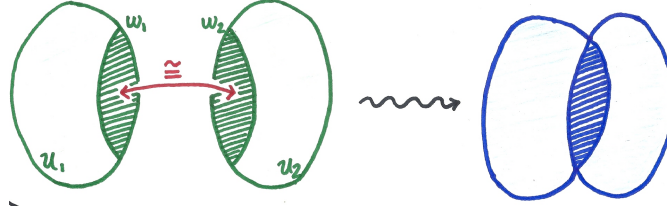


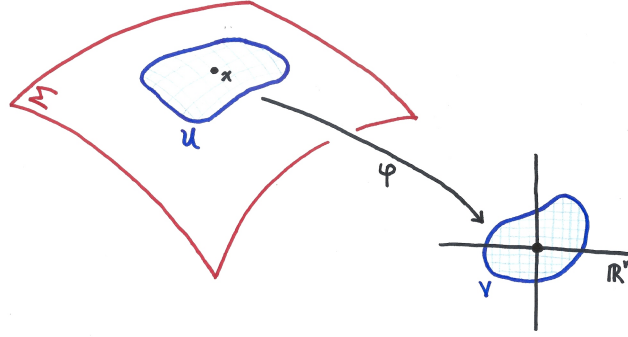
## 0.1 Variedades

En esta sección, desarrollaré la teoría de espacios topológicos que localmente son euclidianos. La idea es pegar conjuntos abiertos de un  $\mathbb{R}^n$  mediante difeomorfismos (definiré este concepto más adelante): si  $U_1$  y  $U_2$  son conjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^n$  con subconjuntos abiertos  $W_i \subseteq U_i$  tales que hay un difeomorfismo  $f : W_1 \rightarrow W_2$ , entonces puedo identificar  $W_1$  con  $W_2$  para obtener un nuevo espacio:



Hago más preciso esta idea con la siguiente lista de definiciones:

**Definición 1.** Sea  $M$  un espacio paracompacto<sup>1</sup> (en particular es Hausdorff). Defino que  $M$  es una *variedad topológica* si para toda  $x \in M$ , existe una vecindad  $U \subseteq M$  alrededor de  $x$  y un homeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow V$  donde  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  es un conjunto abierto. A veces  $M$  se denota por  $M^n$  para determinar a qué espacio euclidiano se parece  $M$  localmente. La pareja  $(U, \varphi)$  es una *carta* de  $M$  alrededor de  $x$  y si  $\Phi = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$  es una familia de cartas de  $M$  tales que  $M = \bigcup U_\lambda$ , se dice que  $\Phi$  es un *atlas* de  $M$ .



La estructura diferenciable de  $\mathbb{R}^n$  la codifico en una variedad topológica a través del atlas:

**Definición 2.** Sea  $\Phi = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$  un atlas de una variedad topológica  $M$ . El atlas  $\Phi$  es un *atlas suave* (ie. de clase  $C^\infty$ ) si para cualesquiera  $\lambda, \mu \in \Lambda$  tales que  $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$  se cumple que

$$\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1} : \varphi_\mu[U_\lambda \cap U_\mu] \rightarrow \varphi_\lambda[U_\lambda \cap U_\mu]$$

es una función de clase  $C^\infty$ . La función  $\varphi_{\mu\lambda} := \varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1}$  se llama el *cambio de coordenadas* de la carta  $(U_\mu, \varphi_\mu)$  a la carta  $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$  (véase la figura 0.1). En otras palabras, el atlas  $\Phi$  es suave si todos sus cambios de coordenadas son suaves.

Observa que estudiar la diferenciable de  $\varphi_{\mu\lambda}$  tiene sentido porque su dominio  $\varphi_\mu[U_\lambda \cap U_\mu]$  y su contradominio  $\varphi_\lambda[U_\lambda \cap U_\mu]$  son subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^n$ .

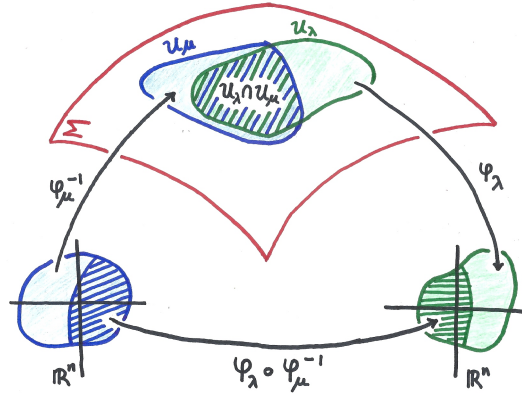
**Definición 3.** Sea  $\Phi$  un atlas suave de una variedad topológica  $M$ . El atlas  $\Phi$  es una *estructura diferenciable* de  $M$  si  $\Phi$  es maximal, es decir para toda carta arbitraria  $(U, \psi)$  que cumple que

$$\varphi \circ \psi^{-1} \quad \text{y} \quad \psi \circ \varphi^{-1} \quad \text{son suaves} \quad \forall (V, \varphi) \in \Phi,$$

entonces necesariamente  $(U, \psi) \in \Phi$ .

<sup>1</sup>Un espacio  $X$  es paracompacto si toda cualquier cubierta abierta  $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$  de  $X$  admite un refinamiento localmente finita, ie. que para todo punto  $x \in X$ , existe una vecindad  $V \subseteq X$  de  $x$  que intersecta sólo una cantidad finita de abiertos del refinamiento.

Figure 1: Representación gráfica de los cambios de coordenadas de un atlas.



La maximalidad de un atlas  $\Phi$  dice que toda carta  $(U, \psi)$  compatible con todas las cartas de  $\Phi$  (ie. que los cambios de coordenadas sean suaves) tiene que ser un elemento de  $\Phi$ . Intuitivamente, esto significa que a  $\Phi$ , ya se le ha agregado todas las posibles cartas compatibles. Observa que cualquier atlas  $\Phi$  se puede acompletar a un atlas maximal, simplemente agregandole todas las posibles cartas compatibles. En la práctica trabajaré con atlas pequeñas (finitas) y cuando hablo de la estructura diferenciable inducida por estos atlas, me refiero tácitamente al atlas maximal que genera el atlas pequeño.

**Definición 4.** Una *variedad diferenciable* es una pareja  $(M, \Phi)$  donde  $M$  es una variedad topológica y  $\Phi$  es una estructura diferenciable.

Ahora analizo unos ejemplos importantes de variedades diferenciables:

**Ejemplo 1.**  $(\mathbb{R}^n)$  Defino  $\iota = \{(\mathbb{R}^n, \text{Id})\}$  que claramente es un atlas suave porque  $\text{Id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un homeomorfismo (suave). Entonces si  $\iota'$  es el atlas maximal generado por  $\iota$  tengo que  $(\mathbb{R}^n, \iota')$  es una variedad diferenciable. A esta estructura diferenciable la llamo la *estructura diferenciable canónica* de  $\mathbb{R}^n$ .

**Ejemplo 2.**  $(\mathbb{S}^n)$  Primero observa que cualquier atlas de  $\mathbb{S}^n$  debe tener más de una carta porque si tuviera solamente una, ie.  $(\mathbb{S}^n, \varphi)$ , entonces  $\varphi$  sería un homeomorfismo entre  $\mathbb{S}^n$  y un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , pero esto no puede suceder porque  $\mathbb{S}^n$  es compacto. Por lo tanto cualquier atlas de  $\mathbb{S}^n$  debe tener al menos dos cartas. A continuación construyo dos atlas para  $\mathbb{S}^n$ :

Primero defino dos abiertos que cubren a  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Sean  $U_{\pm} := \mathbb{S}^n - \{0, \dots, 0, \pm 1\}$ , es decir  $U_+$  es la esfera menos el polo norte y  $U_-$  es la esfera menos el polo sur. Ahora defino:

$$\varphi_{\pm} : U_{\pm} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{con} \quad \varphi_{\pm}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left( \frac{x_1}{1 \mp x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 \mp x_{n+1}} \right) = \frac{1}{1 \mp x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n).$$

**Ejercicio 1.** El atlas  $\Phi = \{(U_+, \varphi_+), (U_-, \varphi_-)\}$  de  $\mathbb{S}^n$  genera una estructura diferenciable.

