

## 0.1 Complejos Simpliciales

### 0.1.1 Complejos simpliciales geométricos

**Definición 1.** Un subconjunto  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^n$  es *afin-independiente* (AI) si el conjunto de diferencias  $\{a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$  es linealmente independiente en  $\mathbb{R}^n$ .

En palabras esto significa que un conjunto  $\{a_0, \dots, a_n\}$  es AI si el conjunto  $\{a_1, \dots, a_n\}$  bajo la traslación  $a_0 \mapsto 0$ , es linealmente independiente. En particular, si  $\{a_1, \dots, a_n\}$  es linealmente independiente en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\{0, a_1, \dots, a_n\}$  es AI.

Observa que en la definición de AI, puedo tomar cualquier espacio ambiente  $\mathbb{R}^N$  con la condición  $N \geq n$ .

**Ejercicio 1.** Prueba que  $\{a_0, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^n$  es AI si y sólo si para todas  $\lambda_i$ 's tales que  $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 0$  se cumple que  $\sum \lambda_i a_i = 0 \implies \lambda_i = 0$  para toda  $i \in \{0, \dots, n\}$ .

*Proof.* Sea  $\{a_0, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^n$

( $\implies$ ) Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tales que  $\sum \lambda_i = 0$  y supongo que  $\sum \lambda_i a_i = 0$ . Entonces

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_0) = -a_0 \sum_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = -a_0(-\lambda_0) - \lambda_0 a_0 = 0.$$

Como  $\{a_0, \dots, a_n\}$  es AI,  $\{a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$  es linealmente independiente y así concluyo que  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ . Por último, sustituyo esto en  $\sum \lambda_i = 0$  para concluir que también  $\lambda_0 = 0$ .

( $\impliedby$ ) Sea  $\sum \mu_i (a_i - a_0) = 0$  una combinación lineal. Entonces

$$\sum_{i=1}^n \mu_i a_i = a_0 \sum_{i=1}^n \mu_i. \quad (1)$$

Ahora defino  $\lambda_i := \mu_i$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$  y defino  $\lambda_0 = -\mu_1 - \dots - \mu_n$ . Observa que  $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 0$  por definición. Además la ecuación (1) se convierte en:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = a_0(-\lambda_0) \implies \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i = 0.$$

Por hipótesis esto implica que  $\lambda_i = 0$  para toda  $i \in \{0, \dots, n\}$ . En particular  $\mu_1 = \dots = \mu_n = 0$  y  $\{a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$  es linealmente independiente. Por lo tanto  $\{a_0, \dots, a_n\}$  es AI. □

Este ejercicio dice que la condición AI es casi equivalente a la independencia lineal, la única restricción es que los coeficientes de la combinación lineal (igualada a cero) deben sumar 0. Esta condición adicional literalmente “traslada” la condición de independencia lineal al punto  $a_0$ .

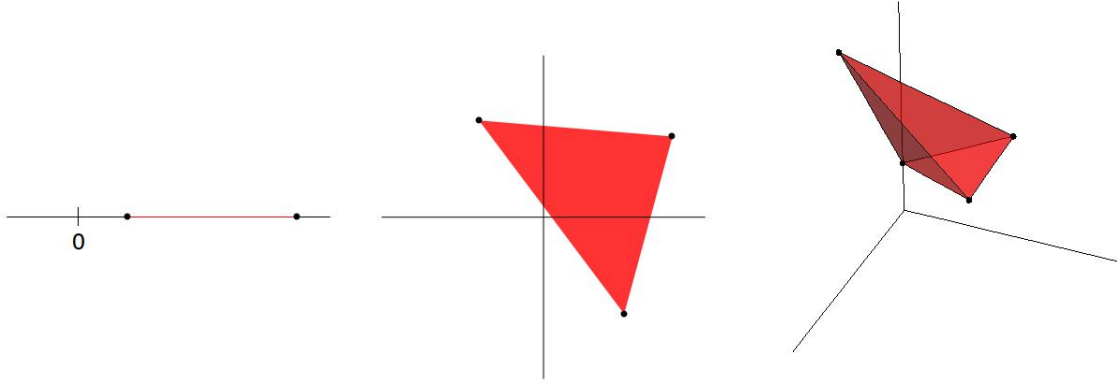
**Definición 2.** Un *n-simplejo geométrico* en  $\mathbb{R}^N$  (en particular  $N \geq n$ ) es un subconjunto  $\sigma_n \subset \mathbb{R}^N$  de la forma:

$$\sigma_n = \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i \mid \{a_0, \dots, a_n\} \text{ es AI, } \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

y se denota como  $\sigma_n = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$  (ve la figura 1).

*Nota.* Esta definición es exactamente la definición de la cerradura convexa del conjunto  $\{a_0, \dots, a_n\}$ , ie.  $\text{Conv}(a_0, \dots, a_n) = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$ .

Figure 1: Ejemplos de  $n$ -simplejos geométricos de dimensión 1,2 y 3



Recuerda que la cerradura convexa de un conjunto  $X \subset \mathbb{R}^N$  (en este caso tomo  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  finito) es la intersección de todos los conjuntos convexos que lo contienen. Más precisamente si escribo  $\mathfrak{C} = \{Y \subseteq \mathbb{R}^N \mid Y \text{ es convexo y } X \subseteq Y\}$ , entonces

$$\text{Conv}(X) = \bigcap_{Y \in \mathfrak{C}} Y. \quad (2)$$

Es sencillo probar (2): primero observa que  $\text{Conv}(X)$  es un conjunto convexo porque si  $\lambda = \sum \lambda_i x_i, \mu = \sum \mu_i x_i \in \text{Conv}(X)$  entonces

$$t\lambda + (1-t)\mu = \sum_{i=1}^n (t\lambda_i + (1-t)\mu_i)x_i \in \text{Conv}(X) \quad \forall t \in [0, 1]$$

ya que

$$\sum_{i=1}^n t\lambda_i + (1-t)\mu_i = t \sum_{i=1}^n \lambda_i + (1-t) \sum_{i=1}^n \mu_i = t + (1-t) = 1.$$

Por lo tanto  $\text{Conv}(X) \in \mathfrak{C}$  y la contención  $\supseteq$  de (2) se cumple. Para la otra contención considera  $Y \in \mathfrak{C}$  y observa que si  $\sum \lambda_i x_i \in \text{Conv}(X)$  entonces  $\sum \lambda_i x_i \in Y$  porque  $x_1, \dots, x_n \in Y$ ,  $\sum \lambda_i = 1$  y  $Y$  es convexo; por lo tanto  $\text{Conv}(X) \subseteq Y$  para toda  $Y \in \mathfrak{C}$ .

Por último, la intersección de conjuntos convexos es convexo (razón: si  $x, y \in \cap Y_i$  con  $Y_i$  convexo, entonces la recta  $\mathcal{L}$  que un  $x, y$  está contenido en cada  $Y_i$  y así  $\mathcal{L} \subseteq \cap Y_i$ ), entonces he probado que:

**Proposición 1.** El  $n$ -simplejo geométrico  $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$  es el conjunto convexo más pequeño que contiene al conjunto  $\{a_0, \dots, a_n\}$ , en general:

$$\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle = \text{Conv}(a_0, \dots, a_n) = \bigcap_{Y \in \mathfrak{C}} Y$$

donde  $\mathfrak{C}$  es la familia de conjuntos convexos  $Y$  que contienen a  $\{a_0, \dots, a_n\}$ .

Hay una clase de  $n$ -simplejos muy importantes:

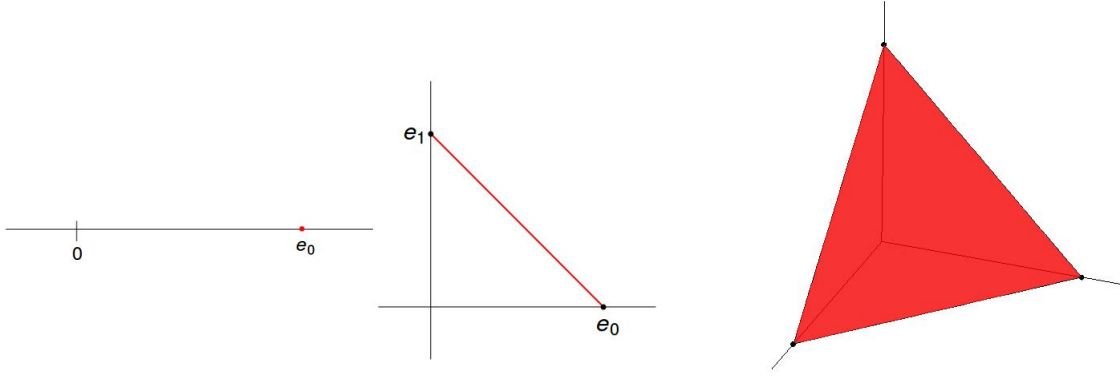
**Definición 3.** El  $n$ -simplejo geométrico estándar, denotado por  $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , es el  $n$ -simplejo generado por la base canónica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , ie.  $\Delta^n := \langle e_0, \dots, e_n \rangle$ .

