# Análisis de la velocidad del viento en Irlanda

**Autores:** Alejandro Magnorsky, Andrés Mata Suárez, Mariano Merchante

Instituto Tecnológico de Buenos Aires

**Resumen**

**Palabras clave**

Velocidad del viento; Cuadrados mínimos; Irlanda.

## I. Introducción

La energía eólica es aquella obtenida a partir del viento. Se trata de energía cinética generada por medio de las corrientes de aire, la cual es transformada en otras formas útiles de energía para las actividades humanas. Las ventajas de la energía eólica es que es un recurso abundante, renovable y limpio. Sin embargo, el principal inconveniente es su intermitencia.

Para poder aprovechar la energía eólica es importante conocer la velocidad del viento. Esto incluye la velocidad máxima y mínima. Para poder utilizar la energía del viento, es necesario que éste alcance una velocidad mínima que depende del aerogenerador que se vaya a utilizar pero que suele empezar entre los 3 m/s y los 4 m/s, sin exceder los 25 m/s. En los aerogeneradores la energía eólica mueve una hélice y mediante un sistema mecánico se hace girar el rotor de un generador que produce energía eléctrica. Para que su instalación resulte rentable, suelen agruparse en concentraciones denominadas parques eólicos.

El gobierno irlandés consideró la posibilidad de utilizar la energía eólica para satisfacer una porción significativa de las necesidades energéticas de Irlanda. Para determinar la conveniencia y los lugares con mayor potencial se realizó un relevamiento de las velocidades del viento medidas por 12 estaciones meteorológicas distribuidas a lo largo del territorio. Cabe mencionar que existen distintas escalas de implementación de energía eólica: desde la calefacción de edificios hasta el abastecimiento de energía eléctrica de un cierto porcentaje de la población de una ciudad.

Antes de instalar y comenzar a operar un aerogenerador en un potencial lugar para producir otras fuentes de energía usando la eólica se suele utilizar registros de las velocidades del viento en dicha zona a lo largo de varios meses. La energía que puede producir un aerogenerador es una función no lineal de la velocidad del viento. Por lo tanto, el cálculo de la velocidad media del viento en la zona es insuficiente. Se hace, entonces, necesaria la estimación de la distribución completa de las velocidades (Haslett, J. y Raftery, A. E., 1989).

En la sección II se calcula el promedio de las velocidades de los vientos para cada estacion meteorológica y se ajustan los datos de las velocidades a una función usando cuadrados mínimos.

## II. Desarrollo

### A. Velocidades medias

Con el fin de conocer mejor cómo son los datos obtenidos de la medición de la velocidad del viento en las distintas estaciones, se calcula el promedio de todos los datos en cada una de ellas. El resultado de ello se encuentra en la tabla I.

### B. Aproximación de los datos a una función

Para cada una de las estaciones meteorológicas, se desea ajustar las velocidades medidas a una función de la forma:

$$v(t) = A_0 + A_1 cos(2\pi f_1 t) + B_1 sen(2\pi f_1 t) \tag{1}$$

donde $t$ es el tiempo en días, $v(t)$ es la velocidad del viento en el instante $t$ y $f_1 = \frac{1}{365{,}25} dia^{-1}$.
$v(t)$ es lineal en función de $A_0$, $A_1$ y $B_1$ y se puede expresar como $v(t) = A_0 f_1(t) + A_1 f_2(t) + B_1 f_3(t)$ donde $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = cos(2\pi f_1 t)$ y $f_3(t) = sen(2\pi f_1 t)$.

| Estación meteorológica | Velocidad media (m/s) |
|---|---|
| Roche's Pt. | 6.3604 |
| Valentia | 5.4770 |
| Rosslare | 5.9984 |
| Kilkenny | 3.2442 |
| Shannon | 5.3794 |
| Birr | 3.6485 |
| Dublin | 5.0399 |
| Claremorris | 4.3699 |
| Mullingar | 4.3706 |
| Clones | 4.4794 |
| Belmullet | 6.7500 |
| Malin head | 8.0250 |

Tabla I: Velocidades medias en cada estación meteorológica.

Para resolver el problema de ajuste se utiliza el método de cuadrados mínimos (Mathews y Fink, 1992). El objetivo entonces es encontrar $A_0$, $A_1$ y $B_1$ tal que $\sum_{k=1}^{n}(v_k - v(t_k))^2$ sea mínimo.

Si definimos la matriz A y los vectores $\vec{x}$ y $\vec{b}$ como:

$$A = \begin{pmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) & f_3(t_1) \\ f_1(t_2) & f_2(t_2) & f_3(t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1(t_n) & f_2(t_n) & f_3(t_n) \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

entonces, el objetivo puede expresarse como encontrar $\vec{x}$ tal que $||A\vec{x} - b||^2$ sea mínimo.

