

Deformación de un cilindro mediante calor

Autores: Alejandro Magnorsky, Andrés Mata Suárez, Mariano Merchante

Instituto Tecnológico de Buenos Aires

Resumen

Palabras clave

Cilindro; temperatura; deformación; diferencias finitas

I. INTRODUCCIÓN

II. DESARROLLO

A. Cálculo de la temperatura del cilindro

La temperatura de un cilindro uniforme puede modelarse como una función $u(r, t)$, donde r es la coordenada radial desde el eje del cilindro y t es el tiempo. Dicha función debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{4K} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1)$$

para $\frac{1}{2} < r < 1$, $0 < t < 10$ y $K = 0.1$.

Las condiciones de contorno, para $0 \leq t \leq 10$, son:

$$u\left(\frac{1}{2}, t\right) = t \quad (2)$$

$$u(1, t) = 100 + 40t \quad (3)$$

Además, la condición inicial, para $\frac{1}{2} \leq r \leq 1$, es:

$$u(r, 0) = 200(r - 0.5) \quad (4)$$

El objetivo es, entonces, encontrar una aproximación $v_k^m \approx u\left(\frac{1}{2} + k\Delta r, m\Delta t\right)$, donde $k = 0, 1, \dots, n$ siendo $n = \frac{1-\frac{1}{2}}{\Delta r}$ y $m = 0, 1, \dots, l$ con $l = \frac{10}{\Delta t}$.

Para ello, se utilizan las siguientes diferencias finitas:

- Centradas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{u(r + \Delta r, t) - 2u(r, t) + u(r - \Delta r, t)}{\Delta r^2} + O(\Delta r^2) \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{u(r + \Delta r, t) - u(r - \Delta r, t)}{2\Delta r} + O(\Delta r^2) \quad (6)$$

- Progresiva

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(r, t + \Delta t) - u(r, t)}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (7)$$

Escribiendo las aproximaciones de las diferencias centradas en la ecuación (1), se obtiene el siguiente esquema:

$$\frac{v_{k+1}^m - 2v_k^m + v_{k-1}^m}{\Delta r^2} + \frac{1}{\frac{1}{2} + k\Delta r} \frac{v_{k+1}^m - v_{k-1}^m}{2\Delta r} = \frac{1}{4K} \frac{v_k^{m+1} - v_k^m}{\Delta t} \quad (8)$$

$$v_k^{m+1} = v_k^m + \frac{4K\Delta t}{\Delta r^2}(v_{k+1}^m - 2v_k^m + v_{k-1}^m) + \frac{4K\Delta t}{(\frac{1}{2} + k\Delta r)2\Delta r}(v_{k+1}^m - v_{k-1}^m) \quad (9)$$

Las condiciones de contorno y la inicial se deducen de las ecuaciones (2), (3) y (4) :

$$v_0^m = m\Delta t \quad (10)$$

$$v_n^m = 100 + 40m\Delta t \quad (11)$$

$$v_k^0 = 200(\frac{1}{2} + k\Delta r - 0.5) \quad (12)$$

Las diferencias finitas, utilizadas para construir el esquema de la ecuación (9), tienen errores de $O(\Delta r^2)$ y $O(\Delta t)$. Por lo tanto, el esquema tiene $O(\Delta r^2 + \Delta t)$, es decir, orden (2,1).

Para analizar la estabilidad, se aplica la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto en ambos miembros del esquema de la ecuación (9), junto a las propiedades de desplazamiento en el tiempo y linealidad (Mathews y Fink, 1992), obteniendo:

$$V_k^{m+1} = V_k^m + \frac{4K\Delta t}{\Delta r^2}(V_k^m e^{i\omega} - 2V_k^m + V_k^m e^{-i\omega}) + \frac{4K\Delta t}{r2\Delta r}(V_k^m e^{i\omega} - V_k^m e^{-i\omega}) \quad (13)$$

Despejando V_k^m :

$$V_k^{m+1} = (1 + \frac{4K\Delta t}{\Delta r^2}(e^{i\omega} + e^{-i\omega}) - 2\frac{4K\Delta t}{\Delta r^2} + \frac{4K\Delta t}{r2\Delta r}(e^{i\omega} - e^{-i\omega}))V_k^m \quad (14)$$

$$V_k^{m+1} = (1 + 2\frac{4K\Delta t}{\Delta r^2}(\cos \omega - 1) + i2\frac{4K\Delta t}{r2\Delta r} \sin \omega)V_k^m \quad (15)$$

Se define $\rho = 1 + 2\frac{4K\Delta t}{\Delta r^2}(\cos \omega - 1) + i2\frac{4K\Delta t}{r2\Delta r} \sin \omega$. Entonces:

$$V_k^{m+1} = \rho V_k^m \quad (16)$$

$$V_k^{m+1} = \rho^{m+1} V_k^0 \quad (17)$$

Por lo tanto, $|\rho| < 1$ para que el método sea estable. Para que eso se cumpla, como mínimo, $|Im(\rho)| < 1$:

$$|2\frac{4K\Delta t}{r2\Delta r} \sin \omega| < 1 \Rightarrow \frac{4K\Delta t}{r2\Delta r} < \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta t < \frac{r\Delta r}{4K} \quad (18)$$

Considerando los casos en que $r = \frac{1}{2}$ y $r = 1$, se obtiene que el caso más restrictivo es que $\Delta t < \frac{\Delta r}{8K}$.

