0.1 Invariancia homotópica de la homología singular

Primero fijo un anillo R para no tener que escribirlo repetidamente. El propósito de esta sección es probar que si dos espacios son homotópicos, entonces sus homologías coinciden.

Teorema 1. $X \simeq Y \implies H_n(X) \cong H_n(Y)$

Claramente esto se sigue de que el funtor $X \to H_n(X)$ se factoriza a través de clases de homotopía, es decir:

Teorema 2. *Si $f : X \to Y$ y $g : X \to Y$ son funciones continuas homotópicas, entonces inducen el mismo morfismo en homología, es decir:*

$$f \simeq g \implies H_n(f) = H_n(g) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Sea $F : X \times I \to Y$ la homotopía entre f y g. Entonces $F_0 = f$ y $F_1 = g$, o equivalentemente:

$$f = F \circ \lambda^0 \ , \ f = F \circ \lambda^1 \quad \text{donde} \quad \lambda^i : X \hookrightarrow X \times \{i\} \subset X \times I.$$

Observa que $H_n(f) = H_n(F \circ \lambda^0) = H_n(F) \circ H_n(\lambda^0)$, entonces:

$$H_n(\lambda^0) = H_n(\lambda^1) \implies H_n(F) \circ H_n(\lambda^0) = H_n(F) \circ H_n(\lambda^1) \implies H_n(f) = H_n(g).$$

Por lo tanto probar el teorema se reduce a probar que $H_n(\lambda^0) = H_n(\lambda^1)$. Sabemos que $H_n(\lambda^1) = H_n(\lambda^0)$ si para toda $[\sigma] \in H_n(X)$ se tiene que $H_n(\lambda^0)[\sigma] - H_n(\lambda^1)[\sigma] = 0 \in H_n(X \times I)$ o equivalentemente

$$0 = [\lambda^0_\#(\sigma)] - [\lambda^1_\#(\sigma)] = [\lambda^0_\#(\sigma) - \lambda^1_\#(\sigma)] \iff (\lambda^0_\# - \lambda^1_\#)(\sigma) \in B_n(X \times I) \quad \forall \sigma \in S_n(X).$$

La forma de probar esto es encontrar una familia de morfismos $\{T_n^X : S_n(X) \to S_{n+1}(X \times I)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ que cumplen

$$\lambda^1_\# - \lambda^0_\# = \partial'_{n+1} \circ T_n + T_{n-1} \circ \partial_n \quad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

donde

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & S_{n+1}(X) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "\lambda^i_{n+1}"'] & S_n(X) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\lambda^i_n"'] \arrow[dl, dashed, "T_n^X"'] & S_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda^i_{n-1}"] \arrow[dl, dashed, "T_{n-1}^X"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & S_{n+1}(X \times I) \arrow[r, "\partial'_{n+1}"'] & S_n(X \times I) \arrow[r, "\partial'_n"'] & S_{n-1}(X \times I) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

En general esto se llama una homotopía entre complejos:

Definición 1. Sean $\mathcal{C}_\bullet = (C_n, \partial_n)$ y $\mathcal{D}_\bullet = (D_n, \partial_n)$ dos complejos de R-módulos y sean $f, g : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ morfismos de complejos. Una *homotopía de complejos de cadena* es una familia de morfismo de R-módulos $\mathfrak{T} = \{T_n : C_n \to D_{n+1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ que cumplen

$$f_n - g_n = \partial'_{n+1} \circ T_n + T_{n-1} \circ \partial_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Si dos morfismos son homotópicos, lo denotamos por $f \simeq g$, y si existe una homotopía entre dos complejos de cadena, decimos que son homotópicos y lo denotamos $\mathcal{C}_\bullet \simeq \mathcal{D}_\bullet$.

Nota. Si $f \simeq g$ entonces $H_n(f) = H_n(g)$ porque si $[z] \in H_n(\mathcal{C}_\bullet)$ entonces

$$(H_n(f) - H_n(g))[z] = [(f_n - g_n)(z)] = \big[(\partial'_{n+1} \circ T_n)(z) + (T_{n-1} \circ \partial_n)(z)\big] = 0.$$

Por lo tanto dos morfismos de complejos de cadena que son homotópicos inducen el mismo morfismo en homologías.

Para probar (2), hay que probar que $\lambda^0_\# \simeq \lambda^1_\#$, es decir hay que encontrar una familia $\mathfrak{T} = \{T_n^X : S_n(X) \to S_{n+1}(X \times I)\}$ que cumpla (1).

