

# TUTORIUM DER ELEKTRODYNAMIK <sup>1 2</sup>

## Alejandro Gallo

### INHALTSVERZEICHNIS

1. Zylindrischer Kondensator	2
1.1. Einleitung	2
1.2. Potential im Inneren einer einfachen zylindrischen Platte	2
1.3. Potential im Inneren eines einfachen zylindrischen Kondensators	3
1.4. Kapazität eines zylindrischen Kondensators	4
2. Addieren von Kapazitäten	6
2.1. Parallelschaltung	6
2.2. Reihenschaltung	6

---

<sup>1</sup>[alejandro.gallo@tuwien.ac.at](mailto:alejandro.gallo@tuwien.ac.at)

<sup>2</sup><https://raw.githubusercontent.com/alejandrogallo/tutorium-elektrodynamik-SS-2019/master/kondensator/main.pdf>

## 1. ZYLINDRISCHER KONDENSATOR

1.1. **Einleitung.** Hier werden wir einige typische Beispiele besprechen, die im Rahmen von der Kondensatorthematik auftauchen. Dafür werden wir den aus der Vorlesung bekannten Satz

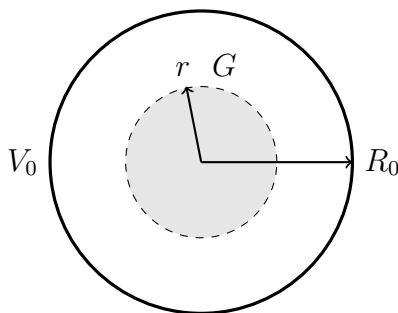
$$(1) \quad \nabla^2 V(\mathbf{r}) = \rho/\epsilon_0$$

brauchen.

In einem zylindrisch symmetrischen Problem, d.h., wo das Potential  $V$  nur von  $r$  abhängt, ( $V(r, \phi, z) = V(r)$ ) gilt

$$(2) \quad \nabla^2 V(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} V(r).$$

1.2. **Potential im Inneren einer einfachen zylindrischen Platte.** Wir betrachten einen Zylinder mit Radius  $R_0$  und einen Zylinder als Integrationsvolumen  $G$ .



Es wird nämlich eine Funktion  $V(r)$  gesucht, wo  $0 \leq r < R_0$ . Wir versuchen zuerst, Gleichung 1 direkt zu lösen. Im  $G$  gibt es keine Ladung, also  $\rho = 0$  und folglich

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} V(r) = 0$$

woraus folgt dass

$$r \frac{d}{dr} V(r) = A, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr} V(r) = \frac{A}{r}$$

wobei  $A$  eine Konstante ist. Wir können von einem beliebigen Ort  $r_0$  bis  $r$  integrieren, solange  $r_0$  innerhalb des Zylinders bleibt,

$$\int_{r_0}^r \frac{d}{dr'} V(r') dr' = V(r) - V(r_0) = \int_{r_0}^r \frac{A}{r'} dr' = A \ln \frac{r}{r_0}$$

woraus wir den allgemeinen Ausdruck für die Lösung bekommen,

$$(3) \quad V(r) = A \ln \frac{r}{r_0} + B.$$

Es ist bemerkenswert dass man zwei Bedingungen benötigt, um die Integrationskonstanten  $A$  und  $B$  zu bestimmen. Dies ist so da Gleichung 1 eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ist. Im allgemeinen

finden wir aber dass

$$V(r_0) = B.$$

In dem Sinne, wenn wir  $r_0 = R_0$  setzen können wir

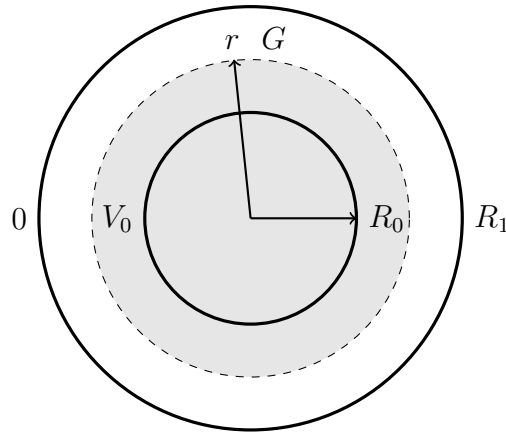
$$(4) \quad V(r) = A \ln \frac{r}{r_0} + V_0$$