Ve la figura 2 para los primeros ejemplos.

Observa que podemos encajar  $\Delta^n$  en  $\mathbb{R}^n$  en lugar de  $\mathbb{R}^{n+1}$  como  $\Delta^n = \langle 0, e_1, \dots, e_n \rangle$ ; en este caso  $\Delta^n = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum \lambda_i \leq 1, \lambda_i \geq 0\}$ . Estas dos maneras de definir los simplejos estándares son equivalentes entonces usaré ambas descripciones intercambiamente.

Los  $n$ -simplejos geométricos estándares nos permite clasificar topológicamente todos los  $n$ -simplejos geométricos mediante la siguiente proposición:

Figure 2: Ejemplos de  $n$ -simplejos geométricos estándares de dimensión 0,1 y 2



**Proposición 2.** Sean  $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$  y  $\tau = \langle b_0, \dots, b_n \rangle$  dos  $n$ -simplejos en  $\mathbb{R}^N$ . Entonces  $\sigma \approx \tau$  donde el homeomorfismo sólo depende de los vértices. En este caso se dice que  $\sigma$  y  $\tau$  son *afinmente homeomorfos*.

**Ejercicio 2.** La función  $f : \sigma \rightarrow \tau$  definida por  $f(\sum \lambda_i a_i) = \sum \lambda_i b_i$  es un homeomorfismo.<sup>1</sup>

*Proof.* Primero observa que si  $x = \sum \lambda_i a_i \in \sigma$ , entonces  $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_n$  y así:

$$\begin{aligned} x &= \lambda_0 a_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = a_0 \left(1 + \sum_{i=1}^n (-\lambda_i)\right) + \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = a_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_0) \\ \therefore x - a_0 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_0) \end{aligned}$$

Ahora defino  $T_{a_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  como la traslación  $x \mapsto x - a_0$ . Por lo tanto  $T_{a_0}[\sigma] = \langle 0, a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0 \rangle$  donde  $A = \{a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$  es una base. Después defino  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  como la transformación lineal que cambia la base  $A$  en la base  $B = \{b_1 - b_0, \dots, b_n - b_0\}$ , en particular  $F(a_i - a_0) = b_i - b_0$ . Por último sea  $T_{-b_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la traslación  $x \mapsto x + b_0$ . Claramente cada una de estas tres funciones son homeomorfismos entonces su composición es un homeomorfismo de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ .

Para  $x = \sum \lambda_i a_i \in \sigma$  calculo:

$$\begin{aligned} (T_{-b_0} \circ F \circ T_{a_0})(x) &= (T_{-b_0} \circ F)(x - a_0) = (T_{-b_0} \circ F) \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_0) \right) \\ &= T_{-b_0} \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i (b_i - b_0) \right) = b_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i (b_i - b_0) = \sum_{i=0}^n \lambda_i b_i = f(x) \\ \therefore (T_{-b_0} \circ F \circ T_{a_0})|_{\sigma} &= f \end{aligned}$$

y así  $f$  es casi un homeomorfismo, lo único que hace falta calcular es la imagen de  $f$ . Pero esto es sencillo:

$$\text{Im}(f) = \{f(\sum \lambda_i a_i) \mid \sum \lambda_i a_i \in \sigma\} = \{\sum \lambda_i b_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1\} = \tau.$$

Por lo tanto:

$$(T_{-b_0} \circ F \circ T_{a_0})|_{\sigma} = f : \sigma \rightarrow \tau$$

es un homeomorfismo por ser restricción del homeomorfismo  $T_{-b_0} \circ F \circ T_{a_0}$  (co-restringido a su imagen).  $\square$

Un corolario inmediato de este ejercicio es que todo  $n$ -simplejo geométrico  $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$  es homeomorfo al complejo geométrico estándar  $\Delta^n$ . Por lo tanto la topología de  $\Delta^n$  completamente determina la topología de los  $n$ -simplejos geométricos:

<sup>1</sup>En clase probamos esto usando el hecho que los  $n$ -simplejos geométricos son compactos (cf. ejercicio 3), pero modifiqué esta prueba para no usar la compacidad para poder demostrar el ejercicio 3 con este ejercicio y así evitar un círculo lógico.

**Ejercicio 3.** Todo  $n$ -simplejo geométrico  $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$  es cerrado, convexo y compacto como subespacio de  $\mathbb{R}^N$ .

*Proof.* Como  $\sigma = \text{Conv}(a_0, \dots, a_n)$  (por la proposición 1), entonces  $\sigma$  es convexo.

Para probar compacidad, basta probar que los  $n$ -simplejos geométricos estándares son compactos ya que todo  $n$ -simplejo geométrico es homeomorfo a  $\Delta^n$  (cf. ejercicio 2).

Sea  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$  el plano definido por  $x_1 + \dots + x_n = 1$  y  $C \subset \mathbb{R}^n$  el primer cuadrante, ie.  $C = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0\}$ . Observa que ambos conjuntos son cerrados. Ahora pruebo que:

$$\Delta^n = \langle 0, e_1, \dots, e_n \rangle = \mathcal{P} \cap C$$

y así  $\Delta^n$  es cerrado.

( $\subseteq$ ) Sea  $x = \sum \lambda_i e_i$  donde  $0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$  y  $\lambda_i \geq 0$ . Como  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es la base estándar, entonces  $x = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  y claramente se cumple que  $x \in \mathcal{P} \cap C$ .

( $\supseteq$ ) Sea  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{P} \cap C$ , entonces  $x_1 + \dots + x_n = 1$  y  $x_i \geq 0$ . Si tomo  $\lambda_i = x_i$  entonces  $x = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum \lambda_i e_i \in \Delta^n$ .

Por último observa que si  $x = \sum \lambda_i e_i \in \Delta^n$  entonces:

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|\lambda_i e_i\| = \sum_{i=1}^n |\lambda_i| = \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

ya que  $0 \leq \lambda_i$ . Por lo tanto  $\Delta^n$  es un conjunto cerrado y acotado en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\Delta^n$  es compacto.  $\square$

**Definición 4.** Sea  $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$  un  $n$ -simplejo geométrico y  $m \leq n$ . Una  $m$ -cara  $\tau$  de  $\sigma$  es el  $m$ -simplejo geométrico asociado a algún subconjunto  $\{a_{i_0}, \dots, a_{i_m}\}$  de  $\{a_0, \dots, a_n\}$ , es decir  $\tau = \langle a_{i_0}, \dots, a_{i_m} \rangle \subseteq \sigma$ .

**Definición 5.** El *baricentro* de un  $n$ -simplejo geométrico  $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$  es el punto

$$\mathbf{b}(\sigma) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n a_i$$

Observa que el baricentro  $\mathbf{b}(\sigma)$  es un elemento de  $\sigma$  porque  $\sum \frac{1}{n+1} = 1$ .

Los  $n$ -simplejos por sí solos no son muy interesantes topológicamente (acabamos de clasificarlos todos!), pero forman parte de una construcción muy importante:

**Definición 6.** Un *complejo simplicial geométrico* en  $\mathbb{R}^N$  es una familia finita  $K$  de simplejos geométricos (de dimensión  $\leq N$ ) que cumple dos propiedades:

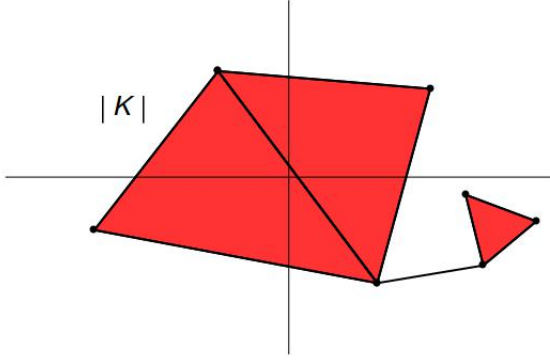
- (i)  $K$  contiene todas las caras de todos sus elementos, es decir si  $\sigma \in K$  y  $\tau \subset \sigma$  es una cara, entonces  $\tau \in K$ .
- (ii) La intersección de cualesquiera dos  $\sigma, \tau \in K$  es una cara común de  $\sigma$  y  $\tau$  (también incluyo el caso cuando la intersección es vacía).

