0.1 Homología de las esferas

En esta sección nos vamos a dedicar a calcular homología de las esferas y ver unas consecuencias importantes de estos calculos. Fijamos un anillo conmutativo R para poder omitirlo de la notación. La primera proposición nos dice cuando podemos aplicar el teorema de escisión:

Proposición 1. Sean $V \subset U \subset A \subset X$ tal que V se puede escindir de la pareja (X, A). Si la inclusión $j : (X - U, A - U) \hookrightarrow (X - V, A - V)$ es un retracto por deformación, entonces U se puede escindir de (X, A).

Proof. Si escribimos $i : (X - V, A - V) \hookrightarrow (X, A)$ como la inclusión, entonces por hipótesis $H_n(i)$ es un isomorfismo. Además, como j es un retracto por deformación, existe un morfismo $r : (X - V, A - V) \to (X-U, A-U)$ tal que $r \circ j = \mathrm{Id}_{X-U}$ y $j \circ r \simeq \mathrm{Id}_{X-V}$, en particular $j_\# : S_\bullet(X-U, A-U) \to S_\bullet(X-V, A-V)$ es una equivalencia homotópica de complejos de cadena. Por lo tanto $H_n(j)$ es un isomorfismo. Por último, como la inclusión $l : (X-U, A-U) \hookrightarrow (X, A)$ es la composición $l = i \circ j$, entonces $H_n(l) = H_n(i) \circ H_n(j)$ es la composición de dos isomorfismos. Por lo tanto U se puede escindir de (X, A). $\square$

Ejemplo 1. Sean $\mathbb{S}^n_+$ y $\mathbb{S}^n_-$ los hemisferios cerrados de $\mathbb{S}^n$. Tomamos $X = \mathbb{S}^n$, $A = \mathbb{S}^n_+$ y $U = \mathring{\mathbb{S}}^n_+$. Observa que $V = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid x_n > \frac{1}{2}\}$ se escinde de (X, A) porque $V \subset \mathring{A}$. Además la inclusión

$$j : (X - U, A - U) = (\mathbb{S}^n_-, \mathbb{S}^{n-1}) \hookrightarrow (\mathbb{S}^n - V, \mathbb{S}^n_+ - V)$$

es un retracto por deformación: simplemente define $r : (\mathbb{S}^n - V, \mathbb{S}^n_+ - V) \to (\mathbb{S}^n_-, \mathbb{S}^{n-1})$ como flujo geodésico hacia el polo sur que mueve el círculo $\{x \in \mathbb{S}^n \mid x_{n+1} = \frac{1}{2}\}$ al ecuador:

Por lo tanto podemos escindir U de (X, A), es decir los hemisferios abiertos de $\mathbb{S}^n$ se pueden escindir de la esfera relativo al ese mismo hemisferio.

Ahora modificamos un poco la definición de homología para poder calcularla mejor:

Definición 1. La *homología reducida* de X se define como una de las tres definiciones equivalentes:

1. $\tilde{H}_n(X) := H_n(X, \{x\})$ para alguna $x \in X$.
2. $\tilde{H}_n(X) := \ker H_n(\mathrm{cte})$ donde $\mathrm{cte} : X \to \{x\}$ es la función constante y $H_n(\mathrm{cte}) : H_n(X) \to H_n(\{x\})$ el morfismo inducido en homología
3. $\tilde{H}_n(X)$ es la homología del complejo aumentado:

$$\cdots \longrightarrow S_n(X) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

donde $\varepsilon : S_0(X) \to R$ está definido por $\sum r_\sigma \sigma \mapsto \sum r_\sigma$.

Nota. Observa que la tercera definición nos dice que la homología reducida coincide con la usual para $n > 0$:

$$\tilde{H}_n(X) = H_n(X) \quad \forall n > 0 \quad \text{y} \quad \tilde{H}_0(X) = \frac{\ker \varepsilon}{\mathrm{Im}\,(\partial_1)}.$$

Ejercicio 1. Las tres definiciones de homología reducida son equivalentes.