*Proof.* Escribo  $N_{\pm} = \{0, \dots, 0, \pm 1\}$  para los polos de  $\mathbb{S}^n$ . Primero verifico que  $\varphi_+$  y  $\varphi_-$  son homeomorfismos. Escribo  $\mathcal{P}_{\pm}$  como los planos en  $\mathbb{R}^{n+1}$  definidos por  $x_{n+1} = \pm 1$ ; estos planos son cerrados entonces  $V_{\pm} := \mathbb{R}^{n+1} - \mathcal{P}_{\pm}$  son abiertos tales que  $V_{\pm} \cap \mathbb{S}^n = U_{\pm}$ .

Ahora, las funciones  $\varphi_{\pm}$  son funciones racionales (cocientes de polinomios) donde el denominador se anula en  $\mathcal{P}_{\pm}$  así que  $\varphi_{\pm}$  es continua (y suave) sobre  $V_{\pm}$ . Por lo tanto  $\varphi_{\pm}$  es continua sobre  $U_{\pm}$ .

Por otro lado, escribo  $\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$  y defino  $\psi_{\pm} : \mathbb{R}^n \rightarrow U_{\pm}$  como

$$\psi_{\pm}(x_1, \dots, x_n) = \left( \frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{\|x\|^2 + 1}, \pm \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right) = \frac{1}{\|x\|^2 + 1}(2x_1, \dots, 2x_n, \pm(\|x\|^2 - 1)).$$

Primero observa que  $x \mapsto \|x\|^2$  es una función polinomial entonces es continua. Esto implica que cada coordenada de  $\psi_{\pm}$  es una función racional donde cada denominador nunca se anula porque  $\|x\|^2 + 1 > 0$ . Entonces  $\psi_{\pm}$  es una función continua; de hecho por la misma razón es una función suave sobre todo  $\mathbb{R}^n$ .

Ahora verifico que el contradominio de  $\psi$  es efectivamente  $U_{\pm}$ : observa que  $\|x\|^2 - 1 < \|x\|^2 + 1$  entonces el cociente  $(\|x\|^2 - 1)/(\|x\|^2 + 1)$  nunca puede ser 1. El cociente sólo puede ser  $-1$  si  $\|x\|^2 = 0$ , es decir  $x = 0$ . En este caso:  $\psi_+(0) = N_-$  y  $\psi_-(0) = N_+$  entonces puedo concluir que la última coordenada de  $\psi_{\pm}$  nunca es  $\pm 1$  y así el contradominio de  $\psi_{\pm}$  es un subconjunto de  $V_{\pm}$ .

Para ver que la imagen de  $\psi_{\pm}$  es  $U_{\pm}$  basta calcular la norma de  $\psi_{\pm}(x)$ . Escribo  $t = (\|x\|^2 + 1)^{-1}$  para simplificar las cuentas:

$$\begin{aligned}\|\psi_{\pm}(x)\|^2 &= \|(2tx_1, \dots, 2tx_n, t(\|x\|^2 - 1))\|^2 \\ &= t^2(\|x\|^2 - 1)^2 + 4t^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ &= t^2(\|x\|^4 - 2\|x\|^2 + 1 + 4\|x\|^2) \\ &= t^2(\|x\|^2 + 1)^2 \\ &= 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto  $\varphi_{\pm}(x) \in U_{\pm}$  para toda  $x \in \mathbb{R}^n$ , y concluyo que  $\psi_{\pm} : \mathbb{R}^n \rightarrow U_{\pm}$  es una función continua.

Ahora verifico que  $\psi_{\pm}$  es el inverso de  $\varphi_{\pm}$ . Denoto  $s = (1 \mp x_{n+1})^{-1}$  para simplificar la notación y calculo:

$$\begin{aligned}\psi_{\pm}(\varphi_{\pm}(x_1, \dots, x_{n+1})) &= \psi_{\pm}(sx_1, \dots, sx_n) = \psi_{\pm}(sx) \\ &= \frac{1}{\|sx\|^2 + 1}(2sx_1, \dots, 2sx_n, \pm(\|sx\|^2 - 1))\end{aligned}\tag{1}$$

donde

$$\begin{aligned}\frac{2sx_i}{\|sx\|^2 + 1} &= \frac{2sx_i}{s^2\|x\|^2 + 1} = \frac{2x_i}{s\|x\|^2 + s^{-1}} = \frac{2x_i}{s(1 - x_{n+1}^2) + s^{-1}} \\ &= \frac{2x_i}{s(1 - x_{n+1})(1 + x_{n+1}) + (1 \mp x_{n+1})} = \frac{2x_i}{(1 \pm x_{n+1}) + (1 \mp x_{n+1})} = \frac{2x_i}{2} \\ &= x_i \quad \forall i = 1, \dots, n\end{aligned}\tag{2}$$

porque  $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$  implica que  $\|(x_1, \dots, x_n)\|^2 = 1 - x_{n+1}^2$ . Además:

$$\begin{aligned}\frac{\|sx\|^2 - 1}{\pm(\|sx\|^2 + 1)} &= \frac{s^2\|x\|^2 - 1}{\pm s^2\|x\|^2 \pm 1} = \frac{\|x\|^2 - s^{-2}}{\pm\|x\|^2 \pm s^{-2}} = \frac{(1 - x_{n+1}^2) - (1 \mp x_{n+1})^2}{\pm(1 - x_{n+1}^2) \pm (1 \mp x_{n+1})^2} \\ &= \frac{1 - x_{n+1}^2 - 1 \pm 2x_{n+1} - x_{n+1}^2}{\pm 1 \mp x_{n+1}^2 \pm 1 - 2x_{n+1} \pm x_{n+1}^2} = \frac{\pm 2x_{n+1}(1 \mp x_{n+1})}{\pm 2(1 \mp x_{n+1})} \\ &= x_{n+1}.\end{aligned}\tag{3}$$

Por lo tanto si sustituyo (2) y (3) en (1) obtengo:

$$\psi_{\pm}(\varphi_{\pm}(x_1, \dots, x_{n+1})) = (x_1, \dots, x_{n+1}) \implies \psi_{\pm} \circ \varphi_{\pm} = \text{Id}_{\mathbb{R}^{n+1}}$$

Por otro lado si retomo la notación  $t = (\|x\|^2 + 1)^{-1}$  para  $x = (x_1, \dots, x_n)$  tengo:

$$\begin{aligned}\varphi_{\pm}(\psi_{\pm}(x)) &= \varphi_{\pm}(2tx_1, \dots, 2tx_n, \pm t(\|x\|^2 - 1)) = \left( \frac{2tx_i}{1 \mp (\pm t\|x\|^2 \mp t)} \right)_{i=1}^n \\ &= \left( \frac{2tx_i}{1 - t\|x\|^2 + t} \right)_{i=1}^n = \left( \frac{2x_i}{t^{-1} - \|x\|^2 + 1} \right)_{i=1}^n \\ &= \left( \frac{2x_i}{\|x\|^2 + 1 - \|x\|^2 + 1} \right)_{i=1}^n = \left( \frac{2x_i}{2} \right)_{i=1}^n \\ &= x \\ \therefore \varphi_{\pm} \circ \psi_{\pm} &= \text{Id}_{\mathbb{R}^n}\end{aligned}$$

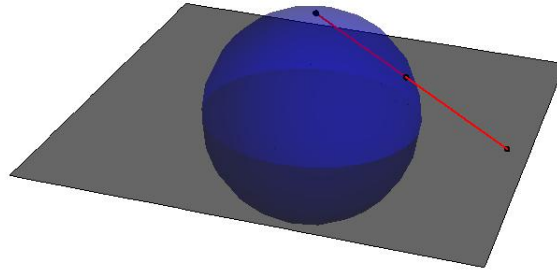
Resumo lo que he hecho:  $\varphi_{\pm} : U_{\pm} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\psi_{\pm} : \mathbb{R}^n \rightarrow U_{\pm}$  son funciones continuas y suaves (por ser racionales en cada coordenada) e inversos entre sí, es decir  $\varphi_{\pm}^{-1} = \psi_{\pm}$ .

Además, esto prueba que los cambios de coordenadas  $\varphi_+ \circ \varphi_-^{-1} = \varphi_+ \circ \psi_-$  y  $\varphi_- \circ \varphi_+^{-1} = \varphi_- \circ \psi_+$  son suaves porque son composición de funciones suaves. Observa que tácitamente estoy restringiendo las  $\psi_{\pm}$  a  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  para que los cambios de coordenadas estén bien definidos; esto no afecta la diferenciabilidad de éstas.

