepsilon\left(\sum_\sigma r_\sigma\sigma(e_0)\right) \\
&= \sum_\sigma r_\sigma - \sum_\sigma r_\sigma = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathrm{Im}(\partial_1) \subseteq \ker(\varepsilon)$ y así podemos "aumentar" el complejo $S_\bullet(X;R)$ al complejo:

$$\cdots \longrightarrow S_1(X;R) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X;R) \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

Observa que si $\mathrm{Im}(\partial_1) = \ker(\varepsilon)$ entonces tendremos que:

$$R = \mathrm{Im}(\varepsilon) \cong \frac{S_0(X;R)}{\ker(\varepsilon)} \cong \frac{S_0(X;R)}{\mathrm{Im}(\partial_1)} \overset{\text{def}}{=} H_0(X;R)$$

ya que $\partial_0 = 0$ y así $\ker(\partial_0) = S_0(X;R)$. Por lo tanto solamente hace falta probar que $\ker(\varepsilon) \subseteq \mathrm{Im}(\partial_1)$ para terminar la demostración.

Sea $\sum r_x x \in \ker(\varepsilon) \subseteq S_0(X;R)$, es decir $\sum r_x = 0$, y sea $x_0 \in X$. Observa que una trayectoria $\alpha : I \to X$ que empieza en x_0 y termina en un $x \in X$ arbitrario lo podemos ver como un elemento de $S_1(X;R)$. Más precisamente: para toda $x \in X$ define $\alpha_x : \Delta^1 \to X$ la composición $I \approx \Delta^1 \xrightarrow{\alpha} X$. Por lo tanto para cada $x \in X$ y para cada trayectoria α que empieza en x_0 y termina en x, tenemos que $\alpha_x \in S_1(X;R)$.

Ahora define $\sigma = \sum_{x\in X} r_x \alpha_x$ (que está bien definida porque $r_x \neq 0$ para solamente una cantidad finita de $x \in X$). Calculo:

$$
\begin{aligned}
\partial_1(\sigma) &= \sum_{x\in X} r_x \partial_1(\alpha_x) = \sum_{x\in X} r_x(\alpha_x(e_1) - \alpha_x(e_0)) = \sum_{x\in X} r_x(x - x_0) = \sum_{x\in X} r_x x - x_0 \cancelto{0}{\sum_{x\in X} r_x} \\
&= \sum_{x\in X} r_x x.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\sum r_x x \in \mathrm{Im}(\partial_1)$, concluimos que $\mathrm{Im}(\partial_1) = \ker(\varepsilon)$ y terminamos. $\square$

Una propiedad importante de la homología es que abre sumas directas. Más precisamente, si $\{C_\bullet^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de complejos de cadenas, entonces $C_\bullet := \oplus_{\lambda\in\Lambda} C_\bullet^\lambda$ es un complejo de cadena con diferenciales $\oplus_{\lambda\in\Lambda}\partial_n^\lambda$. Este diferencial es canónico porque para toda $\lambda \in \Lambda$ tenemos morfismos d_n^λ definidos por la composición

$$
\begin{tikzcd}
C_n^\lambda \arrow[r, hook] \arrow[d, "\partial_n"'] \arrow[dr, "d_n^\lambda"] & \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} C_n^\lambda \arrow[d, dashed, "\oplus\partial_n^\lambda"] \\
C_{n-1}^\lambda \arrow[r, hook] & \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} C_{n-1}^\lambda
\end{tikzcd}
$$

que por la propiedad universal de la suma directa se factorizan a través de $\oplus_{\lambda\in\Lambda}\partial_n^\lambda$. Por lo tanto hay una manaera canónica de definir la suma directa de una familia $\{C_\bullet^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ complejos de cadena con diferenciales $\partial_n^\lambda : C_n^\lambda \to C_{n-1}^\lambda$:

$$
\cdots \longrightarrow \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} C_{n+1}^\lambda \xrightarrow{\oplus_\lambda \partial_{n+1}^\lambda} \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} C_n^\lambda \xrightarrow{\oplus_\lambda \partial_n^\lambda} \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} C_{n-1}^\lambda \longrightarrow \cdots
$$

Ejercicio 3. Sea $C_\bullet = \oplus_{\lambda\in\Lambda} C_\bullet^\lambda$ la suma directa de los complejos de cadena $C_\bullet$. Entonces la homología abre sumas:

$$
H_n(C_\bullet;R) = H_n\left(\oplus C_n^\lambda;R\right) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H_n(C_\bullet^\lambda;R)
$$

