Febrero 2016

Jeffry Chavarría M.   Marco Gutiérrez M.

Natalia Rodríguez G.

Escuela de Matemáticas

Instituto Tecnológico de Costa Rica

Cálculo y Álgebra Lineal

$$i = \sqrt{-1}$$

El conjunto de los Números Complejos

Índice general

Capítulo 1

El conjunto de los números complejos

1.1. Introducción al conjunto de los números complejos

Durante la enseñanza de la matemática formal, el conjunto universo que corresponde al conjunto de números más grande que el estudiante conoce en un determinado nivel, evoluciona en cada uno de los niveles en el cual se encuentra el estudiante.

Los diferentes universos usados por los estudiantes durante sus estudios formales en primaria y secundaria, se presentan en la tabla 1.1, los mismos se ofrecen ordenados de manera cronológica.

Nombre del conjunto	Símbolo
El conjunto de los números naturales	$\mathbb{N}$
El conjunto de los números racionales positivos	$\mathbb{Q}^+$
El conjunto de los números enteros	$\mathbb{Z}$
El conjunto de los números racionales	$\mathbb{Q}$
El conjunto de los números irracionales	$\mathbb{I}$
El conjunto de los números reales	$\mathbb{R}$

Tabla 1.1: Evolución del conjunto universos en educación formal

En los últimos años de la secundaria y al inicio de la educación universitaria, el diagrama de la relación entre los conjuntos numéricos estudiados luce como se muestra en la figura 1.2, donde es el conjunto de los números reales el conjunto numérico más grande conocido hasta ahora.

En cursos de matemática más avanzados, los números reales pueden estudiarse en forma axiomática, o bien, pueden ser construidos a partir de los números racionales, de manera que se pueda asegurar la existencia de las raíces cuadradas para todos los números positivos, lo que resulta muy conveniente desde el punto de vista geométrico, dado que el campo de los números racionales no es el idóneo para dar respuesta a los problemas de índole geométrico relacionados principalmente con el cálculo de distancias. A manera de ejemplo considere el siguiente problema:

Problema
Considere un cuadrado cuyos lados miden una unidad. Determine la medida de su diagonal

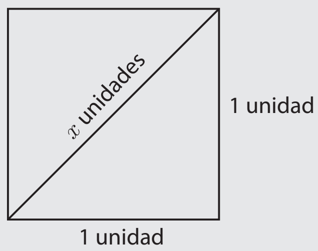


Figura 1.1: Valor de la diagonal de un cuadrado

Para este problema en particular, se considera que dicha diagonal existe y por lo tanto puede ser medida. Pero, es posible demostrar[1] que dicha medida no se puede expresar como cociente de números enteros de donde se deduce que dicha medida no es un número racional. De este modo, es claro que no es posible resolver todos los problemas utilizando únicamente los números racionales y así se evidencia la existencia de números no racionales que más tarde recibieron el nombre de números irracionales.

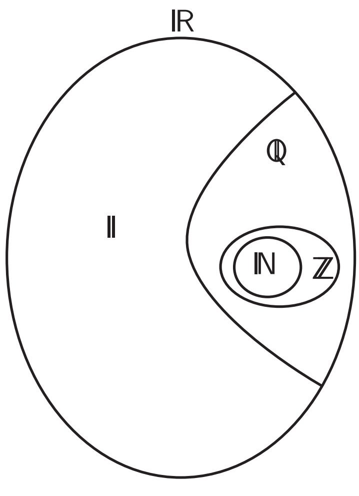


Figura 1.2: Relación entre los conjuntos numéricos

La aparición de los números complejos tienen una mayor similitud a la de los números negativos en la antigüedad, éstos números fueron adoptados de una manera forzada

[1] Esta demostración se puede consultar en libros de análisis real.

durante el desarrollo del álgebra, ya que su descubrimiento fue la respuesta a la solución de ecuaciones lineales de la forma:

$$ax + b = 0 \qquad \text{con, } a > 0 \wedge b > 0$$

Los griegos descartaron los números negativos pues no les encontraron una aplicación directa en la geometría, sin embargo, fueron los hindúes y los chinos los que los incorporaron como una herramienta necesaria para el desarrollo adecuado del álgebra.

De una manera muy similar, surgieron los números complejos como un esfuerzo de encontrar un conjunto que sea algebraicamente completo, esto es, que cualquier polinomio con coeficientes en el conjunto tenga siempre ceros en dicho conjunto. Es claro que $\mathbb{R}$ no es completo algebraicamente pues como ya se sabe, en el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) el polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y c constantes reales y $a \neq 0$ solo tiene ceros reales si $b^2 - 4ac \geq 0$. Es decir, no todo polinomio cuadrático con coeficientes reales posee ceros en el mismo conjunto.

Al igual que con los números negativos, los números complejos responden a la necesidad de dar solución a las ecuaciones polinomiales, en este caso a las ecuaciones de segundo grado. En este punto, se debe poner especial atención sobre las condiciones necesarias para poder dar solución a cualquier ecuación cuadrática y la fórmula general será de mucha utilidad. Dicha fórmula establece lo siguiente:

Fórmula General para ecuaciones de segundo grado
Sea a, b y c números reales tal que $a \neq 0$ y considere la ecuación de segundo grado dada por $ax^2+bx+c = 0$. Si $\Delta = b^2-4ac \geq 0$, entonces las soluciones de dicha ecuación están dadas por:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

donde a Δ recibe el nombre de discriminante de la ecuación cuadrática

Si se elimina la condición $\Delta \geq 0$ para generalizar aún más dicha fórmula , es necesario tener la posibilidad de calcular la raíz cuadrada de números negativos, es decir, el inconveniente de la fórmula general es el cálculo de $\sqrt{\Delta}$ cuando $\Delta < 0$, puesto que es imposible hacerlo en $\mathbb{R}$ y en consecuencia se deduce que dichas soluciones, de existir, no pueden ser reales.

La base primordial para poder dar solución a cualquier ecuación de orden dos es el cálculo de $\sqrt{-1}$. De esta manera, surge un nuevo concepto de número denominado "número imaginario" o "número imaginario puro".

Definición **1 (El número** i**)**
El número i *se define como* $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$.

Específicamente i es la raíz principal de -1, dado que ahora no hay problemas de signo en el cálculo de las raíces cuadradas, se tiene una nueva definición del concepto raíz cuadrada de un número ya que no será necesario mantener la unicidad de la raíz como lo era en $\mathbb{R}$, la siguiente definición se generalizará posteriormente a raíces de números complejos.

Definición **2**
Sea $z \in \mathbb{R}$, se define la raíz cuadrada de z y se denota $\sqrt{z}$ como cualquier número w que cumpla que $w^2 = z$. Además, se define la raíz cuadrada principal de z como la raíz positiva de z.

De esta manera, y como es evidente de la definición anterior, todo número real no nulo tendrá dos raíces cuadradas distintas. Es importante mencionar que el número imaginario "i" es considerado un número positivo de donde "i" se considera, tal y como ya se dijo anteriormente, la raíz principal de -1.

Ejemplo **1**
Considere los siguientes cálculos de raíces cuadradas:

- $$\sqrt{-1}\left\langle \begin{array}{ll} \mathrm{i} & \textit{Pues } (\mathrm{i})^2 = -1 \quad \textit{y} \quad (-\mathrm{i})^2 = (-1)^2\mathrm{i}^2 = \mathrm{i}^2 = -1 \\ -\mathrm{i} & \textit{La raíz cuadrada principal de } -1 \textit{ es } \mathrm{i}. \end{array}\right.$$

- $$\sqrt{-4} = \sqrt{4}\sqrt{-1}\left\langle \begin{array}{ll} 2\mathrm{i} & \textit{Pues } (2\mathrm{i})^2 = -4 \quad \textit{y} \quad (-2\mathrm{i})^2 = (-2)^2\mathrm{i}^2 = 4\mathrm{i}^2 = -4 \\ -2\mathrm{i} & \textit{La raíz cuadrada principal de } -4 \textit{ es } 2\mathrm{i}. \end{array}\right.$$

- $$\sqrt{-5} = \sqrt{5}\sqrt{-1}\left\langle \begin{array}{ll} \mathrm{i}\sqrt{5} & \textit{Pues } (\mathrm{i}\sqrt{5})^2 = -5 \quad \textit{y} \quad (-\mathrm{i}\sqrt{5})^2 = -5 \\ -\mathrm{i}\sqrt{5} & \textit{La raíz cuadrada principal de } -5 \textit{ es } \mathrm{i}\sqrt{5}. \end{array}\right.$$

En el conjunto de los números reales, la raíz cuadrada de un número real se considera única, sin embargo, en el conjunto de los números complejos esta característica no es cierta, lo que provoca que no sea válido escribir, sin ninguna regla previa, $\sqrt{-1} = \mathrm{i}$, pues también sería válido escribir $\sqrt{-1} = -\mathrm{i}$ y se tendría un conflicto con la relación de igualdad pues $\mathrm{i} \neq -\mathrm{i}$. Una forma de evitar el conflicto es limitar la relación de igualdad y solo poder decir, por ejemplo, que las dos raíces cuadradas de -1 son i y $-\mathrm{i}$.

Bajo algún convenio se puede permitir el uso de la relación de igualdad cuando se está en presencia del la raíz principal del número complejo. El siguiente convenio concretiza esta idea.

Convenio
Sea z un número complejo cualquiera, y sean w_0 y w_1 las dos raíces cuadradas de z tal que w_0 es la raíz cuadrada principal. Entonces será permitido escribir $\sqrt{z} = w_0$. Sin embargo, la igualdad $\sqrt{z} = w_1$ no se considerará correcta.

Ejemplo **2**
Es permitido indicar que $\sqrt{-1} = \mathrm{i}$, $\sqrt{-4} = 2\mathrm{i}$ *y* $\sqrt{-5} = \mathrm{i}\sqrt{5}$, *sin embargo, las igualdades* $\sqrt{-1} = -\mathrm{i}$, $\sqrt{-4} = -2\mathrm{i}$ *y* $\sqrt{-5} = -\mathrm{i}\sqrt{5}$ *no son válidas. Sin embargo,* $-\mathrm{i}$, $-2\mathrm{i}$ *y* $-\mathrm{i}\sqrt{5}$ *son también raíces cuadradas de* -1, -4 *y* -5 *respectivamente. En otras palabras, lo que estaría mal no es el hecho de ser o no raíces, sino la notación empleada para representarlas.*

Definición **3 (El conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$)**
Se define el conjunto de los números complejos y se denota con el símbolo $\mathbb{C}$ *como:*

$$\mathbb{C} = \{a + b\mathrm{i} : a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}$$

además, si $z = a + b\mathrm{i}$ *entonces se define la parte real de* z *y la parte imaginaria de* z *respectivamente por:*

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z) &= a \\ \mathrm{Im}(z) &= b \end{aligned}$$

de la definición anterior se desprende las siguientes afirmaciones:

- Todo número real es complejo con parte imaginaria nula. Es decir, si x es un numero real, entonces $x + 0\mathrm{i}$ es complejo, de donde se torna evidente que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Todo número imaginario es complejo con parte real nula.

1.1.1. Solución de ecuaciones cuadráticas

Para una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ la fórmula general en $\mathbb{R}$ se suele enunciar indicando que las soluciones de dicha ecuación, si existen, están dadas con la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{donde } \Delta = b^2 - 4ac \geq 0$$

el símbolo $\pm$ indica que de dicha fórmula salen dos valores distintos, uno usando $+$ y el otro usando $-$ en caso de que $\Delta \neq 0$ y su uso se torna necesario por la unicidad la raíz cuadrada.

En $\mathbb{C}$ dicha unicidad no existe por lo que la fórmula puede enunciarse diciendo que las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ siempre existen y están dadas por la fórmula:

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{donde } \Delta = b^2 - 4ac$$

pues al calcular $\sqrt{\Delta}$ saldrán dos posibles valores que corresponden a las dos raíces cuadradas de Δ para $\Delta \neq 0$. Además, la condición de no negatividad de Δ ya no será necesaria.

Ejemplo 3
Encuentre las soluciones complejas de la ecuación $4x^2 - 4x + 2 = 0$.

★ **Solución.** Las soluciones de dicha ecuación se calcularán mediante la fórmula general.

$$w = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{-16}}{8} \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{4+4\mathrm{i}}{8} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i} \\[2ex] \dfrac{4-4\mathrm{i}}{8} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i} \end{array} \right.$$

de donde se tiene que las soluciones de la ecuación son: $w_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ y $w_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$ por lo que el conjunto solución de la ecuación es:

$$S = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i} \right\}$$

★

Notación
Si $z \in \mathbb{C}$ con parte real a y parte imaginaria b, a la notación $z = a + b\mathrm{i}$ se le denomina **forma rectangular** del número complejo z y también se puede denotar por $z = (a, b)$.

La notación anterior, genera una geometría particular para el conjunto $\mathbb{C}$. La geometría de los números reales $\mathbb{R}$ que se representa mediante una recta denominada la recta real muy estudiada en los primeros años de la secundaria; por su parte los números tienen sus representación geométrica en un plano denominado el plano complejo, este plano isomorfo al plano cartesiano cuenta con dos ejes, el eje real y el eje imaginario. La representación de un número complejo en dicho plano se observa en la figura 1.3.

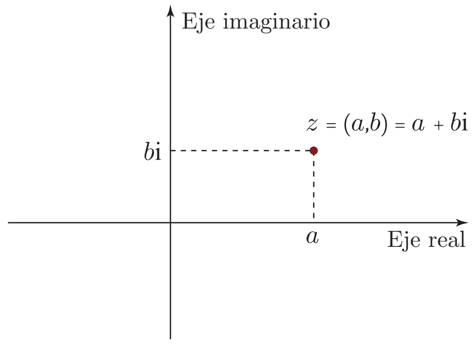


Figura 1.3: Plano complejo

DEFINICIÓN **4 (Igualdad de números complejos)**
Sean z y w dos números complejos cualesquiera, se dice que $z = w$ si y solo si:

$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w) \quad y \quad \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$$

EJEMPLO **4**
Considere los números complejos: $z = (p+2)+(2-q)\mathrm{i}$, $w = (q-4p)\mathrm{i}+6q$. Determine los valores de p, q en $\mathbb{R}$ para que $z = w$.

★ **Solución.** De acuero al teorema anterior, para que $z = w$ se debe satisfacer lo siguiente:

$$z = w \Longrightarrow p + 2 = 6q \;\; y \;\; 2 - q = q - 4p$$

De esta forma se resuelve el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} p - 6q = -2 \\ 4p - 2q = -2 \end{cases}$$

cuyas soluciones son: $p = -\dfrac{4}{11}$ y $q = \dfrac{3}{11}$.

★

EJEMPLO **5**
Determine los valores a, b en $\mathbb{R}$ tales que cumplan con la ecuación compleja:

$$3a + 2 - 6bi = 10ai - bi + 1 - 2b$$

★ **Solución.** Sean los números $z = 3a + 2 - 6b\mathrm{i}$ y $w = 10a\mathrm{i} - b\mathrm{i} + 1 - 2b$. Observe que $\mathrm{Re}\, z = 3a + 2$ y $\mathrm{Im}\, z = -6b$. Por otro lado, $\mathrm{Re}\, w = 1 - 2b$ y $\mathrm{Im}\, w = 10a - b$.

Ahora se debe cumplir que, $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w$ y $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w$.

De acuerdo a lo anterior:

$$
\begin{aligned}
3a + 2 = 1 - 2b &\Longrightarrow 3a + 2b = -1 \\
-6b = 10a - b &\Longrightarrow -10a - 5b = 0
\end{aligned}
$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 3a + 2b = -1 \\ -10a - 5b = 0 \end{cases}$ se tiene que $a = 1, b = -2$.

★

Ejercicios 1.

1. Determine los valores de a y b que cumplan la igualdad dada.

   a) $5a - 7\mathrm{i} + 3b\mathrm{i} = 8b - \mathrm{i} - 1$ R/: $a = 3, b = 2$

   b) $2a + 1 - b\mathrm{i} = b - (a + 2)\mathrm{i}$ R/: $a = 1, b = 3$

2. Resuelva en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones.

   a) $8x^2 - 4x + 1 = 0$ R/: $S = \{\frac{1}{4} \pm \frac{\mathrm{i}}{4}\}$

   b) $y^2 + 9 = 0$ R/: $S = \{3\mathrm{i}, -3\mathrm{i}\}$

   c) $z^4 - 1 = 0$ R/: $S = \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}, 1, -1\}$

   d) $m^3 - 8 = 0$ R/: $S = \{2, -1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}\}$

1.2. Aritmética de los números complejos en forma rectangular

En esta sección se abordará la aritmética de los números complejos, lo que significa que se estudiará la forma en que estos números se operan entre sí mediante las operaciones básicas tales como: la adición, sustracción, multiplicación y división.

En el caso particular de la adición, sustracción y multiplicación de números complejos, algebraicamente se trabaja de la misma forma como se suma, resta y multiplican binomios de primer grado, en donde la variable sería i, teniendo en cuenta que $\mathrm{i}^2 = -1$

Operaciones de adición, sustracción y multiplicación
Sean $z = a + b\mathrm{i}$ y $w = x + y\mathrm{i}$, con $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ entonces se define la:

- **adición:** $z + w = (a + b\mathrm{i}) + (x + y\mathrm{i}) = (a + x) + (b + y)\mathrm{i}$.
- **sustracción:** $z - w = (a + b\mathrm{i}) - (x + y\mathrm{i}) = (a - x) + (b - y)\mathrm{i}$.
- **multiplicación:**

$$\begin{aligned} z \cdot w = (a + b\mathrm{i}) \cdot (x + y\mathrm{i}) &= ax + ay\mathrm{i} + b\mathrm{i}x + b\mathrm{i}y\mathrm{i} \\ &= ax + ay\mathrm{i} + bx\mathrm{i} + by\mathrm{i}^2 \\ &= ax + ay\mathrm{i} + bx\mathrm{i} - by \\ &= (ax - by) + (ay + bx)\mathrm{i} \end{aligned}$$

Ejemplo 6
Considere cada una de las siguientes operaciones entre números complejos.

- $(5 - 4\mathrm{i}) + (\mathrm{i} - 1) = (5 - 1) + (-4\mathrm{i} + \mathrm{i}) = 4 - 3\mathrm{i}$
- $(3 - 2\mathrm{i}) - (-1 + \mathrm{i}) = (3 + 1) + (-2 - 1)\mathrm{i} = 4 - 3\mathrm{i}$
- $(-7 + 2\mathrm{i})(-7 - 2\mathrm{i}) = (-7)^2 - (2\mathrm{i})^2 = 49 - 4\mathrm{i}^2 = 49 + 4 = 53$
- $(2 + \mathrm{i})(3 - 4\mathrm{i}) = 6 - 8\mathrm{i} + 3\mathrm{i} - 4\mathrm{i}^2 = 6 - 5\mathrm{i} - 4(-1) = 6 - 5\mathrm{i} + 4 = 10 - 5\mathrm{i}$
- $\left(1 - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)^2 = 1 - 2\mathrm{i}\sqrt{2} - 2 = -1 - 2\mathrm{i}\sqrt{2}$

En el caso de la división de números complejos es necesario definir, lo que adelante se denominará, el conjugado de un número complejo. A continuación se introduce el concepto y se estudian algunas propiedades del mismo.

Definición 5 (Conjugado de un número complejo)
Considere el número complejo $z = a + b\mathrm{i}$, se define el conjugado de z y se denota $\overline{z}$ como el número complejo definido por:

$$\overline{z} = a - b\mathrm{i}$$

Teorema 1
Sean $z, w \in \mathbb{C}$, entonces son ciertas las siguientes igualdades:

- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$
- $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- $\overline{z \div w} = \overline{z} \div \overline{w}$
- $\overline{\overline{z}} = z$

❑ **Demostración.** Se demostrará únicamente $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$, las restantes cuatro propiedades quedan como ejercicio.