Intuitivamente, la primera propiedad nada más garantiza que estás trabajando con todos los posibles sub-simplejos del complejo. La segunda condición te dice que los simplejos se pegan bien, es decir a lo largo de caras (que por la primera propiedad son elementos de  $K$ ).

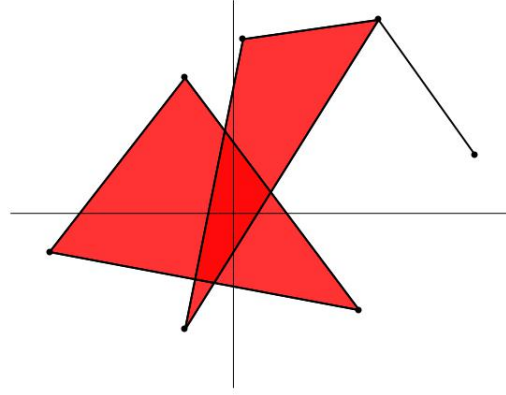
Para visualizar un complejo simplicial geométrico  $K$ , dibujamos su “realización geométrica”  $|K| := \{x \in \mathbb{R}^N \mid \exists \sigma \in K \text{ tal que } x \in \sigma\} = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ .

Esta construcción se puede generalizar considerablemente.

(a) Sí es complejo simplicial geométrico.



(b) No es complejo simplicial geométrico.



### 0.1.2 Complejos simpliciales abstractos

**Definición 7.** Una *complejo simplicial* (abstracto)  $K$  es una familia de subconjuntos finitos no vacíos de un conjunto  $V_K$ , cuyos elementos se llaman *vértices*, que satisface:

- (i)  $K$  contiene todos los singuletes de  $V_K$ , es decir  $v \in V_K \implies \{v\} \in K$ .
- (ii)  $K$  es cerrado bajo subconjuntos, es decir si  $L \in K$  y  $L' \subseteq L$  entonces  $L' \in K$ .

Esta definición efectivamente generaliza la definición de complejo simplicial geométrico; la idea es que para pasar de complejos simpliciales geométricos a complejos simpliciales abstractos basta tomar los “vértices” de los simplejos geométricos en lugar de todas las combinaciones convexas de ellas.

**Ejercicio 4.** Todo complejo simplicial geométrico determina un complejo simplicial abstracto.

*Proof.* Sea  $K = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  un complejo simplicial geométrico con  $\sigma_i = \langle a_0^i, \dots, a_{n_i}^i \rangle$ ; los veo encajados en algún  $\mathbb{R}^N$ , ie.  $a_j^i \in \mathbb{R}^N$  para toda  $i \in \{1, \dots, n\}$  y para toda  $j \in \{0, \dots, n_i\}$ . Para cada simplejo  $\sigma_i \in K$  defino el conjunto de sus vértices como  $\sigma'_i = \{a_0^i, \dots, a_{n_i}^i\}$ .

En general escribo el conjunto de vértices como

$$V := \bigcup_{i=1}^n \sigma'_i = \{a_j^i\}_{i,j} \subset \mathbb{R}^N$$

y defino  $K' = \{\sigma'_i\}_{i=1}^n$ .

Ahora pruebo que  $K'$  cumple las dos propiedades de ser un complejo simplicial abstracto. Primero observa que para un vértice arbitrario  $a_j^i \in V$ , el simplejo  $\langle a_j^i \rangle$  es una 0-cara del simplejo geométrico  $\sigma_i = \langle a_0^i, \dots, a_{n_i}^i \rangle$  entonces por definición el 0-simplejo geométrico  $\langle a_j^i \rangle$  es un elemento de  $K$ , ie.  $\langle a_j^i \rangle = \sigma_l$  para alguna  $l \in \{1, \dots, n\}$ . Por lo tanto  $\sigma'_l = \{a_j^i\} \in K'$ .

Para probar la segunda propiedad sea  $L = \sigma'_i = \{a_0^i, \dots, a_{n_i}^i\} \in K'$  y sea  $L' \subseteq L$ . Entonces  $L'$  genera una cara del simplejo geométrico  $\sigma_i$ . Por definición, el simplejo generado por  $L'$  es un elemento de  $K$ , ie.  $L'$  genera a algún  $\sigma_k \in K$ . Por lo tanto  $L' = \sigma'_k \in K'$  y termino.  $\square$

Cada complejo simplicial  $K$  tiene una realización topológica, ie. tiene asociado canónicamente un espacio topológico que se denota por  $|K|$ .

**Definición 8.** Sea  $K$  un complejo simplicial con conjunto de vértices  $V_K$ , entonces se define:

$$|K| := \left\{ \sigma : V_K \rightarrow I \subset \mathbb{R} : \sigma^{-1}(0, 1] \in K, \sum_{v \in V_K} \sigma(v) = 1 \right\} \subset \{f : V_K \rightarrow \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^{V_K}$$

que tiene una métrica definida por:

$$d : |K| \times |K| \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad d(\sigma, \tau) = \sqrt{\sum_{v \in V_K} (\sigma(v) - \tau(v))^2}.$$

El espacio topológico inducido por esta métrica se denota por  $|K|_d$ .

Observa que las sumas en la definición anterior están bien definidas porque para  $\sigma \in |K|$  se tiene que  $\sigma(v) \neq 0$  para sólo una cantidad finita de vértices ya que por definición  $\{v \in V_K \mid \sigma(v) \neq 0\} = \sigma^{-1}(0, 1] \in K$  y los elementos de  $K$  son conjuntos finitos.

*Nota.* El conjunto  $\sigma^{-1}(0, 1]$  es exactamente el soporte de la función  $\sigma$ , ie.

$$\sigma^{-1}(0, 1] = \text{Sop}(\sigma) := \{v \in V_K \mid \sigma(v) \neq 0\}.$$

Entonces usaré ambas descripciones intercambiabilmente.

**Ejercicio 5.**  $d$  es una métrica sobre  $|K|$ .

*Proof.* Sean  $\sigma, \sigma' \in |K|$ . Pruebo que  $d$  cumple las tres propiedades de ser una métrica.

1. Si  $d(\sigma, \sigma') = 0$  entonces  $\sum (\sigma(v) - \sigma'(v))^2 = 0$  y como cada sumando es no-negativo, necesariamente se tiene que  $\sigma(v) - \sigma'(v) = 0$  para toda  $v \in V_K$ . Por lo tanto  $\sigma = \sigma'$  como funciones. Para la otra dirección,  $\sigma = \sigma'$  implica que  $(\sigma(v) - \sigma'(v))^2 = 0$  para toda  $v \in V_K$  y así  $d(\sigma, \sigma') = \sum 0 = 0$ .
2. Como  $(\sigma(v) - \sigma'(v))^2 = (\sigma'(v) - \sigma(v))^2$  para toda  $v$ , puedo sumar sobre  $V_K$  y obtengo que  $d(\sigma, \sigma') = d(\sigma', \sigma)$ .
3. La desigualdad del triángulo se cumple por la misma razón que se cumple con la métrica euclideana: sean  $\sigma, \sigma', \sigma'' \in |K|$  y  $L := \sigma^{-1}(0, 1] \cup (\sigma')^{-1}(0, 1] \cup (\sigma'')^{-1}(0, 1]$  que es finito porque es la unión finita de elementos de  $K$ ; sea  $N = \#(L)$  y  $L = \{v_1, \dots, v_N\}$  una enumeración. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} d(\sigma, \sigma'') &= \sqrt{\sum_{i=1}^N (\sigma(v_i) - \sigma''(v_i))^2} \\ &= \|(\sigma(v_1) - \sigma''(v_1), \dots, \sigma(v_N) - \sigma''(v_N))\| \\ &= \|(\sigma(v_1), \dots, \sigma(v_N)) - (\sigma''(v_1), \dots, \sigma''(v_N))\| \end{aligned}$$

donde la última expresión es la distancia usual euclideana entre los puntos  $(\sigma(v_1), \dots, \sigma(v_N))$  y  $(\sigma''(v_1), \dots, \sigma''(v_N))$  de  $\mathbb{R}^N$ . Aquí se vale la desigualdad del triángulo entonces:

$$\begin{aligned} d(\sigma, \sigma'') &\leq \|(\sigma(v_1), \dots, \sigma(v_N)) - (\sigma'(v_1), \dots, \sigma'(v_N))\| + \\ &\quad \|(\sigma'(v_1), \dots, \sigma'(v_N)) - (\sigma''(v_1), \dots, \sigma''(v_N))\| \\ &\leq \|(\sigma(v_1) - \sigma'(v_1), \dots, \sigma(v_N) - \sigma'(v_N))\| + \|(\sigma'(v_1) - \sigma''(v_1), \dots, \sigma'(v_N) - \sigma''(v_N))\| \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^N (\sigma(v_i) - \sigma'(v_i))^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^N (\sigma'(v_i) - \sigma''(v_i))^2} \\ &\leq d(\sigma, \sigma') + d(\sigma', \sigma''). \end{aligned}$$

