Schwarzschild Geometry: Geodesics for massless particles

Juan E. Bedoya

Universidad del Valle
Departamento de física

October 11, 2021

Table of contents

Métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 sen^2(\theta) d\phi^2$$

Siendo $\mu = \frac{GM}{c^2}$

$$\mathbb{G} = \begin{bmatrix} c^2\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 sen^2(\theta) \end{bmatrix}$$

Lagrangiano

Sabemos que en relatividad el lagrangiano es de la forma

$$L = g_{ab}\frac{dx^a}{d\sigma}\frac{dx^b}{d\sigma}$$

Lo que nos lleva a que:

$$L = c^2\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\theta}^2 - r^2 sen^2(\theta)\dot{\phi}^2$$

Siendo σ un parámetro afín y además $\dot{x^\mu} = \frac{dx^\mu}{d\sigma}$. luego la ecuación de Euler-Lagrange para dicho parámetro es de la forma:

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right) - \frac{\partial L}{\partial X^\mu} = 0$$

Ecuaciones de movimiento

$$\left(1-\frac{2\mu}{r}\right)\dot{t} = k \quad (1)$$

$$\frac{\ddot{r}}{\left(1-\frac{2\mu}{r}\right)} - \frac{\mu\dot{r}^2}{\left(1-\frac{2\mu}{r}\right)^2 r^2} + \frac{c^2\mu}{r^2}\dot{t}^2 - r(\dot{\theta}^2 + sen^2(\theta)\dot{\phi}^2) = 0 \quad (2)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - sen(\theta)cos(\theta)\dot{\phi}^2 = 0 \quad (3)$$

$$r^2 sen^2(\theta)\dot{\phi} = h \quad (4)$$

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$. la ecuación de θ se reduce a una geodésica usual, lo que nos permite aprovecharnos de la "simetría esférica" de la métrica.

interpretaciones de la constantes h y k

Por analogía a las ecuaciones de Lagrange usuales se tiene que el 4-momento es de la forma

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}$$

Es evidente por L que tanto p_0 como p_3 se conservan.
Por otro lado, si se elige un parámetro afín tal que $p^\mu = \dot{x}^\mu$ y además se usan las ecuaciones halladas con el lagrangiano se llega a que:

$$\begin{aligned} p_0 &= \dot{x}_0 = g_{00}\dot{x}^0 = c^2\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)\dot{t} = \overbrace{c^2 k}^{Ecua.1} \\ p_3 &= \dot{x}_3 = g_{33}\dot{x}^3 = -r^2\dot{\phi} = \underbrace{-h}_{ecua.4} \end{aligned}$$

Valores de k y la energía

Finalmente, se conoce la energía de una partícula con un 4-momento $\mathbf{p}$ que es vita por un observador con una 4-velocidad $\mathbf{u}$ es de la forma

$$E = \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} = p_\mu u^\mu$$

Si $\mathbf{u} = (1, 0, 0, 0)$, entonces

$$\begin{aligned} E &= p_0 \\ E &= c^2 k \\ \frac{E}{c^2} &= k \end{aligned}$$

Ecuaciones básicas para fotones

Volviendo a las ecuaciones de movimiento previas, y realizando las consideraciones mencionadas se llega a que:

$$\left(1-\frac{2\mu}{r}\right)\dot{t} = k \tag{5}$$

$$\frac{\ddot{r}}{\left(1-\frac{2\mu}{r}\right)} - \frac{\mu\dot{r}^2}{\left(1-\frac{2\mu}{r}\right)^2 r^2} + \frac{c^2\mu}{r^2}\dot{t}^2 - r\dot{\phi}^2 = 0 \tag{6}$$

$$r^2\dot{\phi} = h \tag{7}$$

Pero la ecuación 6, se puede reemplazar por su primera integral que es de la forma