Suponga que $z = a + b\mathrm{i}$ y $w = x + y\mathrm{i}$, donde $a, b, x, y \in \mathbb{R}$. De esta manera se tiene que:

$$\overline{z \cdot w} = \overline{(a + b\mathrm{i}) \cdot (x + y\mathrm{i})} = \overline{(ax - by) + (ay + bx)\mathrm{i}} = (ax - by) - (ay + bx)\mathrm{i}$$

por otro lado:

$$\begin{aligned} \overline{z} \cdot \overline{w} &= \overline{a + b\mathrm{i}} \cdot \overline{x + y\mathrm{i}} = (a - b\mathrm{i}) \cdot (x - y\mathrm{i}) = ax - ay\mathrm{i} - b\mathrm{i}x + b\mathrm{i}y\mathrm{i} \\ &= ax - ay\mathrm{i} - b\mathrm{i}x + by\mathrm{i}^2 = (ax - by) - (ay + bx)\mathrm{i} \end{aligned}$$

de donde queda demostrado que:

$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

❐

Operación de división
Sean $z = a + b\mathrm{i}$ y $w = x + y\mathrm{i}$ dos números complejos tal que $w \neq 0$, entonces para realizar la división de z entre w se procede como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{a + b\mathrm{i}}{x + y\mathrm{i}} = \frac{a + b\mathrm{i}}{x + y\mathrm{i}} \cdot \frac{x - y\mathrm{i}}{x - y\mathrm{i}} = \frac{(a + b\mathrm{i})(x - y\mathrm{i})}{(x + y\mathrm{i})(x - y\mathrm{i})} \\ &= \frac{ax - ay\mathrm{i} + bx\mathrm{i} - by\mathrm{i}^2}{x^2 + y^2} = \frac{(ax + by) + (bx - ay)\mathrm{i}}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{(ax + by)}{x^2 + y^2} + \frac{(bx - ay)}{x^2 + y^2}\mathrm{i} \end{aligned}$$

Note que el proceso para realizar la división de números complejos en forma rectangular es muy similar al concepto de racionalización estudiado en cursos previos en el tema de álgebra. La multiplicación del conjugado permite simplificar el divisor generando un número real, lo que ayuda a expresar el resultado de la división de forma rectangular, en los siguientes ejemplos ser puede observar con mayor detalle el proceso de división.

■ Ejemplo **7**
Considere las siguientes operaciones con números complejos:

- $\dfrac{1}{2 - \mathrm{i}} = \dfrac{1}{2 - \mathrm{i}} \cdot \dfrac{2 + \mathrm{i}}{2 + \mathrm{i}} = \dfrac{2 + \mathrm{i}}{(2 - \mathrm{i})(2 + \mathrm{i})} = \dfrac{2 + \mathrm{i}}{2^2 - \mathrm{i}^2} = \dfrac{2 + \mathrm{i}}{4 + 1} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}\mathrm{i}$
- $\dfrac{1 + 2\mathrm{i}}{2 - 3\mathrm{i}} = \dfrac{1 + 2\mathrm{i}}{2 - 3\mathrm{i}} \cdot \dfrac{2 + 3\mathrm{i}}{2 + 3\mathrm{i}} = \dfrac{(1 + 2\mathrm{i}) \cdot (2 + 3\mathrm{i})}{2^2 - (3\mathrm{i})^2} = \dfrac{-4 + 7\mathrm{i}}{4 + 9} = \dfrac{-4}{13} + \dfrac{7}{13}\mathrm{i}$

Ejercicios 2.

1. Demuestre que si $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$, entonces $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}^+$.
2. Verifique que para todo $z \in \mathbb{C}$ se cumple que: $\dfrac{z+\overline{z}}{2} = \operatorname{Re} z$
3. Determine los valores de x y y en $\mathbb{R}$ tal que $(2-5\mathrm{i}) \cdot (x+y\mathrm{i})$ sea un número real. R/: $y = \frac{5x}{2}$, con $x \in \mathbb{R}$
4. Sea $x = 4 - 3\mathrm{i}$, determine un número $y \in \mathbb{C}$ tal que $\overline{x} \cdot \overline{y} = 2\mathrm{i} - 1$
   R/: $y = \frac{2}{25} + \frac{-11\mathrm{i}}{25}$
5. Probar que $z + \overline{z}$ es siempre un número real y $z - \overline{z}$ es siempre un número imaginario puro.
6. ¿Qué condición debe cumplir $z \in \mathbb{C}$ para que $\overline{z} = \frac{1}{z}$? R/: $|z| = 1$
7. Si $z \in \mathbb{C}$ probar que:
$$\operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}$$

Potencias enteras de números complejos
Sea $z \in \mathbb{C}$ y sea $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdots z}_{n \text{ veces } z}$$

además, si $z \neq 0$, entonces

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} \qquad \text{y} \qquad z^0 = 1$$

Para el caso de que la base de la potencia sea un número real o bien un imaginario puro, el cálculo de las potencias se puede hacer con gran facilidad, en caso contrario el trabajo se torna tedioso para el caso de exponentes relativamente grandes. Estos procesos se pueden observar en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 8
Considere las siguientes operaciones con potencias enteras complejas.

1. $\mathrm{i}^{24} = ((\mathrm{i})^2)^{12} = (-1)^{12} = 1$
2. $\mathrm{i}^{62} = (\mathrm{i}^2)^{31} = (-1)^{31} = -1$
3. $\mathrm{i}^{27} = \mathrm{i}^{26} \cdot \mathrm{i} = (\mathrm{i}^2)^{13} \cdot \mathrm{i} = (-1)^{13} \cdot \mathrm{i} = -\mathrm{i}$

4. $\mathrm{i}^{17} = \mathrm{i}^{16} \cdot \mathrm{i} = (\mathrm{i}^2)^8 \cdot \mathrm{i} = (-1)^8 \cdot \mathrm{i} = 1 \cdot \mathrm{i} = \mathrm{i}$
5. $5\mathrm{i}^{239} + 2(-\mathrm{i})^{106} = 5\mathrm{i} \cdot (\mathrm{i}^2)^{119} + 2(-1)^{106}(\mathrm{i}^2)^{53} = 5\mathrm{i} \cdot (-1)^{119} + 2(-1)^{106}(-1)^{53} = -2 - 5\mathrm{i}$
6. $(1+\mathrm{i})^3 = (1+\mathrm{i})^2(1+\mathrm{i}) = (1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2)(1+\mathrm{i}) = 2\mathrm{i}(1+\mathrm{i}) = -2+2\mathrm{i}$

Ejemplo 9
Si $z = 3 - 2\mathrm{i}$ *y* $w = 4\mathrm{i}$ *determine* $\dfrac{\overline{z+w}}{\overline{z}}$

★ **Solución.** Primero que todo, se deben determinar los conjugados correspondientes:

- $\overline{z+w} = \overline{3+2\mathrm{i}} = 3 - 2\mathrm{i}$
- $\overline{z} = 3 + 2\mathrm{i}$

De este modo se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{z+w}}{\overline{z}} &= \frac{3-2\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}} = \frac{3-2\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}} \cdot \frac{3-2\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}} = \frac{(3-2\mathrm{i})^2}{9+4} \\ &= \frac{9-12\mathrm{i}+4\mathrm{i}^2}{13} = \frac{9-12\mathrm{i}-4}{13} = \frac{5-12\mathrm{i}}{13} \\ &= \frac{5}{13} - \frac{12}{13}\mathrm{i} \end{aligned}$$

★

Ejemplo 10
Sean $z = -3 + \mathrm{i}x^2y$, $w = x^2 + y + 4\mathrm{i}$. *Hallar* x, y *reales para que* z *y* w *sean números complejos conjugados.*

★ **Solución.** Para que z y w sean dos complejos conjugados se tiene que cumplir que $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w$ y que $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} w$. Entonces:

- $-3 = x^2 + y \Rightarrow x^2 + y = -3$
- $x^2y + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4/y$

de donde queda el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y &= -3 \\ x^2 + \dfrac{4}{y} &= 0 \end{cases}$$

Sustituyendo se obtiene:

$$\frac{-4}{y} + y = -3 \Rightarrow \frac{-4 + y^2}{y} = -3 \Rightarrow y^2 - 4 = -3y$$

y resolviendo dicha ecuación:

$$y^2 + 3y - 4 = 0 \Rightarrow (y+4)(y-1) = 0 \Rightarrow y = -4 \vee y = 1$$

De este modo, se deben analizar las dos posibilidades para valores de y

- para $y = -4$ se tiene que $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$
- para $y = 1$, se tiene la no existencia de valores reales para x que satisfagan el sistema de ecuaciones.

Por lo tanto los valores buscados son $y = 4$ y $x = \pm 1$

★

Ejemplo 11

Determine los números complejos z y w que satisfagan simultáneamente las condiciones siguientes:

1. $z + w = 3 + \mathrm{i}$. *2.* $\mathrm{Re}\,(z) = 2$. *3.* $\dfrac{z}{w}$ *es imaginario.*

★ **Solución.** *Note que* $z = 2 + b\mathrm{i}$, $w = c + d\mathrm{i}$, *pues* $\mathrm{Re}\,(z) = 2$

$$\begin{aligned} z + w &= 3 + \mathrm{i} \\ 2 + b\mathrm{i} + c + d\mathrm{i} &= 3 + \mathrm{i} \\ 2 + c + (b + d)\,\mathrm{i} &= 3 + \mathrm{i} \end{aligned}$$

de donde, igualando parte real a parte real y parte imaginaria a parte imaginaria se tiene que:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2 + c &=& 3 \\ b + d &=& 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} c &=& 1 \\ d &=& 1 - b \end{array} \right. \tag{1.1}$$

Luego se tiene que $w = 1 + d\mathrm{i}$. *De este modo se tiene que:*

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{2 + b\mathrm{i}}{1 + d\mathrm{i}} \cdot \frac{1 - d\mathrm{i}}{1 - d\mathrm{i}} \\ &= \frac{2 - 2d\mathrm{i} + b\mathrm{i} - bd\mathrm{i}^2}{1 + d^2} \\ &= \frac{(2 + bd)}{1 + d^2} + \frac{(-2d + b)\,\mathrm{i}}{1 + d^2} \end{aligned}$$

Por la segunda condición se sabe que $\dfrac{z}{w}$ *es un número imaginario, de donde se tendría que:*

$$\begin{aligned}
& \frac{2+bd}{1+d^2} = 0 \\
\Rightarrow\ & 2+bd = 0 \\
\Rightarrow\ & bd = -2 \text{ usando la igualdad 1.1} \\
\Rightarrow\ & b\,(1-b) = -2 \\
\Rightarrow\ & -b^2 + b + 2 = 0 \\
\Rightarrow\ & b = -1 \quad \vee \quad b = 2
\end{aligned}$$

Así que se tiene dos posibles casos:

- *Si* $b = -1$ *se tendría que* $z = 2 - \mathrm{i}$ *y* $w = 1 + 2\mathrm{i}$.
- *Si* $b = 2$ *se tendría que* $z = 2 + 2\mathrm{i}$ *y* $w = 1 - \mathrm{i}$.

Finalmente, los números complejos que cumplen simultáneamente las condiciones dadas son:

$$\begin{cases} z = 2 - \mathrm{i} \\ w = 1 + 2\mathrm{i} \end{cases} \text{o bien,} \begin{cases} z = 2 + 2\mathrm{i} \\ w = 1 - \mathrm{i} \end{cases}$$

★

Ejercicios 3.

1. Realice cada una de las siguientes operaciones con números complejos y exprese el resultado en forma rectangular.

   a) $\dfrac{(2+3\mathrm{i})-(1-\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}}$ R/: $\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$

   b) $3-7\mathrm{i}+\dfrac{13\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}$ R/: $1-4\mathrm{i}$

   c) $4+\mathrm{i}(\mathrm{i}-1)^{-1}$ R/: $\dfrac{9}{2}-\dfrac{\mathrm{i}}{2}$

   d) $4-\mathrm{i}^7\cdot(1-\mathrm{i})^{-2}$ R/: $\dfrac{7}{2}$

   e) $\dfrac{25(1+2\mathrm{i})^3+25(2-\mathrm{i})^{-2}}{2i}$ R/: $-23+136\mathrm{i}$

   f) $\left(\dfrac{52\mathrm{i}}{1-5\mathrm{i}}\right)^3+7\mathrm{i}^3+2$ R/: $-878+585\mathrm{i}$

   g) $\dfrac{3\mathrm{i}^{-50}-2\mathrm{i}^{-37}}{4\mathrm{i}^{-13}+5\mathrm{i}^{-19}}$ R/: $2+3\mathrm{i}$

2. Resuelva en $\mathbb{C}$ cada una de las siguientes ecuaciones.

   a) $2+\mathrm{i}^3x+(2-\mathrm{i})=(1-\mathrm{i})^2x$ R/: $S=\{1+4\mathrm{i}\}$

   b) $\overline{(2-\mathrm{i})^2x}+2i=\overline{3x}+\mathrm{i}$ R/: $S=\left\{\dfrac{-1}{4}\right\}$

   c) $\left(2x^2+5x+2\right)\left(\dfrac{\mathrm{i}x}{3-4\mathrm{i}}-\mathrm{i}\right)=0$ R/: $S=\left\{\frac{-1}{2},-2,3-4\mathrm{i}\right\}$

3. Determine el valor de $x,y\in\mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación $(3-4\mathrm{i})^2-2(x-y\mathrm{i})=x+\mathrm{i}$. R/: $x=-\dfrac{7}{3}$, $y=\dfrac{25}{2}$

4. Sea $w=(x-\mathrm{i})(x+3-4\mathrm{i})$. Hallar los valores reales de x para los cuales w es imaginario puro. Escriba el número w resultante en cada caso.

   R/: $x=-4\Longrightarrow w=17\mathrm{i}$ ó $x=1\Longrightarrow w=-8\mathrm{i}$

5. Si $z=a+b\mathrm{i}$ determine $\mathrm{Re}(\overline{z}^2)$ R/: a^2-b^2

6. Determine todos los números complejos z tales que $\dfrac{1+z}{1-z}$ es un número imaginario puro.

7. ¿Qué valores de $n\in\mathbb{N}$ hacen que i^n sea un número real? Justifique.

1.2.1. Sistemas de ecuaciones con variable compleja

En general, resolver sistemas de ecuaciones en el conjunto de los números complejos no dista demasiado a lo realizado en el conjunto de los números reales. En la presente sección se abordará una de las formas más eficientes en que se pueden resolver sistemas de ecuaciones de dos ecuaciones con dos incógnitas complejas.

Para resolver un sistema de ecuaciones con variables complejas, se puede utilizar una idea ya estudiada. Cada una de las variables presentes en el sistema de ecuaciones puede ser sustituida por dos nuevas incógnitas que corresponden a la parte real y a la parte imaginaria de dicha incógnita. Específicamente, si x es la variable, esta misma puede ser sustituida por $\operatorname{Re} x + \mathrm{i} \operatorname{Im} x$, donde $\operatorname{Re} x$ y $\operatorname{Im} x$ son dos nuevas variables por determinar, luego en cada una de las ecuaciones del sistema se puede igualar parte real a la parte real y parte imaginaria a parte imaginaria, generando dos ecuaciones por cada una de las ecuaciones del sistema original. El problema de esta forma de resolver los sistemas de ecuaciones complejos es el crecimiento del sistema mismo, pues por cada ecuación del sistema original se producen dos ecuaciones nuevas y por cada variable compleja se generan dos variables reales, haciendo el sistema más difícil de resolver.

Es posible resolver el sistema sin aumentar el tamaño del mismo y mediante técnicas utilizado para resolver sistema de ecuaciones con variable real, mismas que fueron estudiados en cursos previos. El método de sustitución, puede ser empleado específicamente para dicho propósito, éste método para sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se describe a continuación.

Método de sustitución para resolver sistemas complejos de 2×2
Considere un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas, el método de sustitución consiste en los siguientes pasos:

P1. Despeje, de una de las ecuaciones (no importa de cual), una de las incógnitas (no importa cual).

P2. Sustituya la incógnita despejada en el paso anterior en la otra ecuación. La acción anterior genera una única ecuación con una sola variable compleja que se puede resolver con un simple despeje. Así, se habrá conseguido el valor de una de las variables.

P3. El valor de la variable, determinado en el paso anterior, se puede sustituir en el despeje realizado en **P1**, en donde simplificando la expresión, se logra determinar el valor de la otra incógnita.

Finalmente, restaría dar la solución del sistema

■ EJEMPLO **12**
Resolver el sistema siguiente, con incógnitas $z, w \in \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} 2z - w &= 2 - 4\mathrm{i} \\ z + 4\mathrm{i}w &= -7 - \mathrm{i} \end{cases}$$

★ **Solución.** En este ejemplo se puede observar que las variables que intervienen son únicamente z, w. Entonces procedemos a despejar w de la primera ecuación, quedando:

$$w = 2z - 2 + 4\mathrm{i} \tag{1.2}$$

Ahora sustituimos 1.2 en la segunda ecuación para que ésta dependa solamente de la variable z.

$$\begin{aligned} z + 4\mathrm{i}w = -7 - \mathrm{i} \quad &\Rightarrow \quad z + 4\mathrm{i}(2z - 2 + 4\mathrm{i}) = -7 - \mathrm{i} \\ &\Rightarrow \quad z + 8\mathrm{i}z - 8\mathrm{i} + 16\mathrm{i}^2 = -7 - \mathrm{i} \\ &\Rightarrow \quad z(1 + 8\mathrm{i}) = -7 - \mathrm{i} + 8\mathrm{i} + 16 \\ &\Rightarrow \quad z = \frac{7\mathrm{i} + 9}{1 + 8\mathrm{i}} \\ &\Rightarrow \quad z = \frac{7\mathrm{i} + 9}{1 + 8\mathrm{i}} \cdot \frac{1 - 8\mathrm{i}}{1 - 8\mathrm{i}} \\ &\Rightarrow \quad z = \frac{7\mathrm{i} - 56\mathrm{i}^2 + 9 - 72\mathrm{i}}{65} \\ &\Rightarrow \quad z = \frac{-65\mathrm{i} + 65}{65} \\ &\Rightarrow \quad z = 1 - \mathrm{i} \end{aligned}$$

de donde se tendría el valor para la variable z, finalmente, se procede a sustituir $z = 1 - \mathrm{i}$ en la igualdad 1.2 para así obtener el valor de la variable w.

$$w = 2(1 - \mathrm{i}) - 2 + 4\mathrm{i} = 2 - 2\mathrm{i} - 2 + 4\mathrm{i} = 2\mathrm{i}$$

De este modo, la solución del sistema es $z = 1 - \mathrm{i}$ y $w = 2\mathrm{i}$.

★

■ EJEMPLO **13**
Resolver el sistema siguiente, con incógnitas $z, w \in \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} 3z - \mathrm{i}w &= 1 - 9\mathrm{i} \\ (2 - \mathrm{i})\overline{z} + \overline{w} &= 5 + 3\mathrm{i} \end{cases} \tag{1.3}$$

★ **Solución.** En principio el sistema de ecuaciones está conformado por cuatro incógnitas, z, w, $\overline{z}$ y $\overline{w}$. Sin embargo, es posible reducirlo a dos incógnitas mediante algunas propiedades de los conjugados quedando como únicas incógnitas z y w.

$$
\begin{aligned}
(2-\mathrm{i})\overline{z}+\overline{w}=5+3\mathrm{i} \quad &\Rightarrow \quad \overline{(2-\mathrm{i})\overline{z}+\overline{w}}=\overline{5+3\mathrm{i}}\\
&\Rightarrow \quad \overline{2-\mathrm{i}}\cdot\overline{\overline{z}}+\overline{\overline{w}}=5-3\mathrm{i}\\
&\Rightarrow \quad (2+\mathrm{i})z+w=5-3\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

Así, el sistema 1.3 es equivalente al sistema 1.4 que se muestra a continuación:

$$
\left\{\begin{array}{rcl}
3z-\mathrm{i}w &=& 1-9\mathrm{i}\\
(2+\mathrm{i})z+w &=& 5-3\mathrm{i}
\end{array}\right. \tag{1.4}
$$

Ahora se despejará w en la segunda ecuación del nuevo sistema, de manera que pueda ser sustituida en la primera ecuación del mismo, quedando ésta con una sola incógnita fácil de despejar.

$$
(2+\mathrm{i})z+w=5-3\mathrm{i}\Rightarrow w=5-3\mathrm{i}-(2+\mathrm{i})z \tag{1.5}
$$

sustituyendo $w=5-3\mathrm{i}-(2-\mathrm{i})z$ en la primera ecuación se tiene que:

$$
\begin{aligned}
3z-\mathrm{i}w=1-9\mathrm{i} \quad &\Rightarrow \quad 3z-\mathrm{i}(5-3\mathrm{i}-(2+\mathrm{i})z)=1-9\mathrm{i}\\
&\Rightarrow \quad 3z-5\mathrm{i}+3\mathrm{i}^2+(2+\mathrm{i})z\mathrm{i}=1-9\mathrm{i}\\
&\Rightarrow \quad 3z-5\mathrm{i}-3+2z\mathrm{i}-z=1-9\mathrm{i}\\
&\Rightarrow \quad 2z-5\mathrm{i}-3+2z\mathrm{i}=1-9\mathrm{i}\\
&\Rightarrow \quad 2z+2z\mathrm{i}=1-9\mathrm{i}+5\mathrm{i}+3\\
&\Rightarrow \quad z(2+2\mathrm{i})=4-4\mathrm{i}\\
&\Rightarrow \quad z=\frac{4-4\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}}\cdot\frac{2-2\mathrm{i}}{2-2\mathrm{i}}\\
&\Rightarrow \quad z=\frac{(4-4\mathrm{i})(2-2\mathrm{i})}{8}\\
&\Rightarrow \quad z=\frac{8-8\mathrm{i}-8\mathrm{i}-8}{8}\\
&\Rightarrow \quad z=\frac{-16\mathrm{i}}{8}\\
&\Rightarrow \quad z=-2\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

de donde se tendría el valor para la variable z, finalmente, se procede a sustituir $z=-2\mathrm{i}$ en la igualdad 1.5 para así obtener el valor de la variable w.

$$
w=5-3\mathrm{i}-(2+\mathrm{i})(-2\mathrm{i})=5-3\mathrm{i}+2\mathrm{i}(2+\mathrm{i})=5-3\mathrm{i}+4\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2=5-3\mathrm{i}+4\mathrm{i}-2=3+\mathrm{i}
$$

De este modo, la solución del sistema es $z=-2\mathrm{i}$ y $w=3+\mathrm{i}$.

