Universidad de Sonora

División de Ciencias Exactas y Naturales

Física Computacional I

Práctica #6: Periodo del péndulo.

Integrante:
Alejandro Guirado García

18 de marzo de 2016

1. Descripción de la práctica

El péndulo simple es un sistema idealizado constituido por una partícula de masa m que está suspendida de un punto fijo o mediante un hilo inextensible y sin peso. Naturalmente es imposible la realización práctica de un péndulo simple, pero si es accesible a la teoría. Como anteoriormente se ha ido resolviendo ecuaciones características del movimiento del péndulo. Ahora resolveremos la ecuación del péndulo para cualquier ángulo.

$$\frac{\partial^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \tag{1}$$

Donde g es la aceleración debido a la gravedad, l es la longitud del pendulo y θ es el desplazamiento angular.

2. Aproximación con ángulo pequeño

La ecuación diferencial dada anteriormente no es fácil de resolver, además no existe solución que spueda ser escrita en términos de las funciones elementales. Sin embargo, añadiendo una restricción al tamaño de amplitud en la oscilación, nos brinda una forma donde la solución puede ser facilmente obtenida. Se asume que el angulo es mucho menor a 1. Esto quiere decir que: $\theta \ll 1$.
Después sustituyendo $\sin\theta$ en Ec.1 por θ usando un aproximación debido a un ángulo pequeño en el desplazamiento, es decir que: $\sin\theta \approx \sin\theta$. Tenemos la ecuación para el oscilador armónico.

$$\frac{\partial^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{2}$$

El error debido a la aproximación es de orden θ^3 (obtenido por la seria de Mclaurin para $\sin\theta$). Dadas las condiciones iniciales $\theta(0) = \theta_0$ y $\frac{d\theta}{dt}(0) = 0$. Por lo tanto, la solución se convierte en:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\right) \tag{3}$$

Cuando $\theta_0 \ll 1$.

El movimiento es considerado movimiento armónicop simple donde θ_0 es la semi amplitud de oscilacion (esto es, el máximo ángulo entre la cuerda del péndulo y la vertical). El periodo del movimiento, es el tiempo que tarda en una oscilacion completa y esta dada por:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{4}$$

Cuando $\theta_0 \ll 1$.

Podemos calcular el período exacto invirtiendo la ecuación de velocidad angular:

2.1. Amplitudes arbitrarias.

Tal como hemos visto en actividades anteriores la complejidad del cálculo del periodo para este tipo de péndulos es tal que resulta necesaria la utilización de una herramienta computacional para realizar una serie de integrales e invirtiendo la ecuación, obtenida a partir de la energía, para la velocidad angular:

$$\frac{dt}{d\theta} = \sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

y después integrando sobre un ciclo completo

$$T = t(\theta_0 \to 0 \to -\theta_0 \to 0 \to \theta_0)$$

o dos veces un medio ciclo

$$T = 2t(\theta_0 \to 0 \to -\theta_0)$$

o cuatro veces un cuarto de ciclo

$$T = 4t(\theta_0 \to 0)$$

lo cual nos lleva a

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}d\theta$$

3. Código

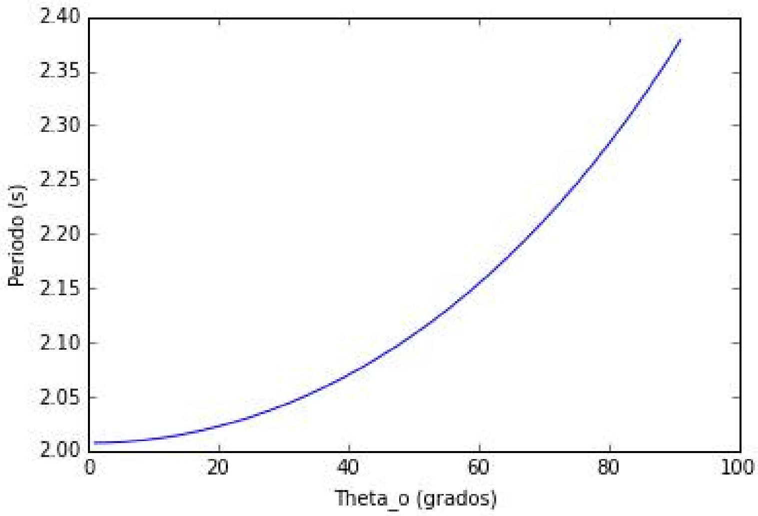
El código utilizado es el siguiente el cual nos proporciona la gráfica de T vs T_0. Donde T es la solución a la ecuación para cualquier ángulo y T_0 es la aproximación para ángulos pequeños.

```
#Importamos las librerías que utilizaremos en el código.
import numpy as np
from scipy import integrate
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy as sp
import matplotlib as mpl

# Se crea una nueva figura con Matplotlib
fig = plt.figure()
# Se define la aceleración de la gravedad
g = 9.8
# Se definen los vectores vacíos de abscisas y ordenadas.
x=[]
Ts=[]
i = 0 # Se inicializa el contador i.
# La variable i toma valores de 0 a 90 (grados) en este ciclo.

while (i<=90):
        i=i+1
        theta0 = (i*np.pi)/180
        l = 1
        f = lambda x: 1/np.sqrt(np.cos(x) - np.cos(theta0))
        F, erri = integrate.quad(f,0,theta0)
        T = 4 * np.sqrt(l/g) * (1/np.sqrt(2)) * F

        x.append(i)

        Ts.append(T)


        # Para graficar Ts/Ths (relación entre periodo real y periodo de oscilación
Ths = 2*np.pi*np.sqrt(l/g)
T = T/Ths

plt.xlabel('Theta_o (grados)')
```

```
plt.ylabel('Periodo (s)')
plt.plot(x,Ts)
plt.show()
```

4. Resultados

Los resultados realmente ya eran conocidos antes de realizar el experimento, de hecho teníamos que obtener exactamente el mismo resultado. La gráfica es la siguiente:



Con esta gráfica se puede apreciar que para angulos grandes el error va aumentando considerablemente, por lo tanto es correcto usar la aproximación pero solamente para ángulos pequeños.

Se puede ver que cuando θ tiende a 90 el error tiende a infinito.