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = 0 \tag{8}$$

Ecuaciones finales para fotones

Volviendo a las ecuaciones de movimiento previas, y realizando las consideraciones mencionadas se llega a que:

$$\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)\dot{t} = k \tag{9}$$

$$c^2\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2 = 0 \tag{10}$$

$$r^2\dot{\phi} = h \tag{11}$$

Ecuación radial

si se unifican todas las ecuaciones de movimiento en la ecuación radial se tiene que:

$$
\begin{aligned}
c^2\left(1-\frac{2\mu}{r}\right)\dot{t}^2-\left(1-\frac{2\mu}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2-r^2\dot{\phi}^2 &= 0\\
c^2\overbrace{\left(1-\frac{2\mu}{r}\right)^2\dot{t}^2}^{k^2}-\dot{r}^2-\overbrace{r^2\dot{\phi}^2}^{h^2/r^2}\left(1-\frac{2\mu}{r}\right) &= 0\\
\dot{r}^2+\frac{h^2}{r^2}\left(1-\frac{2\mu}{r}\right) &= c^2k^2
\end{aligned}
$$

Luego, se tiene que

$$\frac{dr}{d\sigma} = \frac{dr}{d\phi}\overbrace{\frac{d\phi}{d\sigma}}^{\dot{\phi}=h/r^2} = \frac{dr}{d\phi}\frac{h}{r^2}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\left(\frac{dr}{d\phi}\frac{h}{r^2}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2}\left(1-\frac{2\mu}{r}\right) &= c^2k^2\\ \left(\frac{dr}{d\phi}\frac{1}{r^2}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(1-\frac{2\mu}{r}\right) &= \frac{c^2k^2}{h^2}\end{aligned}$$

Por otro lado, se define $u = 1/r$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\phi} &= -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi} \\ -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\phi} &= \frac{dr}{d\phi} \end{aligned}$$

Volviendo a la ecuación radial y aplicando el cambio de variable u se llega a que

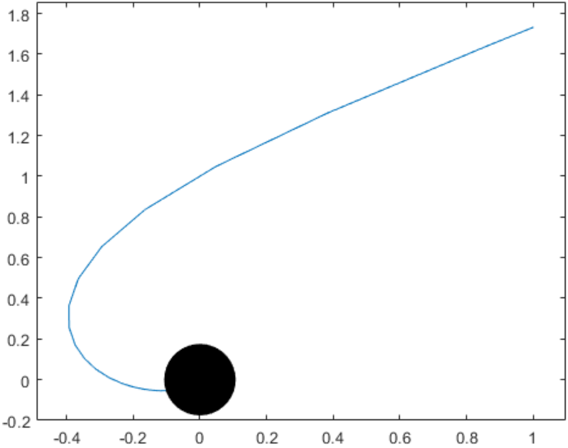
$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\phi}\frac{1}{r^2}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) &= \frac{c^2k^2}{h^2} \\ \left(-\frac{u}{d\phi}\frac{u^2}{u^2}\right)^2 + u^2\left(1 - 2u\mu\right) &= \frac{c^2k^2}{h^2} \\ \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 - 2u^3\mu &= \frac{c^2k^2}{h^2} \end{aligned}$$

Ecuación radial

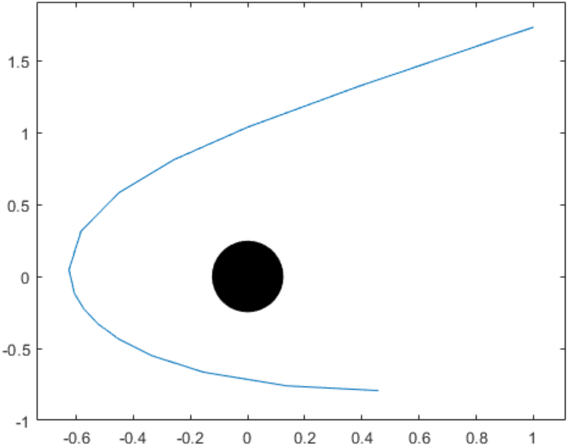
Finalmente, la ecuación radial queda de la forma

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 - 2u^3\mu &= \frac{c^2k^2}{h^2} \\
2\frac{du}{d\phi}\frac{d^2u}{d\phi^2} + 2u\frac{du}{d\phi} - 6u^2\frac{du}{d\phi}\mu &= 0 \\
\frac{d^2u}{d\phi^2} + u - 3u^2\mu &= 0 \\
\frac{d^2u}{d\phi^2} + u - \frac{3GM}{c^2}u^2 &= 0
\end{aligned}
$$