schreiben. Wir haben aber nicht genügend Bedingungen um  $A$  zu bestimmen. Das ist, wir können nicht *Cauchy Randbedingungen* verwenden weil wir nur eine Information zur Verfügung haben, nämlich dass  $V(R_0) = V_0$ . Wir müssen dann erkunden wie die Ableitung der Funktion  $V$  (das heißt, das elektrische Feld) aussieht. Wenn dies uns gelingt dann wird es uns ermöglichen, Bedingungen für die erste Ableitung von  $V$  zu finden, dementsprechend arbeiten wir hier mit *Cauchy Randbedingungen*. Wir können das Volumen  $G$  dafür verwenden:

$$0 = \int_G \nabla \cdot \mathbf{E} \, d^3x = \int_{\partial G} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = ES$$

und deswegen haben wir im Inneren  $\mathbf{E} = 0$ ,  $V = V_0$ . Daraus folgt, dass  $A = 0$  und somit haben wir die fehlende Integrationskonstante  $A$  bestimmt, nämlich mittels *Cauchy Randbedingungen*.

### 1.3. Potential im Inneren eines einfachen zylindrischen Kondensators.



Hier die Lösung von vorhin gilt noch da im Abstand  $r$  das Problem noch zylindrisch symmetrisch bleibt. Deswegen wissen wir dass im Zwischenraum das Potential  $V$

$$(5) \quad V(r) = A \ln \frac{r}{R_1} + V(R_1)$$

ist. In diesem Fall können wir aber  $A$  bestimmen da *Dirichlet Randbedingungen* herrschen, d.h., wir haben zwei Punkte für die Randbedingungen in  $V(r)$  wo  $R_0 \leq r \leq R_1$ . Diese Randbedingungen lauten

$$\begin{cases} V(R_0) &= V_0 \\ V(R_1) &= 0 \end{cases}$$

wie aus dem Bild abzulesen ist. Die  $R_1$  Randbedingung ist schon von unserem Potential  $V(r)$  erfüllt, für die zweite müssen wir folgendes schreiben

$$V(R_0) = V_0 = A \ln \frac{R_0}{R_1} + 0, \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{V_0}{\ln \frac{R_1}{R_0}} = \frac{V_0}{\ln \frac{R_0}{R_1}}$$

und deswegen wenn  $R_0 \leq r \leq R_1$

$$V(r) = V_0 \frac{\ln \frac{r}{R_1}}{\ln \frac{R_0}{R_1}}$$

and

$$E(r) = -\frac{dV}{dr}(r) = \frac{V_0}{\ln \frac{R_1}{R_0}} \frac{1}{r}$$

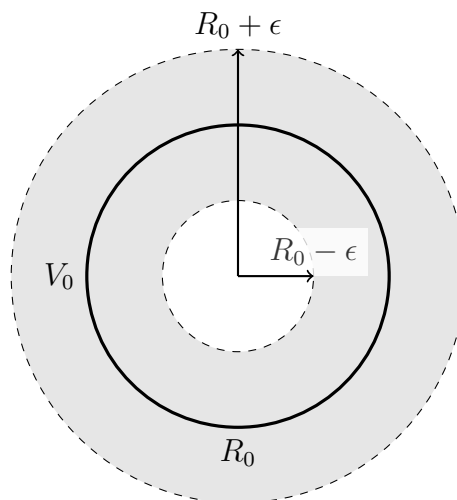
**1.4. Kapazität eines zylindrischen Kondensators.** Die Kapazität eines Kondensators ist durch den Ausdruck