Con esto termino de probar que  $\Phi$  es un atlas suave y así genera un atlas maximal que es una estructura diferenciable de  $\mathbb{S}^n$ .  $\square$

A estas cartas se les llaman *proyecciones estereográficas*: en general la función  $\varphi_+$  le asigna a  $x \in \mathbb{S}^n$  el punto de intersección del subespacio  $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  con la recta que une el polo norte con  $y \in \mathbb{S}^n$ :

De hecho esta construcción es lo que me permitió darle una fórmula explícita a las funciones inversas de las proyecciones estereográficas: parametrizé el segmento de recta que empieza en el polo norte, y termina en un punto  $x \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , después calculé el valor del parámetro para que me de un punto sobre la esfera. Resumo este proceso en el siguiente dibujo:



**Ejemplo 3.** ( $\mathbb{S}^n$ ) En la proposición ?? de la sección ?? introduce las funciones  $\rho_{\pm}$  que relacionaban los hemisferios de la esfera con el disco como subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . Con estas funciones doy otro atlas para la esfera que resulta útil (cambiaré un poco la notación): sea  $\mathring{\mathbb{D}}_n \subset \mathbb{R}^n$  el disco unitario de radio 1 alrededor del 0 y sea  $\mathring{\mathbb{D}}$  el interior del disco y defino  $V_i^{\pm} := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid \pm x_i > 0\}$  como los distintos hemisferios abiertos (de dimensión  $n$ ) de la esfera. Con esto escribo

$$h_i^{\pm} : V_i^{\pm} \longrightarrow \mathring{\mathbb{D}} \quad \text{con} \quad h_i^{\pm}(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_{n+1})$$

donde la notación  $\widehat{x_i}$  significa que omito esa coordenada del vector, es decir  $(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$ . Aquí uso la letra  $h$  para denotar “hemisferio”.

Como todo elemento  $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$  tiene al menos una coordenada distinto de cero, por ejemplo  $x_i$ , entonces  $x \in V_i^+$  o  $x \in V_i^-$  y así  $\mathbb{S}^n = \cup V_i^{\pm}$  entonces  $\mathcal{H} = \{(h_i^+ V_i^+), (h_i^-, V_i^-)\}_{i=1}^{n+1}$  es un atlas con  $2(n+1)$  cartas. En efecto, cada  $h_i^{\pm}$  es un homeomorfismo porque las funciones:

$$\rho_i^{\pm} : \mathring{\mathbb{D}} \longrightarrow V_i^{\pm} \quad \text{con} \quad \rho_i^{\pm}(x_1, \dots, x_n) = \left( x_1, \dots, x_{i-1}, \pm \sqrt{1 - \sum x_k^2}, x_i, \dots, x_n \right)$$

es el inverso de  $h_i^{\pm}$  (ve la proposición ?? para ver porque  $\rho_i^{\pm}$ , y así  $h_i^{\pm}$ , es un homeomorfismo). En otras palabras,  $\rho_i^{\pm}$  inserta el término  $(\sum x_k^2)^{1/2}$  en la  $i$ -ésimo lugar para obtener un vector en  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Con esto tengo que  $\rho_i^{\pm} = (h_i^{\pm})^{-1}$ .

El atlas  $\mathcal{H}$  es suave porque para  $i < j$  tengo:

$$\begin{aligned} h_i^{\pm} \circ (h_j^{\pm})^{-1}(x) &= h_i^{\pm} \circ \rho_j^{\pm}(x_1, \dots, x_n) = h_i^{\pm} \left( x_1, \dots, x_{j-1}, \pm \sqrt{1 - \sum x_k^2}, x_j, \dots, x_n \right) \\ &= (x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, \pm \sqrt{1 - \sum x_k^2}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

que es claramente una función suave porque  $\sum x_k^2 \leq 1$  ya que  $x$  es un elemento del disco unitario. Los otros casos  $j > i$ ,  $j = i$  o  $h_j^{\mp}$  son equivalentes o triviales. Por lo tanto todos los cambios de coordenadas son suaves y así  $\mathcal{H}$  es un atlas suave.

He dado dos atlas para  $\mathbb{S}^n$ ,  $\Phi$  y  $\mathcal{H}$ , pero resulta que definen la misma estructura diferenciable, entonces las variedades diferenciables  $(\mathbb{S}^n, \Phi)$  y  $(\mathbb{S}^n, \mathcal{H})$  son exactamente el mismo porque el atlas maximal que generan  $\Phi$  y  $\mathcal{H}$  son el mismo. Para probar esto, sólo hay que probar que los cambios de coordenadas  $\varphi_{\pm} \circ (h_i^{\pm})^{-1}$  y  $h_i^{\pm} \circ \varphi_{\pm}^{-1}$  son suaves y así garantizamos que todas las cartas de  $\Phi$  y  $\mathcal{H}$  son elementos del atlas maximal que generan ambos.

**Ejercicio 2.** Los atlas  $\Phi$  y  $\mathcal{H}$  de  $\mathbb{S}^n$  son compatibles.

*Proof.* Debo probar que los cambios de coordenadas  $\varphi_{\pm} \circ (h_i^{\pm})^{-1}$  y  $h_i^{\pm} \circ \varphi_{\pm}^{-1}$  son suaves; sólo me enfocaré en los casos cuando el signo de las cartas  $h_i^{\pm}$  es +, la prueba con el otro signo es análoga porque las reglas de correspondencia de  $h_i^+$  y  $h_i^-$  son exactamente iguales.

Ahora si  $i \neq n+1$ , entonces para toda  $x \in V_i^+$  tengo que  $\pm x_i > 0$  y así  $\pm x_{n+1} \neq 1$  porque si se da la igualdad tendré  $\|x\|^2 \geq x_i^2 + x_{n+1}^2 > 1$  lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $x \in U_{\pm}$  y así  $V_i^+ \subset U_+, U_-$  para toda  $i = 1, \dots, n$ . Si  $i = n+1$  entonces los polos  $N^+ \in V_{n+1}^+$  y  $N^- \notin V_{n+1}^+$ . Por lo tanto:

$$U_* \cap V_i^+ = \begin{cases} V_i^+ & \text{si } i = 1, \dots, n \\ V_{n+1}^+ & \text{si } * = -, i = n+1 \\ V_{n+1}^+ - \{N^+\} & \text{si } * = +, i = n+1 \end{cases}$$

Observa que el dominio de  $\varphi_{\pm} \circ (h_i^+)^{-1}$ , para  $i \neq n+1$ , es  $h_i^+[V_i^+] = \mathring{\mathbb{D}}$ , entonces para  $x = (x_1, \dots, x_n)$  en el interior del disco unitario tengo (escribo  $r = (1 - \sum x_k)^{1/2}$  para simplificar la notación)

$$\varphi_{\pm} \circ (h_i^+)^{-1}(x) = \varphi_{\pm} \circ \rho_i^+(x) = \varphi_{\pm}(x_1, \dots, x_{i-1}, r, x_i, \dots, x_n) = \left( \frac{x_1}{1 \mp x_n}, \dots, \frac{r}{1 \mp x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{1 \mp x_n} \right)$$

que es claramente suave porque  $1 > \|x\| \leq \mp x_n$ .

Si  $i = n+1$  tengo dos casos, el dominio de  $\varphi_- \circ (h_i^+)^{-1}$  sigue siendo el disco abierto unitario, entonces:

$$\varphi_- \circ (h_{n+1}^+)^{-1}(x) = \varphi_-(x_1, \dots, x_n, r) = \left( \frac{x_1}{1+r}, \dots, \frac{x_n}{1+r} \right),$$

pero siempre tengo que  $r > 0$  porque  $x$  está en el interior del disco unitario. Por lo tanto  $\varphi_- \circ (h_{n+1}^+)^{-1}$  es suave.

Por otro lado el dominio de  $\varphi_+ \circ (h_{n+1}^+)^{-1}$  es

$$h_{n+1}^+[V_{n+1}^+ - \{N^+\}] = \mathring{\mathbb{D}} - \{h_{n+1}^+(N^+)\} = \mathring{\mathbb{D}} - \{(0, \dots, 0, \widehat{1})\} = \mathring{\mathbb{D}} - \{0\},$$

entonces si  $x \neq 0$  tengo que  $r \neq 1$  y así

$$\varphi_+ \circ (h_{n+1}^+)^{-1}(x) = \varphi_+(x_1, \dots, x_n, r) = \left( \frac{x_1}{1-r}, \dots, \frac{x_n}{1-r} \right),$$

es suave porque los denominadores nunca se anulan. Con esto concluyo que todos los cambios de coordenadas  $\varphi_{\pm} \circ (h_i^+)^{-1}$  son suaves.