Proof. El teorema **??** dice que existe una sucesión exacta larga:

$$\cdots \longrightarrow H_n(\{x\}) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X, \{x\}) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(\{x\}) \longrightarrow H_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots.$$

Pero ya hemos calculado la homología de un punto (cf. proposición **??**), entonces la sucesión exacta larga se reduce a:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X, \{x\}) \xrightarrow{d_n} 0 \longrightarrow \cdots$$

y para $n = 0, 1$ la sucesión exacta larga termina en

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow H_1(X) \longrightarrow H_1(X, \{x\}) \xrightarrow{d_1} R \longrightarrow H_0(X) \longrightarrow H_0(X, \{x\}) \longrightarrow 0.$$

Para $n > 1$ podemos concluir que $H_n(X) \cong H_n(X, \{x\})$ $\square$

La sucesión exacta larga de la homología usual tiene un análogo en la homología reducida:

Ejercicio 2.

Proof. □

Con estos resultados podemos calcular la homología de las esferas:

Proposición 2.

$$\tilde{H}_n(\mathbb{S}^m; R) \cong \begin{cases} R & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

Proof. Consideramos la sucesión exacta larga del ejercicio pasado a la pareja $(\mathbb{D}^m, \mathbb{S}^{m-1})$. Como $\mathbb{D}^m$ es contraible, entonces $H_n(\mathbb{D}^m) = 0$ y así obtenemos:

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_n(\mathbb{S}^{m-1}) \longrightarrow 0 \longrightarrow H_n(\mathbb{D}^m, \mathbb{S}^{m-1}) \longrightarrow \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{m-1}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots.$$

En particular

$$H_n(\mathbb{D}^m, \mathbb{S}^{m-1}) \cong \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{m-1}) \tag{1}$$

y el isomorfismo es natural (ie. conmuta con los morfismos inducidas por funciones continuas).

Por otro lado, la carta $h^+_{m+1} : (\mathbb{S}^m_+, \mathbb{S}^{m-1}) \to (\mathbb{D}^m, \mathbb{S}^{m-1})$ donde $h^+_{m+1}(x_1, \ldots, x_{m+1}) = (x_1, \ldots, x_m)$ es un homeomorfismo, entonces tenemos que sus homologías son isomorfas:

$$H_n(\mathbb{S}^m_+, \mathbb{S}^{m-1}) \cong H_n(\mathbb{D}^m, \mathbb{S}^{m-1}) \tag{2}$$

Este isomorfismo también es natural porque depende solamente de la clase de homeomorfismo.

Ahora si escribimos la sucesión exacta larga para la pareja $(\mathbb{S}^m, \mathbb{S}^m_+)$ y observamos que $\mathbb{S}^m_+$ es constraible (porque es homeomorfo al disco) entonces tenemos que

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \tilde{H}_n(\mathbb{S}^m) \longrightarrow H_n(\mathbb{S}^m, \mathbb{S}^m_+) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

y en particular:

$$\tilde{H}_n(\mathbb{S}^m) \cong H_n(\mathbb{S}^m, \mathbb{S}^m_+), \tag{3}$$

que también es canónico porque depende solamente de la pareja $(\mathbb{S}^m, \mathbb{S}^m_+)$.

Por el ejemplo anterior, la inclusión $\imath : (\mathbb{S}^m_+, \mathbb{S}^{m-1}) \hookrightarrow (\mathbb{S}^m, \mathbb{S}^m_+)$ es un escisión entonces $H_n(\imath)$ es un isomorfismo, es decir:

$$H_n(\mathbb{S}^m_+, \mathbb{S}^{m-1}) \cong H_n(\mathbb{S}^m, \mathbb{S}^m_+). \tag{4}$$