★

Ejercicios 4.

1. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones en $\mathbb{C}$

   a) $\begin{cases} 9z - \mathrm{i}w &= 1 - 3\mathrm{i} \\ (2-\mathrm{i})\,\overline{z} + \overline{w} &= 2 - 2\mathrm{i} \end{cases}$ R/: $z = -\frac{5}{34} - \frac{3}{34}\mathrm{i}$, $w = \frac{75}{34} + \frac{79}{34}\mathrm{i}$

   b) $\begin{cases} 6y + (4\mathrm{i}-1)x &= -3 - 7\mathrm{i} \\ (\mathrm{i}-1)\overline{y} - \overline{x} &= 7\mathrm{i} - 5 \end{cases}$ R/: $y = 3 - \mathrm{i}$, $x = 1 + 5\mathrm{i}$

   c) $\begin{cases} z + 4w &= 2\mathrm{i} - 8 \\ 4z - 2\mathrm{i}w &= -\mathrm{i} \end{cases}$ R/: $z = \frac{-2}{5} - \frac{6}{5}\mathrm{i}$, $w = -\frac{19}{10} + \frac{4}{5}\mathrm{i}$

   d) $\begin{cases} (1-\mathrm{i})z + (2-\mathrm{i})w &= 2\mathrm{i} \\ (1-\mathrm{i})z - w\mathrm{i} &= 3 - 2\mathrm{i} \end{cases}$ R/: $z = \frac{9}{4} - \frac{5}{4}\mathrm{i}$, $w = \frac{-3}{2} + 2\mathrm{i}$?

   e) $\begin{cases} (1+\mathrm{i})\overline{z} - 2\overline{w} &= -30 + 24\mathrm{i} \\ z + (2\mathrm{i}-1)w &= -9 + 9\mathrm{i} \end{cases}$ R/: $z = 7 - 13\mathrm{i}$, $w = 12 + 2\mathrm{i}$

2. Dado $z = 3 - 4\mathrm{i}$, encuentre un $w \in C$ tal que $\overline{z} \cdot \overline{w} = 2\mathrm{i} - 1$.

   R/: $\frac{1}{5} - \frac{2\mathrm{i}}{5}$

3. Resuelva la ecuación $\dfrac{z-1}{1+\mathrm{i}z\sqrt{3}} = 3\mathrm{i}\sqrt{3}$. R/: $\frac{1}{10} + \frac{3\mathrm{i}\sqrt{3}}{10}$

4. Encuentre dos números reales x, y que cumplan con la condición dada.

   - $(1-\mathrm{i})x + 2y\mathrm{i} = 4 + 2\mathrm{i}$ R/: $x = 4$, $y = 3$
   - Que $z = -3 + \mathrm{i}x^2y$ y $w = x^2 + y + 4\mathrm{i}$ sean conjugados entre ellos.

     R/: $x = \pm 1$, $y = -4$

5. ¿Cuál debe ser la relación entre los números reales x, y para que $(x + y\mathrm{i})(2 + 3\mathrm{i})$ sea un número real? R/ $y = -3x/2$

1.3. Teorema Fundamental del Álgebra (TFA)

Para el conjunto de los números reales se tiene un resultado importante que afirma que todo polinomio $P(x)$ no constante se puede factorizar como producto de factores lineales y de cuadráticos irreductibles, donde la palabra irreductible se refiere a la carencia de ceros reales. De este modo, en una factorización en donde aparezca un factor de grado mayor o igual a 3 es aún factorizable.

Por otro lado, en los números reales todo polinomio de grado 2 posee dos, uno o ningún cero. Es decir, en $\mathbb{R}$ todo polinomio de grado 2 posee dos ceros o ninguno si se considera que podrían haber dos soluciones iguales.

En las secciones anteriores se estudió que las ecuaciones de segundo grado con discriminate negativo poseen dos soluciones complejas, de este modo toda ecuación de segundo grado posee exactamente dos soluciones complejas, en donde podrían ser iguales.

Definición 6
Sea $P(x)$ un polinomio de grado $n \geq 1$ y sea c un cero de $P(x)$. Se dice que c es un cero de multiplicidad k con $k \leq n$ si el factor $(x-c)^k$ aparece en la factorización completa de $P(x)$. Además, al factor $(x-c)$ se le llama factor múltiple con multiplicidad k.

En caso de $k=1$, al cero c se le llama cero simple mientras que al factor $(x-c)$ se le llama factor simple.

Ejemplo 14
Considere los siguientes polinomios, y sus respectivas factorizaciones:

- $P(r) = r^3(r+1)^2(r+5)(r-5)$, *para este polinomio el factor r posee multiplicidad 3, el factor $(r+1)$ posee multiplicidad 2 y los factores $(r+5)$ y $(r-5)$ son factores simples. O bien, 0 es un cero del polinomio con multiplicidad 3, el -1 es un cero del polinomio con multiplicidad 2 y lo ceros 5 y -5 son ceros simples.*
- $P(z) = (2z+3)^3(z-5)^5$ *para este polinomio el factor $(2z+3)$ posee multiplicidad 3 y el factor $(z-5)$ multiplicidad 5. O bien, $-3/2$ es un cero con multiplicidad 3 y 5 es un cero con multiplicidad 5.*

> **Nota**
> Las soluciones de una ecuación polinomial $P(x) = 0$ también se llaman ceros del polinomio $P(x)$.

El TFA nos indica el número de ceros que se deben esperar al resolver la ecuación $P(x) = 0$, donde $P(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$, aunado al teorema de factor, nos indicaría el número de factores lineales en que se puede factorizar el polinomio $P(x)$.

Teorema 2 (Teorema Fundamental del Álgebra (TFA))
Todo polinomio de grado n con $n \geq 1$ y con coeficientes complejos, tiene tantas raíces como indica su grado contando las raíces con sus multiplicidades. Dicho de otra manera, si $P(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces la ecuación $P(x) = 0$ tiene exactamente n soluciones, contando sus multiplicidades.

◊ **Corolario 1 (Corolario del TFA)**
Si $P(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$con coeficientes complejos, entonces $P(x)$ se factoriza completamente como

$$P(x) = \alpha(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)\cdots(x-c_n)$$

donde $c_1, c_2, ..., c_n$ son los ceros de $P(x)$ y α es el coeficiente principal de $P(x)$.

■ Ejemplo **15**
Factorice en $\mathbb{C}$ el polinomio $P(x) = x^2 - x - x^3 + 2x^4 - 1$.

★ **Solución.** Ordenando el polinomio se tiene que: $P(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - x - 1$.

Los posibles ceros racionales del polinomio son $D = \left\{\pm 1, \pm \dfrac{1}{2}\right\}$ mediante la división sintética se tiene que:

$$\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \downarrow & 2 & 1 & 2 & 1 & \\ \hline 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & \end{array}$$

por lo que el polinomio se factoriza de la siguiente manera:

$$P(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - x - 1 = (x-1)\left(2x^3 + x^2 + 2x + 1\right)$$

Aún $2x^3 + x^2 + 2x + 1$ es factorizable, si bien se puede abordar con división sintética, también es posible hacerlo con el método de agrupación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 2x^3 + x^2 + 2x + 1 &= \left(2x^3 + x^2\right) + (2x+1) \\ &= x^2(2x+1) + (2x+1) \\ &= (2x+1)\left(x^2+1\right) \\ &= (2x+1)\left(x^2 - \mathrm{i}^2\right) \\ &= (2x+1)(x+\mathrm{i})(x-\mathrm{i}) \end{aligned}$$

por lo que la factorización completa del polinomio sería:

$$P(x) = (x-1)(2x+1)(x+\mathrm{i})(x-\mathrm{i}) \tag{1.6}$$

o lo que es lo mismo:

$$P(x) = 2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x+\mathrm{i})(x-\mathrm{i}) \tag{1.7}$$

La respuesta al ejercicio puede darse, tanto como se observa en 1.6 o bien como se muestra en 1.7, la manera de escribirlo en 1.7 es solo para que quede en concordancia con el corolario 1, sin embargo, ambas respuestas son admisibles y consideradas equivalentes, puesto que una constante no es considerada un factor.

★

Teorema **3 (Teorema de los Ceros Conjugados)**
Si $P(x)$ es un polinomio con todos sus coeficientes reales tal que $x = a + b\mathrm{i}$ es un cero de $P(x)$, entonces su conjugado $\overline{x} = a - b\mathrm{i}$ también es un cero de $P(x)$.

Es importante destacar que el teorema anterior solo es válido para polinomios que tengan todos sus coeficientes reales, en caso que esto no se cumpla, el teorema no se aplica, situación que se puede observar en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 16
Considere el siguiente polinomio $P(x) = x^3 - \mathrm{i}x^2$ *cuya factorización está dada por* $x^2(x - \mathrm{i})$ *note que* i *es un cero del polinomio pero que su conjugado* $-\mathrm{i}$ *no lo es.*

Ejemplo 17
Resuelva en $\mathbb{C}$ *la ecuación* $2y^4 - 10y^3 + 9y^2 + 14y + 10 = 0$, *si se sabe que* $3 - \mathrm{i}$ *es una de sus soluciones.*

★ **Solución.** Se empleará la división sintética y el teorema del factor para realizar la factorización del polinomio $P(y) = 2y^4 - 10y^3 + 9y^2 + 14y + 10$:

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & -10 & 9 & 14 & 10 & 3-\mathrm{i} \\ \downarrow & 6-2\mathrm{i} & -14-2\mathrm{i} & -17-\mathrm{i} & -10 & \\ \hline 2 & -4-2\mathrm{i} & -5-2\mathrm{i} & -3-\mathrm{i} & 0 & \end{array}$$

como $3-\mathrm{i}$ es un cero del polinomio de coeficientes reales $P(y)$, entonces $3+\mathrm{i}$ también es un cero de dicho polinomio, esto por el teorema 3. De esta manera, es posible realizar nuevamente la división sintética.

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -4-2\mathrm{i} & -5-2\mathrm{i} & -3-\mathrm{i} & 3+\mathrm{i} \\ \downarrow & 6+2\mathrm{i} & 6+2\mathrm{i} & 3+\mathrm{i} & \\ \hline 2 & 2 & 1 & 0 & \end{array}$$

de donde se tiene que el polinomio $P(y)$ se factoriza como:

$$2y^4 - 10y^3 + 9y^2 + 14y + 10 = (y - (3 - \mathrm{i}))(y - (3 + \mathrm{i}))\left(2y^2 + 2y + 1\right)$$

Mediante el empleo de la Fórmula General para polinomios de segundo grado se tiene que los ceros de $2y^2 + 2y + 1$ son:

$$\frac{-1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i} \qquad \text{y} \qquad \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$$

Finalmente, el conjunto solución de la ecuación $2y^4 - 10y^3 + 9y^2 + 14y + 10 = 0$ es:

$$S = \left\{3 \pm \mathrm{i}, \frac{-1}{2} \pm \frac{1}{2}\mathrm{i}\right\}$$

★

Ejemplo 18
Factorice completamente en $\mathbb{C}$ *el polinomio* $P(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + 22x - 60$ *si se sabe que* $P(1 + 3\mathrm{i}) = 0$

★ **Solución.** Como los coeficientes del polinomio son reales y $1+3\text{i}$ es un cero de dicho polinomio, entonces por el teorema 3 se cumple que $1-3\text{i}$ también es un cero de $P(x)$. Así que:

$$\begin{array}{rrrr|r|l} 1 & -1 & 2 & 22 & -60 & 1+3\text{i} \\ \downarrow & 1+3\text{i} & -9+3\text{i} & -16-18\text{i} & 60 & \\ \hline 1 & 3\text{i} & -7+3\text{i} & 6-18\text{i} & 0 & \\ \downarrow & 1-3\text{i} & 1-3\text{i} & -6+18\text{i} & 1-3\text{i} & \\ \hline 1 & 1 & -6 & 0 & & \end{array}$$

De donde, utilizando el teorema del factor se tiene que

$$P(x) = (x-(1+3\text{i}))(x-(1-3\text{i}))(x^2+x-6)$$

Por otro lado, se tiene que los ceros del polinomio $Q(x) = x^2+x-6$ son $x=2$ y $x=-3$ de donde se tendría, por el teorema del factor que la factorización completa de $P(x)$ está dada por:

$$P(x) = (x-1-3\text{i})(x-1+3\text{i})(x-2)(x+3)$$

★

Ejemplo 19

Factorice completamente en $\mathbb{C}$ *el polinomio* $P(x) = x^4-6x^3+23x^2-50x+50$ *si se sabe que* $2+\text{i}$ *es uno de sus ceros.*

★ **Solución.** Como los coeficientes del polinomio son reales y $2+\text{i}$ es un cero de $P(x)$, entonces por el teorema 3 se tiene que $2-\text{i}$ es también cero de $P(x)$. Así:

$$\begin{array}{rrrr|r|l} 1 & -6 & 23 & -50 & 50 & 2+\text{i} \\ \downarrow & 2+\text{i} & -9-2\text{i} & 30+10\text{i} & -50 & \\ \hline 1 & -4+\text{i} & 14-2\text{i} & -20+10\text{i} & 0 & \\ \downarrow & 2-\text{i} & -4+2\text{i} & 20-10\text{i} & 2-i & \\ \hline 1 & -2 & 10 & 0 & & \end{array}$$

de donde, mediante el teorema del factor se tiene que

$$P(x) = (x-(2+\text{i}))(x-(2-\text{i}))(x^2-2x+10)$$

Luego, por medio de la Fórmula General se determinan los ceros de $x^2-2x+10$, éstos están dados por:

$$\frac{2+\sqrt{4-4\cdot 1\cdot 10}}{2\cdot 1} = \frac{2+\sqrt{-36}}{2} \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{2+6i}{2} = 1+3\text{i} \\ \\ \dfrac{2-6i}{2} = 1-3\text{i} \end{array}\right.$$

De donde finalmente se tiene que la factorización completa de $P(x)$ está dada por:

$$P(x) = (x - (2 + \mathrm{i}))(x - (2 - \mathrm{i}))(x - (1 + 3\mathrm{i}))(x - (1 - 3\mathrm{i}))$$

★

■ Ejemplo **20**

Considere el polinomio $P(x) = 3x^3 - 11x^2 + 11x + 5$, *si* $P(-\mathrm{i} + 2) = 0$ *factorice completamente* $P(x)$ *en el conjunto de los números complejos.*

★ **Solución.** Como el $P(x)$ tiene todos los coeficientes reales y $-\mathrm{i} + 2$ es un cero, entonces por el teorema 3 se tiene que $\mathrm{i} + 2$ también es un cero de $P(x)$. Así:

$$\begin{array}{rrrr|l} 3 & -11 & 11 & 5 & 2-\mathrm{i} \\ \downarrow & 6-3\mathrm{i} & -13-\mathrm{i} & -5 & \\ \hline 3 & -5-3\mathrm{i} & -2-\mathrm{i} & \multicolumn{1}{|r|}{0} & \\ \downarrow & 6+3\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} & \multicolumn{1}{|l}{2+\mathrm{i}} & \\ \cline{1-3} 3 & 1 & 0 & \multicolumn{1}{|l}{} & \end{array}$$

y por el teorema del factor se tiene que la factorización completa de $P(x)$ es: $P(x) = (x - 2 + \mathrm{i})(x - 2 - \mathrm{i})(3x + 1)$

★

■ Ejemplo **21**

Determine un polinomio de grado 3 con coeficientes reales, cuyos ceros incluyan a 2 y a $1 - i$.

★ **Solución.** Como el polinomio debe tener coeficientes reales y $1 - \mathrm{i}$ debe ser uno de los ceros, por el teorema 3 se debe cumplir que $1 + \mathrm{i}$ también debe ser cero, así mediante la aplicación del teorema del factor, el polinomio buscado se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} & (x-2)(x-(1-i))(x-(1+i)) \\ = \ & (x-2)\left(x^2-2x+2\right) \\ = \ & x^3-4x^2+6x-4 \end{aligned}$$

Finalmente, un posible polinomio es $Q(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$.

★

Ejercicios 5.

1. Factorice en $\mathbb{C}$ cada uno de los siguientes polinomios

   a) $9x+3x^2+x^3+x^4-54$ R/: $(x-2)(x+3)(x-3\mathrm{i})(x+3\mathrm{i})$

   b) $5t+5t^2+2t^3+3$ R/: $(2t+3)\left(t-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}+\frac{1}{2}\right)\left(t+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$

   c) t^4-1 R/: $(t-1)(t+1)(t-\mathrm{i})(t+\mathrm{i})$

   d) $5z^2+5z^3+2z^4-2$ R/: $(2z-1)(z+1)(z+1-\mathrm{i})(z+1+\mathrm{i})$

2. Encuentre las soluciones complejas de cada una de las siguientes ecuaciones

   a) $4x+5x^2+x^3+x^4+4=0$, si se sabe que $-2\mathrm{i}$ es una solución.
   R/: $S=\left\{\pm 2\mathrm{i}, \frac{-1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}$

   b) $2v^4-19v^2-2v^3-18v-8=0$, si se sabe que $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ es una solución. R/: $S=\left\{-2,4,\frac{-1}{2}\pm\frac{1}{2}\mathrm{i}\right\}$

   c) $7s^2-18s+2s^3+s^4+26=0$,si se sabe que $-2+3\mathrm{i}$ es una solución.
   R/: $S=\{-2\pm 3\mathrm{i}, 1\pm\mathrm{i}\}$

   d) $49y^2-108y-12y^3+4y^4+117=0$, si se sabe que $\dfrac{3}{2}-\mathrm{i}$ es una solución.
   R/: $S=\left\{\pm 3\mathrm{i}, \frac{3}{2}\pm\mathrm{i}\right\}$

3. ¿Es posible determinar un polinomio de grado 3 con todos los coeficientes reales que tenga a $2-3\mathrm{i}$ y $1-\mathrm{i}$ como ceros? Justifique.

4. Analice a veracidad de la siguientes afirmaciones, sin son falsas de un contraejemplo, en caso de ser verdaderas realice una argumentación.

   a) "Todo polinomio de coeficientes reales y de grado impar debe tener al menos un cero real".

   b) "Todo polinomio de grado par tiene ceros complejos conjugados".

5. Hallar un polinomio $P(x)$ de cuarto grado, con ceros i, $-\mathrm{i}$, -2 y 2 y con $P(3)=25$. R/: $\dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{3}{2}x^2-2$

6. Encuentre un polinomio $Q(x)$ de cuarto grado, tal que -2 es un cero de multiplicidad 3 y 0 es un cero simple. R/: $x^4+6x^3+12x^2+8x$

1.4. La geometría de los números complejos

En la página 10 se mencionó que la forma rectangular de un número complejo se puede expresar como un par ordenado y por ello dicho número puede ser representado en un plano denominado plano complejo, ver figura 1.3 y figura 1.4. Así, la representación gráfica de un número complejo de la forma rectangular $z = a + b\mathrm{i}$ corresponde al punto (a, b) sobre el plano complejo, donde la parte real se representa en el eje real (recta horizontal), mientras que la parte imaginaria en el eje imaginario (recta vertical).