Para ver la diferenciabilidad de los cambios de coordenadas  $h_i^+ \circ \varphi_{\pm}^{-1}$  veré que estas funciones son restricciones de funciones suaves definidos sobre todo  $\mathbb{R}^n$ .

Sea  $x \in \mathbb{R}^n$ . Como  $\varphi_{\pm}^{-1} = \psi_{\pm}$  es una función suave, y proyectar sobre un subespacio  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  (ie. olvidar la  $i$ -ésima coordenada) es suave, la composición:

$$x \mapsto \left( \frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{\|x\|^2 + 1}, \pm \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right) \mapsto \left( \frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}, \dots, \widehat{\frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}}, \dots, \frac{2x_n}{\|x\|^2 + 1}, \pm \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right)$$

es suave (observa que no hay problema si  $i = n+1$  como en el caso anterior). Por lo tanto, si restrinjo esta composición a  $\varphi_{\pm}[U_{\pm} \cap V_i^+] \subset \mathbb{R}^n$  obtengo el cambio de coordenadas  $h_i^+ \circ \varphi_{\pm}^{-1} = h_i^+ \circ \psi_{\pm}$  que, por lo tanto, es suave.

Con todo esto concluyo que todos los posibles cambios de coordenadas entre los atlas  $\Phi$  y  $\mathcal{H}$  son suaves. Por lo tanto ambos atlas generan el mismo atlas maximal y así la misma estructura diferenciable de  $\mathbb{S}^n$ , es decir  $\Phi$  y  $\mathcal{H}$  son compatibles.  $\square$

**Ejemplo 4.**  $(\mathbb{R})$  Defino el atlas  $\Theta$  con única carta  $(\mathbb{R}, x \mapsto x^3)$ . Claramente es un atlas porque  $x \mapsto x^3$  es un homeomorfismo (con inverso  $x \mapsto x^{1/3}$  que es continua). Además  $\Theta$  es suave porque nada más tiene una carta. A diferencia del ejemplo 1 (con  $n = 1$ ), este atlas no es compatible con el atlas canónico  $\iota$  de  $\mathbb{R}$ :

**Ejercicio 3.** Los atlas  $\iota$  y  $\Theta$  de  $\mathbb{R}$  no son compatibles, es decir algún cambio de coordenadas no es una función suave.

*Proof.* Denoto  $f$  como la función  $x \mapsto x^3$ , es decir  $(\mathbb{R}, f)$  es la carta de  $\Theta$ . Ahora,  $f^{-1}$  no es una función suave en  $x = 0$  porque su derivada:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

no está bien definida en  $x = 0$  porque se hace arbitrariamente grande alrededor del 0, es decir  $(f^{-1})'(x) \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow 0$ . Por lo tanto el cambio de coordenadas  $\text{Id}_{\mathbb{R}} \circ f^{-1} = f^{-1}$ , que está definido sobre  $f^{-1}[\mathbb{R} \cap \mathbb{R}] = \mathbb{R}$ , no es suave sobre todo su dominio.

Esto quiere decir que la carta  $(\mathbb{R}, f)$  no está en el atlas maximal generado por el atlas canónico  $\iota$  y así las estructuras diferenciables de las variedades  $(\mathbb{R}, \iota)$  y  $(\mathbb{R}, \Theta)$  no son la misma.  $\square$

El atlas  $\mathcal{H}$  de la esfera me permite definirle una estructura diferenciable sobre el espacio proyectivo real:

**Definición 5.** El *espacio proyectivo real* de dimensión  $n$ , denotado por  $\mathbb{R}P^n$  es el espacio cociente:

$$\mathbb{R}P^n := \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} / \sim$$

donde  $x \sim y$  si existe un escalar  $\lambda > 0$  tal que  $x = \lambda y$ . A la proyección canónica, la denoto por  $p : (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}P^n$ .

Observa que toda  $x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  cumple  $[x] = [\|x\|^{-1}x]$ , donde  $\hat{x} := \|x\|^{-1}x$  es un elemento de  $\mathbb{S}^n$ . Por lo tanto  $[x_1] \neq [x_2]$  implica  $[\|x_1\|^{-1}x_1] \neq [\|x_2\|^{-1}x_2]$  y en particular  $\hat{x}_1 \neq \hat{x}_2$ . Como  $\mathbb{S}^n$  es Hausdorff, existen vecindades  $U_1$  y  $U_2$  que separan los  $\hat{x}_1$  y  $\hat{x}_2$  y así  $V_i = \{[z] \mid \hat{z} \in U_i\}$  son abiertos de  $\mathbb{R}P^n$  que separan a  $[x_1]$  de  $[x_2]$ : claramente  $p[V_i]$  es el cono abierto generado por todas las rectas que pasan por el origen y pasan por  $V_i$  y si  $[z] \in V_1 \cap V_2$  entonces  $\hat{z} \in U_1 \cap U_2 = \emptyset$  por lo tanto  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ .

El proceso de tomar cocientes la podemos separar en dos: la idea es que estamos contrayendo todas las rectas que pasan por el origen a puntos. Como cada recta de estas tienen dos vectores directores unitarios, podemos primero contraer cada recta a dos puntos sobre la esfera  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  y despues identificar ambos vectores directores. Si  $x$  es un vector unitario director de una recta, entonces  $-x$  es el otro vector director unitario.

Estas ideas sugieren que el espacio proyectivo real de dimensión  $n$  es la esfera  $\mathbb{S}^n$  módulo antípodas, es decir  $x \sim -x$ . De hecho, esto es verdadero:

**Ejercicio 4.** A la esfera  $\mathbb{S}^n$  le defino la relación de equivalencia  $x \sim -x$  donde relaciono cada punto con su antípoda. En este caso se cumple que:

$$\mathbb{R}P^n \approx \mathbb{S}^n / \sim$$

*Proof.* Considera la restricción  $\hat{\nu} := \nu|_{\mathbb{S}^n} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  de la proyección canónica  $\nu : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ . Claramente es una función sobre porque  $[x] = [\|x\|^{-1}x] \in \mathbb{R}P^n$ , además

$$\hat{\nu}(x) = \hat{\nu}(y) \iff \exists \lambda \neq 0 \text{ tal que } \lambda x = y \iff x \sim y$$

donde la última equivalencia se cumple porque  $x, y \in \mathbb{S}^n$  y necesariamente  $\lambda = \pm 1$ . Por lo tanto  $\hat{\nu}$  se factoriza a través de la proyección  $q : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n / \sim$ , es decir existe una única función continua biyectiva  $\varphi$  tal que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \xrightarrow{\hat{\nu}} & \mathbb{R}P^n \\ q \downarrow & \nearrow \varphi & \\ \mathbb{S}^n / \sim & & \end{array}$$

Como  $\mathbb{S}^n$  es compacto y  $\mathbb{R}P^n$  es Hausdorff,  $\varphi$  es un homeomorfismo.  $\square$

Esta nueva descripción del espacio proyectivo nos permite darle una estructura diferenciable a  $\mathbb{R}P^n$  con el atlas  $\mathcal{H}$  de  $\mathbb{S}^n$ .

**Ejemplo 5.** Los dos hemisferios  $V_i^+$  y  $V_i^-$  se identifican bajo el cociente  $\mathbb{S}^n / \sim_{x \sim -x}$  porque  $x \in V_i^+ \iff -x \in V_i^-$ . Por lo tanto  $q[V_i^+] = q[V_i^-] =: V_i$  es un abierto del espacio proyectivo. Como las  $V_i^\pm$  cubrían a  $\mathbb{S}^n$ , entonces las  $V_i$  cubren a  $\mathbb{R}P^n$ .

Para toda  $x \in \mathbb{R}P^n$  tengo que  $q^{-1}[x] = \{x, -x\}$  lo cual implica que  $q$  es inyectiva restringido a un conjunto  $V \subseteq \mathbb{S}^n$  si y sólo si existen  $x \in V \implies -x \notin V$ . Las  $V_i^\pm$  cumplen esto ya que

$$x \in V_i^\pm \implies m \pm x_i > 0 \implies \mp x_i < 0 \implies -x \notin V_i^\mp$$

Entonces la restricción  $q_i := q|_{V_i^+}$  tiene inverso izquierdo. Lo llamo  $\tilde{g}_i$ .