En la figura 1, se detalla la implementación de un programa que, dados Δr y Δt , utiliza las condiciones de contorno y la inicial (ecuaciones (10), (11) y (12)) para armar parte de la matriz v que representa a la función v_k^m , donde k es la columna y m es la fila. Para completar el resto, usa el esquema de la ecuación (9).

B. Cálculo de la deformación del cilindro

La deformación del cilindro, d , es proporcional a la temperatura media del mismo. Por lo tanto, se calcula como:

$$d = \alpha \int_{\frac{1}{2}}^1 u(r, t) r dr \quad (19)$$

donde $\alpha = 10.7$.

III. RESULTADOS

Para realizar todos los cálculos se utiliza $\Delta r = 0.1$ y $\Delta t = 0.01$.

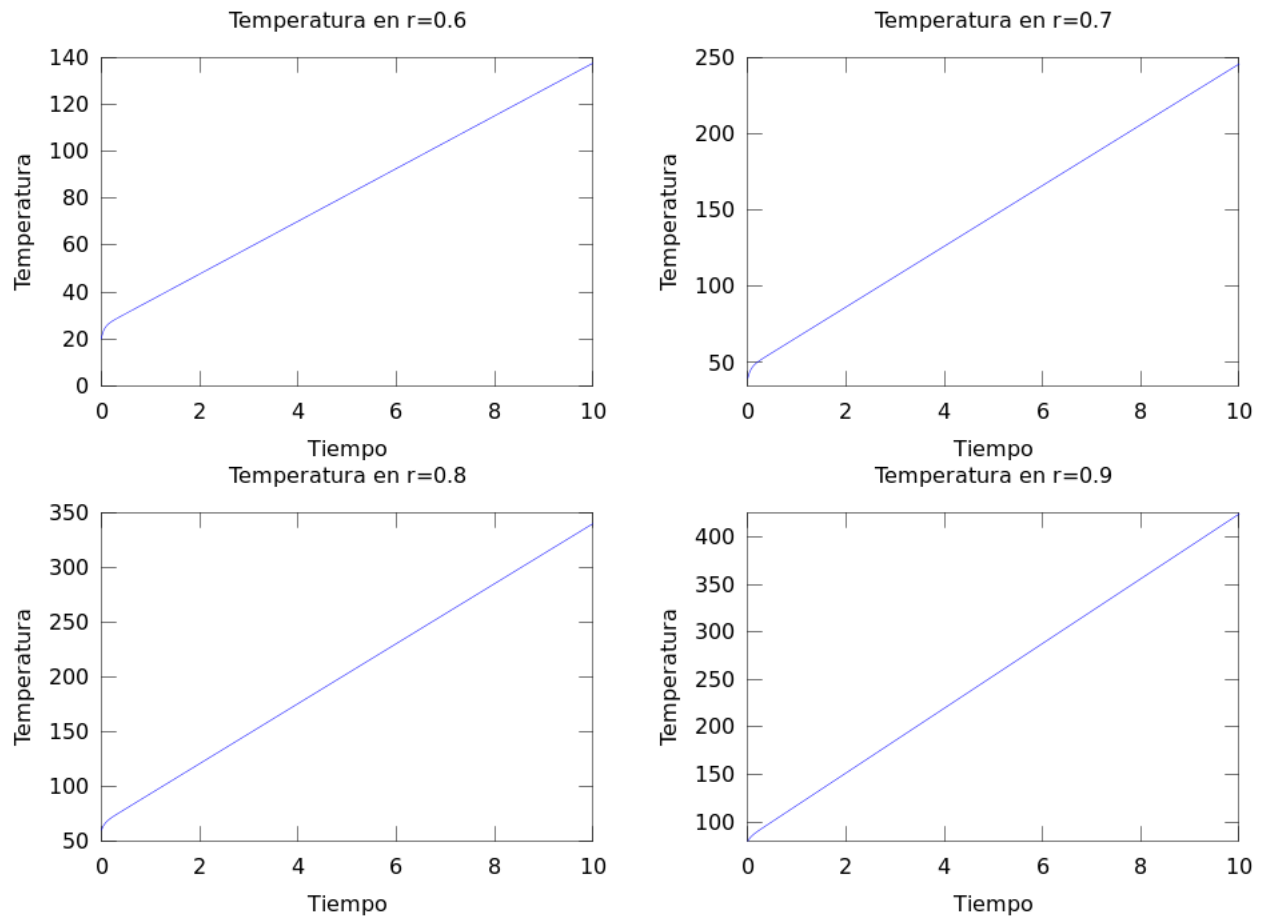


Fig. 1: Temperatura del cilindro para $r = 0.6, 0.7, 0.8$ y 0.9

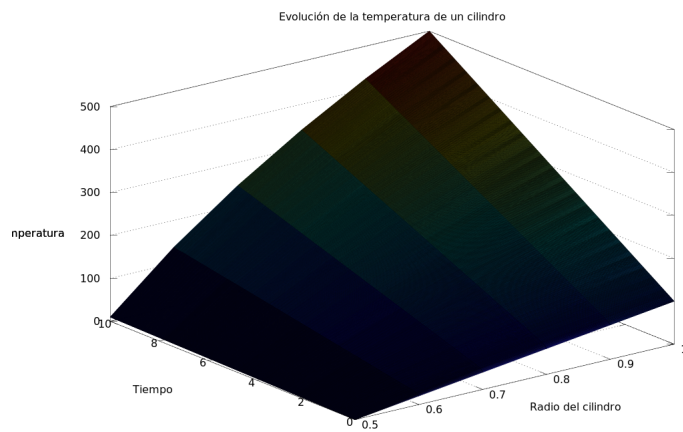


Fig. 2: Evolución de la temperatura del cilindro