Proof. Probaré que $H_n(C_\bullet;R)$ cumple la propiedad universal de la suma directa. Primero observa que para toda $n \in \mathbb{Z}$, la inclusión canónica $\imath_n^\mu : C_n^\mu \to \oplus_\lambda C_n^\lambda$ forma parte de un morfismo de cadenas $\imath^\mu : C_\bullet^\mu \to C_\bullet$. En efecto, el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
C_n^\mu \arrow[r, "\partial_n^\mu"] \arrow[d, hook, "\imath_n^\mu"'] & C_{n-1}^\mu \arrow[d, hook, "\imath_{n-1}^\mu"] \\
\oplus_\lambda C_n^\lambda \arrow[r, "\oplus_\lambda \partial_n^\lambda"'] & \oplus_\lambda C_{n-1}^\lambda
\end{tikzcd}
$$

conmuta porque el morfismo $\oplus_\lambda\partial_n^\lambda$ es el dado por la propiedad universal de la suma directa; está inducido por la familia $\{\imath_{n-1}^\lambda \circ \partial_n^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ (esto ya lo argumenté antes de empezar el ejercicio).

Por el ejercicio **??** el morfismo $\imath^\mu : C_\bullet^\mu \to C_\bullet$ induce un morfismo

$$
H_n(\imath^\mu) : H_n(C_\bullet^\mu;R) \longrightarrow H_n(C_\bullet;R) \quad \text{definido por} \quad H_n(\imath^\mu)[x] = [\imath_n^\mu(x)].
$$

Por lo tanto $H_n(C_\bullet;R)$ viene equipado con la familia de morfismos $\{H_n(\imath^\lambda) : H_n(C_\bullet^\lambda;R) \to H_n(C_\bullet;R)\}_{\lambda\in\Lambda}$. Ahora falta probar que esta familia cumple la propiedad universal de la suma directa:

Sea M un R-módulo equipado con una familia de morfismos $\{f_\lambda : H_n(C^\lambda_\bullet; R) \to M\}_{\lambda\in\Lambda}$ Para cada $\lambda \in \Lambda$ defino el morfismo:

$$\begin{tikzcd} H_n(C^\lambda_\bullet) \arrow[rr, "f_\lambda"] \arrow[dr, "H_n(\imath^\lambda)"'] & & M \\ & H_n(C_\bullet; R) \arrow[ur, dashed, "\Phi"'] & \end{tikzcd} \tag{2}$$

de la siguiente manera: si $[x] \in H_n(C_\bullet; R)$ entonces

$$x = \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda \in ker(\oplus_\lambda \partial^\lambda_n) = \oplus \ker(\partial^\lambda_n) \subseteq \oplus_\lambda C^\lambda_n$$

donde las $x_\lambda \in \ker(\partial^\lambda_n) \subseteq C^\lambda_n$ y $x_\lambda \neq 0$ para solamente una cantidad finita de índices $\lambda \in \Lambda$. Por lo tanto $\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda[x_\lambda] \in M$ porque la suma es finita y porque $[x_\lambda] \in H_n(C^\lambda_\bullet; R)$. De esta manera podemos definir:

$$\Phi[x] = \Phi\left[\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda\right] := \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda[x_\lambda].$$

Claramente hace conmutar el diagrama (2) porque si $[x] \in H_n(C^\lambda_\bullet; R)$ entonces $x \in \ker(\partial^\lambda_n \subseteq C^\lambda_n)$ y así $\imath^\lambda_n(x) \in \oplus C^\lambda_n$ es la suma $\sum_{\mu\in\Lambda} x_\mu$ donde $x_\mu = 0$ para toda $\mu \neq \lambda$ y donde $x_\lambda = x$. Esto quiere decir que $\sum_{\mu\in\Lambda} f_\mu[x_\mu] = f_\lambda[x_\lambda] = f_\lambda[x]$ y así

$$\Phi\big[H_n(\imath^\lambda)[x]\big] = \Phi\left[\sum_{\mu\in\Lambda} x_\mu\right] = f_\lambda[x]$$

También es claro que es un morfismo de R-módulos porque está definido como la suma de morfismos de R-módulos:

$$\begin{aligned}\Phi[x] + \Phi[y] = \Phi\left[\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda\right] + \Phi\left[\sum_{\lambda\in\Lambda} y_\lambda\right] &= \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda[x_\lambda] + \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda[y_\lambda] = \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda[x_\lambda + y_\lambda] = \Phi\left[\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda + y\lambda\right] \\ &= \Phi\big([x] + [y]\big),\end{aligned}$$

porque $x_\lambda, y_\lambda, x_\lambda + y_\lambda \in \ker(\partial^\lambda_n)$ y f_λ es un morfismo de R-módulos. También:

$$\Phi(r[x]) = \Phi[rx] = \Phi\left[\sum_{\lambda\in\Lambda} rx_\lambda\right] = \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda[rx_\lambda] = \sum_{\lambda\in\Lambda} rf_\lambda[x_\lambda] = r\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda[x_\lambda] = r\Phi[x].$$