$$C = \frac{Q}{V}$$

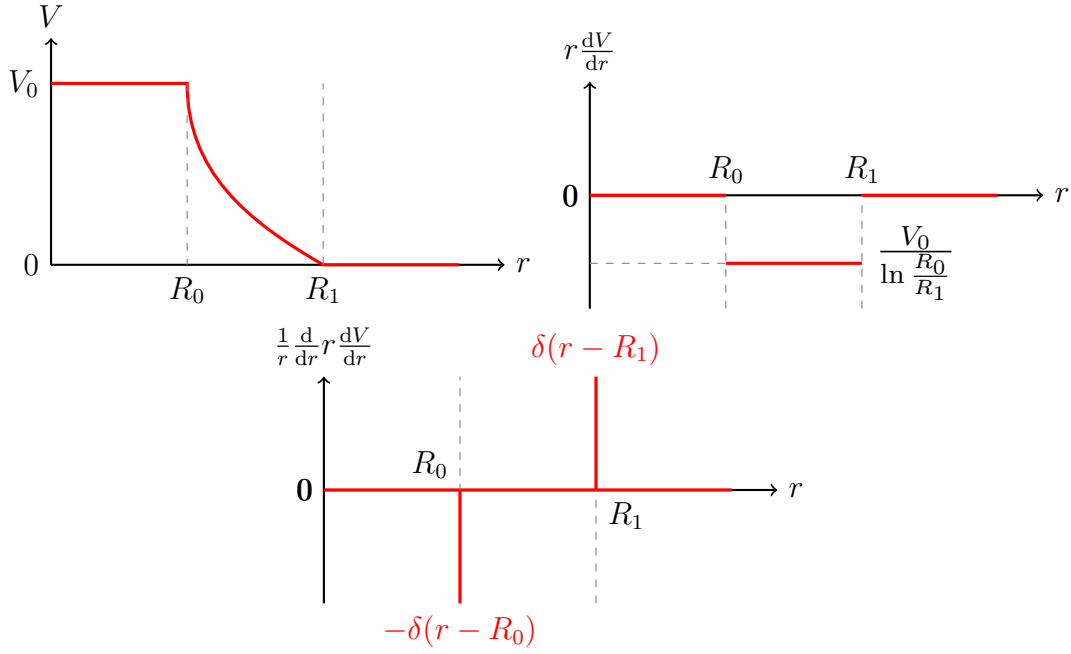
definiert, wobei  $Q$  der Betrag der Ladung im Kondensator ist. Wir können die Ladung mittels folgender Gleichung ausrechnen

$$Q = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}) \, d^3x.$$

Wir müssen das Volumen  $\mathcal{V}$  bestimmen, und man kann sich überzeugen, dass wir über dem grauen Bereich in der darunterliegenden Abbildung integrieren soll.



Dabei soll man bemerken welche Form das Potential  $V$  und die Ableitungen davon übernimmt. Hierunter sind die Hauptmerkmale skizziert



$$\begin{aligned}
Q &= \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}) \, d^3x = \epsilon_0 \int_{\mathcal{V}} \nabla^2 V(r) \, d^3x = \epsilon_0 \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} V(r) \, d^3x \\
&= \epsilon_0 \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} V(r) \, r dz d\phi dr \\
&= \epsilon_0 \int_{R_0-\varepsilon}^{R_0+\varepsilon} \int_0^{2\pi} \int_0^\ell \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} V(r) \, r dz d\phi dr \\
&= 2\pi\ell\epsilon_0 \int_{R_0-\varepsilon}^{R_0+\varepsilon} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} V(r) \, dr = -2\pi\ell\epsilon_0 \int_{R_0-\varepsilon}^{R_0+\varepsilon} \frac{d}{dr} r E(r) \, dr \\
&= -2\pi\ell\epsilon_0 \int_{R_0-\varepsilon}^{R_0+\varepsilon} \frac{d}{dr} r E(r) \, dr \\
&= -2\pi\ell\epsilon_0 \left[ r E(r) \right]_{R_0-\varepsilon}^{R_0+\varepsilon} \\
&= -2\pi\ell\epsilon_0 \frac{V_0}{\ln \frac{R_0}{R_1}}
\end{aligned}$$

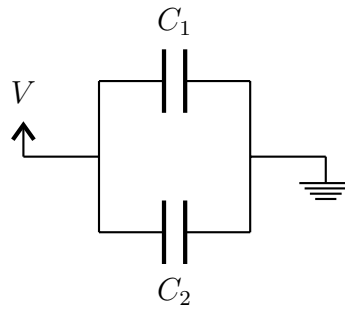
und deswegen wir bekommen

$$C = -\frac{2\pi\ell\epsilon_0}{\ln \frac{R_0}{R_1}} = \frac{2\pi\ell\epsilon_0}{\ln \frac{R_1}{R_0}}$$

wobei  $\ell$  ist die Länge des Zylinders.

## 2. ADDIEREN VON KAPAZITÄTEN

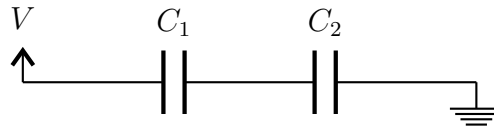
## 2.1. Parallelschaltung.



$$Q_T = Q_1 + Q_2$$

$$= C_1 V + C_2 V = (C_1 + C_2) V = C_T V$$

## 2.2. Reihenschaltung.



$$V = V_1 + V_2$$

$$= \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$