Tutorium der Elektrodynamik [1] [2]

Alejandro Gallo

Inhaltsverzeichnis

[1] alejandro.gallo@tuwien.ac.at

[2] https://raw.githubusercontent.com/alejandrogallo/tutorium-elektrodynamik-SS-2019/master/kondensator/main.pdf

1. Zylindrischer Kondensator

1.1. **Einleitung.** Hier werden wir einige typische Beispiele besprechen, die im Rahmen von der Kondensatorthematik auftauchen. Dafür werden wir den aus der Vorlesung bekannten Satz

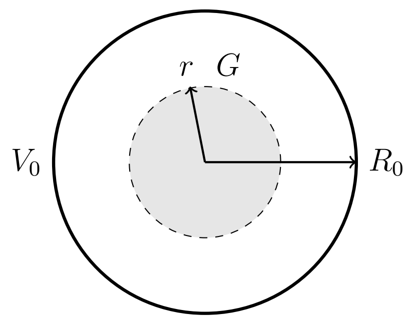
$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = \rho/\epsilon_0 \tag{1}$$

brauchen.

In einem zylindrisch symmetrischen Problem, d.h., wo das Potential V nur von r abhängt, ($V(r, \phi, z) = V(r)$) gilt

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} r \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} V(r). \tag{2}$$

1.2. **Potential im Inneren einer einfachen zylindrischen Platte.** Wir betrachten einen Zylinder mit Radius R_0 und einen Zylinder als Integrationsvolumen G.



Es wird nämlich eine Funktion $V(r)$ gesucht, wo $0 \leq r < R_0$. Wir versuchen zuerst, Gleichung 1 direkt zu lösen. Im G gibt es keine Ladung, also $\rho = 0$ und folglich

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} r \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} V(r) = 0$$

woraus folgt dass

$$r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} V(r) = A, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} V(r) = \frac{A}{r}$$

wobei A eine Konstante ist. Wir können von einem beliebigen Ort r_0 bis r integrieren, solange r_0 innerhalb des Zylinders bleibt,

$$\int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} V(r')\mathrm{d}r' = V(r) - V(r_0) = \int_{r_0}^{r} \frac{A}{r'}\mathrm{d}r' = A \ln \frac{r}{r_0}$$

woraus wir den allgemeinen Ausdruck für die Lösung bekommen,

$$V(r) = A \ln \frac{r}{r_0} + B. \tag{3}$$

Es ist bemerkenswert dass man zwei Bedingungen benötigt, um die Integrationskonstanten A und B zu bestimmen. Dies ist so da Gleichung 1 eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ist. Im allgemeinen finden wir aber dass

$$V(r_0) = B.$$

In dem Sinne, wenn wir $r_0 = R_0$ setzen können wir

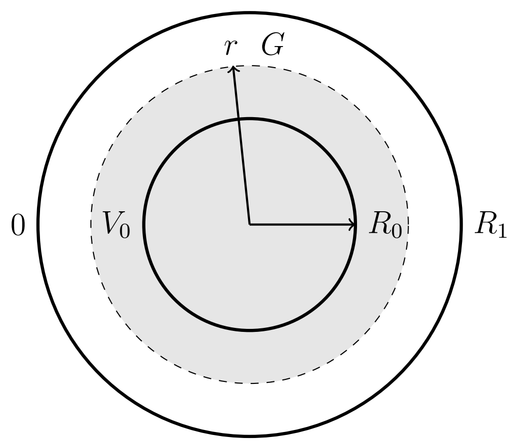
$$V(r) = A \ln \frac{r}{r_0} + V_0 \tag{4}$$

schreiben. Wir haben aber nicht genügende Bedingungen um A zu bestimmen. Das ist, wir können nicht *Cauchy Randbedingungen* verwenden weil wir nur eine Information zur Verfügung haben, nämlich dass $V(R_0) = V_0$. Wir müssen dann erkunden wie die Ableitung der Funktion V (das heißt, das elektrische Feld) aussieht. Wenn dies uns gelingt dann wird es uns ermöglichen, Bedingungen für die erste Ableitung von V zu finden, dementsprechend arbeiten wir hier mit *Cauchy Randbedingungen*. Wir können das Volumen G dafür verwenden:

$$0 = \int_G \nabla \cdot \mathbf{E}\, \mathrm{d}^3x = \int_{\partial G} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = ES$$

und deswegen haben wir im Inneren $\mathbf{E} = 0$, $V = V_0$. Daraus folgt, dass $A = 0$ und somit haben wir die fehlende Integrationskonstante A bestimmt, nämlich mittels *Cauchy Randbedingungen*.

1.3. **Potential im Inneren eines einfachen zylindrischen Kondensators.**



Hier die Lösung von vorhin gilt noch da im Abstand r das Problem noch zylindrisch symmetrisch bleibt. Deswegen wissen wir dass im Zwischenraum das Potential V

$$V(r) = A \ln \frac{r}{R_1} + V(R_1) \tag{5}$$

ist. In diesem Fall können wir aber A bestimmen da *Dirichlet Randbedingungen* herrschen, d.h., wir haben zwei Punkte für die Randbedingungen in $V(r)$ wo $R_0 \leq r \leq R_1$. Diese Randbedingungen lauten

$$\begin{cases} V(R_0) &= V_0 \\ V(R_1) &= 0 \end{cases}$$

wie aus dem Bild abzulesen ist. Die R_1 Randbedingung ist schon von unserem Potential $V(r)$ erfüllt, für die zweite müssen wir folgendes schreiben

$$V(R_0) = V_0 = A \ln \frac{R_0}{R_1} + 0, \qquad \Rightarrow \qquad A = -\frac{V_0}{\ln \frac{R_1}{R_0}} = \frac{V_0}{\ln \frac{R_0}{R_1}}$$

und deswegen wenn $R_0 \leq r \leq R_1$

$$V(r) = V_0 \frac{\ln \frac{r}{R_1}}{\ln \frac{R_0}{R_1}}$$

and

$$E(r) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}(r) = \frac{V_0}{\ln \frac{R_1}{R_0}} \frac{1}{r}$$

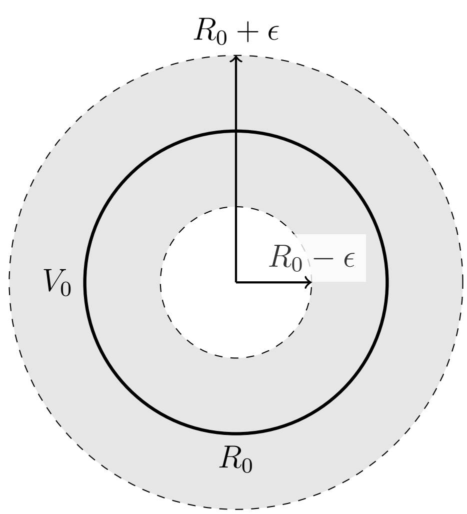
1.4. **Kapazität eines zylindrischen Kondensators.** Die Kapazität eines Kondensators ist durch den Ausdruck

$$C = \frac{Q}{V}$$

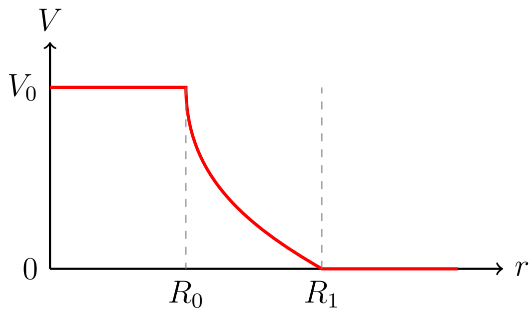
definiert, wobei Q der Betrag der Ladung im Kondensator ist. Wir können die Ladung mittels folgender Gleichung ausrechnen