Si juntamos los cuatro ismorfismos (1), (2), (3) y (4), entonces obtenemos:

$$\tilde{H}_n(\mathbb{S}^m) \cong H_n(\mathbb{S}^m, \mathbb{S}^m_+) \cong H_n(\mathbb{S}^m_+, \mathbb{S}^{m-1}) \cong H_n(\mathbb{D}^m, \mathbb{S}^{m-1}) \cong \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{m-1}).$$

Esta fórmula nos permite calcular $\tilde{H}_n(\mathbb{S}^m)$ con inducción:

($m = 0$) En este caso, el teorema de escisión nos dice que la inclusión $(\mathbb{S}^0 - \{1\}, \{1\} - \{1\}) = (\{-1\}, \emptyset) \hookrightarrow (\mathbb{S}^0, \{1\})$ es una escisión, entonces:

$$\tilde{H}_n(\mathbb{S}^0) \overset{\text{def}}{=} H_n(\mathbb{S}^0, \{1\}) \cong H_n(\{-1\}, \emptyset) \cong H_n(\{-1\}) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } n > 0 \\ R & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

($m - 1 \Longrightarrow m$) Usamos los cuatro isomorfismos y la hipótesis de inducción:

$$\tilde{H}_n(\mathbb{S}^m) \cong \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{m-1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n-1 \neq m-1 \\ R & \text{si } n-1 = m-1 \end{cases}$$

□

Nota. El isomorfismo $\tilde{H}_n(\mathbb{S}^m) \cong \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{m-1})$, reescrito con la identidad $\mathcal{S}\mathbb{S}^{m-1} \approx \mathbb{S}^m$ (cf. el corolario **??**), se llama el *isomorfismo de suspensión* y se escribe:

$$\tilde{H}_{n+1}(\mathcal{S}\mathbb{S}^m) \cong \tilde{H}_n(\mathbb{S}^m).$$

Corolario 1.

$$H_n(\mathbb{S}^m; R) \cong \begin{cases} R & si \;\; n = m, 0 \\ 0 & si \;\; n \neq m, \; n \neq 0 \end{cases}$$

Una vez calculadas las homologías de las esferas, podemos probar varios teoremas importantes. Empecemos con el teorema del punto fijo de Brower. Para esto necesitamos un lema sencillo:

Lema 2. *No existe un retracto* $r : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$*.*

Proof. Si existiese un retracto r tenríamos que $r \circ \imath = \mathrm{Id}_{\mathbb{S}^n}$ donde $\imath : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{D}^{n+1}$ es la inclusión. A nivel de homologías tendríamos que

$$\begin{tikzcd} H_n(\mathbb{S}^n) \arrow[rr, "\mathrm{Id}"] \arrow[dr, "H_n(\imath)"'] & & H_n(\mathbb{S}^n) \\ & H_n(\mathbb{D}^{n+1}) \arrow[ur, "H_n(r)"'] & \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\mathrm{Id}"] \arrow[dr, "H_n(\imath)"'] & & R \\ & 0 \arrow[ur, "H_n(r)"'] & \end{tikzcd}$$

lo cual es una contradicción porque el segundo diagrama dice que $\mathrm{Id} = 0 \circ 0$! ☐

Teorema 3. *(Teorema del punto fijo de Brower) Toda función continua* $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ *tiene un punto fijo.*

Proof. Supongamos que f no tiene puntos fijos, entonces el vector $x - f(x) \neq 0$ define un rayo $\mathcal{L}_x := \{x + t(f(x) - x) \mid t \geq 0\}$ que empieza en x y cruza por $f(x)$. Este rayo intersecta a $\partial\mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1}$ en un punto $r(x) := \mathbb{S}^{n-1} \cap \mathcal{L}_x$. Claramente $r|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ porque siempre se tiene que $x \in \mathcal{L}_x$ y si $s \in \mathbb{S}^{n-1}$, entonces $r(x) = \mathbb{S}^{n-1} \cap \mathcal{L}_x = x$. Por lo tanto si $r : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ es continua, sería un retracto y por el lema anterior esto es una contradicción.

Ejercicio 3. r es continua.