Lo único que hace falta probar es que Φ está bien definida. Sean $[x] = [x'] \in H_n(C_\bullet; R)$, es decir $x, x' \in \ker(\oplus_\lambda \partial^\lambda_n) = \oplus \ker(\partial^\lambda_n)$ y $x - x' \in$Im$(\oplus_\lambda \partial^\lambda_{n+1} = \oplus_\lambda$Im$\partial^\lambda_{n+1}$. Por lo tanto

$$x - x' = \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda - \sum_{\lambda\in\Lambda} x'_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda}(x_\lambda - x'_\lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \partial^\lambda_{n+1}(y_\lambda)$$

para algunas $y_\lambda \in C^\lambda_{n+1}$. Por lo tanto, para toda $\lambda \in \Lambda$, $x_\lambda - x'_\lambda = \partial^\lambda_{n+1}(y_\lambda)$ porque las representaciones en las sumas directas son únicas. En homología esto significa que $[x_\lambda] = [x'_\lambda]$ en $H_n(C^\lambda_\bullet; R)$ y así $f_\lambda[x_\lambda] = f_\lambda[x'_\lambda]$ para toda λ. Por lo tanto:

$$\Phi[x] = \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda[x_\lambda] = \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda[x'_\lambda] = \Phi[x']$$

y Φ está biend definida. □

Una consecuencia de esta propiedad de la homología es que siempre podemos reducir el cálculo de la homología de un espacio a calcular las homologías de sus componentes conectables por trayectorias:

Proposición 4. Sea X un espacio y $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ la familia de sus componentes conectables por trayectorias. Entonces la familia de inclusiones $\imath^\lambda : X_\lambda \to X$ inducen un isomorfismo:

$$H_n(X;R) \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H_n(X_\lambda;R).$$

Proof. Sabemos que para toda $\lambda \in \Lambda$ la inclusión $\imath^\lambda : X_\lambda \to X$ induce un morfismo de complejos de cadena $\imath^\lambda_\# : S_\bullet(X_\lambda;R) \to S_\bullet(X;R)$. Por lo la propiedad universal de la suma directa, existe un (único) morfismo $\Phi := \oplus \imath^\lambda_\#$ tal que

$$\begin{tikzcd}
S_\bullet(X_\lambda;R) \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\imath^\lambda_\#"'] & \oplus_\lambda S_\bullet(X_\lambda;R) \arrow[d, dashed, "\Phi"] \\
& S_\bullet(X;R)
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo. Como $\oplus_\lambda S_n(X_\lambda;R)$ es una suma directa de R-módulos libres, cada uno con base $\mathcal{S}_n(X_\lambda)$, entonces él mismo es un R-módulo libre con base $\sqcup_\lambda \mathcal{S}_n(X_\lambda)$. Por lo tanto

$$S_n(X;R) \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} S_n(X_\lambda;R) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

si hay una biyección $\sqcup_\lambda \mathcal{S}_n(X_\lambda) \leftrightarrow \mathcal{S}_n(X)$. Resulta que esta biyección está inducida por Φ.

Sabemos que $\imath^\lambda_\#$ se puede restringir a $\imath^\lambda_\# : \mathcal{S}_n(X_\lambda) \to \mathcal{S}_n(X)$, entonces podemos considerar la unión disjunta de estas funciones:

$$f : \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{S}_n(X_\lambda) \longrightarrow \mathcal{S}_n(X) \quad \text{definido por} \quad \sigma \mapsto \imath^\lambda_\#(\sigma) = \imath^\lambda \circ \sigma \quad \text{si } \sigma \in \mathcal{S}_n(X_\lambda).$$

1. (f es inyectiva) Sean $\sigma, \tau \in \sqcup_\lambda \mathcal{S}_n(X_\lambda)$. Si ambos están en la misma componente, ie. $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n(X_\lambda)$ entonces
$$f(\sigma) = f(\tau) \quad \Longrightarrow \quad \imath^\lambda \circ \sigma = \imath^\lambda \circ \tau \quad \Longrightarrow \quad \sigma = \tau$$
porque $\imath^\lambda$ es cancelable por la izquierda.

   Ahora, supongamos queσ y τ están en componentes distintas y $(\imath^\lambda \circ \sigma) = (\imath^\mu \circ \tau)$. Como $\mathrm{Im}(\imath^\lambda \circ \sigma) \subseteq X_\lambda$ y $\mathrm{Im}(\imath^\mu \circ \tau) \subseteq X_\mu$ tenemos que
$$\mathrm{Im}(\imath^\lambda \circ \sigma) \subseteq X_\lambda \cap X_\mu = \emptyset!$$
lo cual es una contradicción. Por lo tanto sólo puede suceder el primer caso donde ya probamos que se cumple la inyectividad.