Para cada  $V_i \subset \mathbb{R}P^n$  defino la carta  $(V_i, h_i)$  como:

$$\begin{array}{ccc} V_i^+ & \xrightarrow{h_i^+} & \mathring{\mathbb{D}} \\ \tilde{g}_i \uparrow \downarrow q_i & \nearrow h_i & \\ V_i & & \end{array}$$

Claramente  $h_i$  es un homeomorfismo. El atlas  $\mathfrak{h} = \{(V_i, h_i)\}_{i=1}^n$  de  $\mathbb{R}P^n$  es una estructura diferenciable porque  $\mathcal{H}$  es una estructura diferenciable sobre  $\mathbb{S}^n$ .

Una manera de construir nuevas variedades diferenciables es con el producto cartesiano:

*Proposición 1.* Sean  $M$  y  $N$  variedades suaves de dimensión  $m$  y  $n$  respectivamente. Si  $M$  tiene el atlas  $\mathcal{M} = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$  y  $N$  tiene el atlas  $\mathcal{N} = \{(V_\omega, \psi_\omega)\}_{\omega \in \Omega}$  entonces  $M \times N$  es una variedad suave de dimensión  $n + m$  con atlas

$$\mathcal{M} \times \mathcal{N} := \{(U_\lambda \times V_\omega, \varphi_\lambda \times \psi_\omega)\}_{(\lambda, \omega) \in \Lambda \times \Omega}$$

Otra manera de construir variedades es tomar subconjuntos abiertos de variedades:

**Ejercicio 5.** Sea  $M$  una variedad suave de dimensión  $m$  con atlas  $\mathfrak{A} = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ . Todo subconjunto abierto  $U$  de  $M$  también es una variedad suave con el atlas  $\mathfrak{A}_U = \{(U_\lambda \cap U, (\varphi_\lambda)|_U)\}_{\lambda \in \Lambda}$ .

*Proof.* Como cada  $\varphi_\lambda : U_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un homeomorfismo sobre su imagen, entonces la restricción  $(\varphi_\lambda)|_U : U_\lambda \cap U \rightarrow \varphi_\lambda[U_\lambda \cap U]$  es un homeomorfismo. Como la familia  $\{U_\lambda\}$  es una cubierta abierta de  $M$ , la familia  $\{U_\lambda \cap U\}$  de abiertos cubren a  $U$ . Por lo tanto  $\mathfrak{A}_U$  es un atlas.

Ahora considera un cambio de coordenadas arbitrario

$$f = (\varphi_\lambda)|_U \circ (\varphi_\mu)|_U^{-1} : (\varphi_\mu)|_U[U_\lambda \cap U_\mu \cap U] \longrightarrow (\varphi_\lambda)|_U[U_\lambda \cap U_\mu \cap U]$$

y observa que es igual a la función  $(\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1})|_U$  que es la restricción de un cambio de coordenadas del atlas  $fA$ . Como éste es suave, el cambio de coordenada  $f$  del atlas  $\mathfrak{A}_U$  también es suave. Por lo tanto  $\mathfrak{A}_U$  es un atlas diferenciable sobre  $U$ .  $\square$

Ahora defino los morfismos entre variedades suaves:

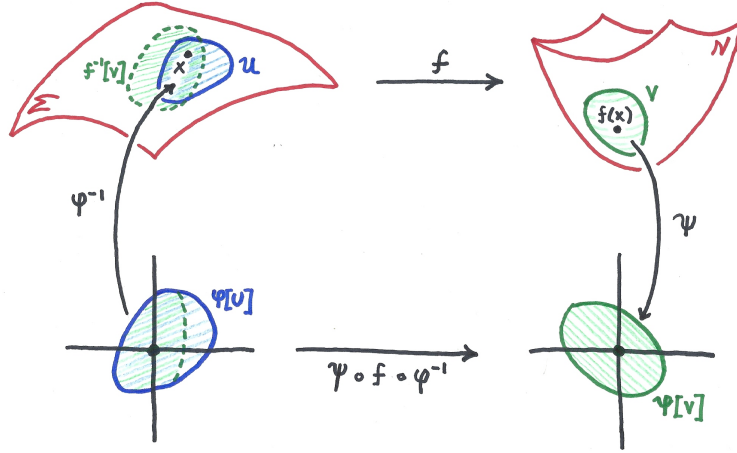
**Definición 6.** Sean  $M^m$  y  $N^n$  variedades suaves y  $f : M \rightarrow N$  una función continua. La función  $f$  es *suave* si para toda  $x \in M$  hay una carta  $(U, \varphi)$  de  $M$  alrededor de  $x$  y una carta  $(V, \psi)$  de  $N$  alrededor de  $f(x)$  tal que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi[U \cap f^{-1}[V]] \longrightarrow \psi[V]$$

es una función suave en  $\mathbb{R}^m$ .

Claramente la categoría  $\mathbf{Var}^\infty$  de variedades suaves es una categoría con las funciones suaves como morfismos. Un isomorfismo en esta categoría se llama *difeomorfismo* y si existe un difeomorfismo entre dos variedades  $M$  y  $N$  lo denoto por  $M \cong N$ .

**Ejercicio 6.** Las variedades suaves  $\mathbb{R}_\iota := (\mathbb{R}, \iota)$  y  $\mathbb{R}_\Theta := (\mathbb{R}, \Theta)$  son difeomorfos.



*Proof.* Defino  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como  $f(x) = x^{1/3}$  y  $g(x) = x^3$ . Observa que  $(\mathbb{R}, g)$  es la única carta de  $\Theta$ , entonces denotaré por  $g_\Theta$  como la carta y  $g$  como la función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  apesar de que sean la misma función. Claramente  $f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{R}} = g \circ f$  y el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{R}_\iota & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}_\Theta & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}_\iota & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}_\Theta \\
 \downarrow \text{Id} & & \downarrow g_\Theta & & \downarrow \text{Id} & & \downarrow g_\Theta \\
 \mathbb{R} & \xrightarrow{g_\Theta \circ f \circ \text{Id}^{-1}} & \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{Id} \circ g \circ g_\Theta^{-1}} & \mathbb{R} & \xrightarrow{g_\Theta \circ f \circ \text{Id}^{-1}} & \mathbb{R}
 \end{array}$$

es conmutativo. Los dos cambios de coordenadas son claramente suaves porque

$$g \circ f \circ \text{Id}^{-1} = \text{Id} = \text{Id} \circ g \circ g_\Theta^{-1}$$

Por lo tanto  $f$  y  $g$  son funciones suaves tales que  $f \circ g = \text{Id} = g \circ f$  entonces  $\mathbb{R}_\iota$  y  $\mathbb{R}_\Theta$  son difeomorfos.  $\square$

Es importante notar que la clase de variedades suaves con funciones suaves como morfismos forma una categoría que llamo **Variedades**. Esto se debe a que la identidad  $\text{Id} : M \rightarrow M$  siempre es suave y la composición de dos funciones suaves es suave. Al conjunto de morfismos entre dos objetos en **variedades** la llamo

$$C^\infty(M, N) = \left\{ M \xrightarrow{f} N \mid f \text{ es suave} \right\}.$$

En particular el conjunto  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  nos dice mucho sobre las propiedades de  $M$ . Como  $R$  es una variedad suave,  $C^\infty(\cdot, \mathbb{R})$  es un funtor contravariante a la categoría de  $\mathbb{R}$ -álgebra. En efecto:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{y} \quad (fg)(x) := f(x)g(x)$$

le definen una estructura de anillo conmutativo con 1 a  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  y además, el subanillo de las funciones constantes es isomorfo a  $\mathbb{R}$  y así  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  es un  $\mathbb{R}$ -álgebra.