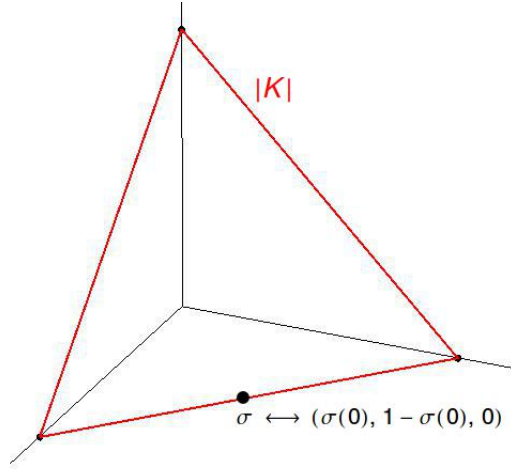
□

Aunque la definición de  $|K|$  parece complicada, sí concuerda con la intuición, especialmente cuando  $V_K$  es finito. Por ejemplo:

**Ejemplo 1.** Sea  $V_K = \{0, e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2$  y  $K = \{\{0\}, \{e_1\}, \{e_2\}, \{0, e_1\}, \{0, e_2\}, \{e_1, e_2\}\}$ . Como  $V_K$  es finito (con tres elementos), entonces una función  $\sigma : V_K \rightarrow I$  la puedo representar como una terna  $\sigma = (\sigma(0), \sigma(e_1), \sigma(e_2))$ . Como  $V_K \notin K$  entonces al menos una coordenada de  $\sigma$  debe ser 0. Por lo tanto, la segunda propiedad que cumple  $\sigma$ , (ie. la suma de las tres coordenadas da 1) me permite describir completamente  $|K|$ . Por ejemplo si  $\sigma(0) = 0$  entonces  $\sigma(e_1) = 1 - \sigma(e_2)$ , por lo tanto cualquier  $\sigma \in |K|$  que cumple que  $\sigma(0) = 0$  está completamente determinado por un parámetro  $t = \sigma(e_1) \in I$ , es decir  $\sigma = (0, t, 1 - t)$ . De esta manera tengo que:

$$|K| = \{(0, t, 1 - t) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{(t, 0, 1 - t) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{(t, 1 - t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

que es la orilla de  $\Delta^2 \subset \mathbb{R}^3$ . También observa que la métrica  $d$  de  $|K|$  coincide con la métrica usual de  $\mathbb{R}^3$  ya que los sumandos  $\sigma(v) - \tau(v)$  dentro del radical son simplemente las diferencias de las coordenadas de  $\sigma$  y  $\tau$  vistas como puntos en  $\mathbb{R}^3$ .



Como el caso finito es sencillo, formalizo este caso:

**Definición 9.** Sea  $K$  un complejo simplicial y  $L \in K$ , entonces

$$|L| := \{\sigma \in |K| : \sigma^{-1}(0, 1] \subseteq L\} = \{\sigma \in |K| : \text{Sop}(\sigma) \subseteq L\}.$$

La importancia de analizar  $|L|$  para  $L \in K$  es evidente del siguiente ejercicio:

**Ejercicio 6.** Sea  $L = \{v_0, \dots, v_n\} \in K$ , la función

$$\varphi : |L|_d \rightarrow \Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{definida por} \quad \sigma \mapsto (\sigma(v_0), \dots, \sigma(v_n))$$

es una isometría. En particular  $|L|_d \approx \Delta^n$  es un homeomorfismo.

*Proof.* Primero verifico que  $\Delta^n \approx |\Delta^n|_d$  (donde la topología usual de  $\Delta^n$  es la de subespacio de  $\mathbb{R}^n$ ).

Como  $L$  es finito cada  $\varphi$  está bien definida. Para ver que  $\varphi$  preserva la métrica, tomo  $\sigma, \tau \in |L|$  arbitrarios y calculo:

$$d_{\Delta^n}(\varphi(\sigma), \varphi(\tau)) = d_{\mathbb{R}^{n+1}}(\sigma(v_0), \dots, \sigma(v_n), \tau(v_0), \dots, \tau(v_n)) = \sqrt{\sum_{i=0}^n (\sigma(v_i) - \tau(v_i))^2}$$

Observa que  $V_L = L$  entonces la suma dentro del radical es la suma de  $(\sigma(v) - \tau(v))^2$  sobre  $v \in V_L$ . Por lo tanto

$$d_{\Delta^n}(\varphi(\sigma), \varphi(\tau)) = \sqrt{\sum_{v \in V_L} (\sigma(v) - \tau(v))^2} = d_{|L|}(\sigma, \tau)$$

y  $\varphi$  preserva la métrica. En particular es continua e inyectiva.

Ahora considera la función

$$\psi : \Delta^n \rightarrow |K|_d \quad \text{definida por} \quad (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \mapsto \psi(\lambda_0, \dots, \lambda_n)(v) = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } v = v_i \in L \\ 0 & \text{si } v \notin L \end{cases}$$

Está bien definida porque los elementos  $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \Delta^n$  cumplen  $\sum \lambda_i = 1$  y  $\lambda_i \geq 0$ , además de que  $\psi(\lambda) = \psi(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in |K|$  es cero fuera de  $L$ , ie.  $\psi(\sigma)|_{V_K - L} = 0$  o equivalentemente  $\text{Sop}(\varphi(\lambda)) \subseteq L$ . En particular  $\text{Im}(\psi) \subseteq |L|$ , entonces puedo suponer que  $\psi$  tiene como contradominio a  $|L|_d$ , es decir  $\psi : \Delta^n \rightarrow |L|_d$ .

Por definición:

$$\begin{aligned}
d_{|K|}(\varphi(\lambda), \varphi(\mu)) &= \sqrt{\sum_{v \in V_K} (\varphi(\lambda)(v) - \varphi(\mu)(v))^2} = \sqrt{\sum_{v \in L} (\varphi(\lambda)(v) - \varphi(\mu)(v))^2} \\
&= \sqrt{\sum_{i=0}^n (\varphi(\lambda)(v_i) - \varphi(\mu)(v_i))^2} = \sqrt{\sum_{i=0}^n (\lambda_i - \mu_i)^2} \\
&= d_{\mathbb{R}^{n+1}}((\lambda_0, \dots, \lambda_n), (\mu_0, \dots, \mu_n)) \\
&= d_{\Delta^n}(\lambda, \mu).
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $\psi$  preserva la métrica. En particular es continua e inyectiva.

Por último observa que:

$$\begin{aligned}
\psi(\varphi(\sigma))(v_i) &= \psi(\sigma(v_0), \dots, \sigma(v_n))(v_i) = \sigma(v_i) \implies \psi(\varphi(\sigma)) = \sigma \\
\varphi(\psi(\lambda)) &= (\psi(\lambda)(v_0), \dots, \psi(\lambda)(v_n)) = (\lambda_0, \dots, \lambda_n)\lambda.
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{\Delta^n}$  y  $\psi \circ \varphi = \text{Id}_{|L|_d}$ .

Para terminar resumo lo que tengo: hay dos funciones  $\varphi : |L|_d \rightarrow \Delta^n$  y  $\psi : \Delta^n \rightarrow |L|_d$  que son inversas entre sí. Además cada una preserva la métrica. Por lo tanto ambas son isometrías.  $\square$

*Nota.* Observa que  $|K|$  es la unión de todos los subespacios  $|L|$ , entonces el ejercicio anterior prueba que:

$$|K| = \bigcup_{L \in K} |L| \approx \bigcup \Delta^n,$$

es decir que la realización topológica de un complejo simplicial es una unión de simplejos geométricos estándares.

El ejercicio 6 y la nota anterior nos permite definirle una topología a  $|K|$  sin mencionar métricas:

**Definición 10.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Para cada  $L \in K$ , asígnales a  $|L|$  la topología inducida por el homeomorfismo  $|L| \approx \Delta^n$ . Entonces la *topología coherente* de  $|K|$  está definido por:

$$U \subseteq |K| \text{ es abierto} \iff U \cap |L| \text{ es abierto } \forall L \in K$$

*Nota.* De ahora en adelante,  $|K|$  se refiere a la realización topológica del complejo simplicial  $K$  con la topología coherente y  $|K|_d$  a la realización topológica con la topología inducida por la métrica  $d$  del ejercicio 5.