2. (f es sobreyectiva) Sea $\sigma \in \mathcal{S}_n(X)$. Como σ es continua y Δ^n es conectable por trayectorias, entonces $\sigma[\Delta^n]$ =Im(σ) es conectable por trayectorias. Por lo tanto existe una $\lambda \in \Lambda$ tal que $\mathrm{Im}(\sigma) \subseteq X_\lambda$ y σ se factoriza a través de la inclusión $\imath^\lambda$, ie. $\sigma = \imath^\lambda \circ \sigma'$donde σ' es la corestricción de σ al contradominio X_λ. Así $f(\sigma') = \imath^\lambda \circ \sigma' = \sigma$ y f es sobre.

De esto concluimos que f es biyectiva y verificamos la fórmula (3).

Tomando homología y aplicando el ejercicio 3 concluimos que:

$$H_n((X;R) \cong H_n\left(\oplus_\lambda S_n(X_\lambda;R)\right) \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H_n(S_\bullet(X_\lambda;R)) \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H_n(X_\lambda;R).$$

$\square$

Con este resultado y la proposición 3 podemos calcular la 0-homología de cualquier espacio:

Proposición 5. Sea X un espacio y $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ la familia de sus componentes conectables por trayectorias. Entonces:

$$H_0(X;R) \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H_0(X_\lambda;R) \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R.$$

En palabras esto quiere decir que H_0 cuenta las componentes de X.

0.1.2 Homología singular relativa

Como con los grupos fundamentales, se puede definir una homología relativa. Hay dos maneras de hacerlo.

Si $A \subseteq X$ es un subespacio, entonces la inclusión $\imath : A \to X$ induce un morfismo $\imath_\# : S_\bullet(A;R) \to S_\bullet(X;R)$ y así podemos pensar que $S_\bullet(A;R)$ es un subcomplejo de $S_\bullet(X;R)$. Más precisamente, para cada n, $S_n(A;R)$ es un submódulo de $S_n(X;R)$, entonces podemos tomar cocientes para obtener:

$$\begin{tikzcd}
S_n(A;R) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\imath_\#"'] & S_{n-1}(A;R) \arrow[d, "\imath_\#"] \\
S_n(X;R) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, two heads] & S_{n-1}(X;R) \arrow[d, two heads] \\
S_n(X;R)/S_n(A;R) \arrow[r, "\bar{\partial}_n"] & S_{n-1}(X;R)/S_{n-1}(A;R)
\end{tikzcd}$$

donde $\bar{\partial}_n$ es el morfismo inducido por ∂_n. Esto nos lleva a definir:

Definición 6. Para cada subespacio $A \subseteq X$, define el complejo $S_\bullet(X,A;R)$ con:

$$S_n(X,A;R) := \frac{S_n(X;R)}{S_n(A;R)} \quad \text{y} \quad \bar{\partial}_n : S_n(X,A;R) \longrightarrow S_{n-1}(X,A;R).$$

La *homología de X relativa a A* se define de la misma manera:

$$H_n(X,A;R) := H_n(S_\bullet(X,A;R)) \overset{\text{def}}{=} \frac{\ker(\bar{\partial}_n)}{\operatorname{Im}(\bar{\partial}_{n+1})}.$$

Otra manera de definir la homología relativa es de manera análoga al grupo fundamental relativo:

Definición 7. Sea $A \subseteq X$ y escribe:

$$\begin{aligned}
Z_n(X,A;R) &= \{\sigma \in S_n(X;R) \mid \partial_n(\sigma) \in S_{n-1}(A;R)\} \\
B_n(X,A;R) &= \{\sigma \in S_n(X;R) \mid \sigma = \partial_{n+1}(\tau) + \imath_\#(\delta), \text{ donde } \tau \in S_{n+1}(X;R),\ \delta \in S_n(A;R)\}
\end{aligned}$$

Entonces la *homología de X relativa a A* se define como el cociente

$$H_n(X,A;R) := \frac{Z_n(X,A;R)}{B_n(X,A;R)}$$

Observa que si $\sigma = \partial_{n+1}(\tau) + \imath_\#(\delta) \in B_n(X,A;R)$ entonces

$$\partial_n(\sigma) = \cancelto{0}{\partial_n(\partial_{n+1}(\tau))} + \partial_n(\imath_\#(\delta)) \in S_{n-1}(A;R)$$

y por lo tanto $\sigma \in Z_n(X,A;R)$. Esto significa que el cociente $Z_n(X,A;R)/B_n(X,A;R)$ está bien definido.

Ejercicio 4. Ambas definiciones de la homología relativa son equivalentes.

