1

Deformación de un cilindro mediante calor

Autores: Alejandro Magnorsky, Andrés Mata Suárez, Mariano Merchante Instituto Tecnológico de Buenos Aires

Resumen

Palabras clave

Cilindro; Temperatura; Deformación; Diferencias finitas.

I. Introducción

II. DESARROLLO

A. Cálculo de la temperatura del cilindro

La temperatura de un cilindro uniforme puede modelarse como una función u(r,t), donde r es la coordenada radial desde el eje del cilindro y t es el tiempo. Dicha función debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{4K} \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1}$$

para $\frac{1}{2} < r < 1$, 0 < t < 10 y K = 0.1.

Las condiciones de contorno, para $0 \le t \le 10$, son:

$$u(\frac{1}{2}, t) = t \tag{2}$$

$$u(1,t) = 100 + 40t \tag{3}$$

Además, la condición inicial, para $\frac{1}{2} \le r \le 1$, es:

$$u(r,0) = 200(r - 0.5) \tag{4}$$

El objetivo es, entonces, encontrar una aproximación $v_k^m \approx u(\frac{1}{2} + k\Delta r, m\Delta t)$, donde $k = 0, 1, \dots, n$ siendo $n = \frac{1-\frac{1}{2}}{\Delta r}$ y $m = 0, 1, \dots, l$ con $l = \frac{10}{\Delta t}$.

Para ello, se utilizan las siguientes diferencias finitas:

Centradas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{u(r + \Delta r, t) - 2u(r, t) + u(r - \Delta r, t)}{\Delta r^2} + O(\Delta r^2)$$
 (5)

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{u(r + \Delta r, t) - u(r - \Delta r, t)}{2\Delta r} + O(\Delta r^2)$$
(6)

Progresiva

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(r, t + \Delta t) - u(r, t)}{\Delta t} + O(\Delta t) \tag{7}$$

Escribiendo las aproximaciones de las diferencias centradas en la ecuación (1), se obtiene el siguiente esquema:

$$\frac{v_{k+1}^m - 2v_k^m + v_{k-1}^m}{\Delta r^2} + \frac{1}{\frac{1}{2} + k\Delta r} \frac{v_{k+1}^m - v_{k-1}^m}{2\Delta r} = \frac{1}{4K} \frac{v_k^{m+1} - v_k^m}{\Delta t}$$
(8)

$$v_k^{m+1} = v_k^m + \frac{4K\Delta t}{\Delta r^2} (v_{k+1}^m - 2v_k^m + v_{k-1}^m) + \frac{4K\Delta t}{(\frac{1}{2} + k\Delta r)2\Delta r} (v_{k+1}^m - v_{k-1}^m)$$
(9)

Las condiciones de contorno y la inicial se deducen de las ecuaciones (2), (3) y (4) :

$$v_0^m = m\Delta t \tag{10}$$

$$v_n^m = 100 + 40m\Delta t \tag{11}$$

$$v_k^0 = 200(\frac{1}{2} + k\Delta r - 0.5) \tag{12}$$

Las diferencias finitas, utilizadas para construir el esquema de la ecuación (9), tienen errores de $O(\Delta r^2)$ y $O(\Delta t)$. Por lo tanto, el esquema tiene $O(\Delta r^2 + \Delta t)$, es decir, orden (2,1).

Para analizar la estabilidad, se aplica la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto en ambos miembros del esquema de la ecuación (9), junto a las propiedades de desplazamiento en el tiempo y linealidad (Mathews y Fink, 1992), obteniendo:

$$V_k^{m+1} = V_k^m + \frac{4K\Delta t}{\Delta r^2} (V_k^m e^{i\omega} - 2V_k^m + V_k^m e^{-i\omega}) + \frac{4K\Delta t}{r2\Delta r} (V_k^m e^{i\omega} - V_k^m e^{-i\omega})$$
(13)

Despejando V_k^m :

$$V_k^{m+1} = \left(1 + \frac{4K\Delta t}{\Delta r^2} (e^{i\omega} + e^{-i\omega}) - 2\frac{4K\Delta t}{\Delta r^2} + \frac{4K\Delta t}{r2\Delta r} (e^{i\omega} - e^{-i\omega})\right) V_k^m \tag{14}$$

$$V_k^{m+1} = \left(1 + 2\frac{4K\Delta t}{\Delta r^2}(\cos\omega - 1) + i2\frac{4K\Delta t}{r2\Delta r}\sin\omega\right)V_k^m \tag{15}$$

Se define $\rho=1+2\frac{4K\Delta t}{\Delta r^2}(\cos\omega-1)+i2\frac{4K\Delta t}{r2\Delta r}\sin\omega$. Entonces:

$$V_k^{m+1} = \rho V_k^m \tag{16}$$

$$V_k^{m+1} = \rho^{m+1} V_k^0 \tag{17}$$

Por lo tanto, $|\rho| < 1$ para que el método sea estable. Para que eso se cumpla, como mínimo, $|Im(\rho)| < 1$:

$$\left| 2\frac{4K\Delta t}{r2\Delta r} \sin \omega \right| < 1 \Rightarrow \frac{4K\Delta t}{r2\Delta r} < \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta t < \frac{r\Delta r}{4K}$$
 (18)

Considerando los casos en que $r=\frac{1}{2}$ y r=1, se obtiene que el caso más restrictivo es que $\Delta t<\frac{\Delta r}{8K}$.