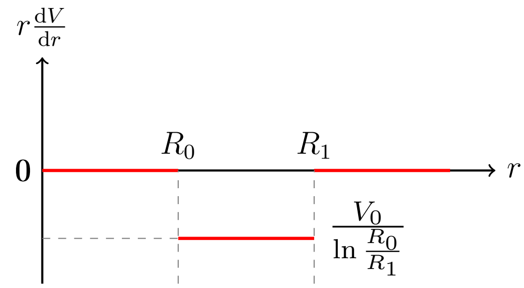
$$Q = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}) \ \mathrm{d}^3 x.$$

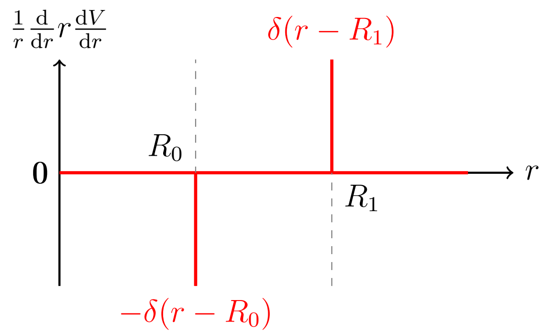
Wir müssen das Volumen $\mathcal{V}$ bestimmen, und man kann sich überzeugen, dass wir über dem grauen Bereich in der darunterliegenden Abbildung integrieren soll.



Dabei soll man bemerken welche Form das Potential V und die Ableitungen davon übernimmt. Hierunter sind die Hauptmerkmale skizziert







$$
\begin{aligned}
Q = &\int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r})\ \mathrm{d}^3x = \epsilon_0 \int_{\mathcal{V}} \nabla^2 V(r)\ \mathrm{d}^3x = \epsilon_0 \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} r \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} V(r)\ \mathrm{d}^3x \\
=&\epsilon_0 \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} r \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} V(r)\ r\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r \\
=&\epsilon_0 \int_{R_0-\varepsilon}^{R_0+\varepsilon}\int_0^{2\pi}\int_0^{\ell} \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} r \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} V(r)\ r\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r \\
=&2\pi\ell\epsilon_0 \int_{R_0-\varepsilon}^{R_0+\varepsilon} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} r \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} V(r)\ \mathrm{d}r = -2\pi\ell\epsilon_0 \int_{R_0-\varepsilon}^{R_0+\varepsilon} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} rE(r)\ \mathrm{d}r \\
=&-2\pi\ell\epsilon_0 \int_{R_0-\varepsilon}^{R_0+\varepsilon} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} rE(r)\ \mathrm{d}r \\
=&-2\pi\ell\epsilon_0 \left| rE(r) \right|_{R_0-\varepsilon}^{R_0+\varepsilon} \\
=&-2\pi\ell\epsilon_0 \frac{V_0}{\ln\frac{R_0}{R_1}}
\end{aligned}
$$

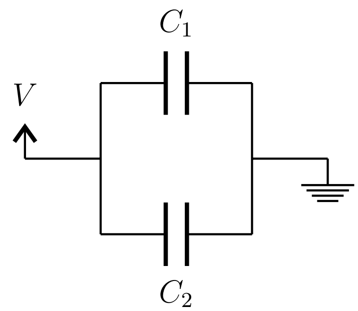
und deswegen wir bekommen

$$
C = -\frac{2\pi\ell\epsilon_0}{\ln\frac{R_0}{R_1}} = \frac{2\pi\ell\epsilon_0}{\ln\frac{R_1}{R_0}}
$$

wobei ℓ ist die Länge des Zylinders.

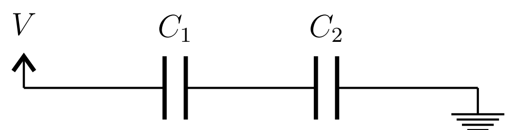
2. Addieren von Kapazitäten

2.1. Parallelschaltung.



$$Q_{\mathrm{T}} = Q_1 + Q_2$$
$$= C_1 V + C_2 V = (C_1 + C_2) V = C_{\mathrm{T}} V$$

2.2. Reihenschaltung.



$$V = V_1 + V_2$$
$$= \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$