Proof. Observa que $Z_n(X,A;R)$ es un submódulo de $S_n(X,R)$ porque si $\sigma, \tau \in Z_n(X,A;R)$ entonces

$$\begin{aligned}
\partial_n(\sigma - \tau) = \partial_n(\sigma) - \partial_n(\tau) \in S_{n-1}(A;R) \quad &\Longrightarrow \quad \sigma - \tau \in Z_n(X,A;R) \\
\partial_n(r\sigma) = r\partial_n(\sigma) \in S_{n-1}(A;R) \quad \forall r \in R \quad &\Longrightarrow \quad r\sigma \in Z_n(X,A;R).
\end{aligned}$$

Ahora defino $\Phi : Z_n(X,A;R) \to S_n(X;R)/S_n(A;R)$ como la restricción de la proyección $S_n(X;R) \twoheadrightarrow S_n(X;R)/S_n(A;R)$. Claramente es un morfismo de R-módulos.

Primero pruebo que Φ es sobre. Sea $[\sigma] \in S_n(X;R)/S_n(A;R)$ y tomo la clase lateral $\Sigma := \sigma + S_n(A;R) \subseteq S_n(X;R)$. Todo elemtento de $\sigma' \in \Sigma$ es de la forma $\sigma' = \sigma + \tau$ donde $\tau \in S_n(A;R)$. Entonces

$$\partial_n(\sigma') = \partial_n(\sigma + \tau) = \partial_n(\sigma) + \partial_n(\tau) \quad \Longrightarrow \quad \partial_n(\sigma' - \sigma) \in S_n(A;R).$$

Ahora observa que $[\sigma] = [\sigma' - \sigma]$ porque $\square$

Como en el caso de **Top**, los morfismos $f : (X, A) \to (Y, B)$ inducen morfismos en homología: como $f[A] \subseteq B$, entonces $f_\#[S_\bullet(A; R)] \subseteq S_\bullet(B; R)$ y así f pasa al cociente, ie. tenemos

$$\bar{f}_\# : \frac{S_\bullet(X; R)}{S_\bullet(A; R)} \longrightarrow \frac{S_\bullet(Y; R)}{S_\bullet(B; R)}.$$

Esto claramente es un morfismo de complejos de cadena, entonces $\bar{f}_\#$ induce un morfismo $H_n(\bar{f}_\#)$ en homologías. Podemos concluir lo mismo ahora usando la definición 7:

Sea $\sigma \in Z_n(X, A; R)$, ie. $\partial_n(\sigma) \in S_{n-1}(A'R)$. Entonces $f_\#(\sigma) \in S_n(Y; R)$ y

$$\partial_n(f_\#(\sigma)) = f_\#(\partial_n(\sigma)) \in S_{n-1}(B; R) \quad \Longrightarrow \quad f_\#(\sigma) \in Z_n(Y, B; R).$$

En particular si $\sigma \in B_n(X, A; R)$ entonces $\sigma = \partial_N(\tau) + \delta$ para alguna $\delta \in S_n(A)$ y alguna $\tau \in S_{n+1}(X)$. De esta manera:

$$f_\#(\sigma) = f_\#(\partial_{n+1}(\tau)) + f_\#(\delta) = \partial_{n+1}(f_\#(\tau)) + f_\#(\delta) \in B_n(Y, B; R).$$

Por lo tanto $f_\#[B_n(X, A; R)] \subseteq B_n(Y, B; R)$ y pasa al cociente:

$$\bar{f}_\# : \frac{Z_n(X, A; R)}{B_n(X, A; R)} \longrightarrow \frac{Z_n(Y, B; R)}{B_n(Y, B; R)}.$$

La homología relativa también abre sumas directas:

Proposición 6. Sean $A \subseteq X$ y $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ la familia de componentes (conectables por trayectorias) de X; escribo $A_\lambda := X_\lambda \cap A$. La familia de inclusiones $\{\imath_\lambda : (X_\lambda, A_\lambda) \to (X, A)\}_{\lambda\in\Lambda}$ inducen un isomorfismo

$$H_n(X, A; R) \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H_n(X_\lambda, A_\lambda; R).$$

Proof. Las inclusiones $\imath^\lambda$ inducen morfismos $\imath^\lambda_\#$ que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} X_\lambda & \xrightarrow{\imath_\lambda} & X & & S_n(X_\lambda; R) & \xrightarrow{\imath^\lambda_\#} & S_n(X; R) \\ \uparrow & & \uparrow & \rightsquigarrow & \uparrow & & \uparrow \\ A_\lambda & \hookrightarrow & A & & S_n(A_\lambda; R) & \hookrightarrow & S_n(A; R) \end{array}$$

Como el segundo diagrama es conmutativo, $\imath^\lambda_\#$ pasa al cociente, ie.

$$j^\lambda := \overline{\imath^\lambda_\#} : \frac{S_n(X_\lambda; R)}{S_n(A_\lambda; R)} \longrightarrow \frac{S_n(X; R)}{S_n(A; R)}.$$

Por lo tanto tenemos una familia de morfismos

$$\left\{ j^\lambda : S_n(X_\lambda, A_\lambda; R) \longrightarrow S_n(X, A; R) \right\}_{\lambda\in\Lambda}.$$