Algunas representaciones de los número complejos $2 + 3\mathrm{i}$, $3 + \mathrm{i}$, $-3 - 3\mathrm{i}$ y $3 - \mathrm{i}$ se puede apreciar en la figura 1.4. Sin embargo, la forma rectangular no es la única forma de representar un punto en el plano, existe una forma alternativa denominada forma polar. Esta forma alternativa se estudiará en la siguiente sección.

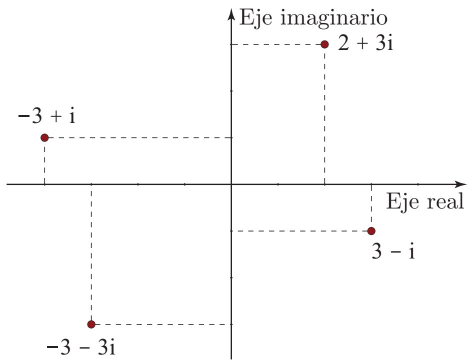


Figura 1.4: Representación rectangular de números complejos

1.4.1. Forma polar de un número complejo

Un punto P cualquiera en el plano complejo puede ser localizado si se tiene conocimiento de sus coordenadas en el eje real y en eje imaginario, estas coordenadas se denominan coordenadas rectangulares del punto P, el mismo punto puede ser identificado si se sabe la distancia r del punto P al origen O, y el ángulo θ formado por el rayo $\overrightarrow{OP}$ y el eje real positivo.

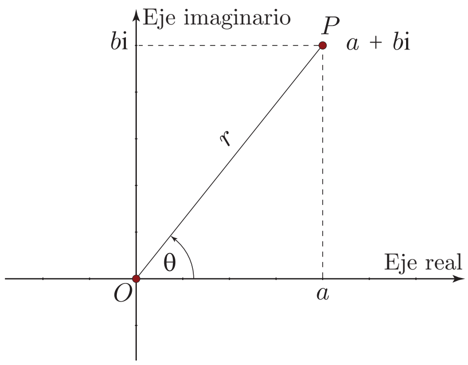


Figura 1.5: Las coordenadas polares de un número complejo

Al par ordenado (r, θ) se le conoce como las coordenadas polares del número complejo representado por el punto P.

Definición **7**
Sea $z \in \mathbb{C}$ y sea P el punto que representa a z en el plano complejo, entonces se define:

- *el módulo o valor absoluto de z y se denota $|z|$ como la distancia entre el punto P y el origen del plano complejo.*
- *el argumento o amplitud de z y se denota $\arg z$ como alguno de los ángulos formados entre el eje real positivo y el rayo $\overrightarrow{PO}$.*

Es importante mencionar que el argumento de un número complejo no es único, puesto que cualquier ángulo en posición estándar que tenga su lado terminal en el rayo $\overrightarrow{OP}$ es también argumento del número complejo, por ejemplo, en la figura 1.6 se puede observar que tanto θ como α son ambos argumentos del número $a + b\mathrm{i}$. Además, si θ es un argumento de un número complejo z, entonces $\theta + 2k\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ es también argumento de z.

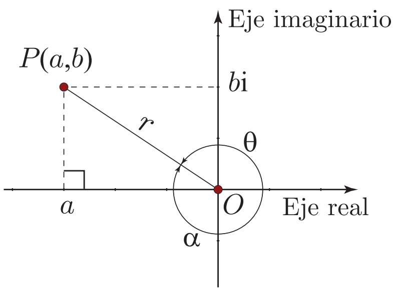


Figura 1.6: Múltiples argumentos para el número $z = a + b\mathrm{i}$.

La definición 4 asegura que las coordenadas rectangulares de un número complejo son únicas. Dicho resultado es falso para las coordenadas polares, es decir, si (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) representan las coordenadas polares del mismo número complejo, no necesariamente se cumple que: $\theta_1 = \theta_2$. Para solventar, en alguna medida, la falta de unicidad en la representación de un número complejo por medio de sus coordenadas polares, se define a continuación el argumento principal de un número complejo.

Definición **8 (Argumento principal de un número complejo)**
De todos los posibles argumentos de un número complejo z aquel que se encuentre en el intervalo $]-\pi,\pi]$ se llamará argumento principal de z y se denotará como $\operatorname{Arg} z$.

Por ejemplo, en la figura 1.6 el ángulo θ corresponde al argumento principal del $z = a + b\mathrm{i}$. En el caso de α es un argumento de z pero no es principal.

Convenio
Es una buena costumbre usar el argumento principal cuando se usa la forma polar para representar un número complejo. Así, cuando sea requerido expresar un número complejo en forma polar se empleará siempre el argumento principal.

Ejemplo **22**
Determine el argumento principal del número complejo que posee coordenadas polares $\left(5, \dfrac{17\pi}{2}\right)$.

★ **Solución.** Se debe determinar un ángulo θ que sea coterminal con $\frac{17\pi}{2}$ y que esté contenido en el intervalo $]-\pi,\pi]$. Se sabe que $\frac{17}{2} = 8.5$ de donde se tiene que:

$$\frac{17\pi}{2} = 2\pi + 2\pi + 2\pi + 2\pi + 0.5\pi$$

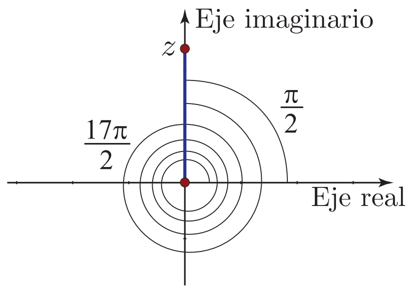


Figura 1.7: Argumento principal de un número complejo

de este modo el ángulo $\dfrac{17\pi}{2}$ y $\dfrac{\pi}{2}$ son coterminales y además $\dfrac{\pi}{2} \in]-\pi,\pi]$. Finalmente se tiene que:

$$\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{2}$$

★

Dadas las coordenadas rectangulares de un número complejo, es posible calcular las coordenadas polares del mismo y viceversa, la definición de las razones trigonométricas hará posible pasar de un sistema de coordenadas al otro. Esto permitirá, posteriormente, definir la forma polar de un número complejo.

Si se considera la definición general de las razones trigonométricas para el ángulo θ donde el punto $P(a, b)$ es un punto cualquiera en el plano complejo, tal y como se muestra en la figura 1.8, se obtiene una relación entre las coordenadas polares y las rectangulares.

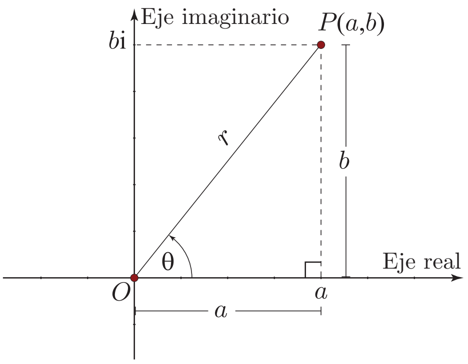


Figura 1.8: Relación entre coordenadas rectangulares y polares

De este modo, se tendría que:

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{b}{r} \quad \Longleftrightarrow \quad b = r\operatorname{sen}(\theta) \tag{1.8}$$

$$\cos(\theta) = \frac{a}{r} \quad \Longleftrightarrow \quad a = r\cos(\theta) \tag{1.9}$$

Las relaciones presentadas en 1.8 y 1.9 permitirán pasar las coordenadas polares a rectangulares de una manera fácil y rápida. Si (r, θ) son las coordenadas polares de un número complejo z entonces dicho número se puede expresar en forma rectangular como:

$$\begin{aligned} z = a + b\mathrm{i} &= r\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta \cdot \mathrm{i} \\ &= r\cos\theta + r\mathrm{i}\operatorname{sen}\theta \end{aligned} \tag{1.10}$$

En 1.10 se muestra la forma rectangular del número complejo en términos de r y θ que corresponden a las coordenadas polares del número z. Cuando la forma rectangular de un número complejo se expresa en función de las coordenadas polares del número, entonces a esta forma de escribirlo se le denotará forma polar del número complejo.

Definición **9 (la función** cis**)**
Se define la función $\text{cis} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *como la función definida por:*

$$\text{cis}(\alpha) = \cos(\alpha) + \mathrm{i}\,\text{sen}(\alpha)$$

Gracias a la definición 9 la expresión presente en 1.10 se puede expresar como $r\,\text{cis}(\theta)$. De esta manera, quedaría que:

$$\begin{aligned} z = a + b\mathrm{i} &= r\cos\theta + r\,\text{sen}\,\theta \cdot \mathrm{i} \\ &= r\cos\theta + r\mathrm{i}\,\text{sen}\,\theta \\ &= r(\cos\theta + \mathrm{i}\,\text{sen}\,\theta) \\ &= r\,\text{cis}\,\theta \end{aligned}$$

Definición **10 (Forma polar de un número complejo)**
Sea $z = a + b\mathrm{i}$ *un número complejo tal que* (r, θ) *son las coordenadas polares del número. De define la forma polar de dicho número* z *como:*

$$z = r\,\text{cis}\,\theta$$

Convenio
A pesar de que la función cis se define con dominio real, en algunas ocasiones el argumento puede ser expresado en grados cuando se trabaja en la forma polar del número complejo. De esta manera se hace la siguiente distinción:

- En la expresión $z = r\,\text{cis}\,\theta$ el argumento θ puede ser representado en grados o en radianes.
- en el par ordenado (r, θ) para representar las coordenadas polares de un número complejo, el argumento θ se representará únicamente en radianes.

Es claro que con el convenio anterior algunas definiciones y resultados pueden cambiar dependiendo de la representación usada. Un ejemplo de esto lo constituye la definición de Argumento Principal, pues en ese caso se tiene que si $z = r\,\text{cis}\,\theta$ es un número complejo tal que θ es el argumento principal de z dado en grados, entonces $\text{Arg}(z) = \theta \in]-180°, 180°]$.

1.4.2. Paso de la forma polar a la forma rectangular de un número complejo

En las igualdades 1.8 y 1.9 se puede observar una relación entre las coordenadas rectangulares y polares de un número complejo, además en la definición 10 se observa que la forma polar de un número corresponde a la misma forma rectangular expresada en función de las coordenadas polares del número. Por esta razón pasar de la forma polar a la forma rectangular es prácticamente automático puesto que no hay que hacer ningún cálculo adicional.

Ejemplo 23
Considere el número complejo z dado en forma polar por $z = 3\,\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{3}$. Exprese dicho número en forma rectangular. Indique además cuáles son las coordenadas rectangulares y polares de z.

★ **Solución.**

$$\begin{aligned} z &= 3\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= 3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot \mathrm{i} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \end{aligned}$$

La forma rectangular $z = 3\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ es $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. Además $\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$ son las coordenadas polares del z, mientras que $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ son las coordenadas rectangulares de z.

★

1.4.3. Paso de la forma rectangular a la forma polar de un número complejo

Para pasar un número complejo de la forma rectangular a la forma polar, es necesario poder calcular, el módulo y el argumento del número conociendo únicamente sus coordenadas rectangulares, las siguientes relaciones podrán ser utilizadas para tal fin.

Considere la figura 1.9, en la que se muestra la representación gráfica de un número complejo $z = a + b\mathrm{i}$.

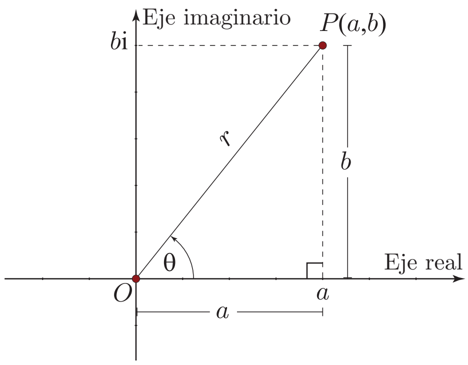


Figura 1.9: Relación entre coordenadas rectangulares y polares

Mediante la fórmula de la distancia entre dos puntos, o bien mediante el teorema de Pitágoras se tiene que:

$$r^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

de donde se tiene que:

$$z = a + b\text{i} \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{1.11}$$

Para calcular el argumento principal de dicho número se debe observar la siguiente relación desde la figura 1.9:

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a}$$

Es importante recordar que la función inversa de la tangente se denomina arcotangente y se define como $\arctan : \mathbb{R} \to \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de manera que ésta función toma un número real x y retorna un ángulo en $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Por lo que el resultado siempre será un ángulo en posición estándar en el primero o cuarto cuadrante del plano complejo.

Considere el número complejo $z = a+b\text{i}$. Para calcular el argumento principal θ de z es necesario analizar el cuadrante en donde se encuentra localizada la representación gráfica del número. Este análisis considera los siguientes casos:

Caso #1: Si el número se encuentra en el primer o cuarto cuadrante, entonces el argumento principal θ se calcula de la siguiente manera:

$$\tan\theta = \frac{b}{a} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

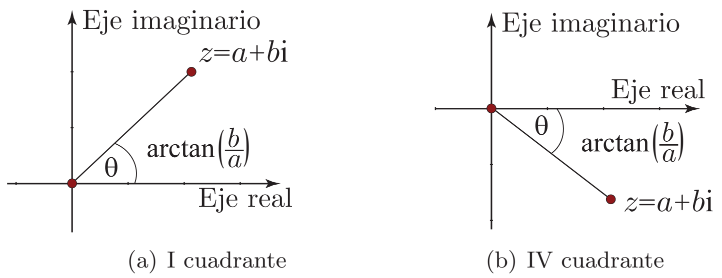


Figura 1.10: Si el argumento se encuentra en el I o IV cuadrante

Número en el I ó IV cuadrante
Si $z = a + bi$ se encuentra en el I o IV cuadrante del plano complejo ($a > 0$), entonces se tiene que:

$$\operatorname{Arg} z = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \tag{1.12}$$

Caso #2 Si el número se encuentra en el segundo cuadrante, tal como se muestra en la figura 1.11, la expresión $\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ dará un ángulo en el cuarto cuadrante con el mismo ángulo de referencia que θ. De este modo, es necesario sumar π para obtener el argumento principal θ.

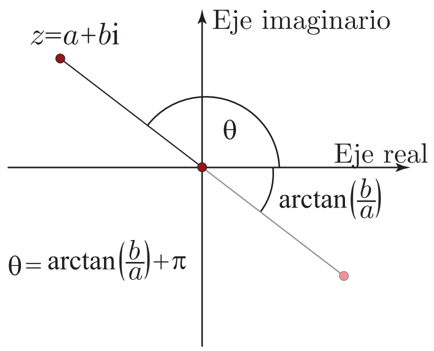


Figura 1.11: Argumento en el II cuadrante

Número en el II cuadrante
Si $z = a + bi$ se encuentra en el II cuadrante del plano complejo ($a < 0 \wedge b > 0$), entonces se tiene que:

$$\operatorname{Arg} z = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi \tag{1.13}$$

Caso #3 Si el número se encuentra en el tercer cuadrante, tal como se muestra en la figura 1.12, la expresión $\arctan\left(\dfrac{b}{a}\right)$ dará un ángulo en el primer cuadrante con el mismo ángulo de referencia que θ. De este modo, es necesario restar π para obtener el argumento principal θ.

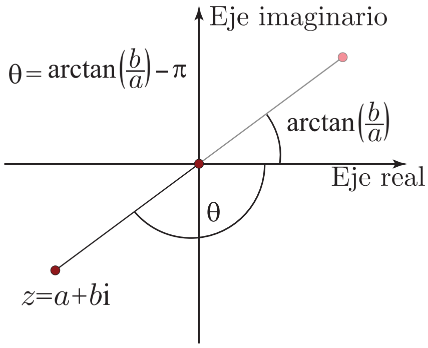
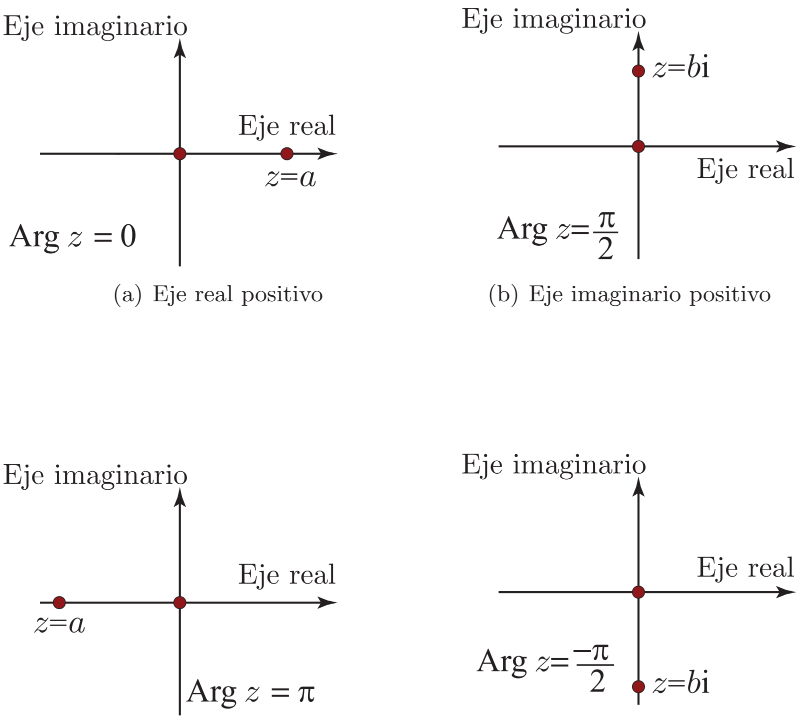


Figura 1.12: Argumento en el III cuadrante

Número en el III cuadrante
Si $z = a + b\mathrm{i}$ se encuentra en el III cuadrante del plano complejo $(a < 0 \wedge b < 0)$, entonces se tiene que:

$$\operatorname{Arg} z = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi \tag{1.14}$$

Caso #4 Si el argumento, es un ángulo cuadrantal, se puede determinar fácilmente solo observando la representación gráfica del número. Los diferentes argumentos se puede observar en las figuras 1.13(a), 1.13(b), 1.13(c) y 1.13(d).



(a) Eje real positivo (b) Eje imaginario positivo

(c) Eje real negativo (d) Eje imaginario negativo

Figura 1.13: Ángulos cuadrantales

Resumen para calcular el argumento principal
Si $z = a + bi$ es un número complejo tal que su argumento es un ángulo no cuadrantal, entonces su argumento principal se calcula de la siguiente manera:

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) & \text{si} \quad a > 0 \\ \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) + \pi & \text{si} \quad a < 0 \wedge b > 0 \\ \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) - \pi & \text{si} \quad a < 0 \wedge b < 0 \end{cases} \tag{1.15}$$

En caso que el número de que el argumento de z sea un ángulo cuadrantal, entonces este se calcula de manera gráfica de acuerdo con las figuras 1.13(a), 1.13(b), 1.13(c) y 1.13(d).

En caso de trabajar en grados
En caso de trabajar el argumento principal del número complejo en grados lo que se debe sumar o restar es 180° cuando el número complejo se encuentra en el II o III cuadrante respectivamente.

Ejemplo 24
Considere el número complejo dado de forma rectangular por $z = 2 - 3\mathrm{i}$. Determine su forma polar.

★ **Solución.** Para pasar z a forma polar, se debe determinar los valores de $|z|$ y $\operatorname{Arg} z$. Primero se debe realizar la representación gráfica de z en el plano complejo:

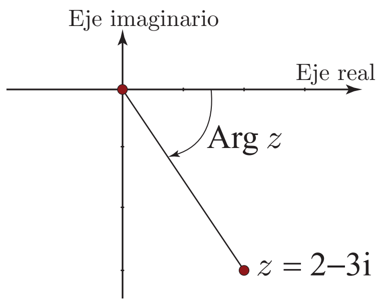


Figura 1.14: z en el IV cuadrante

Se sabe que

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

Además, como z se encuentra en el cuarto cuadrante, entonces

$$\operatorname{Arg} z = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{-3}{2}\right) = -0.982793...$$

Por lo tanto:

$$z = \sqrt{13}\operatorname{cis}(-0.982793)$$

★

Ejemplo 25
Considere el número complejo dado de forma rectangular por $x = -1 + 2i$. Determine su forma polar.

