



POLITÉCNICA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio



HITO 1 Y 2

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS I

Autor:

Alejandro Fernández Ruiz

Índice

1. Introducción	2
2. Objetivos	2
3. Formulación del problema de Kepler	2
4. Esquemas numéricos implementados	3
5. Partes del proyecto	3
6. Análisis de resultados	5
6.1. Comparativa de los esquemas numéricos para N constante	5
6.1.1. Esquema numérico: Euler	5
6.1.2. Esquema numérico: Crank-Nicolson	6
6.1.3. Esquema numérico: Runge-Kutta de orden 4	7
6.1.4. Comparativa: Crank-Nicolson y Runge-Kutta de orden 4	9
7. Conclusión	9

1. Introducción

El objetivo de este informe es presentar una descripción del código implementado para la realización de los hitos 1 y 2 de la asignatura, así como exponer los resultados obtenidos de los mismos. Además, se comparan los resultados obtenidos con los diferentes esquemas numéricos con el objetivo de determinar cuál ofrece el mejor comportamiento para el problema planteado.

2. Objetivos

El objetivo del proyecto es implementar un código para calcular y representar distintas órbitas numéricamente. Para ello, se utilizan los siguientes esquemas numéricos:

- Euler explícito
- Crank-Nicolson
- Runge-Kutta de orden 4

Finalmente, se comparan los resultados obtenidos con los diversos esquemas numéricos.

3. Formulación del problema de Kepler

La ecuación diferencial que describe el movimiento del cuerpo que orbita respecto al cuerpo primario es:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (1)$$

Las condiciones iniciales elegidas para este problema son:

$$\begin{cases} \mathbf{r}(0) = (1, 0) \\ \dot{\mathbf{r}}(0) = (0, 1) \end{cases} \quad (2)$$

De manera que el vector de estado es:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{r}} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Debido a que toda ecuación diferencial de orden n puede escribirse como un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden, podemos escribir:

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \ddot{\mathbf{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \end{bmatrix} = F(\mathbf{U}, t) \quad (4)$$

El sistema es autónomo porque la función F no depende del tiempo en el caso concreto en cuestión. Sin embargo, el código implementado es genérico, y por tanto, válido para cuando el sistema de ecuaciones diferenciales no sea autónomo.

4. Esquemas numéricos implementados

Los esquemas numéricos implementados para el cálculo ¹ de U son:

- **Euler explícito**

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t F^n \quad (5)$$

- **Crank-Nicolson**

$$U^{n+1} = U^n + \frac{\Delta t}{2}(F^{n+1} + F^n) \quad (6)$$

donde se ha utilizado el método de Newton-Rhapson para la resolución del sistema no lineal obtenido.

- **Runge-Kutta de orden 4**

$$k_1 = F(U, t) \quad (7)$$

$$k_2 = F(U + \Delta t \cdot k_1/2, t + \Delta t/2) \quad (8)$$

$$k_3 = F(U + \Delta t \cdot k_2/2, t + \Delta t/2) \quad (9)$$

$$k_4 = F(U + \Delta t \cdot k_3, t + \Delta t) \quad (10)$$

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \quad (11)$$

5. Partes del proyecto

El proyecto consta de **un programa principal** y **tres módulos**:

- **Cauchy_Problem**

En este programa se ha implementado una función con el nombre **Cauchy_Problem**, que posee los siguientes argumentos:

- El dominio temporal, **time_domain**, como un vector con el número de componentes igual al número de pasos temporales.
 - Las componentes del vector del dominio temporal para cada paso, **t1** y **t2**.
 - Condición inicial del problema, **U0**.
 - Esquema temporal a utilizar, **temporal_scheme**.
- Tres módulos, tal que cada uno contiene las funciones necesarias para la resolución del problema.
 - **time_domain**
 - **equispaced_time_domain**
 - **temporal_scheme**
 - **Euler**

¹Tanto U como F poseen carácter vectorial en las siguientes expresiones.

- Crank_Nicolson
- RK4
- Kepler_Problem
 - F_Kepler

6. Análisis de resultados

En este apartado, se presentan y comparan los resultados obtenidos con los distintos esquemas numéricos.