Por lo propiedad universal de la suma directa, existe un (único) morfismo

$$\Phi := \oplus_\lambda j^\lambda : \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} S_n(X_\lambda, A_\lambda; R) \longrightarrow S_n(X, A; R).$$

Para ver que Φ es un isomorfismo basta verificar que induce una biyección entre las bases de $\oplus S_n(X_\lambda, A_\lambda; R)$ y $S_n(X, A; R)$. Esto se sigue inmediatamente del siguiente ejercicio:

Ejercicio 5. La función

$$\Phi : \bigsqcup_{\lambda\in\lambda} \{\sigma \in \mathcal{S}_n(X_\lambda) \mid \mathrm{Im}(\sigma) \not\subseteq A_\lambda\} \longrightarrow \{\sigma \in \mathcal{S}_n(X) \mid \mathrm{Im}(\sigma) \not\subseteq A\} \quad \text{definido por} \quad \sigma \mapsto \imath^\lambda \circ \tau$$

es una biyección.

Primero escribo:

$$M_\lambda := \{\sigma \in \mathcal{S}_n(X_\lambda) \mid \mathrm{Im}(\sigma) \not\subseteq A_\lambda\} \quad \text{y} \quad N := \{\sigma \in \mathcal{S}_n(X) \mid \mathrm{Im}(\sigma) \not\subseteq A\},$$

entonces $\Phi : \sqcup M_\lambda \to N$. Primero veo que está bien definida. Sea $\sigma \in \sqcup M_\lambda$, es decir $\sigma \in M_\lambda$ para alguna $\lambda \in \Lambda$. Entonces $\mathrm{Im}(\sigma) \not\subseteq A_\lambda$, es decir existe un elemento $x \in \mathrm{Im}(\sigma)$ tal que $x \notin A_\lambda = X_\lambda \cap A$, ie. $x \in (X_\lambda)^c \cup A^c$. Hay dos casos:

Si $x \notin A$ entonces $\mathrm{Im}(\sigma) \not\subseteq A$ y bajo la inclusión $\imath^\lambda : X_\lambda \to X$ tenemos que $\mathrm{Im}(\Phi(\sigma)) = \mathrm{Im}(\imath^\lambda \circ \sigma) = \mathrm{Im}(\sigma) \not\subseteq A$ lo cual implica que $\Phi(\sigma) \in N$.

El segundo caso: $x \not\in X_\lambda$ no puede suceder, porque $x \in \mathrm{Im}(\sigma)$ y $\sigma : \Delta^n \to X_\lambda$ tiene como contradominio a X_λ, ie. $\mathrm{Im}(\sigma) \subseteq X_\lambda$. Por lo tanto nada más puede suceder el primer caso donde ya probamos que Φ está bien definida.

La prueba de que Φ es una biyección es exactamente análogo a la prueba de la proposición 4:

1. (Φ es inyectiva) Sean $\sigma, \tau \in \sqcup_\lambda M_\lambda$. Si ambos están en el mismo uniendo, ie. $\sigma, \tau \in M_\lambda$ para alguna $\lambda \in \Lambda$, entonces
$$\Phi(\sigma) = \Phi(\tau) \quad \Longrightarrow \quad \imath^\lambda \circ \sigma = \imath^\lambda \circ \tau \quad \Longrightarrow \quad \sigma = \tau$$
porque $\imath^\lambda$ es cancelable por la izquierda (por ser inyectivo).

   Ahora, supongamos queσ y τ están en uniendos distintos y $(\imath^\lambda \circ \sigma) = (\imath^\mu \circ \tau)$. Como $\mathrm{Im}(\imath^\lambda \circ \sigma) \subseteq X_\lambda$ y $\mathrm{Im}(\imath^\mu \circ \tau) \subseteq X_\mu$ tenemos que
$$\mathrm{Im}(\imath^\lambda \circ \sigma) \subseteq X_\lambda \cap X_\mu = \emptyset!$$
lo cual es una contradicción. Por lo tanto sólo puede suceder el primer caso donde ya probamos que se cumple la inyectividad.

2. (Φ es sobreyectiva) Sea $\sigma \in N$. Como σ es continua y Δ^n es conectable por trayectorias, entonces $\sigma[\Delta^n] = \mathrm{Im}(\sigma)$ es conectable por trayectorias. Por lo tanto existe una $\lambda \in \Lambda$ tal que $\mathrm{Im}(\sigma) \subseteq X_\lambda$ y σ se factoriza a través de la inclusión $\imath^\lambda$, ie. $\sigma = \imath^\lambda \circ \sigma'$ donde σ' es la corestricción de σ al contradominio X_λ. Así $\Phi(\sigma') = \imath^\lambda \circ \sigma' = \sigma$ y f es sobre.

□

Como en el caso de la homología usual, podemos calcular la 0-homología relativa:

Proposición 7. Sea X un espacio conectable por trayectorias y $A \subseteq X$ un subespacio <u>no vacío</u>, entonces: $H_0(X, A; R) = 0$.