★ **Solución.**

Para pasar x a forma polar, se debe determinar los valores de $|x|$ y $\operatorname{Arg} x$. Primero se debe realizar la representación gráfica de x en el plano complejo:

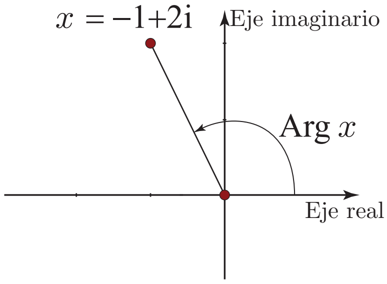


Figura 1.15: x en el II cuadrante

Se sabe que

$$|x| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(-1)^2+(2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

Además, como z se encuentra en el segundo cuadrante, entonces

$$\operatorname{Arg} z = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi = \arctan\left(\frac{2}{-1}\right) + \pi = 2.0344439...$$

Por lo tanto:

$$z = \sqrt{5}\operatorname{cis}(2.0344439)$$

★

Ejemplo 26

Encontrar $z \in \mathbb{C}$ tal que cumpla simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} |z+2\mathrm{i}| = \sqrt{5} \\ \operatorname{Arg}(\overline{z}+3) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

★ **Solución.** Sea $z = a + b\mathrm{i}$ el número complejo buscado. Se procederá a analizar cada una de las dos condiciones de manera que se puede determinar el valor de a y el valor de b. De la primera condición se tiene que:

$$\begin{aligned} |z+2\mathrm{i}| = \sqrt{5} &\Longrightarrow |a+b\mathrm{i}+2\mathrm{i}| = \sqrt{5} && (1.16)\\ &\Longrightarrow |a+(b+2)\,i| = \sqrt{5} \\ &\Longrightarrow \sqrt{a^2+(b+2)^2} = \sqrt{5} \\ &\Longrightarrow a^2+(b+2)^2 = 5 \\ &\Longrightarrow a^2+b^2+4b+4 = 5 \\ &\Longrightarrow a^2+b^2+4b = 1 && (1.17) \end{aligned}$$

Por otro lado, de la segunda condición se tiene que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arg}(\overline{z}+3) = \frac{\pi}{4} &\Longrightarrow \operatorname{Arg}(a-b\mathrm{i}+3) = \frac{\pi}{4}\\
&\Longrightarrow \operatorname{Arg}((a+3)-b\mathrm{i}) = \frac{\pi}{4}\\
&\Longrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-b}{a+3}\\
&\Longrightarrow 1 = \frac{-b}{a+3}\\
&\Longrightarrow -a-3 = b \qquad (1.18)
\end{aligned}$$

De 1.17 y 1.18 se tiene que

$$\begin{aligned}
a^2+b^2+4b=1 &\Longrightarrow a^2+(-a-3)^2+4(-a-3)=1\\
&\Longrightarrow a^2+a^2+6a+9-4a-12=1\\
&\Longrightarrow 2a^2+2a+9-12-1=0\\
&\Longrightarrow 2a^2+2a-4=0\\
&\Longrightarrow a=-2 \quad \vee \quad a=1
\end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned}
a=-2 &\Longrightarrow b=-(-2)-3=-1\\
a=1 &\Longrightarrow b=-(1)-3=-4
\end{aligned}$$

por lo que las posibles soluciones son $z=-2-i$ ó $z=1-4i$. En este tipo de ejercicios es necesario que se prueben las soluciones obtenidas, ya que en algunos casos se introducen presuntas soluciones que son falsas.

- Caso $z=-2-\mathrm{i}$:
  - $|z+2\mathrm{i}| = |-2-\mathrm{i}+2\mathrm{i}| = |-2+\mathrm{i}| = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{5}$
  - $\operatorname{Arg}(\overline{z}+3) = \operatorname{Arg}(-2+i+3) = \operatorname{Arg}(1+i) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$
- Caso $z=1-4\mathrm{i}$:
  - $|z+2\mathrm{i}| = |1-4\mathrm{i}+2\mathrm{i}| = |1-2\mathrm{i}| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$
  - $\operatorname{Arg}(\overline{z}+3) = \operatorname{Arg}(1+4\mathrm{i}+3) = \operatorname{Arg}(4+4\mathrm{i}) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

Por lo que las dos posibles soluciones al problema anterior son: $z=-2-\mathrm{i}$ y $z=1-4\mathrm{i}$

★

Ejemplo 27

Determine todos los números $w \in \mathbb{C}$ tal que cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} |w-2| = \dfrac{5}{2} \\ \\ \operatorname{Arg}\left(\overline{w+3\mathrm{i}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

★ **Solución.** Sea $w = x + y\mathrm{i}$ el número complejo buscado. Se debe analizar la información aportada por cada una de las condiciones. De la primera condición se tiene que:

$$\begin{aligned} |w-2| = \frac{5}{2} &\Longrightarrow |x+y\mathrm{i}-2| = \frac{5}{2} \\ &\Longrightarrow |(x-2)+y\mathrm{i}| = \frac{5}{2} \\ &\Longrightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2} = \frac{5}{2} \\ &\Longrightarrow (x-2)^2+y^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \\ &\Longrightarrow x^2-4x+4+y^2 = \frac{25}{4} \\ &\Longrightarrow x^2+y^2-4x = \frac{9}{4} \end{aligned} \tag{1.19}$$

De la segunda condición tenemos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg}\left(\overline{w+3\mathrm{i}}\right) = \frac{\pi}{2} &\Longrightarrow \operatorname{Arg}\left(\overline{x+y\mathrm{i}+3i}\right) = \frac{\pi}{2} \\ &\Longrightarrow \operatorname{Arg}\left(\overline{x+(y+3)\,\mathrm{i}}\right) = \frac{\pi}{2} \\ &\Longrightarrow \operatorname{Arg}\left(x-(y+3)\,\mathrm{i}\right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{1.20}$$

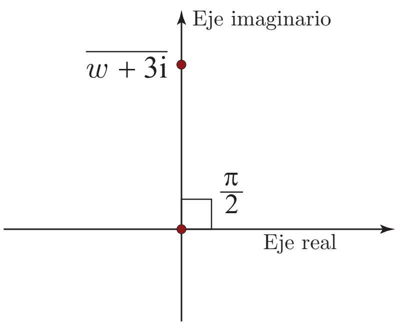


Figura 1.16: Número imaginario positivo

Como la $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ no está definida, entonces la estrategia empleada en el ejemplo 26 no se puede utilizar. Sin embargo, es fácil observar que si $\operatorname{Arg}\left(\overline{w+3\mathrm{i}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, entonces

$\overline{w+3\text{i}}$ es un imaginario puro y que está ubicado en el eje imaginario positivo, esto quiere decir que $\text{Re}\left(\overline{w+3i}\right) = x = 0$ y $-(y+3)$ es positivo. Entonces, si $x = 0$ de 1.19 se tiene que:

$$x^2 + y^2 - 4x = \frac{9}{4} \Longrightarrow y^2 = \frac{9}{4} \Longrightarrow y = \pm\frac{3}{2}$$

por lo que las posibles soluciones al problema son $w = \frac{3}{2}\text{i}$ ó $w = \frac{-3}{2}\text{i}$. Sin embargo, para los valores obtenidos de y no se cumple que $-(y+3)$ es positivo por lo que no hay solución al problema. En caso de no haber tomado en cuenta el detalle de que $-(y+3)$ debe ser positivo, entonces se debe recordar que siempre se debe probar las soluciones[2].

Por lo que no existe un número complejo w tal que cumpla simultáneamente que $|w-2| = \frac{5}{2}$ y $\text{Arg}\left(\overline{w+3\text{i}}\right) = \frac{\pi}{2}$.

★

■ Ejemplo **28**

Determine $w \in \mathbb{C}$ tal que cumpla simultáneamente las condiciones siguientes:

$$\begin{cases} |w-3| = \dfrac{13}{2} \\ \text{Arg}\,(w+3) = \dfrac{-\pi}{2} \end{cases}$$

★ **Solución.** Sea $w = x + y\text{i}$ el número complejo buscado, se debe analizar la información que brinda cada una de las condiciones. De la primera condición se tiene que:

$$\begin{aligned} |w-3| = 5 &\Longrightarrow |x + y\text{i} - 3| = \frac{13}{2} \\ &\Longrightarrow |(x-3) + y\text{i}| = \frac{13}{2} \\ &\Longrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = \frac{13}{2} \\ &\Longrightarrow (x-3)^2 + y^2 = \left(\frac{13}{2}\right)^2 \\ &\Longrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 = \frac{169}{4} \\ &\Longrightarrow x^2 + y^2 - 6x = \frac{133}{4} \end{aligned} \tag{1.21}$$

[2]Como en este caso si se tomo en cuenta que $-(y+3)$ debe ser positivo, las posibles soluciones se descartan sin necesidad de realizar la prueba. Por lo que si se toma en cuenta la prueba es innecesaria.

De la segunda condición se tiene que:

$$\begin{aligned}\operatorname{Arg}(w+3)=\frac{-\pi}{2} &\Longrightarrow \operatorname{Arg}(x+y\mathrm{i}+3)=\frac{-\pi}{2}\\ &\Longrightarrow \operatorname{Arg}((x+3)+yi)=\frac{-\pi}{2}\end{aligned} \tag{1.22}$$

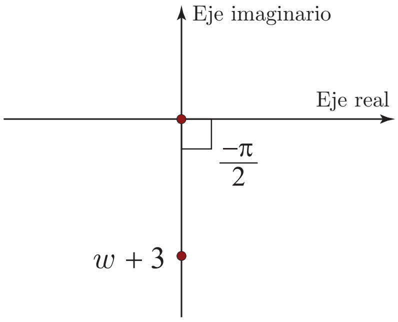


Figura 1.17: Número imaginario negativo

Como $\tan\left(\frac{-\pi}{2}\right)$ no está definida, entonces la estrategia usada en el ejemplo 26 no es válida. Sin embargo, es fácil observar que si $\operatorname{Arg}(w+3)=\frac{-\pi}{2}$, entonces $w+3$ es un imaginario puro y que está ubicado en el eje imaginario negativo, esto quiere decir que $\operatorname{Re}(w+3)=x+3=0$ y y es negativo. Entonces, si $x+3=0$ de 1.21 se tiene que:

$$x^2+y^2-6x=\frac{133}{4}\Rightarrow 9+y^2+18=\frac{133}{4}\Rightarrow y^2=\frac{25}{4}\Rightarrow y=\pm\frac{5}{2}$$

por lo que las posibles soluciones al problema son $w=-3+\frac{5}{2}\mathrm{i}$ ó $w=-3+\frac{-5}{2}\mathrm{i}$. Sin embargo, para los valores obtenidos de y se cumple que es negativo solo para el caso $w=-3+\frac{-5}{2}\mathrm{i}$ por lo que es la única solución[3].

★

■ Ejemplo **29**

Encuentre el o los números complejos z que satisfacen, simultáneamente, las siguientes dos condiciones:

$$\begin{cases}|z-\overline{z}+2| &= \sqrt{5}\\ \operatorname{Arg}(z+1) &= \frac{-\pi}{2}\end{cases}$$

[3]En este caso no se realizó la prueba ya que se consideró y negativo, en caso de no considerarlo, se debe realizar la prueba para descartar las soluciones falsas en caso de haber.

★ **Solución.** Sea $z = a + b\mathrm{i}$. De esta forma, se tiene de la primera condición que:

$$\begin{aligned} |a + b\mathrm{i} - (a - b\mathrm{i}) + 2| = \sqrt{5} \quad &\Rightarrow \quad |2 + 2b\mathrm{i}| = \sqrt{5} \\ &\Rightarrow \quad \sqrt{4 + 4b^2} = \sqrt{5} \\ &\Rightarrow \quad 4 + 4b^2 = 5 \\ &\Rightarrow \quad 4b^2 = 1 \\ &\Rightarrow \quad b^2 = \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow \quad b = \pm\frac{1}{2} \end{aligned} \tag{1.23}$$

De la segunda condición se tiene para $z = a + b\mathrm{i}$ que:

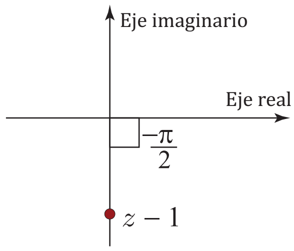


Figura 1.18: Representación del número $z - 1$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg}(z + 1) = \frac{-\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad \operatorname{Arg}(a + b\mathrm{i} + 1) = \frac{-\pi}{2} \\ &\Rightarrow \quad \operatorname{Re}(a + b\mathrm{i} + 1) = 0 \wedge \operatorname{Im}(a + b\mathrm{i} + 1) < 0 \\ &\Rightarrow \quad a = -1 \quad \wedge \quad b < 0 \end{aligned} \tag{1.24}$$

De 1.23 y 1.24 se desprende que $a = -1$ y $b = \dfrac{-1}{2}$ así el número complejo que satisface las dos condiciones respectivamente es $z = -1 - \dfrac{\mathrm{i}}{2}$.

★

■ Ejemplo **30**

Determine el o los números complejos z que satisfacen, simultáneamente, las dos condiciones siguientes:

$$\begin{cases} |z| = 5 \\ \operatorname{Arg}(3 - z) = \dfrac{-\pi}{2} \end{cases}$$

★ **Solución.** Sea $z = a + bi$ el número buscado. De la primera condición se tiene que:

$$\begin{aligned} |z| = 5 \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{a^2 + b^2} = 5 \\ &\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = 25 \end{aligned} \tag{1.25}$$

Por otra parte, de la segunda condición se desprende que:

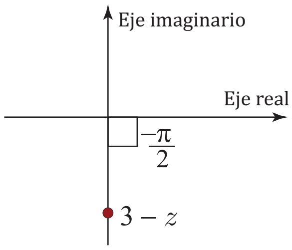


Figura 1.19: Representación del número $3 - z$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arg}(3-z) = \frac{-\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad \operatorname{Arg}(3-a-b\mathrm{i}) = \frac{-\pi}{2} \\
&\Rightarrow \quad \operatorname{Re}(3-a-b\mathrm{i}) = 0 \quad \wedge \quad \operatorname{Im}(3-a-b\mathrm{i}) < 0 \\
&\Rightarrow \quad 3-a = 0 \quad \wedge \quad -b < 0 \\
&\Rightarrow \quad a = 3 \quad \wedge \quad b > 0
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Ahora bien, de las condiciones 1.25 y 1.26 se tiene que:

$$\begin{aligned}
3^2 + b^2 = 25 \quad &\Rightarrow \quad b^2 = 16 \\
&\Rightarrow \quad b = \pm 4
\end{aligned}$$

Sin embargo, de 1.26 se tiene que $b = 4$, por lo que el único número complejo z que cumple simultáneamente las condiciones dadas es $z = 3 + 4\mathrm{i}$.

★

■ Ejemplo **31**

Determine el o los números complejos z que satisfacen, simultáneamente, las dos condiciones siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} |z - \bar{z}| & = & 6\sqrt{2} \\ \operatorname{Arg}\left(\bar{z} - 3\sqrt{2}\right) & = & \dfrac{3\pi}{4} \end{array} \right.$$

★ **Solución.** Sea $z = a + b\mathrm{i}$ el número buscado. Así, de la primera condición se tendría que:

$$\begin{aligned}
|z - \bar{z}| = 6\sqrt{2} \quad &\Rightarrow \quad |a + b\mathrm{i} - (a - b\mathrm{i})| = 6\sqrt{2} \\
&\Rightarrow \quad |2b\mathrm{i}| = 6\sqrt{2} \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{(2b)^2} = 6\sqrt{2} \\
&\Rightarrow \quad |2b| = 6\sqrt{2} \\
&\Rightarrow \quad 2b = \pm 6\sqrt{2} \\
&\Rightarrow \quad b = \pm 3\sqrt{2}
\end{aligned} \tag{1.27}$$

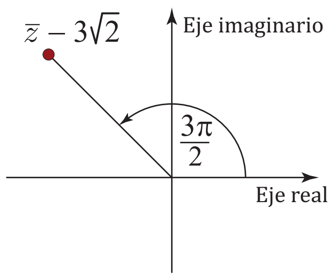


Figura 1.20: Representación del número $z - 3\sqrt{2}$.

Por otra parte, de la segunda condición se desprende que:

$$\begin{aligned} Arg\left(\overline{z} - 3\sqrt{2}\right) = \frac{3\pi}{4} \quad &\Rightarrow \quad \text{Arg}\left(a - b\text{i} - 3\sqrt{2}\right) = \frac{3\pi}{4} \\ &\Rightarrow \quad \text{Arg}\left(\left(a - 3\sqrt{2}\right) + -b\text{i}\right) = \frac{3\pi}{4} \\ &\Rightarrow \quad \frac{-b}{a - 3\sqrt{2}} = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ &\Rightarrow \quad -b = -a + 3\sqrt{2} \end{aligned} \tag{1.28}$$

Si se evaluan los valores de b determinados en 1.27 en la igualdad 1.28 se generan los siguientes casos:

- Si $b = 3\sqrt{2}$, entonces

$$\begin{aligned} -3\sqrt{2} &= -a + 3\sqrt{2} \\ a &= 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

  De donde un posible valor para z es $z = 6\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\text{i}$.

- Si $b = -3\sqrt{2}$, entonces

$$\begin{aligned} 3\sqrt{2} &= -a + 3\sqrt{2} \\ 0 &= -a \\ a &= 0 \end{aligned}$$

  De donde un posible valor para z es $z = -3\sqrt{2}\text{i}$

Para finalizar el ejercicio, es necesario realizar la prueba de los dos candidatos determinados, puesto que es posible que soluciones falsas se hagan presentes. Para el primer caso $z = 6\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\text{i}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} |z - \overline{z}| &= \left|6\text{i}\sqrt{2}\right| = 6\sqrt{2} \\ \text{Arg}\left(\overline{z} - 3\sqrt{2}\right) &= \text{Arg}\left(3\sqrt{2} - 3\text{i}\sqrt{2}\right) = \arctan(-1) = \frac{-\pi}{4} \neq \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

y para el caso de $z = -3\mathrm{i}\sqrt{2}$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
|z-\overline{z}| &= \left|-6\mathrm{i}\sqrt{2}\right| = 6\sqrt{2} \\
\operatorname{Arg}\left(\bar{z}-3\sqrt{2}\right) &= \operatorname{Arg}\left(-3\sqrt{2}+3\mathrm{i}\sqrt{2}\right) = \arctan(-1)+\pi = \frac{3\pi}{4}
\end{aligned}$$

De donde se tiene que el único número z que cumple las dos condiciones dadas de manera simultánea es $z = -3\sqrt{2}\mathrm{i}$.

★

Ejercicios 6.

1. Si w y z son dos números complejos cualesquiera, demuestre que:

   a) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

   b) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

   c) $|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\overline{z} \cdot w)$

   d) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\,|z|^2 + 2\,|w|^2$

2. Pruebe que si z_1 y z_2 en $\mathbb{C}$, entonces se cumple que:

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)}$$

3. Dados z_1 y z_2 complejos que verifican que $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ demostrar que el cociente $\frac{z_1}{z_2}$ es un imaginario puro.

4. Determine el o los números complejos si existen, que cumpla las condiciones dadas en cada caso.

   a) $\begin{cases} |2w + 3| = \sqrt{85} \\ \mathrm{Arg}\,(w + i) = \dfrac{-\pi}{4} \end{cases}$

   b) $\begin{cases} |z + 3i - 7| = 2 \\ \mathrm{Arg}\left(z - 10i\sqrt{3} + 5i + 3\right) = \dfrac{-\pi}{3} \end{cases}$

   c) $\begin{cases} |2\overline{z} + 9i - 6| = 13 \\ \arg\,(z + 3i - 2) = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$

   d) $\begin{cases} |z + 3i| = 5 \\ \mathrm{Arg}\,(z - 2i - 3) = \dfrac{-\pi}{2} \end{cases}$

5. Si $|z| = 1$, mostrar que:

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } \frac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z+1} > 0 \\ \dfrac{-\pi}{2} & \text{si } \frac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z+1} < 0 \end{cases}$$

6. Sea $z = a + b\mathrm{i}$. Si $|z| = 1$, $z \neq 1$ y $z \neq -\mathrm{i}$; probar que:

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+\mathrm{i}}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} & \text{si } 1 - a + b > 0 \\ \dfrac{-3\pi}{4} & \text{si } 1 - a + b < 0 \end{cases}$$

1.5. Aritmética de números complejos en forma polar

Las operaciones aritméticas se pueden realizar en los número complejos tanto en forma polar como en forma rectangular. Sin embargo, algunas de ellas son más sencillas si el número complejo está en forma polar, mientras que otras son más sencillas si se trabaja con la forma rectangular del número. Específicamente, mientras que la suma y resta de números complejos es más fácil de realizar, si dichos números se expresan en forma rectangular; no es lo mismo para el caso de la multiplicación y la división.