En la figura 1, se detalla la implementación de un programa que, dados Δr y Δt , utiliza las condiciones de contorno y la inicial (ecuaciones (10), (11) y (12)) para armar parte de la matriz v que representa a la función v_k^m , donde k es la columna y m es la fila. Para completar el resto, usa el esquema de la ecuación (9).

B. Cálculo de la deformación del cilindro

La deformación del cilindro, d, es proporcional a la temperatura media del mismo. Por lo tanto, se calcula como:

$$d(t) = \alpha \int_{\frac{1}{2}}^{1} u(r,t)rdr \tag{19}$$

donde $\alpha = 10.7$.

Para el cálculo de la ecuación (19) se utiliza el método de los trapecios. Se calcula d(10) con parámetros cada vez más chicos, hasta que la diferencia con el resultado anterior sea menor que el 5%.

III. RESULTADOS

Para realizar todos los cálculos se utiliza $\Delta r = 0.1$ y $\Delta t = 0.01$.

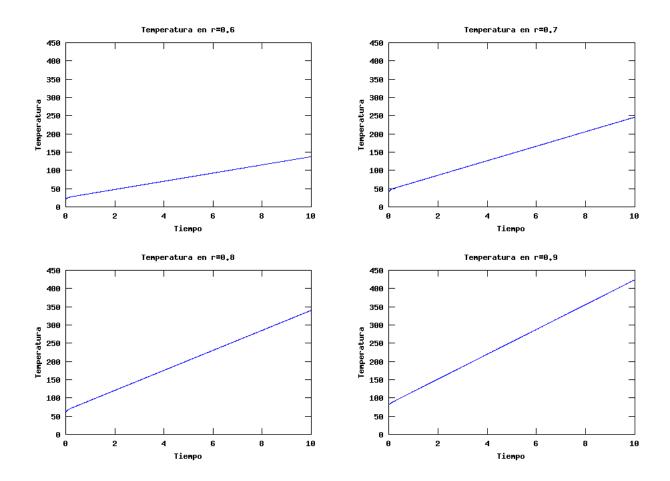


Fig. 1: Temperatura del cilindro para $r=0.6,0.7,0.8 \ \mathrm{y}\ 0.9$

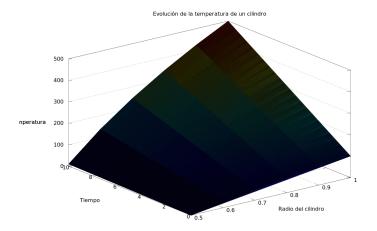


Fig. 2: Evolución de la temperatura del cilindro

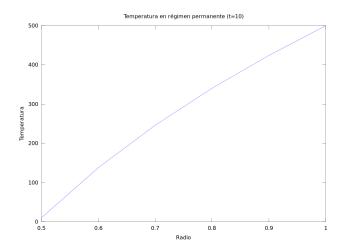


Fig. 3: Temperatura en régimen permamente

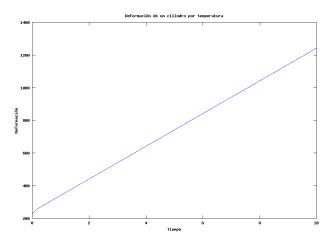


Fig. 4: Deformación del cilindro

IV. CONCLUSIONES

REFERENCIAS

Mathews, John H., Fink, Kurtis D., "Numerical Methods Using MATLAB", Prentice Hall, 1999

Listing 1: Implementación del cálculo de \boldsymbol{v}_k^m .

```
function v = finiteDifferences(deltaR, deltaT)
      K = 0.1;
      n = (1/2)/deltaR;
l = 10/deltaT;
      v = zeros(1+1,n+1);
      for k = 0:n
            v(1,k+1) = 200*(1/2 + k*deltaR - 0.5);
      endfor
      for m=0:1
            v(m+1,1) = m*deltaT;
            v(m+1,n+1) = 100 + 40*m*deltaT;
      endfor
      for m=1:1
            for k=2:n
                  endfor
      endfor
```

endfunction