Proof. Como $\partial_0 = 0$ y $S_{-1}(A; R) = 0$, entonces

$$Z_0(X, A; R) = \{\sigma \in S_0(X; R) \mid \partial_0(\sigma) = 0\} = S_0(X; R).$$

Por otro lado sea $\tau = \sum_{x \in X} r_x x \in S_0(X; R)$ y $a_0 \in A$ un punto arbitrario (aquí estamos usando que $A \neq \emptyset$). Como X es conectable por trayectorias, para toda $x \in X$ existe una trayectoria $\sigma_x : \Delta^1 \to X$ que empieza en a_0 y termina en x, ie. $\sigma_x(e_0) = a_0$ y $\sigma_x(e_1) = x$. Ahora calculo la frontera de la 1-cadena $\sigma := \sum_{x \in X} r_x \sigma_x$.

$$\partial_1 \left(\sum r_x \sigma_x \right) = \sum r_x \partial_1(\sigma_x) = \sum r_x (x - a_0) = \sum r_x x - \sum r_x a_0 = \tau - r a_0$$

$$\therefore \tau = \partial_1 \left(\sum r_x \sigma_x \right) + r a_0 \in B_0(X, A; R)$$

porque $r \in R$ y $a_0 \in A$ implican que $r a_0 \in S_0(A; R)$.

Por lo tanto $S_0(X; R) \subseteq B_0(X, A; R)$. Esto junto con $B_0(X, A; R) \subseteq Z_0(X, A; R) = S_0(X; R)$ podemos concluir que $B_0(X, A; R) = Z_0(X, A; R)$ y así:

$$H_0(X, A; R) = \frac{Z_0(X, A; R)}{B_0(X, A; R)} = 0.$$

□

Nota. Observa que una función continua $f : X \to Y$ es equivalente al morfismo basado $f : (X, \emptyset) \to (Y, \emptyset)$, entonces cuando $A = \emptyset$ tenemos:

$$H_n(X, \emptyset; R) = H_n(X; R),$$

en particular, la homología relativa generaliza la homología usual. En lenguaje más técnico, el funtor $X \mapsto (X, \emptyset)$ es una inclusión.

Si juntamos las proposiciones podemos calcular $H_0(X, A; R)$. Solamente dependen de las componentes de X que intersectan a A:

Corolario 3. *Sea $A \subseteq X$ y $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ las componentes conectables por trayectorias de X. Si Λ' es el conjunto de índices donde A intersecta a X_λ, ie. $\Lambda' := \{\lambda \in \Lambda \mid A_\lambda \neq \emptyset\}$ entonces*

$$H_0(X, A; R) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda'} \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda'}$$

Ahora veremos uno de los teoremas más útiles para calcular homologías. Para el siguiente teorema vamos a fijar un anillo R. Más formalmente, fijamos la categoría Mod_R y trabajamos con complejos sobre esa categoría. Por esto voy a omitir la R de la notación; por ejemplo $H_n(X, A) = H_n(X, A; R)$.

Teorema 4. *Sean $A \subseteq X$, $\imath : A \hookrightarrow X$ la inclusión y $j : (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$ Existen una sucesión exacta larga:*

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{H_n(\imath)} H_n(X) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, A) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{H_{n-1}(\imath)} H_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \tag{4}$$

donde d_n se define como $d_n[\sigma] = [\partial_n(\sigma)]$. A veces se llaman morfismos de conexión.

Proof. Primero observa que el morfismo de conexión está bien definida: tomamos

$$[\sigma] = [\sigma'] \in \frac{Z_n(X, A)}{B_n(X, A)} \implies \sigma \in Z_n(X, A) \text{ y } \partial_n(\sigma) \in S_{n-1}(A).$$

Como $\sigma - \sigma' \in B_n(X, A)$, entonce existen $\tau \in S_{n+1}(X)$ y $\delta \in S_n(A)$ tales que

$$\begin{aligned} \sigma - \sigma' = \partial_{n+1}(\tau) + \delta \quad &\implies \quad \partial_n(\sigma - \sigma') = \cancelto{0}{\partial_n(\partial_{n+1}(\tau))} + \partial_n(\delta) \in \mathrm{Im}\,(\partial_n) \\ \therefore \partial_n(\sigma) - \partial_n(\sigma') \in B_n(X, A) \quad &\implies \quad d_n[\sigma] = [\partial_n(\sigma)] = [\partial_n(\sigma')] = d_n[\sigma'] \end{aligned}$$

y así d_n está bien definida.