La solución clásica al problema de cuadrados mínimos es hacer $\vec{x} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$. Sin embargo, calcular la inversa de una matriz es de $O(n^3)$. Es por eso que se optó por resolver el problema utilizando la factorización QR obtenida por:

- Householder
- Givens
- Gram-Schmidt

La forma de resolver el problema de cuadrados mínimos usando QR consiste en:

$$A = QR = (Q_1\, Q_2) \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

donde A tiene dimensiones $n$x3, $Q_1$ de $n$x3, $Q_2$ de $n$x$(n-3)$ y $R_1$ de 3x3.

La solución se obtiene resolviendo $R_1\vec{x} = Q_1^T\vec{b}$ por sustitución hacia atrás ya que $R_1$ es triangular superior.

### *C. Cálculo del error cuadrático medio de la aproximación*

El error cuadrático medio se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$E_{cm} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} e_k^2}{n}} = \sqrt{\frac{||Q_2^T\vec{b}||^2}{n}} \tag{4}$$

siendo $e_k$ el error en un punto $(t_k, v_k)$, tal que:

$$e_k = v_k - v(t_k) \tag{5}$$

para un conjunto de $n$ mediciones de la velocidad el viento $v_k$ para el día número $t_k$.

!!!!!!!! MEJORAR GIVENS USANDO LA FORMA DE LAS MATRICES G

La tabla II muestra los resultados del cálculo del error cuadrático medio para cada estación meteorológica considerada.

| Estación meteorológica | $E_{cm}$ (m/s) |
|---|---|
| Roche's Pt. | 2.7777 |
| Valentia | 2.6051 |
| Rosslare | 2.4946 |
| Kilkenny | 1.8217 |
| Shannon | 2.4984 |
| Birr | 2.0097 |
| Dublin | 2.4404 |
| Claremorris | 2.2754 |
| Mullingar | 2.1014 |
| Clones | 2.2598 |
| Belmullet | 2.9600 |
| Malin head | 3.2619 |

Tabla II: Error cuadrático medio para cada estación meteorológica.

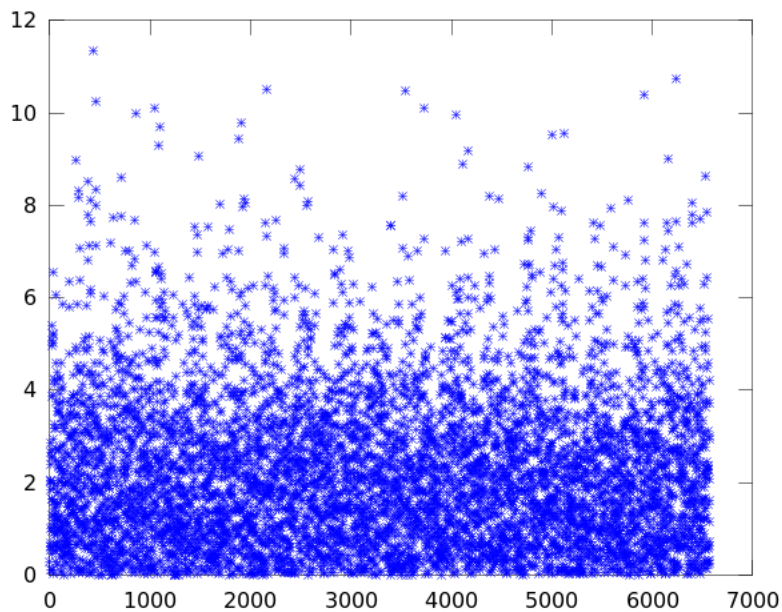


Fig. 1: Histograma del error

### *D. Valor medio de días por año*

### *E. Histograma del error*

## III. Resultados y conclusiones

## Referencias

Haslett, J., Raftery, Adrian E., "Space-time Modelling with Long-memory Dependence: Assessing Ireland's Wind Power Resource", 1989

Mathews, John H., Fink, Kurtis D., "Numerical Methods Using MATLAB", Prentice Hall, 1999