*Nota.* Vale la pena mencionar que una función  $f : |K| \rightarrow X$  es continua si y sólo si  $f|_{|L|} : |L| \rightarrow X$  es continua para toda  $L \in K$ . Esto quiere decir que  $\text{Id} : |K| \rightarrow |K|_d$  es continua porque  $\text{Id}|_{|L|} : |L| \rightarrow |L|_d$  es continua por definición de la topología de  $|L|$  (como  $|L| \approx \Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , la métrica  $d$  restringida a  $|L|$  coincide exactamente con la euclídeana de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ). Por lo tanto la topología coherente es más fina que la topología inducida por la métrica  $d$ , es decir tiene más abiertos.

**Definición 11.** Un complejo simplicial  $K$  es *localmente finito* si para cada  $v \in V_K$  sólo hay una cantidad finita de  $L \in K$  tales que  $v \in L$ , es decir que el conjunto  $\{L \in K \mid v \in L\}$  es finito para todo vértice  $v$ .

La importancia de esta condición se muestra en el siguiente teorema:

**Teorema 1.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1.  $K$  es localmente finito.
2.  $|K|$  es compacto.
3.  $\text{Id} : |K| \rightarrow |K|_d$  es un homeomorfismo, es decir que la topología coherente coincide con la topología inducida por la métrica  $d$ .
4.  $|K|$  es metrizable.



5.  $|K|$  satisface el primer axioma de numerabilidad, ie. todo punto  $\sigma \in |K|$  tiene una base local numerable.

**Definición 12.** Sean  $K$  y  $L$  complejos simpliciales. Un morfismo de complejos simpliciales  $f : K \rightarrow L$  es una función  $f : V_K \rightarrow V_L$  entre los vértices tal que

$$\{v_0, \dots, v_n\} \in K \implies \{f(v_0), \dots, f(v_n)\} \in L.$$

Además, para cada morfismo  $f : K \rightarrow L$  existe una función  $|f| : |K| \rightarrow |L|$  definida por:

$$|f|(\sigma) : V_K \longrightarrow I \quad \text{con} \quad |f|(\sigma)(u) = \sum_{v \in f^{-1}[\{u\}]} \sigma(v)$$

**Ejercicio 7.** La función inducida  $|f|$  está bien definida, es decir para toda  $\sigma \in |K|$  se tiene que  $|f|(\sigma) \in |L|$ .

*Proof.* □

**Ejercicio 8.** La función inducida  $|f| : |K| \rightarrow |L|$  es continua con respecto a la topología coherente.

*Proof.* □

*Nota.* Los dos ejercicios anteriores nos muestra que la asignación  $K \mapsto |K|$  y  $f \mapsto |f|$  es un funtor entre la categoría de complejos simpliciales y **Top**.

Una construcción importante que se puede hacer para cualquier complejo simplicial es la subdivisión baricéntrica:

**Definición 13.** Sea  $K$  un complejo simplicial. La *subdivisión baricéntrica* de  $K$  es un complejo simplicial denotado por  $\text{sd}(K)$  cuyos vértices es todo  $K$ , i.e  $V_{\text{sd}(K)} = K$ , y los  $n$ -simplejos de  $\text{sd}(K)$  son conjuntos finitos totalmente ordenados  $\{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n\} \subseteq K$  tales que  $\sigma_0 \subsetneq \sigma_1 \subsetneq \dots \subsetneq \sigma_n$ .

### 0.1.3 Triangulaciones y nervios

**Definición 14.** Un espacio  $X$  es *triangulable* si existe un complejo simplicial  $K$  tal que  $|K| \approx X$ .

**Ejercicio 9.** Sea  $V_K = \{0, e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2$  y  $K = \{\{0\}, \{e_1\}, \{e_2\}, \{0, e_1\}, \{0, e_2\}, \{e_1, e_2\}\}$  (cf. ejemplo 1). Prueba que  $|K| \approx \mathbb{S}^1$ , es decir que  $\mathbb{S}^1$  es triangulable.

*Proof.* Sabemos que:

$$|K| = \bigcup_{L \in K} |L|,$$

pero varios de estos uniendos son redundantes, por ejemplo:

$$|\{v_0\}| = \{\sigma \in |K| : \text{Sop}(\sigma) \subseteq \{v_0\} \subseteq \{v_0, v_1\}\} \subseteq \{\sigma \in |K| : \text{Sop}(\sigma) \subseteq \{v_0, v_1\}\} = |\{v_0, v_1\}|.$$

En general la realización geométrica de todo 0-simplejo de  $K$  está contenido en la realización geométrica de un 1-simplejo. Por lo tanto:

$$|K| = |\{v_0, v_1\}| \cup |\{v_0, v_2\}| \cup |\{v_1, v_2\}|.$$

Por otro lado, como el conjunto de vértices de  $K$  tiene 3 elementos, por definición tenemos que  $|K| \subset \mathbb{R}^3$  y cada elemento  $\sigma \in |K|$  se escribe como  $\sigma = (\sigma(v_0), \sigma(v_1), \sigma(v_2))$ . De esta manera podemos describir los elementos de  $|\{v_i, v_j\}|$  como

$$|\{v_0, v_1\}| = \{(\sigma(v_0), \sigma(v_1), \sigma(v_2)) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \sigma(v_i), \sigma(v_2) = 0, \sigma(v_0) + \sigma(v_1) = 1\} = \{(t, 1-t, 0)\}_{t \in I}.$$

Análogamente:

$$|\{v_0, v_2\}| = \{(t, 0, 1-t)\}_{t \in I} \quad \text{y} \quad |\{v_1, v_2\}| = \{(0, t, 1-t)\}_{t \in I},$$

y así

$$|K| = \{(t, 1-t, 0)\}_{t \in I} \cup \{(t, 0, 1-t)\}_{t \in I} \cup \{(0, t, 1-t)\}_{t \in I}.$$

Para dar un homeomorfismo entre  $|K|$  y  $\mathbb{S}^1$ , daré una composición de tres homeomorfismos:

1. Sea  $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la proyección  $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ . Claramente  $p|_{|K|}$  es continua y su imagen es:

$$\begin{aligned} p[|K|] &= p[\{(t, 1-t, 0)\}_{t \in I}] \cup p[\{(t, 0, 1-t)\}_{t \in I}] \cup p[\{(0, t, 1-t)\}_{t \in I}] \\ &= \{(t, 1-t)\}_{t \in I} \cup \{(t, 0)\}_{t \in I} \cup \{(0, t)\}_{t \in I}. \end{aligned}$$

La función  $p|_{|K|}$  tiene una inversa obvia: para cada pedazo de  $p[|K|]$  define

$$\begin{aligned} q_1 : \{(t, 1-t)\}_{t \in I} &\longrightarrow \{(t, 1-t, 0)\}_{t \in I} \quad \text{con} \quad (t, 1-t) \mapsto (t, 1-t, 0) \\ q_2 : \{(t, 0)\}_{t \in I} &\longrightarrow \{(t, 0, 1-t)\}_{t \in I} \quad \text{con} \quad (t, 0) \mapsto (t, 0, 1-t) \\ q_3 : \{(0, t)\}_{t \in I} &\longrightarrow \{(0, t, 1-t)\}_{t \in I} \quad \text{con} \quad (0, t) \mapsto (0, t, 1-t) \end{aligned}$$

que son claramente continuas (como restricciones de funciones continuas  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ). Además las podemos pegar porque coinciden en las intersecciones de los dominios:

$$q_1(0, 1) = (0, 1, 0) = q_3(0, 1) \quad , \quad q_1(1, 0) = (1, 0, 0) = q_2(1, 0) \quad , \quad q_2(0, 0) = (0, 0, 1) = q_3(0, 0).$$

Por lo tanto la función  $q : p[|K|] \rightarrow |K|$ , que se obtiene al pegar  $q_1, q_2$  y  $q_3$  es continua y por construcción es la inversa de  $p|_{|K|}$ . Por lo tanto  $p|_{|K|}$  es un homeomorfismo. Observa también que la imagen de  $p|_{|K|}$  es exactamente la frontera de  $\Delta^2 \subset \mathbb{R}^2$ , ie.  $p[|K|] = \partial\Delta^2$