Hay que probar exactitud en tres lugares:

1. (Exactitud en $H_n(X, A)$) Sea $[\sigma] \in H_n(X)$. Como $j_\# : S_\bullet(X) \to S_\bullet(X, A)$ es un morfismo de complejos de cadena, entonces

$$d_n\big(H_n(j)[\sigma]\big) = d_n\big[j_\#(\sigma)\big] = [(\partial_n \circ j_\#)(\sigma)] = [(j_\# \circ \partial_n(\sigma))] = 0$$

porque $\sigma \in Z_n(X) = \ker \partial_n$. Por lo tanto $\mathrm{Im}\,(H_n(j_\#)) \subseteq \ker(d_n)$.

Para la otra contención sea $[\sigma] \in \ker(d_n) \subseteq H_n(X, A)$, es decir $d_n[\sigma] = 0$. Por definición, esto significa que $\partial_n(\sigma) \in \mathrm{Im}\,(\partial_n) \subseteq S_{n-1}(A)$. Por lo tanto existe un $\tau \in S_n(A)$ tal que

$$\partial_n(\sigma) = \partial_n(\tau) \implies \partial_n(\sigma - \tau) = 0 \implies \sigma - \tau \in Z_n(X) \implies [\sigma - \tau] \in H_n(X)$$

Como $\tau \in S_n(A) \subseteq B_n(X, A)$, entonces $[\sigma] = [\sigma - \tau] = [j_\#(\sigma - \tau)] = H_n(j)(\sigma - \tau)$ y así $[\sigma] \in \mathrm{Im}\,(H_n(j))$.

2. (Exactitud en $H_n(X)$) Sea $[\sigma] \in H_n(A)$, entonces

$$(H_n(j) \circ H_n(\imath))[\sigma] = [(j_\# \circ \imath_\#)(\sigma)] = 0$$

ya que $\sigma \in S_n(A) \subseteq B_n(X, A)$. Por lo tanto $\mathrm{Im}\,((H_n(i))) \subseteq \ker(H_n(j))$. Para la otra contención, sea $[\sigma] \in H_n(X)$ tal que $H_n(j)[\sigma] = [j_\#(\sigma)] = 0$, es decir $j_\#(\sigma) \in B_n(X, A)$. Por lo tanto existe un $\delta \in S_n(A)$ y un $\tau \in S_{n+1}(X)$ tal que $j_\#(\sigma) = \partial_{n+1}(\tau) + \imath_\#(\delta)$. Despejamos:

$$\sigma - \imath_\#(\delta) = \partial_{n+1}(\tau) \implies \sigma - \imath_\#(\delta) \in \mathrm{Im}\,(\partial_{n+1}) = B_n(X) \implies [\sigma] = [\imath_\#(\delta)] = H_n(\imath)(\delta).$$

Por lo tanto $[\sigma] \in \mathrm{Im}\,(H_n(\imath))$ y concluimos la otra contención.

3. (Exactitud en $H_{n-1}(A)$)

   Ejercicio 6. La sucesión larga de homologías (4) es exacta en $H_{n-1}(A)$.

   Proof. Para la primera contención, sea $[\sigma] \in H_n(X, A)$, en particular $\partial_n(\sigma) \in S_{n-1}(A)$. Entonces

   $$H_{n-1}(\imath)\big(d_n[\sigma]\big) = H_{n-1}(\imath)[\partial_n(\sigma)] = [\imath_{\#}(\partial_n(\sigma))] = [(\imath \circ \partial_n)(\sigma))] = [\partial_n(\sigma)] = 0.$$

   Por lo tanto $\operatorname{Im}(d_n) \subseteq \ker(H_{n-1}(\imath))$.
   Para la otra contención, considera $[\sigma] \in \ker(H_{n-1}(\imath))$, ie. $H_{n-1}(\imath)[\sigma] = [\imath_{\#}(\sigma)] = [\imath \circ \sigma] = [0]$. Esto implica que $\imath \circ \sigma \in B_{n-1}(X)$, es decir que existe un $\tau \in S_n(X)$ tal que $\partial_n(\tau) = \imath_{\#}(\sigma)$. Como $j_{\#}$ es un morfismo de complejos de cadena, entonces:

   $$\partial_n(j_{\#}(\tau)) = j_{\#}(\partial_n(\tau)) = j_{\#}(i_{\#}(\sigma)) = \bar{0} \in \frac{S_n(X)}{S_n(A)}$$

   gracias a la exactitud de la sucesión exacta corta

   $$0 \longrightarrow S_{n-1}(A) \xrightarrow{\imath_{\#}} S_{n-1}(X) \xrightarrow{j_{\#}} \frac{S_{n-1}(X)}{S_{n-1}(A)} = S_{n-1}(X, A) \longrightarrow 0$$

   y a que $\sigma \in Z_{n-1}(A) \subseteq S_{n-1}(A)$. Por lo tanto $j_{\#}(\tau) \in Z_n(X, A)$ y así:

   $$d_n[j_{\#}\tau] = [\partial_n(j^{\#}(\tau))] = [j^{\#}()]$$

   $\square$

$\square$