Análisis de la velocidad del viento en Irlanda

Autores: Alejandro Magnorsky, Andrés Mata Suárez, Mariano Merchante

Instituto Tecnológico de Buenos Aires

Resumen

Un ecosistema acuático en el que existen poblaciones de *Tiburones Pintarrojo* y *Salmones de Mar* puede estudiarse para analizar la convivencia entre presas y predadores. Existe una forma de representar dicho ecosistema, y es mediante un modelo basado en ecuaciones diferenciales. El siguiente artículo está orientado a analizar dicho modelo. En base a datos de observaciones empíricas se realiza una simulación numérica para obtener funciones que representen las poblaciones de presas y predadores. Luego se realiza un análisis de cómo el período de dichas funciones varía en función de los parámetros constantes de las ecuaciones diferenciales. Se obtienen las poblaciones de equilibrio del sistema. Además, a fin de simplificar el modelo, se propone una linealización del mismo.

Palabras clave

Convivencia presa-predador; *Lotka-Volterra*; ecosistema acuático.

I. Introducción

La manera en que se relacionan las presas y los predadores en un ecosistema natural es interesante y ocupa un papel preponderante en la teoría ecologista. Su análisis puede resultar útil en ciertas aplicaciones, tales como la predicción de la posible extinción de una especie, así como la procreación intencional de ciertos predadores para evitar el crecimiento descontrolado de una plaga. Es interesante saber entonces, dado un ecosistema, bajo qué condiciones se establece una convivencia entre presas y predadores, o si alguna de las dos poblaciones termina desapareciendo.

Existen varios modelos para representar la dinámica de un sistema presa-predador. En este artículo se adopta el modelo dinámico de *Lotka-Volterra-Ancona*[1], que constituye un gran avance en el estudio de estas poblaciones ocurrido entre los años 1925 y 1928.

En la sección II, se presentan las ecuaciones diferenciales que constituyen el modelo mencionado en el párrafo anterior y se lo clasifica. Se realiza una simulación numérica para, en base al modelo y a observaciones empíricas, obtener curvas que representen a las poblaciones de presas y predadores. Se grafica la trayectoria del *espacio de fases*. Se analiza el comportamiento de las curvas en base a los parámetros constantes de las ecuaciones diferenciales y se encuentran las poblaciones de equilibrio. Finalmente, se realiza una linealización del sistema.

La sección III contiene los resultados obtenidos luego de realizar los distintos análisis de la sección II. Además, se realizan observaciones sobre los mismos.

II. Desarrollo

Para cada una de las estaciones meteorológicas, se desea ajustar los datos a una función de la forma:

$$v(t) = A_0 + A_1 cos(2\pi f_1 t) + B_1 sen(2\pi f_1 t) \tag{1}$$

donde t es el tiempo en días, $v(t)$ es la velocidad del viento en el instante t y $f_1 = \frac{1}{365{,}25} dia^{-1}$.
$v(t)$ es lineal en función de A_0, A_1 y B_1 y se puede expresar como $v(t) = A_0 f_1(t) + A_1 f_2(t) + B_1 f_3(t)$ donde $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = cos(2\pi f_1 t)$ y $f_3(t) = sen(2\pi f_1 t)$.
Para resolver el problema de ajuste se utiliza el método de cuadrados mínimos. El objetivo entonces es encontrar A_0, A_1 y B_1 tal que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (v(t_k) - v_k)^2$ sea mínimo.

[1]Alfred James Lotka (1880-1949) fue un matemático estadounidense, especializado en estadística. Vito Volterra (1860-1940) fue un matemático y físico italiano. Umberto d'Ancona, cuñado de Vito Volterra, era un pescador italiano.

Si definimos la matriz A y los vectores $\vec{x}$ y $\vec{b}$ como:

$$A = \begin{pmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) & f_3(t_1) \\ f_1(t_2) & f_2(t_2) & f_3(t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1(t_n) & f_2(t_n) & f_3(t_n) \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

entonces el objetivo puede expresarse como encontrar $\vec{x}$ tal que $||A\vec{x} - b||^2$ sea mínimo.

$$A = QR = (Q_1\, Q_2) \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

donde A tiene dimensiones nx3, Q_1 de nxn, Q_2 de nx$(3-n)$ y R_1 de nxn. La solución se obtiene de:

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{4}$$

$$R_1\vec{x} = Q_1^T\vec{b} \tag{5}$$

III. Resultados y conclusiones

A. Curvas obtenidas mediante simulaciones

El valor de la constante μ hallado mediante la ecuación 11 es 1.87 yr^{-1}, y el de K es 8.22 yr^{-1}. Dado que el valor de μ es mayor que 1 yr^{-1}, en ausencia de presas la población de predadores desaparece en menos de un año.

Mediante la obtención de los residuos de la aproximación por cuadrados mínimos, se evalúa qué tan certero es el valor de μ hallado. La figura **??** muestra dichos residuos. Puede verse que para varios valores del tiempo, los residuos son cercanos a 0. No obstante, particularmente para el valor $t = 8.8$ yr, se tiene un residuo de $r = 2.68$. Dado que éste es muy distinto a los valores esperados, se evalúa si constituye un *outlier* en la distribución de residuos encontrada. La media muestral es $m = 0$, y el desvío estándar es $\sigma = 0.67$. r es mayor a $3\sigma = 2.01$, por lo tanto es considerado un *outlier*. Sin embargo, como es el único *outlier* presente, puede considerarse que la aproximación es aceptable.