Proof. Simplemente parametrizamos a r. Veo todo encajado en $\mathbb{R}^n$, entonces puedo escribir $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Parametrizo el rayo $\mathcal{L}_x = \{x + t(f(x) - x) \mid t \geq 0\}$ como $\mathcal{L}_x(t) = x + t(f(x) - x)$, entonces la intersección del rayo con $\partial\mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1}$ es el conjunto de puntos del rayo que son unitarios, por lo tanto $\mathcal{L}_x(t) = x + t(f(x) - x)$ está en la intersección si y sólo si

$$\begin{aligned} 1 &= \|\mathcal{L}_x(t)\|^2 = \langle x + t(f(x) - x), x + t(f(x) - x)\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + 2t\langle x, f(x) - x\rangle + t^2\langle f(x) - x, f(x) - x\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2t\big(\langle x, f(x)\rangle - \|x\|^2\big) + t^2\|f(x) - x\|^2 \\ \therefore 0 &= \underbrace{\big(\|x\|^2 - 1\big)}_{c} + \underbrace{\big(2\langle x, f(x)\rangle - 2\|x\|^2\big)}_{b}t + \underbrace{\|f(x) - x\|^2}_{a}t^2. \end{aligned}$$

Es decir t satisface un polinomio de grado 2. Observa que los coeficientes son funciones continuas de x ya que tomar normas es continuo y porque el producto interior $\langle x, f(x)\rangle = x_1 f_1(x) + \cdots + x_n f_n(x)$ es una combinación lineal de funciones continuas (ie. las componentes f_i de f que es continua). Por lo tanto $a = a(x)$, $b = b(x)$ y $c = c(x)$ son funciones continuas.

Observa que el discriminante del polinomio $p(t) := c(x) + b(x)t + a(x)t^2$ es positivo porque $a > 0$ por hipótesis (ie. f no tiene puntos fijos), y porque $x \in \mathbb{D}^n$ implica que $\|x\|^2 - 1 \leq 0$; estas dos cosas juntas nos garantizan que $b^2 - 4ac > 0$. Por lo tanto el polinomio $p(t)$ tiene dos raices reales. Un de ellas es

$$t_x := \frac{-b(x) + \sqrt{b(x)^2 - 4a(x)c(x)}}{2a(x)}$$

La otra raíz es necesariamente negativa porque el numerador tendría dos restas. Observa que, como función de x, t_x es continua porque es la composición de funciones continuas y porque $a(x) \neq 0$ y porque $b(x)^2 - 4a(x)c(x) \geq 0$ para toda x. Por lo tanto la función $s : \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definido por $x \mapsto t_x$ es continua.

Por contrucción sabemos que $\mathcal{L}_x(t_x) \in \mathbb{S}^{n-1}$. Por lo tanto $r(x) = \mathcal{L}_x(t_x)$ donde $\mathcal{L}_x(t)$ es una función continua (es lineal) y donde t_x es continua por construcción. Con esto concluimos que r es continua. ☐

□

El teorema del punto fijo de Brower se puede generalizar:

Teorema 4. *(Teorema del punto fijo de Lefschitz) Sea X un espacio triangulable y compacto, $f : X \to X$ continua con morfismo inducido $H_n(f) : H_n(X;\mathbb{Q}) \to H_n(X,\mathbb{Q})$ (que es una Q-tranformación lineal), Si*

$$\lambda(f) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, Tr(H_n(f)) \neq 0$$

entonces f tiene un punto fijo.

Las esferas de dimensiones distintas no son homtópicas:

Proposición 3. Si $n \neq m$ entonces $\mathbb{S}^n \not\simeq \mathbb{S}^m$.