Para definir las T_n^X, en general si $f : X \to Y$ es continua, entonces queremos que

$$\begin{array}{ccc} S_n(X) & \xrightarrow{T_n^X} & S_{n+1}(X \times I) \\ {\scriptstyle f_\#}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (f\times \mathrm{Id})_\#} \\ S_n(X) & \xrightarrow{T_n^Y} & S_{n+1}(Y \times I) \end{array}$$

sea conmutativo. En particular para $\sigma : \Delta^n \to X$, ie. $\sigma \in S_n(X)$, queremos que:

$$(\sigma \times \mathrm{Id}_I)_\# \circ T_n^{\Delta^n} = T_n^X \circ \sigma_\#,$$

en particular, como $\sigma_\#(\mathrm{Id}_\Delta) = \sigma \circ \mathrm{Id} = \sigma$, tenemos que

$$T_n^X(\sigma) = T_n^X(\sigma_\#(\mathrm{Id}_{\Delta^n})) = (\sigma \times \mathrm{Id}_I)_\#\big(T_n^{\Delta^n}(\mathrm{Id}_{\Delta^n})\big). \tag{2}$$

Por lo tanto definir T_n^X se reduce a definir $T_n^{\Delta^n}(\mathrm{Id}_{\Delta^n}) \in S_{n+1}(\Delta^n \times I)$.

Para esto hay que hacer lo mismo que en (1): escribimos $\delta^i : \Delta^n \to \Delta^n \times I$ como la inclusión $\delta^i(x) = (x, i)$ y queremos una familia $\mathfrak{T}^\Delta : \{T_m^{\Delta^n} : S_m(\Delta^n) \to S_{m+1}(\Delta^n \times I)\}$ de morfismo de R-módulos que sea una homotopía $\delta_\#^0 \simeq \delta_\#^1$, en particular:

$$\delta_\#^1(\mathrm{Id}_{\Delta^n}) - \delta_\#^0(\mathrm{Id}_{\Delta^n}) = (\partial'_{n+1} \circ T_n^{\Delta^n})(\mathrm{Id}_{\Delta^n}) + (T_{n-1}^{\Delta^n} \circ \partial_n)(\mathrm{Id}_{\Delta^n}) \tag{3}$$

donde $m = n$ (ya que solamente necesitamos este caso). Primero evaluamos el segundo sumando.

Observa que los morfismos cara $F_n^i : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ satisfacen el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} S_{n-1}(\Delta^{n-1}) & \xrightarrow{T_{n-1}^{\Delta^{n-1}}} & S_n(\Delta^{n-1} \times I) \\ {\scriptstyle f_\#}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (F_n^i\times \mathrm{Id}_I)_\#} \\ S_{n-1}(\Delta^n) & \xrightarrow{T_{n-1}^{\Delta^n}} & S_n(\Delta^n \times I) \end{array}$$

Este diagrama nos permite calcular:

$$\begin{aligned} (T_{n-1}^{\Delta^n} \circ \partial_n)(\mathrm{Id}_{\Delta^n}) &= T_{n-1}^{\Delta^n}\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i(\mathrm{Id}_{\Delta^n} \circ F_n^i)\right) = T_{n-1}^{\Delta^n}\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i F_n^i\right) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (T_{n-1}^{\Delta^n} \circ F_n^i) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i (F_n^i \times \mathrm{Id})_\#\big(T_{n-1}^{\Delta^{n-1}}(\mathrm{Id}_{\Delta^{n-1}})\big) \end{aligned}$$

Sustituimos en (3) para obtener:

$$\delta_\#^1(\mathrm{Id}_{\Delta^n}) - \delta_\#^0(\mathrm{Id}_{\Delta^n}) = \partial'_{n+1}\big(T_n^{\Delta^n}(\mathrm{Id}_{\Delta^n})\big) + \sum_{i=0}^n (-1)^i (F_n^i \times \mathrm{Id})_\#\big(T_{n-1}^{\Delta^{n-1}}(\mathrm{Id}_{\Delta^{n-1}})\big). \tag{4}$$

Observa que el lado derecho depende de solamente $T_n^{\Delta^n}(\mathrm{Id}_{\Delta^n})$. La idea es definirlo para forzar la igualdad anterior. Para esto, necesitamos una construcción nueva: agregar un vértice a un simplejo singular.