$C^\infty(M, \mathbb{R})$  también tiene estructura de  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial, entonces podemos definir su espacio dual:

$$C^\infty(M, \mathbb{R})^* := \left\{ C^\infty(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{v} \mathbb{R} \mid v \text{ es lineal} \right\}$$

Una vez mencionado esto, defino:

**Definición 7.** Una *derivación* en  $x \in M$  es un funcional lineal  $d : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f \mapsto df$  que cumple la regla de Liebniz:  $d(fg) = g(x)df + f(x)dg$ . El conjunto de todas las derivaciones en  $x$  se llama el *espacio tangente* de  $M$  en  $x$ :

$$T_x M := \left\{ d \in C^\infty(M, \mathbb{R})^* \mid d(fg) = g(x)df + f(x)dg \quad \forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \right\}$$



Observa que  $T_x M$  es un subespacio vectorial de  $C^\infty(M, \mathbb{R})^*$  porque si  $d, d' \in T_x M$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$  es un escalar entonces

$$\begin{aligned}(d + \lambda d')(fg) &= d(fg) + \lambda d'(fg) \\ &= g(x)df + f(x)dg + \lambda g(x)d'f + \lambda f(x)d'g \\ &= g(x)(df + \lambda d'f) + f(x)(dg + \lambda d'g) \\ &= g(x)(d + \lambda d')(f) + f(x)(d + \lambda d')(g)\end{aligned}$$

y  $T_x M$  es cerrado bajo combinaciones lineales. Además es claro que el funcional lineal 0 cumple la regla de Leibniz.

Tomar derivadas parciales es el primer ejemplo de una derivación: Sea  $M$  una variedad suave y  $x \in M$ . Si  $(U, \varphi)$  una carta alrededor de  $x$  entonces  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  y así es de la forma  $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$  donde  $x_i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ . Con esto defino el siguiente funcional lineal:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_x (f) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(x))$$

donde la segunda derivada es la usual de  $\mathbb{R}^n$ . El funcional lineal  $\partial/\partial x_i|_x$  es una derivación porque la derivada usual es lineal y como toda carta se puede expresar con  $n$  coordenadas, entonces

$$\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_x, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_x \right\}$$

es una base de  $T_x M$ .

Si considero la categoría de variedades suaves basadas, denotado por **Variedades\***, parece que  $(M, x) \mapsto T_x M$  es un funtor a la categoría de espacios vectoriales sobre  $\mathbb{R}$ , pero para probar esto necesito saber cómo transforma este funtor a las funciones suaves  $f : (M, x) \rightarrow (N, y)$ .

**Definición 8.** Sea  $F : (M, x) \rightarrow (N, y)$  una función suave entre variedades suaves basadas. Entonces el *diferencial* de  $F$  en  $x$  lo defino como la función:

$$D_x F : T_x M \longrightarrow T_y N \quad \text{con} \quad (D_x F(d))(f) = d(f \circ F)$$

**Ejercicio 7.** Para toda  $x \in M$ ,  $D_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  es lineal.

*Proof.* Sean  $d, d' \in T_x M$  derivaciones y  $\lambda \in \mathbb{R}$  un escalar. Entonces para toda  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned}D_x F(d + \lambda d')(f) &= (d + \lambda d')(f \circ F) = d(f \circ F) + \lambda d'(f \circ F) = D_x F(d)(f) + \lambda D_x F(d')(f) \\ \therefore D_x F(d + \lambda d') &= D_x F(d) + \lambda D_x F(d')\end{aligned}$$

entonces  $D_x F$  es una transformación lineal. □

Ahora defino lo necesario para estudiar las 'inclusiones' en la categoría de las variedades suaves:

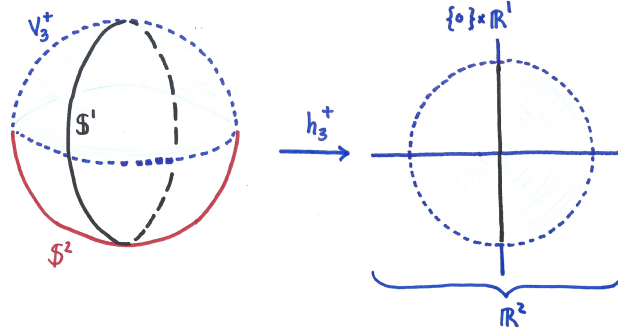
**Definición 9.** Sea  $M$  de dimensión  $m$  y  $N \subseteq M$  un subespacio de  $M$ . Entonces  $N$  es una *subvariedad* de dimensión  $n \leq m$  si para toda  $x \in N$  existe una carta  $(U, \varphi)$  de  $M$  alrededor de  $x$  tal que:

$$\varphi[U \cap N] = \varphi[U] \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^m$$

donde  $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$ .

El siguiente ejemplo ilustra bien esta definición: Si hago  $\mathbb{S}^1 = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \subset \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  (mediante el difeomorfismo  $e^{2\pi i t} \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, 0)$ ), entonces las únicas cartas que intersectan a  $\mathbb{S}^1$  son  $V_1^\pm$  y  $V_2^\pm$ , entonces (por ejemplo):

$$\begin{aligned}h_i^\pm[V_i^\pm \cap \mathbb{S}^1] &= \begin{cases} (x_2, x_3) = (\sin 2\pi t, 0) & , \quad t \in [0, 1] \quad \text{si } i = 1 \\ (x_1, x_3) = (\cos 2\pi t, 0) & , \quad t \in [0, 1] \quad \text{si } i = 2 \end{cases} \\ &= (-1, 1) \times \{0\} \\ &= \mathring{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{R}^1 \times \{0\}) \\ &= h_i^\pm[V_i^\pm] \cap (\mathbb{R}^1 \times \{0\}) \quad (i = 1, 2)\end{aligned}$$



es decir que  $\mathbb{S}^1$  es una subvariedad de  $\mathbb{S}^2$ . Similarmente  $\mathbb{S}^n$  es una subvariedad de  $\mathbb{S}^m$  para toda  $n \leq m$ . El siguiente dibujo ilustra este ejemplo:

Esto sugiere la descripción: una subvariedad  $N$  vive en  $M$  como  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$  vive en  $\mathbb{R}^m$ .

Además si  $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  es el atlas suave de  $M$ , entonces  $N$  tiene estructura diferenciable con el atlas restringido

$$\mathfrak{A}|_N := \{(U_\alpha \cap N, (\varphi_\alpha)|_{U_\alpha \cap N})\}_{\alpha \in A}.$$

Con el atlas  $\mathfrak{A}|_N$ , la inclusión  $\iota : N \rightarrow M$  se vuelve suave. Este tipo de inclusión se generaliza. Si una variedad  $N'$  es difeomorfa a una subvariedad  $N \subseteq M$  (equipada de su atlas  $\mathfrak{A}|_N$ ), mediante un difeomorfismo  $f$ , entonces la función  $\iota' := \iota \circ f$  la puedo pensar como una “inclusión”.

**Definición 10.** Una función suave  $f : N \rightarrow M$  es un *encaje* si la imagen  $f[N] \subseteq M$  es una subvariedad de  $M$  y además  $N \cong f[N]$ . En este caso lo denoto por  $N \hookrightarrow M$ .

Por lo tanto para todo encaje  $f$  existe una factorización  $f = \iota \circ f'$  donde  $f'$  es el difeomorfismo  $N \rightarrow f[N]$  y  $\iota : f[N] \rightarrow M$  es la inclusión. En palabras esto quiere decir que un encaje  $N \hookrightarrow M$  es una transformación que te permite ver a  $N$  como subvariedad de  $M$ .

Parece que la definición de encaje es muy restrictiva pero Whitney probó que:

**Teorema 1.** (Whitney) Toda variedad suave de dimensión  $m$  se puede encajar en  $\mathbb{R}^{2m}$ , es decir para toda variedad  $M^m$ , existe  $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m}$ .

Este teorema es muy fuerte por varias razones. Primero, esto significa que cualquier variedad la podemos identificar con una subvariedad de un espacio euclideo. Segundo, la dimensión de este espacio euclideo se puede minimizar a dos veces la dimensión de la variedad original. Por ejemplo  $\mathbb{R}P^2 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^3$  porque la imagen tendría que autointersectarse (y así fallaría la inyectividad). Entonces  $2m$  es la mínima dimensión necesaria para poder encajar cualquier variedad en un espacio euclideo.

**Definición 11.** Sea  $f : M \rightarrow N$  una función suave. Un punto  $y \in N$  es un *valor regular* si para todo elemento  $x \in f^{-1}[\{y\}]$  el diferencial  $D_x f$  es sobreyectivo. Si esto no se cumple, entonces  $y$  es un *valor crítico*.

