Universidad de Sonora

División de Ciencias Exactas y Naturales

Física Computacional I

Práctica #9: Aproximación al cálculo del periodo del péndulo

Integrante:
Alejandro Guirado García

2 de mayo de 2016

1. Objetivos

- Elaborar una imagen comparando el periodo real con el periodo aproximado del pénudulo.
- Demostrar por medio de series de Mclaurin que el periodo se puede escribir en terminos de θ_0.

2. Descripción de la actividad

Ésta práctica se basa en aplicar los conocimientos desarrollados en prácticas pasadas, ya que se nos pide utilizar Maxima para desarrollar la ecuación elíptica sobre el periodo del péndulo.

$$\int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin(u)^2}}du$$

Se nos pide además demostrar que el periodo exacto del péndulo para cualquier ángulo se puede escribir de la siguiente manera:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1+\frac{1}{16}\theta_0^2+\frac{11}{3072}\theta_0^4+\frac{173}{737280}\theta_0^6+\frac{22931}{1321205760}\theta_0^8+\frac{1319183}{951268147200}\theta_0^10+...)$$

.
A continuación se presentan los resultados obtenidos junto con el código utilizado.

3. Gráfica de los errores relativos

Para obtener esta gráfica, se utilizó el siguiente código:

```
#-*- coding: utf-8 -*-
from scipy.integrate import quad
from pylab import *
import  math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


#gravedad
```

```
g=9.8
#longitud de la cuerda
l=5

#Periodo base
T0=2*np.pi*np.sqrt(l/g)

n=1000
e=0.001
#Rango de theta0
theta0=np.linspace(e,(np.pi)+e,n)


#Definiendo arreglos para resultados arrojados
S=[0 for i in range(n)]
TT=[0 for i in range(n)]
R=[0 for i in range(n)]
T=[0 for i in range(n)]
real0=[0 for i in range(n)]
real2=[0 for i in range(n)]
real4=[0 for i in range(n)]
real6=[0 for i in range(n)]
real8=[0 for i in range(n)]




#Comenzando un loop para poder calcular todos los resultados
#posibles contemplando un angulo inicial variante
for i in range(M0):
    for j in range(0,n):
        F1=float(math.factorial(2*i))
        F2=float(((2**i)*(math.factorial(i)))**2)

        S[j]=np.sin(theta0[j]/2)**(2*i)
        TT[j]=((F1/F2)**2)*(S[j])
        R[j]=TT[j]+R[j]
        T[j]=R[j]*T0
        real0[j]=(T[j]/T0)
```

```
#-------------------------------------------
M2=2
for i in range(M2):
    for j in range(0,n):
        F1=float(math.factorial(2*i))
        F2=float(((2**i)*(math.factorial(i)))**2)

        S[j]=np.sin(theta0[j]/2)**(2*i)
        TT[j]=((F1/F2)**2)*(S[j])
        R[j]=TT[j]+R[j]
        T[j]=R[j]*T0
        real2[j]=(T[j]/T0)-1
#-------------------------------------------
M4=4
for i in range(M4):
    for j in range(0,n):
        F1=float(math.factorial(2*i))
        F2=float(((2**i)*(math.factorial(i)))**2)

        S[j]=np.sin(theta0[j]/2)**(2*i)
        TT[j]=((F1/F2)**2)*(S[j])
        R[j]=TT[j]+R[j]
        T[j]=R[j]*T0
        real4[j]=(T[j]/T0)-2
#-------------------------------------------
M6=6
for i in range(M6):
    for j in range(0,n):
        F1=float(math.factorial(2*i))
        F2=float(((2**i)*(math.factorial(i)))**2)

        S[j]=np.sin(theta0[j]/2)**(2*i)
        TT[j]=((F1/F2)**2)*(S[j])
        R[j]=TT[j]+R[j]
        T[j]=R[j]*T0
        real6[j]=(T[j]/T0)-3
#-------------------------------------------
M8=8
for i in range(M8):
    for j in range(0,n):
```

```
        F1=float(math.factorial(2*i))
        F2=float(((2**i)*(math.factorial(i)))**2)

        S[j]=np.sin(theta0[j]/2)**(2*i)
        TT[j]=((F1/F2)**2)*(S[j])
        R[j]=TT[j]+R[j]
        T[j]=R[j]*T0
        real8[j]=(T[j]/T0)-4

#Gráfica
plt.plot(theta0, real0, 'b',linewidth=2, label="T0")
plt.plot(theta0, real2, 'g',linewidth=2, label="T2")
plt.plot(theta0, real4, 'r',linewidth=2, label="T4")
plt.plot(theta0, real6, 'm',linewidth=2, label="T6")
plt.plot(theta0, real8, 'c',linewidth=2, label="T8")
plt.title('Error utilizando series de potencia')
plt.grid()
plt.xlabel('Angulo')
plt.xlim(0,2)
plt.ylim(0,1)
plt.ylabel('Error')
plt.legend(loc='best')
```