Definición 2. Sea $\sigma : \Delta^n \to \mathbb{R}^N$ un n-simplejo singular con $\sigma = \langle v_0, \ldots, v_n \rangle$. Para $v \in \mathbb{R}^N$ definimos:

$$v \cdot \sigma := \langle v, v_0, \ldots, v_n \rangle \quad \text{donde} \quad (v \cdot \sigma)(e_i) = \begin{cases} v & \text{si } \; i = 0 \\ v_{i-1} & \text{si } \; i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

En general si $\tau = \sum_\sigma r_\sigma \sigma$ es una n-cadena afin, entonces definimos

$$v \cdot \tau := \sum_\sigma r_\sigma (v \cdot \sigma).$$

Ejemplo 1.

Esta construcción cumple algunas propiedades importantes

Lema 3. *Las caras de $v \cdot \sigma$ son*

$$(v\cdot\sigma)^{(i)} = \begin{cases} \sigma & si\ \ i=0 \\ v\cdot\sigma^{(i)} & si\ \ i=1,\dots,n \end{cases}$$

Proof. Para $i=0$, tenemos:

$$(v\cdot\sigma)^{(0)}(e_j) = (v\cdot\sigma)(F^0_{n+1}(e_j)) = (v\cdot\sigma)(e_{j+1}) = v_j = \sigma(e_j),$$

por lo tanto $(v\cdot\sigma)^{(0)} = \sigma$.

Para $i>0$ tenemos

$$\begin{aligned}(v\cdot\sigma)^{(i)}(e_j) = (v\cdot\sigma)(F^i_{n+1}(e_j)) = &\begin{Bmatrix} (v\cdot\sigma)(e_j) & \text{si}\ \ j<i \\ (v\cdot\sigma)(e_{j+1}) & \text{si}\ \ j\geq i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v & \text{si}\ \ j=0 \\ v_{j-1} & \text{si}\ \ 0<j<i \\ v_j & \text{si}\ \ j\geq i \end{Bmatrix} \\ &= (v\cdot\sigma^{(i)})(e_j),\end{aligned}$$

por lo tanto $(v\cdot\sigma)^{(i)} = v\cdot\sigma^{(i)}$ □

Lema 4. *Sea $\tau = \sum_\sigma r_\sigma \sigma$ una n-cadena afin, entonces:*

$$\partial_{n+1}(v\cdot\tau) = \tau - v\cdot\partial_n(\tau),$$

en particular, si τ es un ciclo entonces $\partial_{n+1}(v\cdot\tau) = \tau$.

Proof. Simplemente hay que calcular:

$$\partial_{n+1}(v\cdot\tau) = \partial_{n+1}\left(\sum_\sigma r_\sigma(v\cdot\sigma)\right) = \sum_\sigma r_\sigma \partial_{n+1}(v\cdot\tau) = \sum_\sigma r_\sigma \left(\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i(v\cdot\sigma)^{(i)}\right).$$

Por el lema 3, la suma adentro del paréntesis es

$$\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i(v\cdot\sigma)^{(i)} = \sigma - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i v\cdot\sigma^{(i)} = \sigma - v\cdot\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma^{(i)}\right) = \sigma - v\cdot\partial_n(\sigma).$$

Si sustituimos en la igualdad anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned}\partial_{n+1}(v\cdot\tau) &= \sum_\sigma r_{sigma}(\sigma - v\cdot\partial_n(\sigma)) = \sum_\sigma r_\sigma\sigma - \sum_\sigma r_\sigma v\cdot\partial_n(\sigma) = \tau - v\cdot\left(\sum r_\sigma\partial_n(\sigma)\right) \\ &= \tau - v\cdot\partial_n(\tau).\end{aligned}$$

□

Con esto definimos bien la familia

$$\mathcal{P}_0 := T_0^{\Delta^0}(Id_{\Delta^0}),\ \ \mathcal{P}_1 := T_1^{\Delta^1}(Id_{\Delta^1}),\ \dots\ ,\mathcal{P}_n := T_n^{\Delta^n}(Id_{\Delta^n}),\ \dots$$

de simplejos para poder definir T_n^X como en (2).