La importancia de los valores regulares se muestra con el siguiente teorema:

**Teorema 2.** Sea  $f : M^m \rightarrow N^n$  una función suave y  $y \in N$  un valor regular. Entonces  $L = f^{-1}[\{y\}] \subseteq M$  es una variedad de dimensión  $m - n$ .

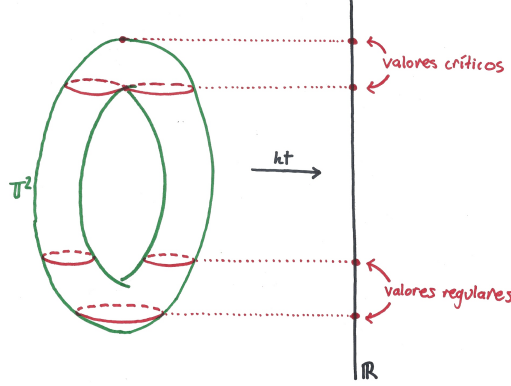
Este teorema y la definición de valor regular se muestra en la figura 0.1:

El famoso Teorema de Sard dice que casi todo valor  $y \in N$  es regular: si  $C \subset N$  es el conjunto de puntos críticos, ie no-regular, de una función suave  $f : M \rightarrow N$ , entonces para toda carta  $(U, \varphi)$  de  $N$  que intersecta  $C$ , el teorema de Sard dice que  $\varphi[U \cap C] \subset \mathbb{R}^n$  es de medida cero.

Con esto defino que cualquier subconjunto  $X \subseteq N$  de una variedad es de medida cero si bajo cualquier carta, su imagen en  $\mathbb{R}^m$  es de medida cero. Así enuncio el teorema de Sard:

**Teorema 3.** (Sard) Sea  $f : M \rightarrow N$  una función suave. El conjunto de valores críticos es de medida cero. En particular el conjunto de valores regulares es denso en  $N$ .

Figure 2: Los valores regulares y las fibras de la función altura  $ht : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .



Una consecuencia importante de este teorema es que se puede calcular el grupo de homotopía:

$$\pi_m(\mathbb{S}^n, 1) = 0 \quad \forall m < n \quad (4)$$

Si  $[\alpha] \in \pi_m(\mathbb{S}^n, 1)$ , claramente  $\alpha$  no tiene porque ser suave, pero si lo fuera, Sard dice que  $\alpha : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^n$  tiene un valor regular  $y \in \mathbb{S}^n$ . Ahora si  $x \in \alpha^{-1}[\{y\}]$  entonces  $d_x \alpha : T_x \mathbb{S}^m \rightarrow T_y \mathbb{S}^n$  es sobre, pero esto nunca puede pasar porque  $T_x \mathbb{S}^n \cong \mathbb{R}^n$  y  $n > m$ . Por lo tanto  $f^{-1}[\{y\}] = \emptyset$ , es decir que  $\alpha[\mathbb{S}^m] \subseteq \mathbb{S}^n - \{y\} \subset \mathbb{S}^n$ .

Co-restrinjo  $\alpha : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$  a  $\alpha' : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^n - \{y\}$ . Como  $\mathbb{S}^n - \{y\} \cong \mathbb{R}^n$  mediante la proyección estereográfica, entonces  $\alpha' \simeq \text{cte}$ . Además, como  $\alpha$  y  $\alpha'$  tienen la misma regla de correspondencia:

$$\alpha = \iota \circ \alpha' \simeq \iota \circ \text{cte} = \text{cte}$$

donde  $\iota : \mathbb{S}^n - \{y\} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$  es la inclusión. Por lo tanto  $[\alpha] = 0$ .

Acabo de probar que si toda clase de equivalencia  $[\alpha] \in \pi_m(\mathbb{S}^n, 1)$  tiene un representante  $\alpha : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^n$  suave, entonces  $\pi_m(\mathbb{S}^n, 1) = 0$ . En otras palabras la ecuación (4) se sigue de:

**Teorema 4.** Sea  $f : M \rightarrow N$  una función continua (o basada) entre variedades suaves. Entonces existe una  $f' : M \rightarrow N$  suave tal que  $f \simeq f'$ .

Otra consecuencia importante del teorema de Sard requiere de orientación. Primero defino orientación para espacios vectoriales y luego lo defino para variedades mediante los espacios tangentes.

Sea  $V$  un espacio vectorial real de dimensión  $n$  y denoto por  $\mathfrak{B}$  como el conjunto de todas las bases de  $V$ . Observa que  $\mathfrak{B}$  es isomorfo al espacio de matrices invertibles  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ . Defino sobre  $\mathfrak{B}$  la siguiente relación:

$$\{v_1, \dots, v_n\} \sim \{w_1, \dots, w_n\} \iff \text{la matriz de cambio de base tiene determinante positivo.}$$

**Ejercicio 8.** La relación  $\sim$  definido sobre  $\mathfrak{B}$  es de equivalencia.

*Proof.* Primero comento que  $\mathfrak{B}$  está en biyección con las matrices invertibles: si  $\beta = \{v_1, \dots, v_n\} \in \mathfrak{B}$  con  $v_j = (v_{1j}, \dots, v_{nj}) \in V$ , denoto por  $(v_{ij})$  a la matriz que obtengo de tomar a  $v_j$  como columnas. Por lo tanto:

$$\Phi : \mathfrak{B} \longrightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R}) \quad \text{con} \quad f(\beta) = (v_{ij})$$

es una biyección. Por lo tanto identificaré  $\mathfrak{B}$  con  $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$  (de hecho existe una estructura de grupo sobre  $\mathfrak{B}$  que hace que  $\Phi$  sea un isomorfismo de grupos).

Observa que  $H = \text{GL}^+(n, \mathbb{R}) = \{A \in G \mid \det A > 0\}$  es un subgrupo de  $G$  entonces la función  $(A, \beta) \mapsto A\beta = A(v_{ij})$  es una acción de grupo. En efecto:  $\text{Id}\beta = \text{Id}(v_{ij}) = (v_{ij}) = \beta$  y  $(AB)\beta = (AB)(v_{ij}) = A(B(v_{ij})) = A(B\beta)$ .

Además  $\sim$  es la relación de equivalencia que define esta acción: sean  $\beta = (v_{ij})$  y  $\gamma = (w_{ij})$  dos bases y  $Q$  su matriz de cambio de base, ie.  $Q\beta = \gamma$ . Entonces:

$$\beta \sim \gamma \iff \det Q > 0 \iff Q \in H \iff \gamma \in \mathcal{O}(\beta)$$

donde  $\mathcal{O}(\beta)$  denota la órbita de  $\beta$ . Por lo tanto  $\sim$  es una relación de equivalencia ya que está inducida por una acción de grupo.  $\square$

**Ejercicio 9.** El espacio de clases  $\mathfrak{B}/\sim$  tiene dos elementos.

*Proof.* Uso la misma notación que el ejercicio pasado. Debo probar que sólo hay dos órbitas, es decir que toda matriz de  $G$  está relacionada con  $\text{Id}$  o con  $\text{Id}^-$  que defino como

$$\text{Id}^- := \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Sea  $\beta = (v_{ij}) \in \mathfrak{B}$  una base arbitraria con  $\Delta = \det(v_{ij})$  y sea  $A = (v_{ij})^{-1}$ . Entonces  $A(v_{ij}) = \text{Id}$  y similarmente si multiplico  $\text{Id}^-$  por la derecha a ambos lados, obtengo  $A'(v_{ij}) = \text{Id}^-$  donde  $A' := \text{Id}^- A$  y  $\det A' = \det(\text{Id}^-)\Delta = -\Delta$ .

Estas dos igualdades quieren decir que  $A$  es la matriz de cambio de base de  $(v_{ij})$  a  $\text{Id}$ , y  $A'$  es la matriz de cambio de base de  $(v_{ij})$  a  $\text{Id}^-$ . Por lo tanto si  $\Delta > 0$  entonces aplica la primera frase y  $(v_{ij}) \sim \text{Id}$ ; si  $\Delta < 0$ , entonces  $\det A' > 0$  y  $(v_{ij}) \sim \text{Id}^-$ . En símbolos: para toda  $\beta \in \mathfrak{B}$

$$[\beta] = \begin{cases} [\text{Id}] & \text{si } \Delta > 0 \\ [\text{Id}^-] & \text{si } \Delta < 0 \end{cases}$$

y así concluyo que  $\mathfrak{B}/\sim = \{[\text{Id}], [\text{Id}^-]\}$ . □

Para fines prácticos denoto  $\mathfrak{B}/\sim = \{1, -1\}$

**Definición 12.** Sea  $V$  un espacio vectorial real de dimensión  $n$ . Una *orientación* de  $V$  es la elección de un elemento de  $\mathfrak{B}/\sim = \{1, -1\}$ .