Proof. Si $\mathbb{S}^n \simeq \mathbb{S}^m$ entonces $R \cong H_n(\mathbb{S}^n) \cong H_n(\mathbb{S}^m) = 0$! □

Corolario 5. *Si $n \neq m$ entonces $\mathbb{R}^n \not\approx \mathbb{R}^m$.*

Proof. Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es un homeomorfismo y sin pérdida de generalidad supongamos que $f(0) = 0$. En este caso $\hat{f} := f|_{\mathbb{R}^n - \{0\}} : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}^m - \{0\}$ es un homeomorfismo. Pero la inclusiín $\imath : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ es un retracto por deformación, entonces induce un isomorfismo en homologías y así obtenemos la contradicción:

$$H_n(\mathbb{S}^n) \overset{\imath}{\cong} H_n(\mathbb{R}^n - \{0\}) \overset{\hat{f}}{\cong} H_n(\mathbb{R}^m - \{0\}) \overset{r}{\cong} H_n(\mathbb{S}^m)!$$

□

Ejercicio 4. La inclusión $\imath : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ es un retracto por deformación.

Proof. La función $r : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{S}^{n-1}$, definida por $x \mapsto x/\|x\|$ es claramente continua y cumple que $r(\imath(x)) = x$ porque $\|\imath(x)\| = 1$. Por lo tanto $r \circ \imath = \mathrm{Id}$.

Por otro lado, $H : (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times I \to \mathbb{R}^n - \{0\}$ definido por

$$H(x,t) = \frac{x}{1 - t + t\|x\|} \quad \text{con} \quad H(x,0) = x \;\; , \;\; H(x,1) = \frac{x}{\|x\|} = \imath\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \imath r(x)$$

Observa que

$$1 - t + t\|x\| = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = \frac{1}{1 - \|x\|} > 1,$$

entonces H está bien definida y es continua. Por lo tanto $\imath \circ r \simeq_H \mathrm{Id}$. □

También podemos clasificar ciertos morfismos en homologías.

Definición 2. Sea $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ y $H_n(f) : H_n(\mathbb{S}^n;\mathbb{Z}) \to (\mathbb{S}^n;\mathbb{Z})$ el morfismo inducido. Como morfismo de grupos, sabemos que $\mathrm{Im}\,(H_n(f)) = m\mathbb{Z}$ para algún entero $m > 0$.

Nota. Por el teorema de la invariancia homotópica de la homología, esta elección de m no depende de la clase de homología de f.

Ahora calculamos los grados de algunas funciones

Ejemplo 2. (Reflexión en una coordenada) Definimos

$$\rho_i : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n \quad \text{con} \quad \rho_i(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_{n+1}).$$

Asumimos sin pérdida de generalidad que $\rho_i = \rho = 1$. Primero calculamos el caso $n = 0$. Con el complejo singular aumentado:

$$\cdots \longrightarrow S_1(\mathbb{S}^0) \xrightarrow{\partial_1} S_0(\mathbb{S}^0) \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

calculamos:

$$\tilde{H}_0(\mathbb{S}^0) = \frac{\ker \varepsilon}{\operatorname{Im}(\partial_1)} = \frac{\ker \varepsilon}{0} = \ker \varepsilon$$

Observa que $\varepsilon(\alpha(+1) + \beta(-1)) = \alpha + \beta$. Por lo tanto $\ker \varepsilon$ es el conjunto definido por $\{\alpha + \beta = 0\}$ que es isomorfo a R mediante $\alpha(+1) + \beta(-1) \mapsto \alpha$. Por lo tanto

$$\tilde{H}_0(\mathbb{S}^0; R) \cong R.$$

Ahora, como $\rho(\pm 1) = \mp 1$, entonces

$$H_0(\rho)[\alpha(+1) + \beta(-1)] = [\alpha(-1) + \beta(+1)] = -[\alpha(+1) + \beta(-1)].$$

Es decir que $H_0(\rho)$ es la función multiplicar por -1 en R. Con el isomorfismo de suspensión calculamos $H_n(\rho)$ por inducción. El diagrama

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \arrow[r, "H_n(\rho)"] \arrow[d, "\cong"] & \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \arrow[d, "\cong"] \\
\tilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^n) \arrow[r, "H_{n-1}(\rho)"] & H_{n-1}(\mathbb{S}^n)
\end{tikzcd}$$