Soluciones a la ecuación radial



Soluciones a la ecuación radial



Movimiento radial ($\dot{\phi} = 0$)

Si volvemos a las ecuaciones finales de movimiento y vemos la ecuación radial para $\dot{\phi} = 0$ se llega a que:

$$\begin{aligned} c^2\left(1-\frac{2\mu}{r}\right)\dot{t}^2-\left(1-\frac{2\mu}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 &= 0 \\ \pm c\left(1-\frac{2\mu}{r}\right) &= \frac{dr}{dt} \end{aligned}$$

Cuya solución es:

$$ct = \pm r \pm Ln\left|\frac{r}{2\mu}-1\right| + const$$

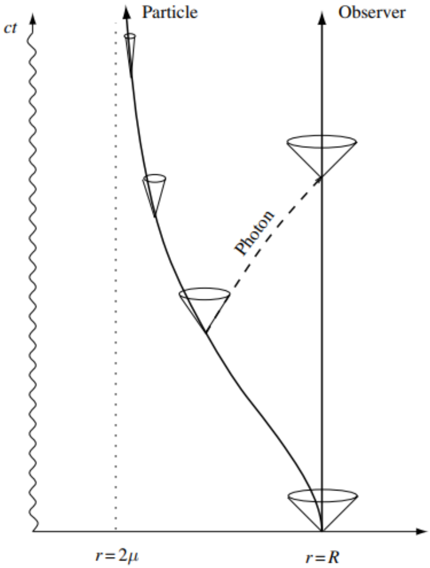
siendo $+$ para los fotones saliendo y - para los fotones entrando

Solución para movimiento radial

$$ct = \pm r \pm Ln\left|\frac{r}{2\mu} - 1\right|$$

casos limite

- Si $t = -t \Rightarrow$ Las trayectorias salientes se convierten en entrates y viceversa.
- Si $r \to \infty \Rightarrow$ El termino de r va a dominar sobre el del logaritmo llegando a que $ct = r$ los que no lleva a la relatividad especial.
- Si $r \to 2\mu \Rightarrow$ el logaritmo se va a infinito, luego $ct \to \pm\infty$, mientras mas nos acerquemos a 2μ el cono de luz es mas vertical


ct
Particle
Observer
Photon
r=2μ
r=R

Movimiento Circular ($\dot{r} = 0$)

Si imponemos la condición $\dot{r} = 0$ en la ecuación radial se obtiene que

$$R = 3\mu = \frac{3GM}{c^2} \approx 4.5Km$$

este fenomeno es inestable (luego veremos porque) y además el radio es muy pequeño.

Estabilidad de las orbitas

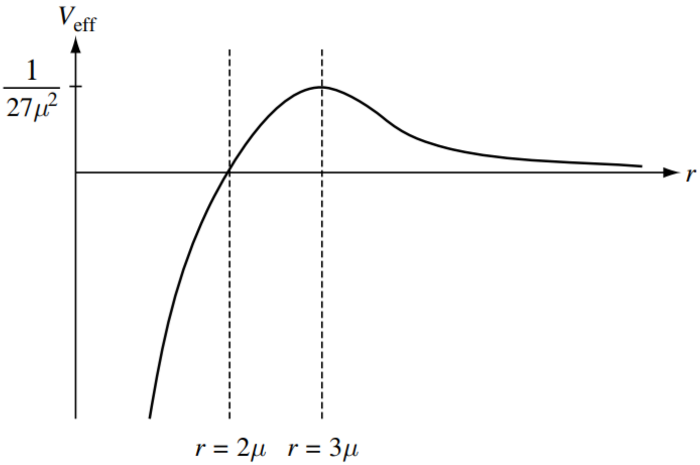
Si se vuleve a la ecuación radial antes del cambio a u se obtiene que

$$\frac{1}{h^2}\dot{r}^2 + \overbrace{\frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)}^{V_{eff}} \quad = \quad \overbrace{c^2k^2/h^2}^{1/b^2}$$