**Definición 13.** Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales reales de dimensión  $n$  con orientaciones  $[\beta]$  y  $[\gamma]$  (donde  $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$  y  $\gamma$  son bases de  $V$  y  $W$  respectivamente). Una transformación lineal  $T : V \rightarrow W$  *preserva orientación* si

$$T(\beta) = \{T(v_1), \dots, T(v_n)\} \sim \gamma$$

es decir que la imagen de  $\beta$  tiene la misma orientación que  $\gamma$ .

Con estas dos definiciones puedo generalizar orientación a una variedad:

**Definición 14.** Sea  $M$  una variedad suave. Una *orientación* de  $M$  es una familia  $\mathfrak{O} = \{\mathfrak{o}_x\}_{x \in M}$  donde cada  $\mathfrak{o}_x$  es una orientación de  $T_x M$  tal que para toda  $x \in M$  existe una carta  $(U, \varphi)$  de  $M$  alrededor de  $x$  tal que  $D_x \varphi : T_x M \rightarrow T_{\varphi(x)} \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$  preserva orientación donde  $\mathbb{R}^n$  está orientado canónicamente. Una variedad junto con una orientación se llama *variedad orientada* y se denota como la pareja  $(M, \mathfrak{O})$ .

Una vez definido orientación puedo seguir con otra aplicación del teorema de Sard:

Quiero analizar la ecuación (4) cuando  $n = m$ . Tomo  $[\alpha] \in \pi_n(\mathbb{S}^n, 1)$  con  $\alpha : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  suave (estoy usando el teorema 4) y  $y \in \mathbb{S}^n$  un valor regular. Por el teorema (2) tengo que  $M_y = f^{-1}[\{y\}]$  es una subvariedad de  $\mathbb{S}^n$  de dimensión 0. Observa que  $M$  es compacto (por ser un subconjunto cerrado de un compacto), entonces  $M_y = \{y_1, \dots, y_k\}$  es finito.

Se puede definir una función  $\text{grad} : C^\infty(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n) \rightarrow \mathbb{Z}$  de la siguiente manera: para  $\alpha : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ , toma  $y \in \mathbb{S}^n$  un valor regular. Para cada  $x \in M_y = f^{-1}[y]$  calculo

$$\text{grad}_x(\alpha) := \begin{cases} +1 & \text{si } D_x \alpha \text{ preserva orientación} \\ -1 & \text{si } D_x \alpha \text{ no preserva orientación} \end{cases}$$

y defino:

$$\text{grad}(\alpha) = \sum_{x \in f^{-1}[y]} \text{grad}_x(\alpha)$$

Para probar que  $\text{grad}$  está bien definida necesito probar que no depende del valor regular  $y$  que eligí.

**Ejemplo 6.** Sea  $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  definido por  $z \mapsto z^3$ , claramente es suave. Si encajo  $\mathbb{S}^1$  en  $\mathbb{R}^2$  como  $z = x + iy = (x, y)$ , entonces  $\alpha$  es la restricción de  $f(x, y) = (x + iy)^3 = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$ , definido sobre todo  $\mathbb{R}^2$ , al círculo unitario. Entonces tengo que

$$D_z \alpha = D_{(x,y)} f = 3 \begin{pmatrix} x^2 - y^2 & -2xy \\ 2xy & x^2 - y^2 \end{pmatrix} = 3z^2$$

cuyo determinante es

$$\Delta = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 > 0 \quad \forall x + iy \in \mathbb{S}^1.$$

Esto quiere decir que  $D_{(x,y)}$  preserva orientación en cada punto de  $\mathbb{S}^1$ . Por lo tanto en la fórmula de  $\text{grad}(\alpha)$  aparecen puros  $+1$ 's, es decir  $\text{grad}(\alpha) = \#(\alpha^{-1}[z])$

Además  $D_z \alpha$  es claramente sobre ( $3z^2$  es una rotación seguida de una expansión; ambas son funciones biyectivas del plano). Por lo tanto todo  $z \in \mathbb{S}^1$  es un punto regular.

Por la fórmula de de Moivre, sabemos calcular los tres elementos de  $x \in \alpha^{-1}[z]$ , de hecho para cada  $z_0 \in \mathbb{S}^1$  fija,  $\alpha^{-1}[z_0]$  es simplemente las raíces del polinomio  $z^3 - z_0$  y por el teorema fundamental del álgebra tiene 3 raíces (contando multiplicidad). Por la fórmula de de Moivre, sabemos que son tres raíces distintas:

$$\alpha^{-1}[z] = \left\{ e^{2\pi i t/3}, e^{2\pi i(t+1)/3}, e^{2\pi i(t+2)/3} \right\}.$$

Por lo tanto el grado de  $\alpha$  está bien definido para cualquier valor regular y vale  $\text{grad}(\alpha) = 3$ . Esto sugiere la idea de que  $\alpha$  enrollar el círculo tres veces:

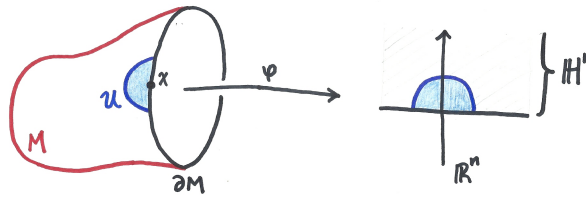
**Teorema 5.** (Hopf) La función  $g : \pi_n(\mathbb{S}^n, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$  es un isomorfismo de grupos, es decir:

$$\pi_n(\mathbb{S}^n, 1) \cong \mathbb{Z}$$

### 0.1.1 Variedades con frontera

Es útil introducir variedades con frontera, especialmente para la sección ???. La definición es casi idéntica a la definición usual de variedad, pero antes de empezar sólo recuerdo que el semiplano  $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n$  se define como  $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$ .

**Definición 15.** Sea  $M$  un espacio topológico paracompacto.  $M$  es una *variedad con frontera* si para todo  $x \in M$  existe una vecindad abierta  $U$  de  $x$  y una función continua  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{H}^n$  que es un homeomorfismo sobre su imagen. La *frontera* de  $M$  se define como  $\partial M := \{x \in M \mid \exists (U, \varphi) \text{ tal que } \varphi(x) = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)\}$



Ojo: probar que  $\partial M$  está bien definido es muy complicado

*Nota.* De ahora en adelante “variedad” siempre significa una variedad sin frontera como en la definición original y “variedad con frontera” siempre se refiere a la definición anterior.

La frontera  $\partial M$  de una variedad con frontera  $M^n$  es naturalmente una variedad de dimensión  $n - 1$ , entonces viene equipado de un espacio tangente  $T_x \partial M$  para cada  $x \in \partial M$ . Además,  $x \in \partial M \subset M$  también tiene asociado el espacio tangente  $T_x M$ . Por lo tanto  $T_x \partial M$  es un subespacio de  $T_x M$  de codimensión 1 y así, divide el espacio tangente en dos semiplanos.

Dado un vector  $v \in T_x M - T_x \partial M$ , éste puede estar en sólo uno de estos semiplanos. Decimos que  $v$  apunta hacia adentro si la variedad  $M$  está en la dirección de  $v$  y decimos que  $v$  apunta hacia afuera en el otro caso (ve la siguiente figura).

La orientación de una variedad se puede traducir a una variedad con frontera. Sea  $M$  una variedad con frontera y supongo que tiene una orientación  $\mathfrak{O}_M := \{\mathfrak{o}_x\}_{x \in M}$ . Entonces puedo definir una orientación para  $\partial M$  de la siguiente manera:

Para  $x \in \partial M \subset M$ , tomo la orientación  $\mathfrak{o}_x = [\beta]$  donde  $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$  es una base de  $T_x M$  de tal manera que  $v_1$  es un vector que apunta hacia afuera. Entonces defino la orientación  $\mathfrak{o}'_x \in \mathfrak{O}_{\partial M}$  como  $\mathfrak{o}'_x = [\{v_2, \dots, v_n\}]$ .