6.1. Comparativa de los esquemas numéricos para N constante

6.1.1. Esquema numérico: Euler

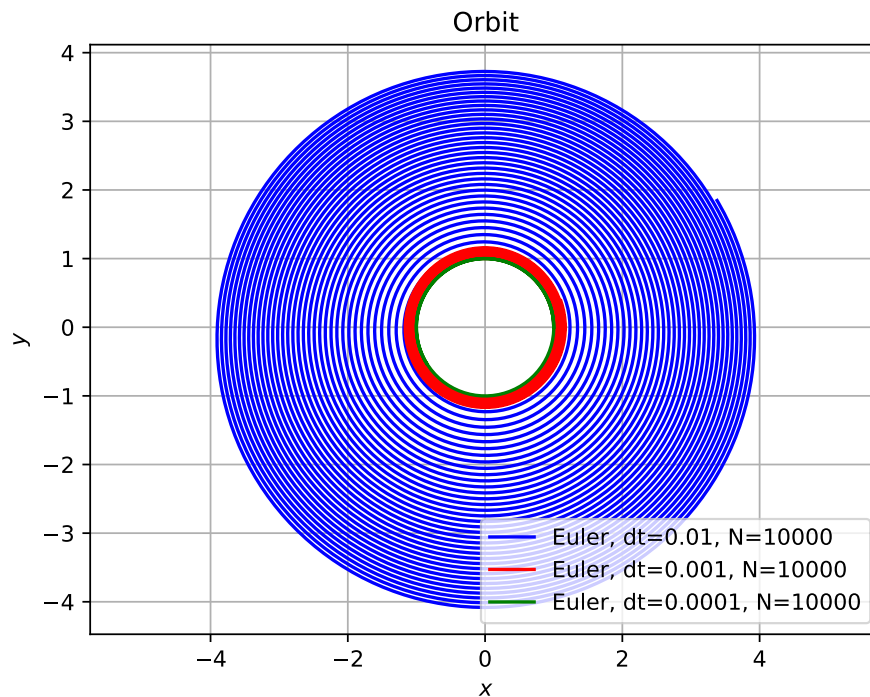


Figura 1: Esquema numérico Euler explícito para misma cantidad de pasos temporales y distinto Δt

Es posible observar que para pasos temporales más pequeños, la órbita queda representada de manera más exacta, siendo el comportamiento especialmente deficiente para pasos temporales elevados.

6.1.2. Esquema numérico: Crank-Nicolson

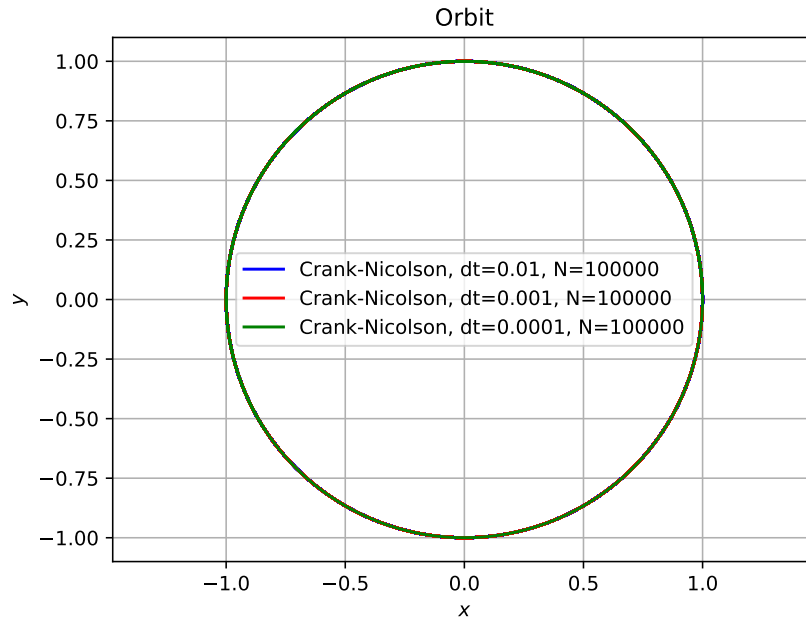


Figura 2: Esquema numérico Crank-Nicolson para misma cantidad de pasos temporales y distinto Δt