2. Observa que el punto  $(1/3, 1/3) \in \Delta^2$  está en el interior (porque  $1/3 + 1/3 \neq 1$ ) de  $\Delta^2$  ie.  $(1/3, 1/3 \notin \partial\Delta^2)$ , entonces aplico la traslación  $(x, y) \mapsto (x - 1/3, y - 1/3)$  para llevar el punto  $(1/3, 1/3)$  al origen. Esta traslación es claramente un homeomorfismo. A la traslación de  $\partial\Delta^2$  la denoto por  $\tau := \partial\Delta^2 - 1/3$ .
3. El último homeomorfismo es la restricción de normalizar:

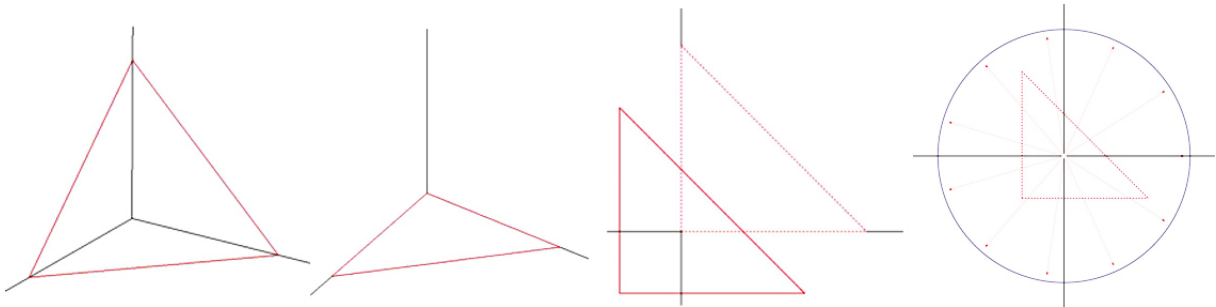
$$u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \quad \text{definido por} \quad (x, y) \mapsto \frac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

En coordenadas polares, esta función hace  $(\theta, r) \mapsto (\theta, 1)$ , entonces sólo depende del “argumento” del vector  $(x, y)$ .

Claramente es sobre porque  $u|_{\mathbb{S}^1} = \text{Id}_{\mathbb{S}^1}$ . Además,  $u|_{\tau}$  es inyectiva. Para ver esto basta observar que cada rayo que inicia en el origen intersecta a  $\tau$  en un sólo punto, o de otra manera: para cada argumento  $\theta$  hay un solo vector  $(x, y) \in \tau$  con argumento igual a  $\theta$ .

Por lo tanto  $u|_{\tau} : \tau \rightarrow \mathbb{S}^1$  es una función continua y biyectiva. Como  $\tau$  es compacto (por ser frontera de un 2-simplejo que es compacto) y  $\mathbb{S}^1$  es Hausdorff, entonces  $u|_{\tau}$  es un homeomorfismo.

El siguiente dibujo ilustra los tres pasos:



Para terminar, simplemente compone los tres homeomorfismos anteriores

$$|K| \longrightarrow \partial\Delta^2 \longrightarrow \partial\Delta^2 - \frac{1}{3} \xrightarrow{u} \mathbb{S}^1$$

para concluir que  $|K| \approx \mathbb{S}^1$ .

□

Este ejercicio se generaliza a variedades:

**Teorema 2.** *Toda variedad suave es triangulable.*

*Nota.* Una consecuencia de este teorema es:

$$n < m \implies \pi_n(\mathbb{S}^m) = 0 \quad (3)$$

Para ver esto sea  $[\alpha] \in \pi_n(\mathbb{S}^m)$ , es decir  $\alpha : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^m$  es continua. Como las esferas son triangulables, existen complejos simpliciales  $K$  y  $L$  tales que  $|K| \approx \mathbb{S}^n$  y  $|L| \approx \mathbb{S}^m$  donde las dimensiones de  $K$  y  $L$  son  $n$  y  $m$  respectivamente.

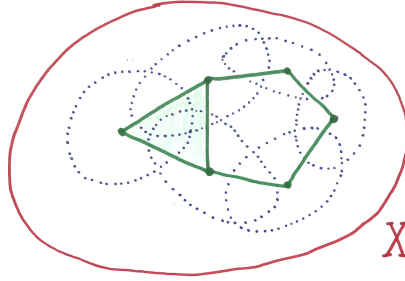
Ahora, si  $f : K \rightarrow L$  es un morfismo simplicial entonces un simplejo de dimensión máxima  $\{v_0, \dots, v_n\} \in K$  se manda, bajo  $f$ , al simplejo  $\{f(v_0), \dots, f(v_n)\} \in L$  que tiene a lo más  $n$  elementos. Por lo tanto  $f[K] \subset L$  es un subcomplejo simplicial de dimensión a lo más  $n < m$ , es decir  $f[K] \neq L$  y así  $|f|[\mathbb{S}^n] \neq [\mathbb{S}^m]$ .

Por lo tanto si cada función continua  $\alpha : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^m$  es homotópica a una función de la forma  $|f|$  para algún morfismo simplicial  $f$ , entonces tendríamos que  $[\alpha] = 1$  y así  $\pi_n(\mathbb{S}^m) = 0$  cuando  $n < m$ .

Ahora doy un ejemplo de un complejo simplicial abstracto:

**Definición 15.** (Alexandrov y Čech) Sean  $X$  un espacio topológico y  $\mathcal{C} = \{C_j\}_{j \in J}$  una familia de subespacios (en general se toma una cubierta abierta). El *nervio* de  $\mathcal{C}$ , denotado por  $\mathcal{N}\mathcal{C}$  es el complejo simplicial con vértices  $V_{\mathcal{N}\mathcal{C}} = J$ , el conjunto de índices, y  $n$ -simplejos de la forma  $L = \{j_0, \dots, j_n\}$  donde  $C_{j_0} \cap \dots \cap C_{j_n} \neq \emptyset$ .

Por ejemplo, un sub-complejo simplicial de un nervio se puede ver como:



**Definición 16.** Una función continua  $f : X \rightarrow Y$  es una *equivalencia homotópica débil* si para toda  $x \in X$  y para toda  $n > 0$ ,  $f_{\#} : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, f(x))$  es un isomorfismo y si además para  $n = 0$ ,  $f_{\#}$  es una función biyectiva.

Claramente tenemos que si  $X \simeq Y$  entonces existe una equivalencia homotópica débil entre  $X$  y  $Y$  (cf. el corolario ??), pero en ciertos casos, la equivalencia homotópica débil implica equivalencia homotópica:

**Teorema 3.** (S.H.C. Whitehead) Si  $X$  y  $Y$  son espacios triangulados entonces si  $f : X \rightarrow Y$  es una equivalencia homotópica débil, se cumple que  $X \simeq Y$ .

La noción de equivalencia homotópica débil y la de nervios nos permite estudiar, bajo ciertas condiciones, las propiedades de un espacio. Los siguientes teoremas (sin pruebas) ilustran estas relaciones.

**Teorema 4.** Sea  $\mathfrak{U} = \{U_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$  una cubierta abiertade  $X$  puntualmente finita (ie. para toda  $x \in X$  solamente existe una cantidad finita de  $U_{\lambda} \in \mathfrak{U}$  tales que  $x \in U_{\lambda}$ ). Si toda intersección finita  $U_{\lambda_1} \cap \dots \cap U_{\lambda_n} \neq \emptyset$  cumple que  $\pi_n(U_{\lambda_1} \cap \dots \cap U_{\lambda_n}, x) = 0$  entonces existe una equivalencia homotópica débil  $f : |\mathcal{N}\mathfrak{U}| \rightarrow X$ .

**Teorema 5.** Si  $X$  es un espacio para compacto equipado de una cubierta abierta  $\mathfrak{U}$  localmente finita tal que toda intersección finita no vacía de la cubierta es contraíble, entonces  $\mathcal{N}\mathfrak{U} \simeq X$ .

**Teorema 6.** Sea  $M^n$  una variedad suave y  $\mathfrak{U} = \{U_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$  una cubierta localmente finita<sup>2</sup> tal que cada intersección finita de  $n$  elementos de la cubierta cumplen  $U_{\lambda_1} \cap \dots \cap U_{\lambda_n} \approx \mathbb{R}^n$ , entonces  $\mathcal{N}\mathfrak{U} \simeq M$

<sup>2</sup>Como  $M$  es una variedad suave, admite una métrica Riemanniana y en este caso los elementos de la cubierta se pueden tomar fuertemente conexos, ie. para todas  $x, y \in U_{\lambda}$  existe una única geodésica que une  $x$  con  $y$ .

### 0.1.4 Homología Simplicial

Primero estudio la orientación de los complejos simpliciales.