**Listing 1: Implementación de la factorización QR usando reflexiones de Householder.**

```
% A es una matriz de mxn con m >= n
% b es un vector de mx1
function [x,e] = householder(A,b)
        [m, n] = size(A);
        R = A;

        for k=1:n
                x = R(k:m,k);
                u = x;
                nx2 = x'*x;
                sigma = sign(x(1))*sqrt(nx2);
                u(1) = u(1)+sigma;
                H = eye(m-(k-1)) - (1/(nx2+x(1)*sigma)).*(u*u');

                R(k,k) = -sigma;
                R(k+1:m,k) = 0;
                if k < n
                        R(k:m,k+1:n) = H(:,:)*R(k:m,k+1:n);
                endif
                % Calcula Q1T*b en lugar de calcular Q
                b(k:m) = H*b(k:m);
        endfor

        % Calcula x por sustitucion hacia atras
        x = zeros(n,1);
        for k=n:-1:1
                x(k) = (b(k) - R(k,k+1:n)*x(k+1:n))/R(k,k);
        end

        % Calcula el error minimo
        e = b(n+1:m)'*b(n+1:m);
endfunction
```

**Listing 2: Implementación de la factorización QR por medio del método de Gram-Schmidt.**

```
% For testing:
% [Q, R] = gramSchmidt( [12,-51,4;6,167,-68;-4,24,-41] )
% Q*R deberia dar la matriz
 function [Q,R] = gramSchmidt(A)
        [m, n] = size(A);
        Q = zeros(m,n);
        R = zeros(m,n);
        e = zeros(m,n);

        for k=1:n
                accum = zeros(m,1);
                for j=1:k-1
                        accum = accum + e(:,j)  .*      (  (e(:,j)'*A(:,k))   /   (e(:,j)'*e(:,j))  );
                endfor
                u = A(:,k) - accum;
                e(:,k) = u / norm(u);

                % for R, k is taken as rows...
                for j=k:n
                        R(k,j) = (e(:,k)'*A(:,j));
                endfor
        endfor

        Q = e;
endfunction
```

**Listing 3: Implementación de la factorización QR por medio rotaciones de Givens.**

```
% QR descomposition using Givens' rotations.
%       A must be mxn with m >= n
function [Q R] = givens(A)
        m = length(A);
        n = length(A(1,:));

        Q = eye(m);
        R = A;
        aux = zeros(m);

        % Rotating and zeroing in bottom-up order, from left to right.
        % E.g. for a 4x4 A matrix:
        %       X X X X         X X X X         X X X X         X X X X
        %       X X X X         X X X X         X X X X         0 X X X
        %  -->  X X X X   -->   X X X X   -->   0 X X X   -->   0 X X X   -->
        %       X X X X         0 X X X         0 X X X         0 X X X
        %       will rotate     will rotate     will rotate     will rotate
        %       (4,1)<->(3,1)   (3,1)<->(2,1)   (2,1)<->(1,1)   (4,2)<->(3,2)
        %
        %       X X X X         X X X X         X X X X
        %       0 X X X         0 X X X         0 X X X
        %  -->  0 X X X   -->   0 0 X X   -->   0 0 X X
        %       0 0 X X         0 0 X X         0 0 0 X
        %       will rotate     will rotate     upper
        %       (3,2)<->(2,2)   (4,3)<->(3,3)   triangular

        for j = 1:n;
                for i = m:-1:j+1
                        if (R(i,j) != 0)
                                a = R(i-1,j);           % a will rotate with b
                                b = R(i,j);             % zeroing target
                                d = sqrt(a^2 + b^2);    % distance from a to b
                                c = a / d;              % cos
                                s = -b / d;             % sin

                                % %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
                                %  Rotation of element (i,j) with (i-1,j) only
                                % affects rows i and i-1 of R.
                                %  It's unefficient to perform a whole matrix
                                % multiplication if only few rows are affected,
                                % specially for large matrixes.
                                % %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

                                %  The following assignations improves:
                                %       R = G * R
                                %  where:
                                %       - G is the rotation matrix for rotating
                                % (i,j) with (i-1,j).
                                %       - R starts being A, but at the end, becomes
                                % the upper triangular matrix of QR descomposition.

                                aux = [R(i-1,:); R(i,:)];
                                R(i-1,:) = c * aux(1,:) - s * aux(2,:);
                                R(i,:) = s * aux(1,:) + c * aux(2,:);

                                %  The following assignations improves:
                                %       Q = Q * G'
                                %  where:
                                %       - G' is the transpose of (i,j)-with-(i-1,j)
                                % rotation matrix G.
                                %       - Q starts being an mxm identity matrix, but
                                % at the end, becomes the orthogonal matrix of QR
                                % descomposition.

                                aux = [Q(:,i-1)  Q(:,i)];
                                Q(:,i-1) = c * aux(:,1) - s * aux(:,2);
                                Q(:,i) = s * aux(:,1) + c * aux(:,2);
                        endif
                endfor
        endfor
endfunction
```