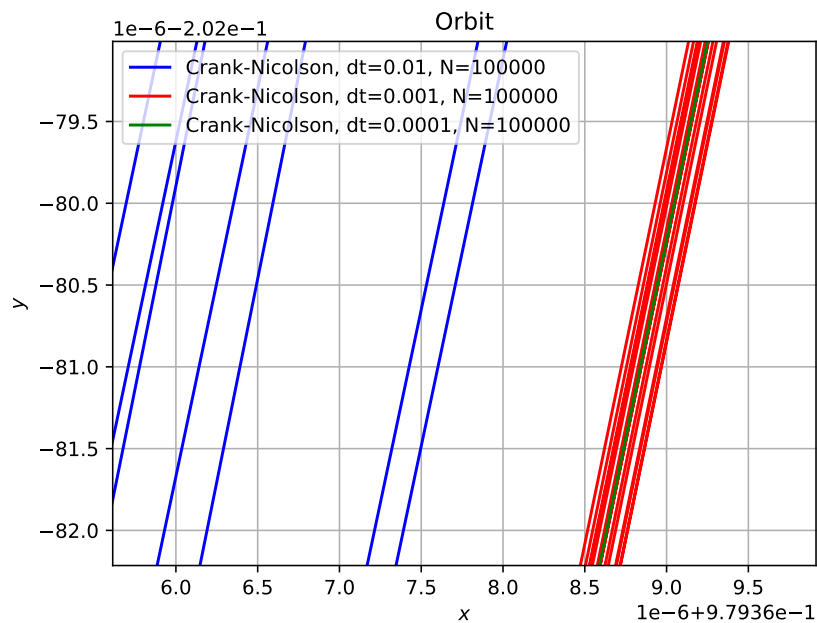


Figura 3: Esquema numérico Crank-Nicolson para misma cantidad de pasos temporales y distinto Δt . Ampliado.

De nuevo, a medida que el paso temporal se reduce, el cálculo de la órbita mejora drásticamente. Sin embargo, para pasos temporales elevados, el comportamiento no resulta tan deficiente como en el caso del esquema de Euler explícito.

No obstante, en clase se estudió que el esquema Crank-Nicolson debe generar órbitas cerradas, y no espirales, como el esquema de Euler explícito.

6.1.3. Esquema numérico: Runge-Kutta de orden 4

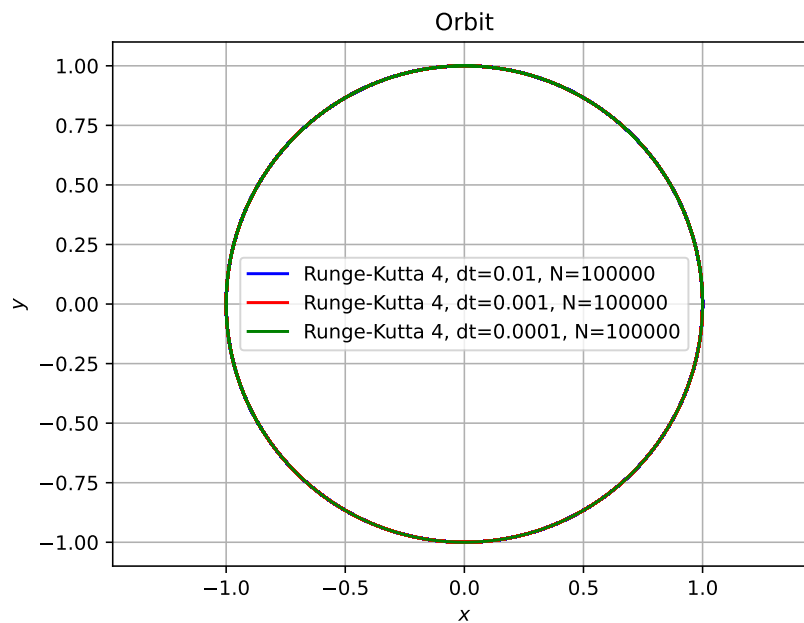


Figura 4: Esquema numérico Runge-Kutta de orden 4 para misma cantidad de pasos temporales y distinto Δt