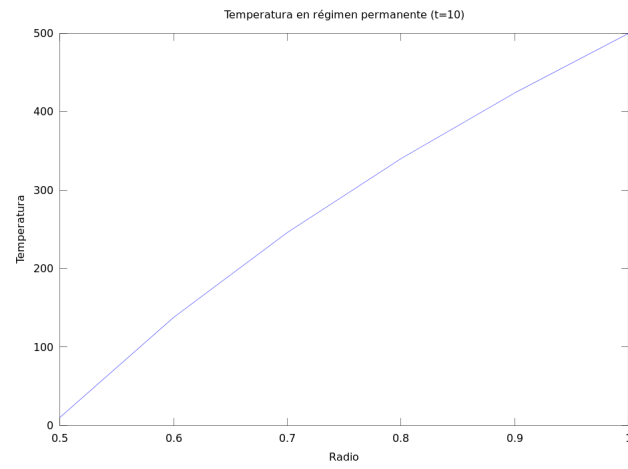


Fig. 3: Temperatura en régimen permanente

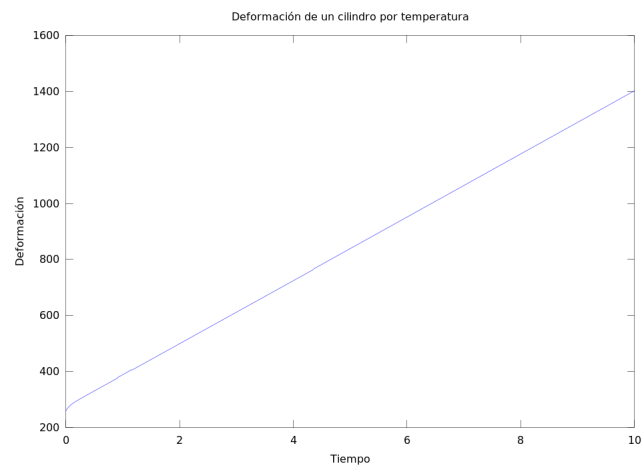


Fig. 4: Deformación del cilindro

IV. CONCLUSIONES

REFERENCIAS

Mathews, John H., Fink, Kurtis D., "Numerical Methods Using MATLAB", Prentice Hall, 1999

Listing 1: Implementación del cálculo de v_k^m .

```
function v = finiteDifferences(deltaR, deltaT)

    K = 0.1;
    n = (1/2)/deltaR;
    l = 10/deltaT;

    v = zeros(l+1,n+1);
    for k = 0:n
        v(1,k+1) = 200*(1/2 + k*deltaR - 0.5);
    endfor
    for m=0:l
        v(m+1,1) = m*deltaT;
        v(m+1,n+1) = 100 + 40*m*deltaT;
    endfor

    for m=1:l
        for k=2:n
            v(m+1,k) = v(m,k) + 4*K*deltaT/deltaR^2 * (v(m,k+1) - 2*v(m,k) + v(m,k-1)) + 4*K*
                deltaT/((1/2+(k-1)*deltaR)*2*deltaR) * (v(m,k+1) - v(m,k-1));
        endfor
    endfor

endfunction
```