Al ejecutar dicho código obtuvimos la siguiente gráfica:

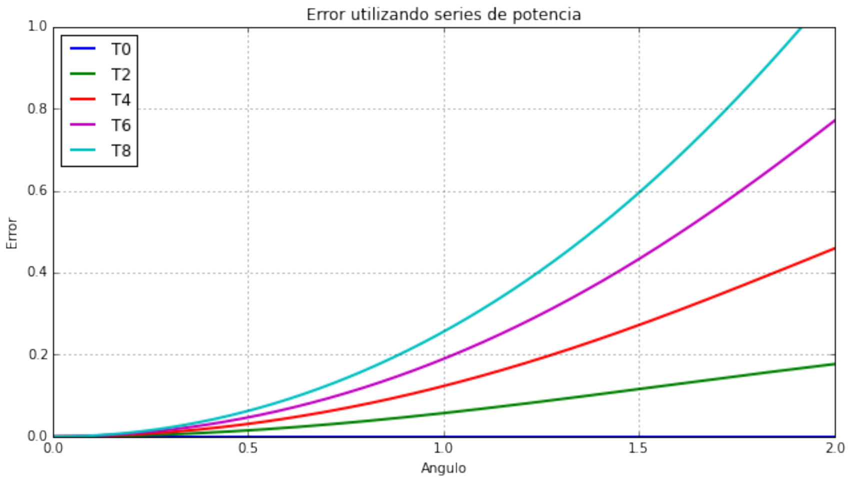

Figura 1: Gráfica sobre errores relativos del periodo de un péndulo simple, utilizando series de potencias.

4. Demostración de la expresión del periodo

Utilizamos Maxima para reducir las expresiones y facilitar los desarrollos, además obtener soluciones con mayor grado de exactitud.

1. Comenzamos con la formula del periodo como integral elíptica:

```
L1(k) := 1/sqrt(1-(k*sin(u))**2);
```

$$\mathrm{L1}\left(k\right) := \frac{1}{\sqrt{1-\left(k\sin\left(u\right)\right)^2}}$$

2. Realizamos una expansión de Taylor en la integral elíptica.

```
taylor(1/sqrt(1-k^2*sin(u)^2),u,0,8);
```

$$(\%o2)/T/1+\frac{k^2\,u^2}{2}+\frac{\left(9\,k^4-4\,k^2\right)\,u^4}{24}+\frac{\left(225\,k^6-180\,k^4+16\,k^2\right)\,u^6}{720}+\frac{\left(11025\,k^8-12600\,k^6+3024\,k^4-64\,k^2\right)\,u^8}{40320}+...$$

3. Seguimos desarrollando la expresión a partir de los siguientes pasos que se incluyen:

```
define(L2(k), %);
```

$$(\%o3)/T/\mathrm{L2}\left(k\right) := 1+\frac{k^2\,u^2}{2}+\frac{\left(9\,k^4-4\,k^2\right)\,u^4}{24}+\frac{\left(225\,k^6-180\,k^4+16\,k^2\right)\,u^6}{720}+\frac{\left(11025\,k^8-12600\,k^6+3024\,k^4-64\,k^2\right)\,u^8}{40320}+...$$

4. Integral de L2(k) de cero a 90 grados

```
expand(integrate(K2(k),u,0,%pi/2));
```

$$(\%o14)\frac{\pi\,\mathrm{K2}\left(k\right)}{2}$$

5. /* Sustituimos en la integral anterior el seno de theta */

   subst(x(%theta/2), k, %);

$$(\%o15)\frac{\pi\,\mathrm{K2}\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{2}$$

6. Factorizamos pi/2

   % *2/%pi;

$$(\%o16)\mathrm{K2}\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

7. Definimos la funcion

   define(T(%theta),(2*%pi)*sqrt(l/g)*(F(%theta)));

$$(\%o27)\mathrm{T}\left(\theta\right):=2\,\pi\,\mathrm{K2}\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\,\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Ahora si desarrollamos dicha expresión en series de Mclaurin. Obtendriamos

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1+\frac{1}{16}\theta_0^2+\frac{11}{3072}\theta_0^4+\frac{173}{737280}\theta_0^6+\frac{22931}{1321205760}\theta_0^8+\frac{1319183}{951268147200}\theta_0^10+...)$$

.

Referencias

[1] Wikipedia, *Pendulum.* Recuperado en abril de 2016 de https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_(mathematics)

[2] Lizárraga, C. *Actividad 9 (2016-1).* Recuperado en abril de 2016 de http://computacional1.pbworks.com/w/page/106821012/Actividad%209%20(2016-1)