A partir del valor de μ hallado, y utilizando los valores conocidos de las demás constantes, se utiliza el método de *Runge-Kutta* de cuarto orden (Mathews y Fink, 1992) para resolver numéricamente las ecuaciones 6 y 7. El paso utilizado fue $h = 0.01$ yr. La figura **??** muestra las poblaciones obtenidas de esta manera. Puede observarse que las curvas periódicas obtenidas son similares a la de la figura **??**, correspondiente al conjunto de datos; no obstante, en las curvas simuladas, no se alcanzan los picos de las curvas reales.

Las poblaciones obtenidas mediante la simulación pueden utilizarse para construir el espacio de fases dado por la ecuación 9. La misma puede observarse en la figura **??**. La curva obtenida es cerrada, hecho que indica que los períodos de las poblaciones x e y son iguales.

Es interesante tener la posibilidad de conocer cómo crecen y decrecen las poblaciones a medida que pasa el tiempo. En ausencia de las curvas de las figuras **??** y **??**, esto es imposible debido a que la figura **??** es una trayectoria en la que no está involucrada la variable tiempo. Sin embargo, puede calcularse el sentido de esta trayectoria y, así, tener información de la evolución dinámica de las poblaciones. Para determinarlo se obtiene, en base a las poblaciones simuladas, el valor de $\dot{y}$ en el par (x, y) en el cual x es máximo. Este par corresponde a $x = 154.13$ e $y = 76.10$, y en este punto se tiene $\dot{y} = 267.97$ yr^{-1}. Dado que este valor es positivo, la población de predadores crece, con lo que el sentido resulta ser antihorario.

B. Períodos de las poblaciones

Realizando simulaciones utilizando los parámetros dados y variando μ, se obtiene que dichos períodos decrecen hasta aproximadamente $\mu = 10$ yr^{-1}, en donde alcanzan un mínimo luego del cual comienzan a crecer. En este mínimo, los períodos son de 2.37 yr. Similarmente, realizando simulaciones utilizando los parámetros dados y el μ estimado (utilizando la ecuación 11) y variando el valor del parámetro λ, se obtienen los valores de los períodos en función de λ. Nuevamente, los períodos son decrecientes hasta un mínimo, luego del cual comienzan a crecer. El mínimo se produce para $\lambda = 7$ yr^{-1} aproximadamente, en donde los períodos son de 3.37 yr. En la figura **??** se aprecia la forma en que varía el período para distintos valores de μ, y para distintos valores de λ.

C. Desfasaje en las curvas

Dada la periodicidad de las curvas que representan a las poblaciones, se realizan simulaciones con el motivo de obtener una dependencia entre el desfasaje ϕ entre las poblaciones de presas y predadores, y el parámetro a. En otras palabras, se busca determinar ϕ tal que $\phi = \phi(a)$.

Para valores de a variando desde 0.02 yr^{-1} hasta 1 yr^{-1} (se considera innecesario hacer la evaluación para valores más cercanos a 0, debido a que eso implicaría la inexistencia de encuentros perjudiciales para las presas), se obtiene la gráfica de ϕ en función de a, detallada en la figura **??**. En base a ésta, estimando geométricamente el comportamiento de la gráfica, se propone que el desfasaje obedezca una ecuación de la forma:

$$\phi(a) = \frac{1}{A(a+d)^2 + B(a+d) + C} \tag{6}$$

donde A, B, C y d son constantes reales.

Puede realizarse una deducción empírica de tales constantes con el objeto de aproximar mediante una ecuación, de la mejor manera posible, el gráfico expuesto en la figura **??**. Haciendo esto, se tiene que para $A = 344.83$ yr, $B = 27.59$, $C = 6.90$ yr^{-1} y $d = -0.35$ yr^{-1}, el gráfico de $\phi(a)$ es el observado en la figura **??**. Se decide, entonces, aproximar ϕ mediante la ecuación 22 con estos valores de las constantes reales.

D. Poblaciones de equilibrio

El punto de equilibrio para el cual las poblaciones se mantienen constantes se obtiene reemplazando los datos λ, μ, a y b por sus respectivos valores en la ecuación 14, lo cual resulta en $(x_{eq}, y_{eq}) = (53.52, 75)$.

Habiendo calculado, de manera empírica, cuáles son las condiciones iniciales tales que ambas poblaciones perduren en el tiempo, se obtiene el gráfico de la figura **??**. Del mismo puede deducirse que las poblaciones con gran cantidad de presas y pocos predadores, o con pocas presas y muchos predadores, tienen mayor probabilidad de sobrevivir que el caso en el que ambas poblaciones son grandes. Se confirma que, como lo indican las ecuaciones 6 y 7, si hay muchas presas y muchos predadores, la velocidad de crecimiento de los predadores es muy alta y además las presas tienen una velocidad negativa de crecimiento considerable, lo que lleva a la extinción de las presas y por consiguiente a la extinción de los predadores.

E. Linealización

La ecuación 21, correspondiente a la linealización del sistema, puede reformularse de la siguiente manera:

$$\dot{x} \approx -\frac{a\mu}{b}\left(y - \frac{\lambda}{a}\right) \tag{7}$$

$$\dot{y} \approx \frac{b\lambda}{a}\left(x - \frac{\mu}{b}\right) \tag{8}$$

Es interesante notar que, a puntos cercanos a $X_{eq} = (\frac{\mu}{b}, \frac{\lambda}{a})$ la variación de la población de las presas es directamente proporcional a la diferencia de población de los predadores con respecto a la población de equilibrio, y viceversa.

Referencias

Berryman, Alan A. “The origins and evolution of predator-prey history”, Ecological Society of America, 1992

Mathews, John H., Fink, Kurtis D., “Numerical Methods Using MATLAB”, Prentice Hall, 1999