Definición 3. Sea $\mathfrak{b}_n := (\mathfrak{b}(\Delta^n), \frac{1}{2}) \in \Delta^n \times I$, donde $\mathfrak{b}(\Delta^n)$ es el baricentro de Δ^n. Entonces definimos inductivamente:

$$\mathcal{P}_0 := \mathfrak{b}_0 \cdot \left(\delta^1_\#(\mathrm{Id}_{\Delta^0}) - \delta^0_\#(\mathrm{Id}_{\Delta^0})\right)$$

$$\mathcal{P}_n := \mathfrak{b}_n \cdot \underbrace{\left(\delta^1_\#(\mathrm{Id}_{\Delta^n}) - \delta^0_\#(\mathrm{Id}_{\Delta^n}) - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(F_n^i\times\mathrm{Id}_I)_\#(\mathcal{P}_{n-1})\right)}_{\mathfrak{z}_n}.$$

Ilustro los primeros simplejos:

Observa que $\mathcal{P}_n$ se obtiene de agregarle un vértice $\mathfrak{b}_n$, que está adentro de $\mathfrak{z}_n$. Intuitivamente esto produce un $(n+1)$-simplejo cuya frontera es $\mathfrak{z}_n$ porque todas las aristas nuevas que se producen pasan por $\mathfrak{z}_n$ de tal manera que las orientaciones se cancelan. Esto es una propiedad importante que cumple la familia $\{\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \ldots\}$.

Lema 5. *$\partial_1(\mathcal{P}_0) = \delta^1_\#(Id_{\Delta^0}) - \delta^0_\#(Id_{\Delta^0})$ y en general $\partial_{n+1}(\mathcal{P}_n) = \mathfrak{z}_n$ para $n > 0$.*

Proof. La prueba va a ser por inducción y voy a abreviar $\delta^i = \delta^i_\#(\mathrm{Id}_{\Delta^n})$. Para el caso $n = 0$, usamos el lema 4 para calcular:

$$\partial_1(\mathcal{P}_0) = \partial_n\big(\mathfrak{b}_0 \cdot (\delta^1 - \delta^0)\big) = \delta^1 - \delta^0 - \cancelto{0}{\mathfrak{b}_0\partial_0(\delta^1 - \delta^0)} = \delta^1 - \delta^0.$$

En general, si $\mathfrak{z}_n$ es un ciclo para toda n, entonces el lema 4 nos dice que:

$$\partial_{n+1}(\mathcal{P}_n) = \partial_{n+1}(\mathfrak{b}_n \cdot \mathfrak{z}_n) = \mathfrak{z}_n - \cancelto{0}{\mathfrak{b}_0\partial_n(\mathfrak{z}_n)} = \mathfrak{z}_n.$$

Por lo tanto el lema se reduce a probar que $\mathfrak{z}_n$ es un ciclo, ie. $\partial_n(\mathfrak{z}_n) = 0$.

Ahora supongamos que el lema se cumple para $n-1$, es decir $\partial_n(\mathcal{P}_{n-1}) = \mathfrak{z}_{n-1}$. Entonces $\partial_{n-1}(\mathfrak{z}_{n-1}) = \partial_{n-1}(\partial_n(\mathcal{P}_{n-1})) = 0$. Por recursión podemos concluir que $\mathfrak{z}_m$ es un ciclo para toda $m < n$. Con esto podemos calcular:

$$\begin{aligned}\partial_n(\mathfrak{z}_n) &= \partial_n\left(\delta^1_\#(\mathrm{Id}_{\Delta^n}) - \delta^0_\#(\mathrm{Id}_{\Delta^n}) - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(F^i_n \times \mathrm{Id}_I)_\#(\mathcal{P}_{n-1})\right)\\ &= \partial_n(\delta^1 - \delta^0) - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(F^i_n \times \mathrm{Id}_I)_\#(\partial_n(\mathcal{P}_{n-1}))\end{aligned}$$

donde la suma del lado derecho vale:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(F^i_n \times \mathrm{Id}_I)_\#(\mathfrak{z}_{n-1}) &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(F^i_n \times \mathrm{Id}_I)_\#\left(\delta^1 - \delta^0 - \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j(F^j_{n-1} \times \mathrm{Id}_I)_\#(\mathcal{P}_{n-2})\right)\\ &= \left[\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(F^i_n \times \mathrm{Id}_I)_\#(\delta^1 - \delta^0)\right]\\ &\quad + \left[\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{i+j}\big((F^i_n \circ F^j_{n-1}) \times \mathrm{Id}_I\big)_\#(\partial_n(\mathcal{P}_{n-1}))\right]\end{aligned}$$