si se renormaliza el parametro afín tal que $\sigma = h\sigma$ se llega a que

$$\dot{r}^2 + V_{eff} \quad = \quad \frac{1}{b^2}$$

Inestabilidad de las orbitas y el potencial



Definición del parametro b

Usando la ecuación radial antes del cambio a u se llega a que

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{b^2} - V_{eff}\right]^{-1/2}$$

si $r \to \infty$

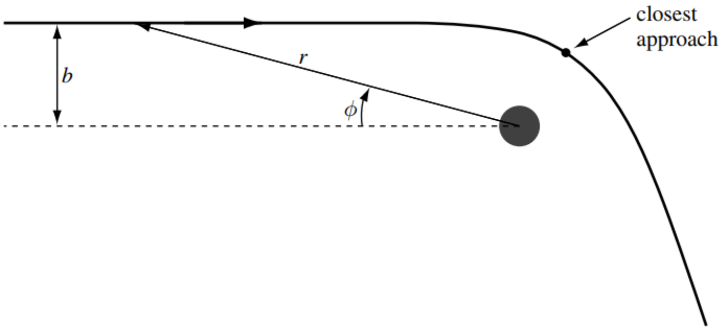
$$\frac{d\phi}{dr} = \pm\frac{1}{r^2}b$$

Resolviendola queda de la forma

$$\phi = \mp\frac{1}{r}b$$

Finalmente, si $\phi \to 0$

$$\begin{aligned} sen(\phi) &= \mp \frac{1}{r} b \\ rsen(\phi) = y &= \mp b \end{aligned}$$

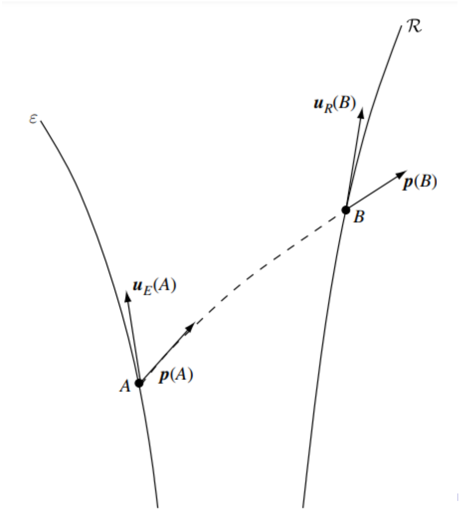


Tipo de movimientos dependientes de b

$$\dot{r}^2 + V_{eff} = \frac{1}{b^2}$$

- Si $\frac{1}{b^2} < \frac{1}{27\mu^2} \Rightarrow$ Son las particulas que solo se acercan pero escapan del objeto.
- Si $\frac{1}{b^2} > \frac{1}{27\mu^2} \Rightarrow$ Las particulas que caen dentro del objeto.

Corrimiento al rojo



La energia que ve cada uno del fotón se abe que es de la forma

$$\begin{aligned} E(A) &= u_\mu(A)p_\mu(A) \\ E(B) &= u_\mu(A)p_\mu(B) \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{E(A)}{E(B)} = \frac{u_\mu(A)p_\mu(A)}{u_\mu(A)p_\mu(B)}$$

Como son fotones $E = h\nu$

$$\frac{\nu_A}{\nu_B} = \frac{u_\mu(A)p_\mu(A)}{u_\mu(A)p_\mu(B)}$$

Si suponemos observadores quietos conrrespecto al tiempo propio se tiene que

$$\begin{aligned} c^2 &= g_{\mu nu} u^\mu u^\nu \\ \frac{c}{\sqrt{g_{00}}} &= u^0 \end{aligned}$$

llegando a que

$$\frac{\nu_A}{\nu_B} = \frac{p_\mu(A)}{p_\mu(B)}\sqrt{\frac{g_{00}(B)}{g_{00}(A)}}$$

Finalmente usando la primera integral mecionanda al inicio y la ecuación del transporte paralelo se demuestras que $p = cont$, lo que nos lleva que

$$\frac{\nu_A}{\nu_B} = \sqrt{\frac{g_{00}(B)}{g_{00}(A)}}$$