1.5.1. Multiplicación y división de números complejos en forma polar

TEOREMA **4**
Si α y β son dos ángulos cualquiera, entonces son válidas las siguientes identidades:

$$\operatorname{cis}(\alpha)\cdot\operatorname{cis}(\beta)=\operatorname{cis}(\alpha+\beta) \tag{1.29}$$

$$\frac{\operatorname{cis}(\alpha)}{\operatorname{cis}(\beta)}=\operatorname{cis}(\alpha-\beta) \tag{1.30}$$

❏ **Demostración.** Se debe recordar primero las identidades trigonométricas para la suma y resta de ángulos, mismas que se presentan a continuación:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha\pm\beta)&=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta\pm\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha\\ \cos(\alpha\pm\beta)&=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta\end{aligned}$$

Mediante el empleo de dichas identidades, las demostraciones son simples manipulaciones algebraicas.

Primero se demostrará la identidad 1.29:

$$\begin{aligned}\operatorname{cis}\alpha\cdot\operatorname{cis}\beta&=(\cos\alpha+\mathrm{i}\operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta+\mathrm{i}\operatorname{sen}\beta)\\ &=\cos\alpha\cos\beta+\mathrm{i}\cos\alpha\operatorname{sen}\beta+i\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\mathrm{i}^2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\\ &=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta+\mathrm{i}(\cos\alpha\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\alpha\cos\beta)\\ &=\cos(\alpha+\beta)+\mathrm{i}\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\\ &=\operatorname{cis}(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

$$\therefore \operatorname{sen}(\alpha\pm\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta\pm\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha$$

Ahora se probará la identidad 1.30 de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{cis}\alpha}{\operatorname{cis}\beta} &= \frac{\cos\alpha + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\beta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\beta}\\
&= \frac{\cos\alpha + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\beta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\beta}\cdot\frac{\cos\beta - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\beta}{\cos\beta - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\beta}\\
&= \frac{(\cos\alpha + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\alpha)(\cos\beta - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\beta)}{(\cos\beta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\beta)(\cos\beta - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\beta)}\\
&= \frac{\cos\alpha\cos\beta - \mathrm{i}\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta + \mathrm{i}\cos\beta\,\mathrm{sen}\,\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta}{\cos^2\beta + \mathrm{sen}^2\beta}\\
&= \cos\alpha\cos\beta + \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta + \mathrm{i}\,(\cos\beta\,\mathrm{sen}\,\alpha - \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta)\\
&= \cos(\alpha-\beta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,(\alpha-\beta)\\
&= \operatorname{cis}(\alpha-\beta)
\end{aligned}$$

❐

El siguiente teorema es consecuencia del teorema 4 y su demostración se basa en la demostración del mismo, por lo que será omitida.

Teorema **5**
Considere los números complejos z y w dados en forma polar por: $z = r_1\operatorname{cis}(\theta_1)$ y $w = r_2\operatorname{cis}(\theta_2)$, entonces son ciertas las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
z\cdot w &= r_1\operatorname{cis}(\theta_1)\cdot r_2\operatorname{cis}(\theta_2) = r_1r_2\operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2)\\
z\div w &= \frac{r_1\operatorname{cis}(\theta_1)}{r_2\operatorname{cis}(\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1-\theta_2)
\end{aligned}$$

Ejemplo **32**
Considere los números complejos $z = \sqrt{3}\operatorname{cis}120^\circ$ y $w = -1+i$ determine, las coordenadas polares de $z\cdot w$ y $z\div w$.

★ **Solución.** Primero que todo se debe escribir w en forma polar, se emplearán grados para hacerlo pues ya z tiene argumento en grados.

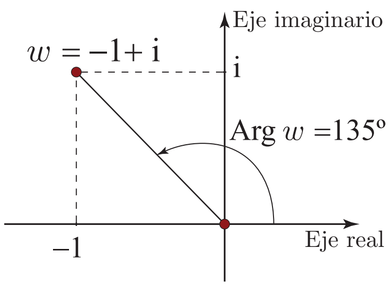


Figura 1.21: Representación gráfica de w

En la figura 1.21 se observa que w está en el segundo cuadrante, de donde se tiene que:

$$\operatorname{Arg} w = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) + 180^\circ = 135^\circ$$

y por otro lado se tiene que:

$$|w| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

donde se tendría que la forma polar de w expresada en grados es $w = \sqrt{2}\operatorname{cis} 135^\circ$

Por el teorema 5 se tiene que:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= \sqrt{3}\operatorname{cis} 120^\circ \cdot \sqrt{2}\operatorname{cis} 135^\circ \\ &= \sqrt{3}\sqrt{2}\operatorname{cis}(120^\circ + 135^\circ) \\ &= \sqrt{6}\operatorname{cis}(255^\circ) \\ &= \sqrt{6}\operatorname{cis}(-105^\circ) \end{aligned}$$

Por lo que $z \cdot w = \sqrt{6}\operatorname{cis}(-105^\circ)$. Por otro lado se tiene que:

$$\begin{aligned} z \div w &= \frac{\sqrt{3}\operatorname{cis} 120^\circ}{\sqrt{2}\operatorname{cis} 135^\circ} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\operatorname{cis}(120^\circ - 135^\circ) \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}}\operatorname{cis}(-15^\circ) \end{aligned}$$

Por lo que se tiene que $z \div w = \sqrt{\frac{3}{2}}\operatorname{cis}(-15^\circ)$. Como las coordenadas polares de todo número complejo deben ser números reales, entonces los argumentos respectivos deben de representarse en radianes, quedando:

$$-105^\circ \equiv \frac{-7\pi}{12} \qquad \wedge \qquad -15^\circ \equiv \frac{-\pi}{12}$$

De esta manera las coordenadas polares de $z \cdot w$ son $\left(\sqrt{6}, \frac{-7\pi}{12}\right)$, mientras que las coordenadas polares de $z \div w$ son:$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{-\pi}{12}\right)$

★

1.5.2. Potencias enteras en forma polar

Las potencias de base compleja y exponente entero es una de las operaciones que son más complicadas si se utiliza la forma rectangular, sin embargo, usando la forma polar se realiza con mucha facilidad. El siguiente teorema brinda una fórmula simple que nos permitirá elevar cualquier número complejo no nulo a una potencia entera.

Teorema **6 (teorema de DeMoivre)**
Sea $z = r\operatorname{cis}\theta$ un número complejo cualquiera no nulo y sea $n \in \mathbb{Z}$. Entonces se cumple que:

$$z^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$$

❑ **Demostración.** Primero se demostrará que el resultado es válido para $n \in \mathbb{N}$, prueba que se hará por inducción matemática. Posteriormente se demostrará para exponentes negativos.

- Se demostrará para el primer elemento: $n = 0$.

  $$z^0 = r^0 \operatorname{cis}(0 \cdot \theta) = 1 \operatorname{cis}(0) = \cos(0) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(0) = 1 \quad \checkmark$$

  y como efectivamente $z^0 = 1$ la proposición es cierta para el primer elemento.

- Ahora se debe probar que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

  $$\underbrace{z^n = r^n \operatorname{cis}(n \cdot \theta)}_{HI} \Rightarrow \underbrace{z^{n+1} = r^{n+1} \operatorname{cis}((n+1) \cdot \theta)}_{HQD}$$

  Suponga que la proposición es válida para n fijo pero arbitrario. Demostremos, bajo HI que la proposición es válida para $n + 1$.

  $$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n \cdot z \\ &\overset{HI}{=} r^n \operatorname{cis}(n\theta) \cdot r \operatorname{cis}\theta \\ &= r^n r \operatorname{cis}(n\theta) \operatorname{cis}\theta \\ &= r^{n+1} \operatorname{cis}(n\theta + \theta) \qquad (1.31) \\ &= r^{n+1} \operatorname{cis}((n+1) \cdot \theta) \end{aligned}$$

  En el caso anterior 1.31 es válida en virtud del teorema 5. Así, queda demostrado que bajo HI la proposición es válida también para $n + 1$.

- Finalmente, por el principio de inducción matemática, se tiene que dicha proposición es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Faltaría demostrar que también es válida para exponentes negativos, lo cual se logra fácilmente de la siguiente manera: si $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 1$, entonces:

$$\begin{aligned} z^{-n} &= \frac{1}{z^n} = \frac{1 \operatorname{cis}(0)}{r^n \operatorname{cis}(n\theta)} = r^{-n} \frac{\operatorname{cis}(0)}{\operatorname{cis}(n\theta)} \\ &= r^{-n} \operatorname{cis}(0 - n\theta) = r^{-n} \operatorname{cis}(-n\theta) \end{aligned}$$

lo que demuestra que $z^{-n} = r^{-n} \operatorname{cis}(-n\theta)$ Así, queda demostrado el resultado para todo $n \in \mathbb{Z}$.

❒

Ejemplo 33
Calcule y represente en forma rectangular el resultado de la operación $(-2-3\mathrm{i})^6$.

★ **Solución.** Primero es necesario representar el número $z = -2 - 3\mathrm{i}$ en la forma polar. Considerando que el número complejo se encuentra ubicado en el tercer cuadrante entonces:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(-2)^2+(-3)^2} = \sqrt{13} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{-3}{-2}\right) - \pi = -2.15879893\ldots \end{aligned}$$

por lo que $z = -2-3\mathrm{i} = \sqrt{13}\operatorname{cis}(-2.15879893)$. De este modo, se puede calcular la potencia 6 de z mediante el teorema de DeMoivre.

$$\begin{aligned} (-2-3i)^6 &= \left(\sqrt{13}\operatorname{cis}(-2.15879893)\right)^6 \\ &= \left(\sqrt{13}\right)^6 \operatorname{cis}(6\cdot -2.15879893) \\ &= 2197\operatorname{cis}(-12.95279358) \\ &= 2197\cos(-12.95279358) + 2197\mathrm{i}\operatorname{sen}(-12.95279358) \\ &= 2035 - 828\mathrm{i} \end{aligned}$$

por lo que $(-2-3i)^6 = 2034.598 - 828.98732\mathrm{i}$

★

Ejemplo 34
Calcule y exprese en forma rectangular el resultado de la operación $\dfrac{(1+\mathrm{i})^{20}}{\left(2\sqrt{3}+2\mathrm{i}\right)^5}$

★ **Solución.** Primero se debe expresar cada uno de los número involucrados en forma polar. Sean $z = 1+\mathrm{i}$ y $w = 2\sqrt{3}+2\mathrm{i}$.

- En el caso de z, que se encuentra en el primer cuadrante y por consiguiente se tiene que:
$$|z| = \sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Arg} z = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$
por lo que $z = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$
- En el caso de w, que se encuentra en el primer cuadrante y por consiguiente se tiene que:
$$|w| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2} = 4 \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Arg} w = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$
por lo que $w = 4\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

De esta manera, la operación original se reduce de la siguiente manera:

$$\frac{(1+i)^{20}}{(2\sqrt{3}+2i)^5} = \frac{\left[\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^{20}}{\left[4\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]^5} = \frac{(\sqrt{2})^{20}\operatorname{cis}\left(\frac{20\pi}{4}\right)}{4^5\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$$

$$= \frac{1024\operatorname{cis}(5\pi)}{1024\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{\operatorname{cis}(5\pi)}{\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = \operatorname{cis}\left(5\pi - \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{25\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{25\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}$$

por lo tanto $\dfrac{(1+\mathrm{i})^{20}}{(2\sqrt{3}+2\mathrm{i})^5} = \dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}$.

★

Ejercicios 7.

1. Calcule las siguientes expresiones de números complejos y exprese el resultado en forma rectangular.

   a) $\dfrac{(2-\mathrm{i})^4}{(1-\mathrm{i})^3}$ R/: $\dfrac{31}{4} + \dfrac{17}{4}\mathrm{i}$

   b) $\dfrac{(\mathrm{i}+2)^4}{(2\mathrm{i}-1)^5}$ R/: $\dfrac{-1}{5} - \dfrac{2}{5}\mathrm{i}$

   c) $\dfrac{(3\mathrm{i}+1)^4}{(2+\mathrm{i})^5}$ R/: $\dfrac{-8}{5} + \dfrac{4}{5}\mathrm{i}$

   d) $\dfrac{(2\mathrm{i}-1)^4}{(1-\mathrm{i})^6}$ R/: $3 + \dfrac{7}{8}\mathrm{i}$

   e) $\dfrac{(2+4\mathrm{i})^{10}}{(1-3\mathrm{i})^{10}} - \mathrm{i}^{125} + 4\mathrm{i}$ R/: $-29\mathrm{i}$

   f) $\dfrac{(1-\mathrm{i})^{15}}{(2+2\mathrm{i})^5} + \dfrac{(1+3\mathrm{i})^2}{1-\mathrm{i}^{459}}$ R/: $-2+7\mathrm{i}$

2. Sea $w \in \mathbb{C}$ con módulo 1. Exprese el número $w-1$ en forma polar.

1.6. Raíces de números complejos

En el conjunto de los número reales, la definición de raíz $n-$ésima se realiza mediante los casos n par y n impar de manera que se garantice la unicidad de la misma. La razón primordial de buscar la unicidad de la raíz en $\mathbb{R}$ es debido a que el polinomio $P(x) = x^n - z$ donde $n \in \mathbb{N}$, n impar tiene un solo cero real $\sqrt[n]{z}$. En caso que n sea par, el polinomio $P(x) = x^n - z$, tiene dos ceros reales si $z > 0$ los cuales son $\sqrt[n]{z}$ y $-\sqrt[n]{z}$ y en caso de $z < 0$ dicho polinomio no tiene ceros reales. El concepto de raíz $n-$ésima de z se encuentra estrechamente ligado a los ceros del polinomio $P(x) = x^n - z$ con la salvedad de que en $\mathbb{R}$ la raíz es única y en caso de n par, el valor de z debe ser no negativo.

En el conjunto de los números complejos no es necesario seguir manteniendo la unicidad de la raíz $n-$ésima y es importante hacer distinción entre n par o impar pues, gracias al teorema 2 se establece que todo polinomio de grado n tiene exactamente n ceros complejos si contamos las multiplicidades. De esta manera, el concepto de raíz $n-$ésima en $\mathbb{C}$ queda como sigue:

Definición **11 (Raíz $n-$ésima de un número complejo)**
Sea $z \in \mathbb{C}$. Se dirá que w es una raíz $n-$ésima de z, si y solo si, se cumple que $w^n = z$. O bien, se dice que w es una raíz $n-$ésima de z si y solo si, w es un cero del polinomio $P(x) = x^n - z$.

De esta forma, debido a la definición 11, al teorema 2 y al hecho de que el polinomio $P(x) = x^n - z$ no tiene multiplicidades $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, se tiene que todo número complejo tiene exactamente n raíces $n-$ésimas distintas. Además, por estas mismas 3 razones, calcular las raíces $n-$ésimas de un número complejo z equivale a resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación:

$$x^n - z = 0 \tag{1.32}$$

donde cada una de las soluciones de la ecuación 1.32 es una raíz $n-$ésima de z.

Teorema **7 (Generalización del teorema de DeMoivre)**
Sea $z = r \operatorname{cis}\theta$ un número complejo cualquiera, entonces $w = \sqrt[n]{r}\operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta}{n}\right)$ es una raíz $n-$ésima de z. En el caso particular de que $\theta = \operatorname{Arg} z$ entonces a w se le llama raíz principal de z.

❑ **Demostración.** Basta probar que $w^n = z$, lo cual es fácil de realizar haciendo uso del teorema 6 o teorema de DeMoivre:

$$\begin{aligned} w^n &= \left(\sqrt[n]{r}\,\text{cis}\left(\frac{\theta}{n}\right)\right)^n \\ &= \left(\sqrt[n]{r}\right)^n\left(\text{cis}\left(\frac{\theta}{n}\right)\right)^n \\ &= r\,\text{cis}\left(n\cdot\frac{\theta}{n}\right) \\ &= r\,\text{cis}\,\theta \\ &= z \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que $w = \sqrt[n]{r}\,\text{cis}\left(\frac{\theta}{n}\right)$ es una raíz $n-$ésima de $z = r\,\text{cis}\,\theta$.

❐

El proceso empleado para determinar las raíces de cualquier número complejo es una aplicación sucesiva del teorema 7 dicho proceso se desarrolla mediante el siguiente ejemplo el cual permitirá construir una fórmula para calcular las raíces de números complejos.

Ejemplo 35
Determine las raíces cuartas del número $z = 16\,\text{cis}(60°)$.

★ **Solución.** Mediante el teorema 7 se puede determinar todas las raíces cuartas del $z = 16\,\text{cis}(60°)$, para hacerlo se debe recordar que el argumento de un número complejo no es único por lo que $z = 16\,\text{cis}\,(60°) = 16\,\text{cis}\,(60° + 360°) = 16\,\text{cis}\,(60° + 2\cdot 360°) = 16\,\text{cis}\,(60° + k\cdot 360°)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Se aplicará el teorema 7 a las diferentes representaciones de z usando diferentes argumentos

- Para $z = 16\,\text{cis}\,(60°)$ se tendría:

  $$w_0 = (16)^{1/4}\,\text{cis}\left(\frac{60°}{4}\right) = \sqrt[4]{16}\,\text{cis}\left(\frac{60°}{4}\right) = 2\,\text{cis}\,(15°)$$

  De donde se tiene que:

  $$w_0 = 2\,\text{cis}(15°) \tag{1.33}$$

- Para $z = 16\,\text{cis}\,(60° + 360°) = 16\,\text{cis}(420°)$ se tendría:

  $$\begin{aligned} w_1 &= (16)^{1/4}\,\text{cis}\left(\frac{60° + 360°}{4}\right) \\ &= \sqrt[4]{16}\,\text{cis}\left(\frac{60°}{4} + \frac{360°}{4}\right) \\ &= 2\,\text{cis}\,(105°) \end{aligned}$$

$$w_1 = 2\,\mathrm{cis}(105^\circ) \tag{1.34}$$

- Para $z = 16\,\mathrm{cis}\,(60^\circ + 2\cdot 360^\circ) = 16\,\mathrm{cis}(780^\circ)$ se tendría:

$$\begin{aligned} w_2 &= (16)^{1/4}\,\mathrm{cis}\left(\frac{60^\circ + 2\cdot 360^\circ}{4}\right) \\ &= \sqrt[4]{16}\,\mathrm{cis}\left(\frac{60^\circ}{4} + \frac{2\cdot 360^\circ}{4}\right) \\ &= 2\,\mathrm{cis}\,(195^\circ) \\ &= 2\,\mathrm{cis}\,(-165^\circ) \end{aligned}$$

$$w_2 = 2\,\mathrm{cis}(-165^\circ) \tag{1.35}$$

- Para $z = 16\,\mathrm{cis}\,(60^\circ + 3\cdot 360^\circ) = 16\,\mathrm{cis}(1140^\circ)$ se tendría:

$$\begin{aligned} w_3 &= (16)^{1/4}\,\mathrm{cis}\left(\frac{60^\circ + 3\cdot 360^\circ}{4}\right) \\ &= 2\,\mathrm{cis}\left(\frac{60^\circ}{4} + \frac{3\cdot 360^\circ}{4}\right) \\ &= 2\,\mathrm{cis}\,(285^\circ) \\ &= 2\,\mathrm{cis}\,(-75^\circ) \end{aligned}$$

$$w_3 = 2\,\mathrm{cis}(-75^\circ) \tag{1.36}$$

donde se tendría ya las cuatro raíces w_0, w_1, w_2 y w_3, sin embargo nada impide continuar con el proceso que se estaba haciendo, así que si se continúa se tendría lo siguiente:

Para $z = 16\,\mathrm{cis}\,(60^\circ + 4\cdot 360^\circ) = 16\,\mathrm{cis}(1500^\circ)$ se tendría:

$$\begin{aligned} w_4 &= (16)^{1/4}\,\mathrm{cis}\left(\frac{60^\circ + 4\cdot 360^\circ}{4}\right) \\ &= 2\,\mathrm{cis}\left(\frac{60}{4} + \frac{\cancel{4}\cdot 360^\circ}{\cancel{4}}\right) \\ &= 2\,\mathrm{cis}\,(15^\circ) \\ &= w_0 \end{aligned}$$

Así $w_4 = w_0$ y se podría probar que $w_5 = w_1$, $w_6 = w_2$, $w_7 = w_3$ y $w_8 = w_4 = w_0$ y así sucesivamente. Esto evidencia para este caso particular el comportamiento cíclico del proceso, el cual se repite en todos los casos de manera que generan exactamente n raíces $n-$ésimas distintas.