Como $(F^i_n \times \mathrm{Id}_I)_\# \circ \delta^* = \delta^* \circ f^i_n$, entonces el primer sumando es simplemente $\partial_n(\delta^1 - \delta^0)$. El segundo sumando se anula por el ejercicio **??** y por la prueba del ejercicio **??**. Sustituimos estos resultados en **??** para obtener:

$$\partial_n(\mathfrak{z}_n) = \partial_n(\delta^1 - \delta^0) - \partial_n(\delta^1 - \delta^0) + 0 = 0$$

y así $\mathfrak{z}_n$ es un ciclo. □

Ya estamos en posición para probar el teorema de la invariancia de la homologia singular; simplemente definimos $T^{\Delta^n}_n(\mathrm{Id}_{\Delta^n}) := \mathcal{P}_n$ como en (2).

Proof. (Teorema 2) Recuerda que nada más debemos probar que $\lambda^0_\# \simeq \lambda^1_\#$ como morfismos de complejos de cadenas. La homotopía está dada por la familia

$$T^X_n : S_n(X) \longrightarrow S_{n+1}(X) \quad \text{definida por} \quad \sigma \mapsto (\sigma \times \mathrm{Id}_I)_\#(\mathcal{P}_n),$$

de morfismos de R-módulos. Calculamos:

$$\begin{aligned}
(\partial'_{n+1}T_n^X + T_{n-1}^X\partial_n)(\sigma) &= \partial'_{n+1}\big((\sigma\times \mathrm{Id}_I)_\#(\mathcal{P}_n)\big) + T_n^X\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i\sigma^{(i)}\right)\\
&= (\sigma\times \mathrm{Id}_I)_\#\big(\partial'_{n+1}(\mathcal{P}_n)\big) + \sum_{i=0}^n (-1)^i T_{n-1}^X(\sigma^{(i)})
\end{aligned} \tag{5}$$

Como $\partial'_{n+1}(\mathcal{P}_n) = \mathfrak{z}_n$ por el lema 5 y como

$$T_{n-1}^X(\sigma^{(i)}) = (\sigma^{(i)}\times \mathrm{Id}_I)_\#(\mathcal{P}_{n-1}) = \big((\sigma\circ F_n^i)\times \mathrm{Id}_I\big)_\#(\mathcal{P}_{n-1}) = \big((\sigma\times \mathrm{Id}_I)\circ(F_n^i\times \mathrm{Id}_I)\big)(\mathcal{P}_{n-1}),$$

entonces (5) se reduce a:

$$\begin{aligned}
(\partial'_{n+1}T_n^X + T_{n-1}^X\partial_n)(\sigma) &= (\sigma\times \mathrm{Id}_I)_\#\big(\partial'_{n+1}(\mathcal{P}_n)\big) + \sum_{i=0}^n (-1)^i\big((\sigma\times \mathrm{Id}_I)\circ(F_n^i\times \mathrm{Id}_I)\big)(\mathcal{P}_{n-1})\\
&= (\sigma\times \mathrm{Id}_I)_\#\left(\mathfrak{z}_n + \sum_{i=0}^n (-1)^i (F_n^i\times \mathrm{Id}_I)_\#(\mathcal{P}_{n-1})\right)\\
&= (\sigma\times \mathrm{Id}_I)_\#(\delta^1-\delta^0)
\end{aligned}$$

por definición de $\mathfrak{z}_n$. Por último

$$\big((\sigma\times \mathrm{Id}_I)\circ\delta^*\big)(v) = (\sigma\times \mathrm{Id}_I)(v,*) = (\sigma(v),*) = (\lambda^*\circ\sigma)(v) = \lambda^*_\#(\sigma)$$

Entonces concluimos que:

$$\partial'_{n+1}T_n^X + T_{n-1}^X\partial_n = \lambda^1_\# - \lambda^0_\#$$

y así $\lambda^1_\# \simeq \lambda^0_\#$. Por el argumento que sigue del enunciado del teorema 2 ya terminamos la prueba. □

Ejercicio 1. El teorema de la invariancia de la homología singular también se cumple para la homología relativa, es decir si $f,g:(X,A)\to(Y,B)$ son funciones continuas tales que $f\simeq g$ relativo a A, entonces $H_n(f)=H_n(g)$ para toda $n\in\mathbb{Z}$.

Proof. □