**Definición 17.** Sea  $K$  un complejo simplicial y  $\sigma \in K$  un  $n$ -simplejo. Además sea  $\Sigma = \Sigma(\sigma)$  el conjunto de funciones biyectivas  $\underline{n} \rightarrow \sigma$ , donde  $\underline{n} = \{0, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$ . Entonces hay una relación de equivalencia:

$$f \simeq g \iff g^{-1}f \in S_{n+1} \text{ es una permutación par.}$$

**Ejercicio 10.** Prueba que solamente hay dos clases de equivalencia que son  $[f]$  y  $[\bar{f}]$  donde  $\bar{f} = \tau \circ f$  donde  $\tau \in S_{n+1}$  es la permutación que transpone el 0 y el 1 y fija a los demás.

*Proof.* Sea  $A_{n+1}$  el grupo alternante, ie. las permutaciones pares del grupo simétrico  $S_{n+1}$ . Defino la siguiente acción derecha:

$$\Sigma \times A_{n+1} \longrightarrow \Sigma \quad \text{con} \quad (f, \alpha) \mapsto f \circ \alpha.$$

Claramente es una acción derecha porque  $(f, 1) \mapsto f \circ 1 = f$  y

$$\begin{aligned} ((f, \alpha), \beta) &\mapsto (f \circ \alpha, \beta) = (f \circ \alpha) \circ \beta = f \circ (\alpha \circ \beta) \\ \therefore (f\alpha)\beta &= f(\alpha\beta). \end{aligned}$$

Ahora sea  $f \in \Sigma$ . Calculo su grupo de isotropía:

$$(A_{n+1})_f = \{\alpha \in A_{n+1} \mid f \circ \alpha = f\} = \{1\}.$$

Esto es porque si  $\alpha \in A_{n+1}$  mueve un elemento entonces  $f \circ \alpha$  y  $f$  difieren en ese elemento. Más precisamente, si  $\alpha \neq 1$ , existen  $i \neq j \in \underline{n}$  tal que  $\alpha(i) = j$  y por lo tanto  $(f \circ \alpha)(i) = f(\alpha(i)) = f(j) \neq f(i)$ , ie.  $f \circ \alpha \neq f$ , porque  $f$  es biyectiva. Este argumento prueba que la acción de  $A_{n+1}$  sobre  $\Sigma$  es libre.

Por el ejercicio ??, hay una biyección (de hecho un homeomorfismo porque  $\Sigma$  y  $A_{n+1}$  son finitos con la topología discreta) entre

$$\mathcal{O}(f) \longleftrightarrow \frac{A_{n+1}}{(A_{n+1})_f} = \frac{A_{n+1}}{1} \cong A_{n+1}$$

Esto quiere decir que todas las órbita de la acción tienen  $(n+1)!/2$  elementos<sup>3</sup>. Además observa que:

$$\mathcal{O}(f) = \{g \in \Sigma \mid \exists \alpha \in A_{n+1} \text{ tal que } g \circ \alpha = f\} = \{g \in \Sigma \mid \exists \alpha \in A_{n+1} \text{ tal que } \alpha = g^{-1}f\} = [f] \in \Sigma/\sim$$

Ahora,  $\Sigma$  tiene  $(n+1)!$  elementos por ser el conjunto de funciones biyectivas entre dos conjuntos con  $n+1$  elementos. Como las órbitas forman una partición de  $\Sigma$  y cada órbita tienen la mitad de los elementos de  $\Sigma$ , sólo puede haber dos órbitas. Sea  $f \in \Sigma$  arbitrario, pruebo que  $\Sigma/\sim = \{[f], [\bar{f}]\}$ , es decir que  $f \not\sim \bar{f}$ .

Observa que:

$$f \circ \bar{f}^{-1} = f \circ (\tau \circ f)^{-1} = f \circ (f^{-1} \circ \tau^{-1}) = \tau^{-1} = \tau.$$

Como  $\tau$  es una transposición, es una permutación impar. Por lo tanto  $f \not\sim \bar{f}$  y acabo.  $\square$

En la prueba del ejercicio anterior se vió que  $\Sigma(\sigma)/\sim$  tiene naturalmente una estructura de grupo isomorfa a  $\mathbb{Z}_2$  bajo el isomorfismo (continuo)  $[f] \mapsto 1$  y  $[\bar{f}] \mapsto -1$ . Entonces,  $\Sigma(\sigma)/\sim \cong \{1, -1\}$ .

**Definición 18.** Sea  $K$  un complejo simplicial y  $\sigma \in K$  un  $n$ -simplejo. Una *orientación* de  $\sigma$  es la pareja  $(\sigma, \mathbf{o}_\sigma)$  donde  $\mathbf{o}_\sigma \in \Sigma(\sigma)/\sim = \{1, -1\}$ . En general, si vamos a denotar  $\pm[\sigma] := (\sigma, \pm)$  y si ya tenemos una orientación para  $\sigma$ , ie. un ordenamiento  $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$  entonces denotamos  $[\sigma] = [v_0, \dots, v_n]$ .

En variedades triangulables, las orientaciones de los complejos simpliciales que realizan a la variedad cumplen varias propiedades importantes.

Sea  $M^n$  una variedad compacta de dimensión  $n$  con triangulación  $M \approx |K|$ . Entonces cada simplejo de  $K$  es cara de un  $n$ -simplejo y además cada  $(n-1)$ -simplejo es cara de exactamente dos  $n$ -simplejos. Estas dos propiedades permiten definir orientación de complejos simpliciales que realizan variedades compactas.

**Definición 19.** Sea  $M^n$  una variedad suave y compacta tal que  $M \approx |K|$  para algún complejo simplicial  $K$ . Una *orientación* de  $K$  es una elección de una orientación para cada  $n$ -simplejo  $\sigma \in K$ , que cumple que las dos orientaciones inducidas en cada  $(n-1)$ -simplejo de  $K$  son distintas.

Más precisamente, cada  $(n-1)$ -simplejo  $\sigma \in K$  es cara de exactamente dos  $n$ -simplejos  $\tau, \tau' \in K$ . Entonces la orientaciones  $\mathbf{o}_\tau$  y  $\mathbf{o}_{\tau'}$  deben ser distintas, ie.  $\mathbf{o}_\tau = -\mathbf{o}_{\tau'}$ .

**Ejemplo 2.** Toma  $K = \{\{e_0\}, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_0, e_1\}, \{e_1, e_2\}, \{e_0, e_2\}, \{e_0, e_1, e_2\}\}$ , el complejo simplicial inducido por  $\Delta^2$ . Si orientamos  $\Delta^2$  como  $[\Delta^2] = [e_0, e_1, e_2]$ . Esto induce una orientación en cada 1-cara:

Observa que las 1-caras (orientadas) las podemos reescribir como:

$$[e_0, e_1] = [e_0, e_1, \hat{e}_2] \quad , \quad [e_1, e_2] = [\hat{e}_0, e_1, e_2] \quad \text{y} \quad [e_2, e_0] = -[e_0, \hat{e}_1, e_2]$$

donde la notación  $\hat{e}_i$  significa omitir ese elemento de la lista. Esto nos sugiere que el “borde” o la frontera de  $\Delta^2$  la podemos escribir como la siguiente suma formal:

$$[\hat{e}_0, e_1, e_2] - [e_0, \hat{e}_1, e_2] + [e_0, e_1, \hat{e}_2]$$

o en general como

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i [e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n] \quad (4)$$

Un ejemplo que ilustra esta idea mejor es el siguiente:

**Ejemplo 3.** Considera el conjunto de vértices  $V_K = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$  (por ejemplo los vértices de  $\Delta^3$ ). Construye  $K$  de la siguiente manera: no hay 3-simplejos; los 2-simplejos son  $[v_0, v_1, v_2]$ ,  $[v_1, v_3, v_2]$ ,  $[v_0, v_2, v_3]$  y  $[v_0, v_3, v_1]$ ; y toma todos los subconjuntos de estos 2-simplejos como los 1-simplejos y 0-simplejos que faltan (los que necesita la definición de complejo simplicial abstracto).

La realización geométrica es un tetrahedro (como  $\Delta^3$ ) sin relleno y orientado de la siguiente manera:

Ahora calculamos la frontera de la misma manera que en (3):

$$\begin{cases} [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1] \\ [v_3, v_2] - [v_1, v_2] + [v_1, v_3] \\ [v_3, v_1] - [v_0, v_1] + [v_0, v_3] \end{cases} = [v_3, v_2] + [v_1, v_3] + [v_2, v_3] + [v_3, v_1] = 0.$$

El hecho que el resultado dio 0 es porque  $K$  es la frontera de otro simplejo, en particular  $[v_0, v_1, v_2, v_3]$ .