Finalmente, las raíces cuartas de $z = 16\,\text{cis}\,(60°)$ son:

$$\begin{aligned} w_0 &= 2\,\text{cis}\,(15°) \\ w_1 &= 2\,\text{cis}\,(105°) \\ w_2 &= 2\,\text{cis}\,(-165°) \\ w_3 &= 2\,\text{cis}\,(-75°) \end{aligned}$$

★

El mismo proceso se puede realizar en el caso de trabajar en radianes, pasando todas las equivalencias usada en grados, en el ejemplo anterior, a radianes.

Del proceso mostrado en el ejemplo 35 se puede definir una fórmula para poder calcular las raíces $n-$ésimas de un número complejo $z = r\,\text{cis}\,\theta$, misma que se presenta a continuación:

Fórmula para determinar raíces $n-$ésimas
Sea $z = r\,\text{cis}\,\theta$ un número complejo en forma polar, entonces todas las raíces $n-$ésimas de z están dadas por:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\,\text{cis}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \qquad \text{para todo } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{1.37}$$

para el caso de que θ esté dado en radianes y

$$w_k = \sqrt[n]{r}\,\text{cis}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{360° \cdot k}{n}\right) \qquad \text{para todo } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{1.38}$$

para el caso de que θ esté dado en grados

Ejemplo 36
Encontrar las raíces quintas del número complejo $z = 4\sqrt{3} - 4\text{i}$ y exprésela en forma rectangular.

★ **Solución.** Primero se debe determinar la forma polar de z

$$|z| = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{64} = 8$$
$$\theta = \text{Arg}\left(4\sqrt{3} - 4i\right) = \arctan\left(\frac{-4}{4\sqrt{3}}\right) = -30°$$

de donde se tiene que: $z = 8\,\text{cis}\,(-30°)$ y sus raíces quintas están dadas por:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\,\text{cis}\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{360°}{n}\right) \text{ para } k = 0, 1, 2, ..., n-1$$

Entonces, para el caso particular de z la fórmula quedaría:

$$w_k = \sqrt[5]{8}\,\text{cis}\left(\frac{-30^\circ}{5} + k\frac{360^\circ}{5}\right) \text{ para } k = 0,1,2,3,4$$

de donde el cálculo de las raíces se hace a continuación:

$k=0 \qquad w_0 = \sqrt[5]{8}\,\text{cis}\left(\frac{-30^\circ}{5} + 0\cdot\frac{360^\circ}{5}\right) = \sqrt[5]{8}\,\text{cis}\,(-6^\circ)$

$k=1 \qquad w_1 = \sqrt[5]{8}\,\text{cis}\left(\frac{-30^\circ}{5} + 1\cdot\frac{360^\circ}{5}\right) = \sqrt[5]{8}\,\text{cis}\,(66^\circ)$

$k=2 \qquad w_2 = \sqrt[5]{8}\,\text{cis}\left(\frac{-30^\circ}{5} + 2\cdot\frac{360^\circ}{5}\right) = \sqrt[5]{8}\,\text{cis}\,(138^\circ)$

$k=3 \qquad w_3 = \sqrt[5]{8}\,\text{cis}\left(\frac{-30^\circ}{5} + 3\cdot\frac{360^\circ}{5}\right) = \sqrt[5]{8}\,\text{cis}\,(210^\circ) = \sqrt[5]{8}\,\text{cis}\,(-150^\circ)$

$k=4 \qquad w_4 = \sqrt[5]{8}\,\text{cis}\left(\frac{-30^\circ}{5} + 4\cdot\frac{360^\circ}{5}\right) = \sqrt[5]{8}\,\text{cis}\,(282^\circ) = \sqrt[5]{8}\,\text{cis}\,(-78^\circ)$

Por lo que las raíces quintas de $z = 4\sqrt{3} - 4i$ son: $w_0 = \sqrt[5]{8}\,\text{cis}\,(-6^\circ)\; w_1 = \sqrt[5]{8}\,\text{cis}\,(66^\circ)\,;\; w_2 = \sqrt[5]{8}\,\text{cis}\,(138^\circ)\,;\; w_3 = \sqrt[5]{8}\,\text{cis}\,(-150^\circ)\,;\; w_4 = \sqrt[5]{8}\,\text{cis}\,(-78^\circ)$. Sin embargo, si se desean en forma rectangular entonces dichas raíces serían:

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt[5]{8}\,\text{cis}\,(-6^\circ) = 1.5074 - 0.15844\text{i}\\
w_1 &= \sqrt[5]{8}\,\text{cis}\,(66^\circ) = 0.61650 + 1.3847\text{i}\\
w_2 &= \sqrt[5]{8}\,\text{cis}\,(138^\circ) = -1.1264 + 1.0142\text{i}\\
w_3 &= \sqrt[5]{8}\,\text{cis}\,(-150^\circ) = -1.3126 + 0.75786\text{i}\\
w_4 &= \sqrt[5]{8}\,\text{cis}\,(-78^\circ) = 0.31514 - 1.4826\text{i}
\end{aligned}$$

★

Ejemplo 37

Considere el número complejo $z = \dfrac{-3+4\text{i}}{2-\text{i}} - \text{i}$.

1. *Represente* z *en la forma rectangular.*
2. *Calcule las raíces cuartas de* z *y déjelas expresadas en forma polar.*

★ **Solución.**

- Para la parte 1, se tiene que:

$$\begin{aligned}
z &= \frac{-3+4\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} - \mathrm{i} \\
&= \frac{-3+4\mathrm{i}-\mathrm{i}\,(2-\mathrm{i})}{2-\mathrm{i}} \\
&= \frac{-3+4\mathrm{i}-2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{2-\mathrm{i}} \\
&= \frac{-4+2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} \cdot \frac{2+\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} \\
&= \frac{-8-4\mathrm{i}+4\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2}{4-\mathrm{i}^2} = \frac{-10}{5} = -2
\end{aligned}$$

  Por lo tanto $z = -2 + 0\mathrm{i} = -2$.

- En la parte 2 se pide determinar las raíces cuartas de -2. Para este caso, se tiene que $z = -2 = 2\,\mathrm{cis}\,\pi$ (se trabajará en radianes).

  Mediante la fórmula dada en 1.38 se tiene que las raíces cuartas de z están dadas por:

$$w_k = \sqrt[4]{2} \cdot \mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{para } k = 0, 1, 2, 3$$

  Haciendo variar $k = 0, 1, 2$ y 3 se tiene que las raíces cuartas de z son:

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt[4]{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
w_1 &= \sqrt[4]{2} \cdot \mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\
w_2 &= \sqrt[4]{2} \cdot \mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2} \cdot \mathrm{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \\
w_3 &= \sqrt[4]{2} \cdot \mathrm{cis}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2} \cdot \mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

★

■ Ejemplo **38**

Determine todos los valores de $w \in \mathbb{C}$ tales que $w^4 + 4 + 3\mathrm{i} = 0$.

★ **Solución.** Note que el enunciado anterior es equivalente a preguntar las raíces cuartas del número $-4 - 3\mathrm{i}$. Primero, se debe expresar el número $z = -4 - 3\mathrm{i}$ en su forma polar.

$$\begin{aligned}
|z| &= \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5 \\
\mathrm{Arg}\,(z) &= \arctan\left(\frac{-3}{-4}\right) - \pi = -2.498091544...
\end{aligned}$$

Usando 5 decimales se tiene que $z = 5\,\text{cis}\,(-2.49809)$.

Empleando la fórmula 1.38 para calcular las raíces cuartas de z, se tiene que dichas raíces están dadas por:

$$w_k = \sqrt[4]{5}\,\text{cis}\left(\frac{-2.49809}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) \qquad \text{para } k = 0, 1, 2, 3$$

de donde se tendría que:

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt[4]{5}\,\text{cis}\left(\frac{-2.49809}{4}\right)\\
w_1 &= \sqrt[4]{5}\,\text{cis}\left(\frac{-2.49809}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\\
w_2 &= \sqrt[4]{5}\,\text{cis}\left(\frac{-2.49809}{4} + \pi\right)\\
w_3 &= \sqrt[4]{5}\,\text{cis}\left(\frac{-2.49809}{4} + \frac{3\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Pasando todo a la forma rectangular utilizando para ello 5 decimales por redondeo se tiene que:

$$\begin{aligned}
w_0 &= 1.21309 - 0.87435\text{i}\\
w_1 &= 0.87435 + 1.21309\text{i}\\
w_2 &= -1.21309 + 0.87435\text{i}\\
w_3 &= -0.87435 - 1.21309\text{i}
\end{aligned}$$

★

Un resultado gráfico muy interesante sobre raíces $n-$ésimas de números complejos es el siguiente:

Representación gráfica de las raíces complejas
Sea z un número complejo y sean $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, entonces las raíces $n-$ésimas de z son los vértices de un polígono regular de n lados con centro en el origen de coordenadas.

■ Ejemplo **39**
Dibuje las raíces quintas del número $z = 4\sqrt{3} - 4\text{i}$, determinadas en el ejemplo 36.

★ **Solución.** En el ejemplo 36 se obtuvieron 5 raíces quintas para el número $z = 4\sqrt{3} - 4\text{i}$, por el resultado sobre la representación gráfica de las raíces de números complejos se tiene que dichas raíces son los vértices de un pentágono regular con centro en el origen. Donde w_0 sería la raíz principal del z. Usando la forma polar de cada una de las raíces, se puede observar que todas se encuentran sobre la circunferencia con centro en el origen y radio $\sqrt[5]{8}$ unidades. Así, raíz principal con ángulo $-6°$ se dibuja primero.

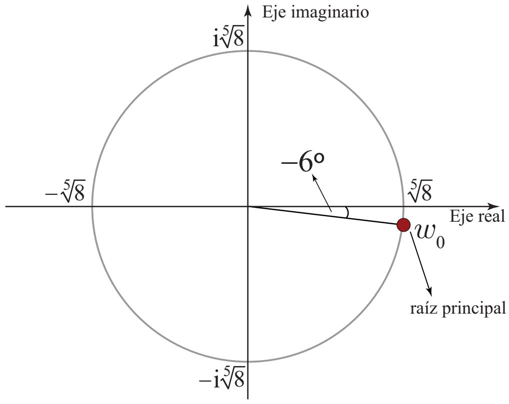


Figura 1.22: Representación de la raíz principal

Como se sabe que es un pentágono, cada uno de los ángulos internos del mismo mide 72° así, se puede representar w_1 realizando una rotación de w_0 de 72°.

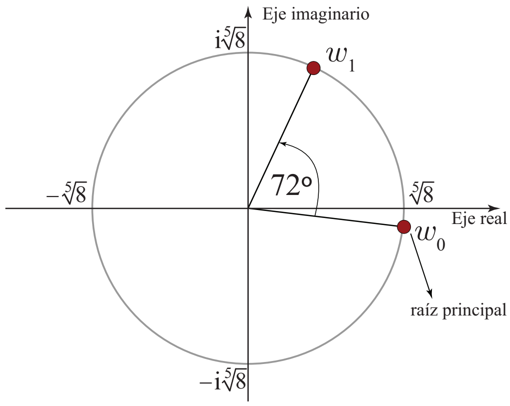


Figura 1.23: Rotación de la raíz principal en 72°

Continuando con las rotaciones en 72° de la raíz actual para obtener la siguiente raíz se puede completar la representación de las 5 raíces quintas de z.

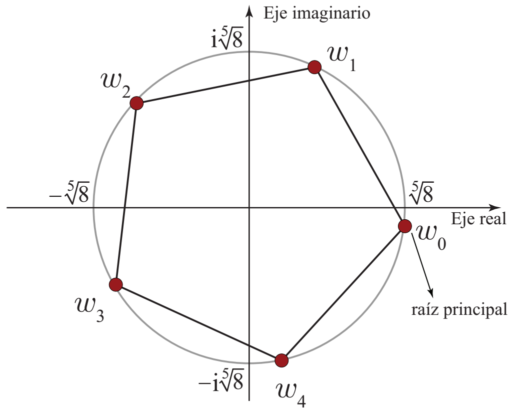


Figura 1.24: Representación gráficas de las raíces del ejemplo 36

★

Ejemplo 40

Resuelva en $\mathbb{C}$ *la ecuación* $w^4+8+8\mathrm{i}\sqrt{3}=0$ *y represente cada una de las soluciones en el mismo plano complejo.*

★ **Solución.** Note que resolver la ecuación dada es equivalente a determinar las raíces cuartas del número $z=-8-8\mathrm{i}\sqrt{3}$. Primero, se procede a expresar z en forma polar, se trabajará en radianes:

$$\begin{aligned}|z| &= \sqrt{(-8)^2+(-8\sqrt{3})^2}=16\\ \operatorname{Arg} z &= \arctan\left(\frac{-8\sqrt{3}}{-8}\right)-\pi=\frac{-2\pi}{3}\end{aligned}$$

Así, $z=16\operatorname{cis}\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$, de este modo, las raíces cuartas de z están dadas por la fórmula 1.38 de la siguiente manera:

$$w_k=\sqrt[4]{16}\operatorname{cis}\left(\frac{-2\pi}{3\cdot 4}+\frac{2k\pi}{4}\right)\qquad \text{para } k=0,1,2,3$$

Así, se tiene que:

$$\begin{aligned}w_0 &= 2\operatorname{cis}\left(\frac{-\pi}{6}\right)\\ w_1 &= 2\operatorname{cis}\left(\frac{-\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\\ w_2 &= 2\operatorname{cis}\left(\frac{-\pi}{6}+\pi\right)=2\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\\ w_3 &= 2\operatorname{cis}\left(\frac{-\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}\right)=2\operatorname{cis}\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

de donde al pasarlas a forma rectangular se tendría que las raíces cuartas de z y en consecuencia las soluciones de la ecuación original son:

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt{3} - \mathrm{i} \\ w_1 &= 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \\ w_2 &= -\sqrt{3} + \mathrm{i} \\ w_3 &= -1 - \mathrm{i}\sqrt{3} \end{aligned}$$

Finalmente, se debe realizar la representación gráfica de cada una de las raíces cuartas de z en el mismo plano complejo, quedando:

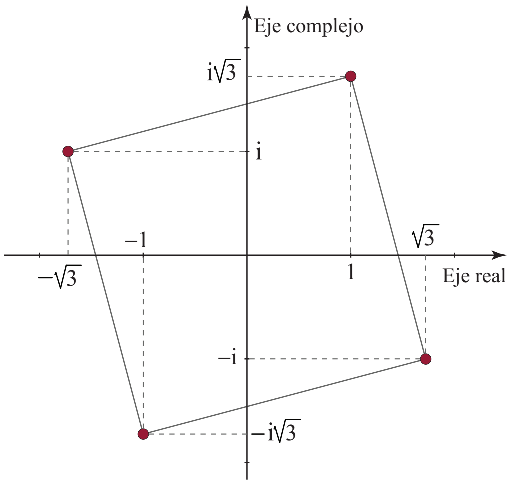


Figura 1.25: Representación gráfica de las soluciones de la ecuación

★

Ejemplo 41

Represente en el plano complejo las raíces cúbicas del número $z = (1 - \mathrm{i})^2$.

★ **Solución.** Para iniciar se debe determinar las raíces cúbicas de z, para ello es importante notar primero que:

$$\begin{aligned} z &= (1-\mathrm{i})^2 = \left(\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)^2 \\ &= 2\operatorname{cis}\left(\frac{-\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

De acuerdo a la fórmula 1.38 se tiene que las raíces cúbicas de z están dadas por:

$$w_k = \sqrt[3]{2}\operatorname{cis}\left(\frac{-\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) \quad \text{para } k = 0, 1, 2$$

de esta forma se tiene que las raíces buscadas son:

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt[3]{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{-\pi}{6}\right)\\
w_1 &= \sqrt[3]{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{-\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)\\
w_2 &= \sqrt[3]{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{-\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{-5\pi}{6}\right)
\end{aligned}
$$

así, la representación gráfica de cada una de las raíces cúbicas es:

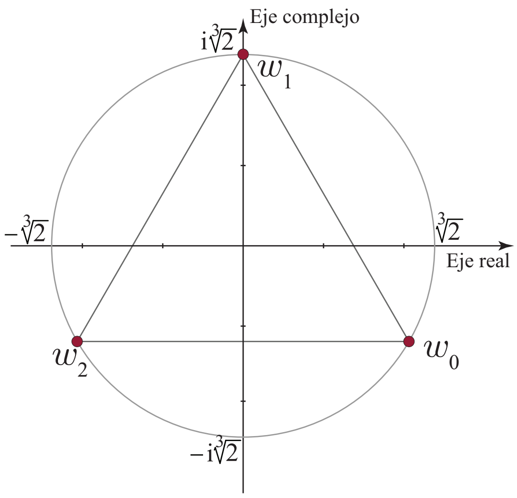


Figura 1.26: Representación gráfica de las raíces cúbicas de z.

★

Ejercicios 8.

1. Determine las raíces que se solicitan del número dado en cada uno de los casos siguientes:

   a) Raíces cúbicas de $w = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\mathrm{i}}{2}$.

   b) Raíces cuartas de $z = 1 + \sqrt{5} + \mathrm{i}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

   c) Raíces quintas de $x = 2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

   d) Raíces sextas de $y = 5 - 5\mathrm{i}$.

   e) Raíces cuartas de $t = 16 \operatorname{cis}\left(\dfrac{3\pi}{7}\right)$.

   f) Raíces cúbicas de $r = 8 \operatorname{cis}\left(\dfrac{-\pi}{5}\right)$.

   g) Raíces cuartas de $z = (1 - \mathrm{i})^3$.

2. Resuelva en $\mathbb{C}$ cada una de las ecuaciones siguientes:

   a) $w^2 - 1 - \mathrm{i} = 0$

   b) $(w^3 - \mathrm{i})(w^2 + 4w + 3) = 0$

   c) $z^3 - (1 - \mathrm{i})^3 = 0$

   d) $\mathrm{i}x^2 + 2\mathrm{i}x + \sqrt{3} = 0$

1.7. Forma exponencial de un número complejo

Hasta el momento, no se ha estudiado la forma de calcular expresiones tales como z^w donde tanto z como w son números complejos cualesquiera. Para realizar este tipo de cálculo es necesario estudiar la función exponencial y logarítmica complejos. La siguiente definición nos permitirá realizar dichos cálculos:

Definición **12 (Exponencial con argumento complejo)**
Si $\theta \in \mathbb{R}$, entonces se define $e^{i\theta} = \operatorname{cis}\theta$.

Nota importante
Dada la definición, es importante indicar que θ debe ser un número real, esto significa que el ángulo que representa el argumento del número complejo solo se puede usar en radianes y no en grados. La utilización de grados para trabajar con exponenciales y logaritmos siempre conducirá a un error.