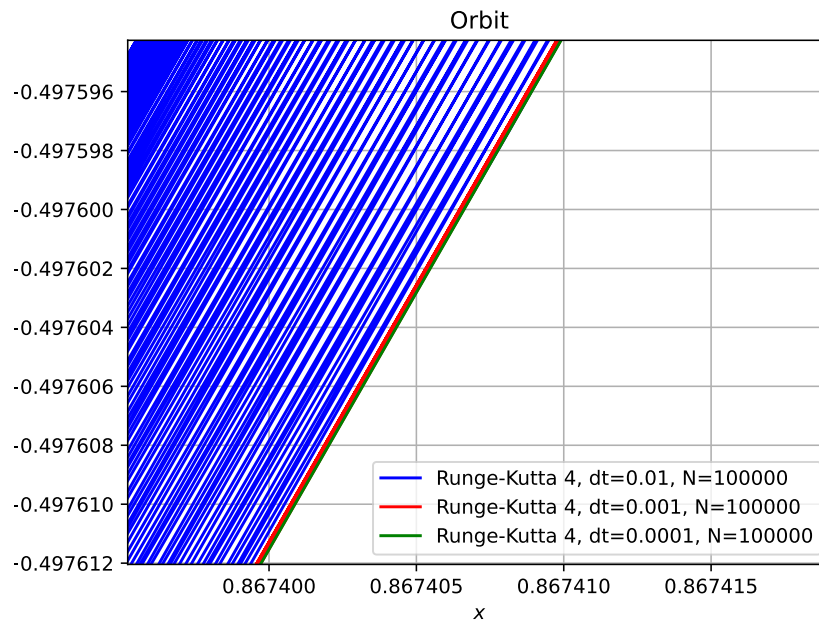


Figura 5: Esquema numérico Runge-Kutta de orden 4 para misma cantidad de pasos temporales y distinto Δt . Ampliado.

En el caso del esquema numérico del Runge-Kutta se vuelve a observar un comportamiento análogo al observado anteriormente.

6.1.4. Comparativa: Crank-Nicolson y Runge-Kutta de orden 4

Resulta interesante comparar los esquemas numéricos de Crank-Nicolson y Runge-Kutta para determinar cuál de los dos ofrece un mejor comportamiento.

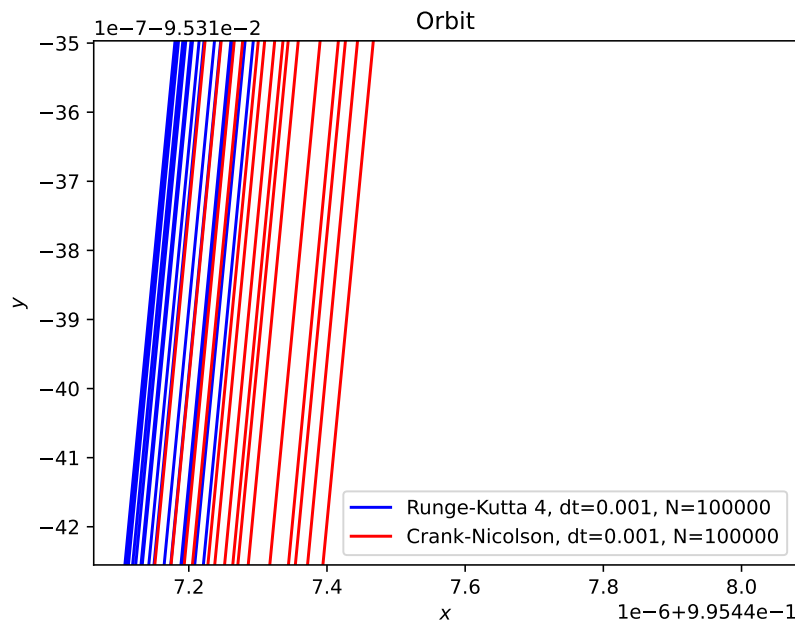


Figura 6: Comparativa entre Runge-Kutta de orden 4 y Crank-Nicolson para misma cantidad de pasos temporales y distinto Δt . Ampliado.

Se observa una mayor dispersión para el Crank-Nicolson, de manera que es posible afirmar que el esquema numérico del Runge-Kutta de orden 4 presenta una mayor exactitud en este caso.

7. Conclusión

Se puede concluir que, **para el problema presentado en este trabajo, el Runge-Kutta de orden 4 es el esquema numérico que presenta el mejor comportamiento.** Por el contrario, el Euler explícito es el que presenta el comportamiento más deficiente de los tres esquemas analizados.