He estado sumando y restando complejos simpliciales sin ninguna formalidad pero esto no es grave porque siempre existe la herramienta de grupos libres o en este caso particular,  $R$ -módulos libres:

**Definición 20.** Sea  $R$  un anillo conmutativo con 1 y  $X$  un conjunto. El  $R$ -módulo libre generado por  $X$  se define como

$$R\langle X \rangle := \{f : X \rightarrow R \mid f(x) \neq 0 \text{ para una cantidad finita de } x \in X\}.$$

Las operaciones son las naturales:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{y} \quad (rf)(x) = rf(x).$$

*Nota.* A cada elemento  $x \in X$ , le podemos asociar de manera canónica un elemento de  $R\langle X \rangle$ : la función:

$$x(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y \end{cases}.$$

---

<sup>3</sup>Esto se sigue del teorema de Langrange y de que  $(S_{n+1} : A_{n+1}) = 2$ . La función  $S_{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}_2$  que le asocia a una permutación  $\alpha \in S_{n+1}$  su signo  $\alpha \mapsto \text{sgn}(\alpha) \in \{-1, 1\}$ , es un epimorfismo de grupos con kernel  $A_{n+1}$  lo cual implica que  $S_{n+1}/A_{n+1} \cong \mathbb{Z}_2$ . Por el teorema de Lagrange  $\#(S_{n+1}) = (S_{n+1} : A_{n+1})\#(A_{n+1}) \implies \frac{1}{2}\#(S_{n+1}) = \frac{1}{2}(n+1)! = \#(A_{n+1})$ .

A veces a esta función si le llama la función característica de  $x$  y se denota  $\chi_x$ . En el caso particular de los espacios vectoriales se usa la delta de Kronecker  $\delta_{ij}$ .

Por otro lado, para toda  $f \in R\langle X \rangle$ ,  $\text{Sop}(f) = \{x_1, \dots, x_n\}$  es finito, entonces claramente

$$f = \sum_{i=1}^n f(x_i)x_i = \sum_{x \in X} f(x)\chi_x.$$

Esta es una representación canónica porque sólo depende de  $f$ .

Los  $R$ -módulos libres cumplen una propiedad muy importante:

**Ejercicio 11.** Sea  $M$  un  $R$ -módulo y  $f : X \rightarrow R$  una función. Entonces existe un único morfismo de  $R$ -módulos  $\hat{f} : R\langle X \rangle \rightarrow M$  tal que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & R\langle X \rangle & \\ x \mapsto \chi_x \nearrow & \downarrow \hat{f} & \\ X & \xrightarrow{f} & M \end{array} \quad (5)$$

*Proof.* Sea

$$g = \sum_{x \in X} g(x)\chi_x \in R\langle X \rangle = \{f : X \rightarrow R \mid \text{Sop}(f) \text{ es finito}\}$$

un elemento arbitrario donde  $\chi_x \in R\langle X \rangle$  es la función definida por  $\chi_x(x) = 1$  y  $\chi_x(x') = 0$  para toda  $x' \neq x$ . Define:

$$\hat{f} : R\langle X \rangle \longrightarrow M \quad \text{con} \quad g = \sum_{x \in X} g(x)\chi_x \mapsto \sum_{x \in X} g(x)f(x).$$

Como  $g(x) \in R$  y  $f(x) \in M$ ,  $\hat{f}$  está bien definida. Ahora observa que  $\hat{f}$  es un morfismo de  $R$ -módulos:

$$\begin{aligned} \hat{f}(g + g') &= \sum_{x \in X} (g + g')(x)f(x) = \sum_{x \in X} (g(x) + g'(x))f(x) = \sum_{x \in X} g(x)f(x) + \sum_{x \in X} g'(x)f(x) \\ &= \hat{f}(g) + \hat{f}(g'), \\ \hat{f}(rg) &= \sum_{x \in X} (rg)(x)f(x) = \sum_{x \in X} rg(x)f(x) = r \sum_{x \in X} g(x)f(x) \\ &= r\hat{f}(g). \end{aligned}$$

También tenemos que:

$$\hat{f}(\chi_x) = \sum_{x' \in X} \chi_x(x')f(x') = \chi_x(x)f(x) = 1f(x) = f(x)$$

Por lo tanto  $\hat{f}$  es la composición  $x \mapsto \chi_x \mapsto \hat{f}(\chi_x)$ , es decir, el diagrama (4) conmuta. Ya probé la existencia.

Para la unicidad, supongo que existe un morfismo  $R$ -módulos  $F : R\langle X \rangle \rightarrow M$  que haga conmutar el diagrama, es decir que  $F(\chi_x) = f(x)$ . Entonces, como  $F$  es morfismo:

$$F(g) = F\left(\sum_{x \in X} g(x)\chi_x\right) = \sum_{x \in X} g(x)F(\chi_x) = \sum_{x \in X} g(x)f(x) = \hat{f}(g).$$

Por lo tanto  $F = \hat{f}$  y la extensión es única.  $\square$

Vamos a construir el  $R$ -módulo libre generado por simplejos de la siguiente manera:

Recuerda que cada  $n$ -simplejo  $\sigma \in K$  tiene una de dos orientaciones que denotamos como  $(\sigma, +1)$  y  $(\sigma, -1)$ . Con esto definimos el conjunto de  $n$ -simplejos con orientación como

$$S_n^{\mathcal{O}}(K) := \{(\sigma, \pm 1) \mid \sigma \text{ es un } n\text{-simplejo}\}.$$

La “O” gótica en el superíndice significa orientación. En general voy a omitir la  $K$  de la notación y escribiré  $S_n^{\mathcal{O}}$ . Vamos a trabajar con  $R\langle S_n^{\mathcal{O}} \rangle$ , el  $R$ -módulo libre generado por los  $n$ -simplejos orientados.

La fórmula (3) se extiende a todo  $R\langle S_n^{\mathcal{O}} \rangle$  por el ejercicio 9:

**Definición 21.** El morfismo frontera  $\partial_n : R\langle S_n^\triangleright \rangle \longrightarrow R\langle S_{n-1}^\triangleright \rangle$  se define sobre elementos de  $S_n^\triangleright$  como:

$$\partial_n[v_0, \dots, v_n] := \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n].$$

Los elementos de  $\ker(\partial_n)$  se llaman  $n$ -ciclos.

**Ejercicio 12.** Para toda  $n \geq 1$ , se cumple que  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ , en particular  $\text{Im}(\partial_n) \subseteq \ker(\partial_{n-1})$ .

*Proof.* □

Queremos poder operar los  $n$ -simplejos orientados de tal manera que si sumamos un  $n$ -simplejo y él mismo con la orientación puesta, queremos que el resultado de 0. Para garantizar esto hay que hacer un cociente:

**Definición 22.** Sea  $K$  un complejo simplicial y  $N = \langle (\sigma, +1) + (\sigma, -1) \rangle_{\sigma \in S_n^\triangleright}$  el submódulo de  $R\langle S_n^\triangleright(K) \rangle$  generado por las sumas de  $n$ -simplejos con ambas orientaciones. Entonces definimos:

$$C_n(K) := \frac{R\langle S_n^\triangleright \rangle}{N}.$$

Los elementos de  $C_n(K)$  se llaman  $n$ -cadenas orientadas.

Observa que el morfismo frontera pasa a este cociente porque si  $[\sigma] = [v_0, v_1, \dots, v_n]$  entonces:

$$\partial_n([\sigma] - [\sigma]) = \partial_n([v_0, v_1, \dots, v_n] + [v_1, v_0, \dots, v_n]) = \partial_n([v_0, v_1, \dots, v_n]) + \partial_n([v_1, v_0, \dots, v_n])$$

es una suma de la forma  $\sum [\tau] - [\tau] = 0$ . Por lo tanto,  $\partial_n$  se factoriza a través de  $C_n(K)$ ; esta nueva función la llamamos y denotamos igual:

$$\begin{array}{ccc} R\langle S_n^\triangleright \rangle & \xrightarrow{\partial_n} & R\langle S_{n-1}^\triangleright \rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_n(K) & \xrightarrow[\partial_n]{} & C_{n-1}(K) \end{array}$$

Gracias al ejercicio 10 tenemos que  $\text{Im}(\partial_{n+1}) \subseteq \ker(\partial_n)$  entonces tiene sentido definir:

**Definición 23.** La  $n$ -homología de  $K$  con coeficientes en un anillo  $R$ , conmutativo con 1, se define como el cociente:

$$H_n(K; R) := \frac{\ker(\partial_n)}{\text{Im}(\partial_{n+1})}$$