De esta manera, es posible calcular la exponencial de cualquier número complejo. Si $z = a + b\mathrm{i}$ entonces:

$$e^z = e^{a+b\mathrm{i}} = e^a \cdot e^{b\mathrm{i}} = e^a \operatorname{cis} b$$

Definición **13 (Forma exponencial de un número complejo)**
Sea $z = r \operatorname{cis} \theta$ un número complejo dado en forma polar tal que $\theta \in \mathbb{R}$ (en radianes), entonces se define la forma exponencial de z como:

$$z = re^{\theta\mathrm{i}}$$

Ejemplo **42**
Realice los cálculos y exprese el resultado en forma rectangular para cada una de las siguientes expresiones:

- $e^{\pi\mathrm{i}}$
- $e^{2-\mathrm{i}}$
- $\dfrac{e^{2+\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} \cdot e^{\pi\mathrm{i}}}{e^{1-2\pi\mathrm{i}}}$

★ **Solución.**

- $e^{\pi\mathrm{i}} = \operatorname{cis}(\pi) = \cos\pi + \mathrm{i}\operatorname{sen}\pi = -1 + \mathrm{i}\cdot 0 = -1$ por lo que

$$e^{\pi i} = -1$$

- $e^{2-\mathrm{i}} = e^2 e^{-\mathrm{i}} = e^2 \operatorname{cis}(-1) = e^2(\cos(-1) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(-1)) = 3.9923 - 6.2177\mathrm{i}$ por lo que:

$$e^{2-\mathrm{i}} \approx 3.9923 - 6.2177\mathrm{i}$$

- para el caso de $\dfrac{e^{2+\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} \cdot e^{\pi\mathrm{i}}}{e^{1-2\mathrm{i}}}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{e^{2+\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} \cdot e^{\pi\mathrm{i}}}{e^{1-2\pi\mathrm{i}}} &= e^{2+\frac{\pi}{2}\mathrm{i} + \pi\mathrm{i} - 1 + 2\pi\mathrm{i}} \\
&= e^{1+\frac{7\pi}{2}\mathrm{i}} = e^1 \cdot e^{\frac{7\pi\mathrm{i}}{2}} \\
&= e \operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{2}\right) = e\cos\left(\frac{7\pi}{2}\right) + e\mathrm{i}\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{2}\right) \\
&= e \cdot 0 + e\mathrm{i} \cdot -1 \\
&= -e\mathrm{i}
\end{aligned}$$

de donde se tiene que:

$$\frac{e^{2+\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} \cdot e^{\pi\mathrm{i}}}{e^{1-2\pi\mathrm{i}}} = -e\mathrm{i}$$

★

1.7.1. Logaritmo natural complejo

En los números reales, el logaritmo en cualquier base se define como la función inversa de la función exponencial de la misma base, gracias al hecho de que la función exponencial en $\mathbb{R}$ es una función biyectiva y por lo tanto invertible.

Dado que la función exponencial de base e cumple la propiedad[4]:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\,[e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2]$$

entonces se tiene que es inyectiva. La sobreyectividad de la misma se logra definiendo el codominio igual al ámbito, que en el caso de cualquier exponencial real es $\mathbb{R}^+$. Así, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = e^x$ es una función biyectiva y por lo tanto invertible. De este modo existe una función $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que si $y = e^x$ implica que $x = f^{-1}(y)$, a esta función se le denomina logaritmo natural y se denota con ln, así:

$$y = e^x \iff x = \ln y$$

La extensión de la función exponencial de base e al conjunto de los números complejos no genera una función invertible, pues la misma no es inyectiva. Esta afirmación se fundamenta en el hecho de que en los números complejos se cumple que, para todo número $k \in \mathbb{Z}$ que:

$$e^{\mathrm{i}\theta} = \operatorname{cis}\theta = \operatorname{cis}(\theta + 2k\pi) = e^{\mathrm{i}\,(\theta + 2k\pi)}$$

pues la función cis es una función periódica de periodo 2π. Por lo que es claro que $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$e^{\mathrm{i}\theta} = e^{\mathrm{i}\,(\theta + 2k\pi)} \quad \text{pero} \quad \mathrm{i}\theta \neq \mathrm{i}(\theta + 2k\pi)$$

De esta forma

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,[e^{z_1} = e^{z_2} \Rightarrow z_1 = z_2]$$

no es válida y la función no es inyectiva y por lo tanto no es invertible.

Ejemplo 43

$e^{2+3\mathrm{i}} = e^2 e^{3\mathrm{i}} = e^2 \operatorname{cis}(3) = e^2 \operatorname{cis}(3 + 2\pi) = e^2 e^{\mathrm{i}(3 + 2\pi)} = e^{2+\,\mathrm{i}(3+2\pi)}$ *así:*

$$e^{2+3\mathrm{i}} = e^{2+(3+2\pi)\,\mathrm{i}}$$

sin embargo,

$$2 + 3\mathrm{i} \neq 2 + (3 + 2\pi)\,\mathrm{i}$$

El problema de la no inyectividad de una función ya se ha presentado anteriormente en otras funciones, en los siguientes dos ejemplos se presentan los dos casos más comunes estudiados en cursos previos.

[4] Sea $f : D_f \to C_f$ la función f es inyectiva, si y solo si, cumple que:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f\,[f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2]$$

EJEMPLO 44

Considere la función cuadrática $f : \mathbb{R} \to \left[\frac{-\Delta}{4a}, +\infty\right[$ *definida por* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *con* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *y* $a \neq 0$*; cuya gráfica se muestra en la figura 1.27. Es claro que dicha función no es inyectiva pero sí sobreyectiva.*

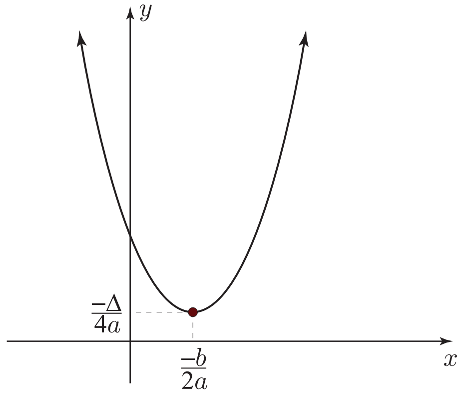
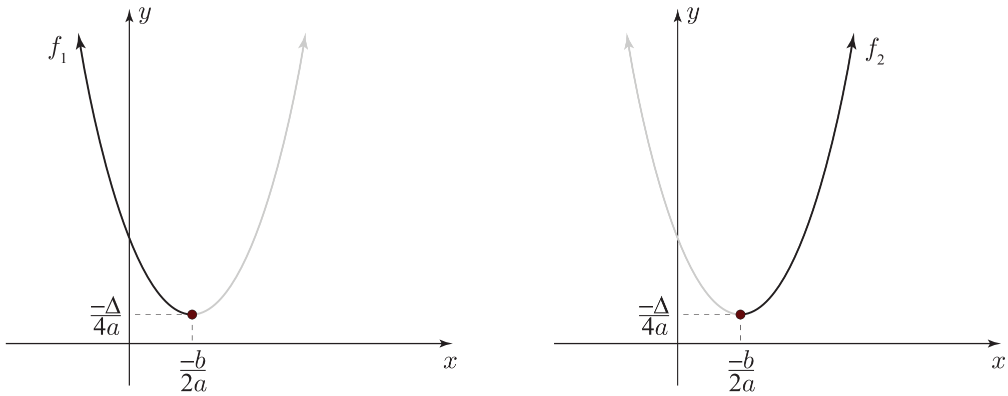


Figura 1.27: Función cudrática con dominio en $\mathbb{R}$

Es posible redefinir dicha función de manera que sea inyectiva, así las funciones $f_1 : \left]-\infty, \frac{-b}{2a}\right] \to \left[\frac{-\Delta}{4a}, +\infty\right[$ *y* $f_2 : \left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right[\to \left[\frac{-\Delta}{4a}, +\infty\right[$ *definidas por:*

$$f_1(x) = f_2(x) = ax^2 + bx + x$$

son funciones biyectivas y por lo tanto son invertibles.



(a) Gráfica de f_1 (b) Gráfica de f_2

Figura 1.28: Funciones restringidas

EJEMPLO 45

Considere la función $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to [-1, 1]$. *Dicha función es, sin duda, un función sobreyectiva pero no es inyectiva. Sin embargo, para poder definir su inversa, es posible definir un nuevo dominio, restringido a subconjunto de* $\mathbb{R}$ *en donde dicha función restringida sea inyectiva y sobreyectiva. La escogencia típica es* $\operatorname{sen} : \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$.

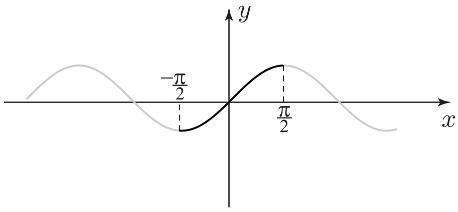


Figura 1.29: Función seno restringida

Para esta restricción, la cual es invertibles, se define la función

$$\operatorname{arc\,sen} : [-1,1] \to \left[\tfrac{-\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

Existen muchos diferentes restricciones que se pueden tomar para que la función sea inyectiva y así poder definir una función inversa, en el caso del ejemplo 44 se presentaron dos posibles restricciones y para cada una de ellas es posible definir una inversa. En el caso del ejemplo 45 también existen infinitas escogencias que pemitan definir una restricción del seno biyectiva y por lo tanto invertible, por ejemplo el dominio $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ también puede emplearse y definir un inversa diferente a la utilizada comúnmente.

Utilizando la misma lógica, se puede definir una función exponencial compleja restringida para la cual se pueda definir una función inversa. Se considerara para dicha restricción el argumento principal, de donde es posible definir una función inversa denominada Logaritmo principal que se define a continuación:

Definición **14 (Logaritmo principal)**
Si $\theta \in]-\pi,\pi]$, *entonces se define el logaritmo principal y se denota* Ln *como la función que cumple que:*

$$\operatorname{Ln}(\operatorname{cis}\theta) = \operatorname{Ln}(e^{\theta \mathrm{i}}) = \theta \mathrm{i}$$

Cálculo de Logartimo principal de un número complejo
De la definición anterior se desprende que si $z = a + b\mathrm{i}$, entonces se tiene que:

$$\operatorname{Ln}(z) = \operatorname{Ln}(|z| \operatorname{cis}(\operatorname{Arg} z)) = \ln|z| + \mathrm{i}\operatorname{Arg} z$$

donde ln denota el logaritmo natural usual en $\mathbb{R}$.

Ejemplo **46**
Considere $z = 3\operatorname{cis}\left(\dfrac{17\pi}{3}\right)$, *determine el valor de* $\operatorname{Ln} z$ *y expréselo en forma rectangular.*

★ **Solución.** Para este ejemplo, se debe tomar en consideración $\dfrac{-\pi}{3} = \operatorname{Arg} z \neq \dfrac{17\pi}{3}$

no es el argumento principal de z. Este detalle debe tenerse presente durante el procedimiento:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ln} z &= \operatorname{Ln}\left[3\operatorname{cis}\left(\frac{17\pi}{3}\right)\right] \\
&= \ln 3 + \operatorname{Ln}\left(e^{\frac{17\pi}{3}\mathrm{i}}\right) \\
&= \ln 3 + \operatorname{Ln}\left(e^{\frac{-\pi}{3}\mathrm{i}}\right) \\
&= \ln 3 + \frac{-\pi\mathrm{i}}{3}
\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\operatorname{Ln}(z) = \ln 3 + \frac{-\pi\mathrm{i}}{3}$$

★

Ejemplo 47

Calcule y exprese en forma rectangular el valor de $\operatorname{Ln}(3.99232 - 6.21768i)$.

★ **Solución.** Primero se debe pasar el número a la forma polar. Sea $z = 3.99232 + 6.21768\mathrm{i}$

$$r = |z| = \sqrt{3.99232^2 + 6.21768^2} = 7.3891$$
$$\theta = \operatorname{Arg}(z) = \arctan\left(\frac{-6.21768}{3.99232}\right) = -1$$

De donde $z = 7.3891\operatorname{cis}(-1)$ por lo que:

$$\operatorname{Ln}(z) = \operatorname{Ln}(7.3891\operatorname{cis}(-1)) = \ln(7.3891) + \operatorname{Ln}\left(e^{-\mathrm{i}}\right) = 2 + -\mathrm{i}$$

por lo que

$$\operatorname{Ln}(z) = 2 - i$$

★

Ejemplo 48

Calcule el valor de $\operatorname{Ln}(-2)$ *y expreselo en forma rectangular.*

★ **Solución.** $z = -2 \Longrightarrow z = 2\operatorname{cis}\pi$

$$\operatorname{Ln}(-2) = \operatorname{Ln}(2\operatorname{cis}\pi) = \ln 2 + \operatorname{Ln}(\operatorname{cis}\pi) = \ln 2 + \pi\mathrm{i}$$

$$\operatorname{Ln}(-2) = \ln 2 + \pi\mathrm{i}$$

★

1.7.2. Potencias complejas

En este punto el lector será capaz de calcular exponenciales de base e y exponente complejo y el logaritmo principal natural de números complejos no nulos. Para completar el proceso de cálculo aritmético de números complejos, es necesario indicar como se calculan las potencias de base y exponentes complejos.

De la definición de la función exponencial compleja y del logaritmo principal natural se desprende el método que será empleado para la realización del cálculo de potencias de base y exponentes complejos.

Potencias de base y exponente complejos
Sean z y w números complejos cualesquiera con $w \neq 0$, entonces:

$$w^z = e^{z \operatorname{Ln} w}$$

El resultado anterior se desprende directamente de las propiedades de los logaritmos que se puede generalizar para el logaritmos principal natural cumpliendo que:

$$w^z = e^{\operatorname{Ln}(w^z)} = e^{z \operatorname{Ln} w}$$

Ejemplo 49
Calcule el valor de la potencia $(-1)^{\frac{1}{2}}$ y exprese el resultado en forma rectangular.

★ **Solución.**

$$z = (-1)^{\frac{1}{2}} = e^{\operatorname{Ln}\left((-1)^{1/2}\right)} = e^{1/2 \cdot \operatorname{Ln}(-1)}$$

Donde $\operatorname{Ln}(-1) = \operatorname{Ln}(\operatorname{cis}\pi) = \pi\mathrm{i}$, luego:

$$z = e^{1/2 \cdot \operatorname{Ln}(-1)} = e^{1/2 \cdot \pi \mathrm{i}} = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{i}$$

Finalmente se tiene que:

$$(-1)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{i}$$

★

En este caso, es importante indicar que el valor $(-1)^{1/2}$ calculado con el logaritmo principal natural da como resultado la raíz principal de -1 que corresponde a i.

Ejemplo 50
Determine el valor de $(2+\mathrm{i})^{1+\mathrm{i}}$ y exprese el resultado en forma rectangular.

★ **Solución.** Primero que todo, note que:

$$z = (2+\mathrm{i})^{1+\mathrm{i}} = e^{\operatorname{Ln}(2+\mathrm{i})^{1+\mathrm{i}}} = e^{(1+\mathrm{i})\operatorname{Ln}(2+\mathrm{i})}$$

Así, que primero se debe calcular el valor de $\mathrm{Ln}\,(2+\mathrm{i})$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} r &= |2+\mathrm{i}| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5} \\ \theta &= \mathrm{Arg}\,(2+\mathrm{i}) = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = 0.46365 \end{aligned}$$

$$\mathrm{Ln}\,(2+\mathrm{i}) = \mathrm{Ln}\left(\sqrt{5}\,\mathrm{cis}\,(0.46365)\right) = \ln\sqrt{5} + 0.46365\mathrm{i} = 0.80472 + 0.46365\mathrm{i}$$

Retomando el ejercicio original se tiene que:

$$\begin{aligned} z &= e^{(1+\,\mathrm{i})\,\mathrm{Ln}(2+\,\mathrm{i})} \\ &= e^{(1+\,\mathrm{i})(0.80472+0.46365\mathrm{i})} \\ &= e^{0.34107+1.2684\mathrm{i}} \\ &= e^{0.34107}e^{1.2684\mathrm{i}} \\ &= e^{0.34107}\,\mathrm{cis}\,(1.2684) \\ &= e^{0.34107}\,[\cos(1.2684) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,(1.2684)] \\ &= e^{0.34107}\,[0.29781 + 0.95463\mathrm{i}] \\ &= e^{0.34107}\cdot 0.29781 + e^{0.34107}\cdot 0.95463\mathrm{i} \\ &= 0.41886 + 1.3426\mathrm{i} \end{aligned}$$

★

■ Ejemplo **51**

Calcule en forma rectangular z^z, donde $z = e^{\frac{-\pi}{2}\mathrm{i}}$.

★ **Solución.** Primero note que:

$$z = e^{\frac{-\pi}{2}\mathrm{i}} = \mathrm{cis}\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -\mathrm{i} \tag{1.39}$$

Considerando 1.39 se tiene que:

$$z^z = e^{z\cdot\mathrm{Ln}(z)} \tag{1.40}$$

Sin embargo, note que:

$$\mathrm{Ln}\,(z) = \mathrm{Ln}\left(e^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}\right) = -\frac{\pi}{2}\mathrm{i} \tag{1.41}$$

Sustituyendo 1.39 y 1.41 en 1.40 se tiene que:

$$z^z = e^{-\mathrm{i}\,\cdot\,-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

Por lo que finalmente se tiene que: $z^z = e^{-\frac{\pi}{2}}$

★

Ejemplo 52
Verifique que

$$2\,\mathrm{Ln}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{(2)}}\mathrm{i}\right)+\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}\ =-\pi\mathrm{i} \tag{1.42}$$

★ **Solución.** Primero que todo, sea $w=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{(2)}}\mathrm{i}$

$$\begin{aligned}|w| &= \sqrt{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1\\ \mathrm{Arg}(w) &= \arctan\left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{(2)}}}{\frac{-1}{\sqrt{2}}}\right)-\pi=-\frac{3\pi}{4}\end{aligned}$$

De donde se tiene que:

$$w=\mathrm{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$$

Por otro lado, se sabe que $\mathrm{i}=\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Así, la expresión 1.42 se puede simplificar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}2\,\mathrm{Ln}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{(2)}}\mathrm{i}\right)+\mathrm{Ln}\,\mathrm{i} &= 2\cdot\mathrm{Ln}\left(\mathrm{cis}\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right)+\mathrm{Ln}\left(\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{2}\right)\\ &= 2\,\mathrm{Ln}\left(e^{\frac{-3\pi}{4}\mathrm{i}}\right)+\mathrm{Ln}\left(e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}\right)\\ &= 2\cdot\frac{-3\pi}{4}\mathrm{i}+\frac{\pi}{2}\mathrm{i}\\ &= -\pi\mathrm{i}\end{aligned}$$

De donde queda verificado que:

$$2\,\mathrm{Ln}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{(2)}}\mathrm{i}\right)+\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}\ =-\pi\mathrm{i}$$

★

Ejercicios 9.

1. Calcule el valor de cada una de las siguientes expresiones:

   a) $(1-\mathrm{i})^{\mathrm{i}}$ R/: $2.062872235 + 0.7450070622\mathrm{i}$

   b) $\left(2-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^{1-\mathrm{i}}$ R/: $-0.149840845 - 1.287240995\mathrm{i}$

   c) $(1-\mathrm{i})^{2+3\mathrm{i}}$ R/: $18.19499465 - 10.68706150i$

   d) $\dfrac{(1-2\mathrm{i})^{3i}}{1-\mathrm{i}}$ R/: $-19.55423336 - 1.134680864\mathrm{i}$

2. Verifique las siguientes identidades:

   a) $e^{\pi/4}\operatorname{cis}\left(\ln\sqrt{2}\right) - (1-\mathrm{i})^{\mathrm{i}} = 0$

   b) $4e^{-\pi/6}\left(2\sqrt{3}-2\mathrm{i}\right)^{\mathrm{i}-1} = e^{\mathrm{i}\ln 4 + \pi\mathrm{i}/6}$

   c) $(\operatorname{Ln}(1+\mathrm{i}))^2 + \dfrac{\pi^2}{16} = \dfrac{(\operatorname{Ln}2)^2}{4} + \dfrac{\pi\mathrm{i}\operatorname{Ln}2}{4}$

3. Calcular $\operatorname{Ln} z$ si se sabe que:

$$z = \frac{1-e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}}{1+e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}}$$

4. Determine todos los valores de $z \in \mathbb{C}$ tales que

$$e^z = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$$

5. Calcule y exprese en la forma rectangular el número complejo

$$\operatorname{Ln}\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right) - \frac{\pi}{3}e^{\frac{-\pi}{2}\mathrm{i}}$$

6. Hallar el valor de $m \in \mathbb{R}$ de modo que $\left(2e^{\mathrm{i}\sqrt{2}}\right)^m$ sea un número real negativo. R/: $m = \dfrac{(2k+1)\sqrt{2}\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$

7. Se define la función trigonométrica $\operatorname{sen} z$ de variable compleja como:

$$\operatorname{sen} z = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}\right)$$

   Pruebe que $\operatorname{sen}(1-\mathrm{i}) = \dfrac{e-e^{-1}}{2\mathrm{i}}\cos 1 + \dfrac{e+e^{-1}}{2}\operatorname{sen} 1$