Finanzas I

Profesor.: Carlos Pérez.
Ayudantes: P. Fernández, A. Poblete, M. Vásquez.

AYUDANTÍA Nº8
Otoño 2019

Duración y Covexidad.

1.- Suponga que dispone de un bono valorado en 967.82, que madura en 1 años, posee una tasa cupón del 10 % semestral y un principal de 1000. Además sabe que S_1 y S_2 son igual a 10 % y 12 % respectivamente. Calcule la duración del bono si sabe que se vende a la par.

Respuesta

Primero deberemos obtener la YTM del bono:

$$YTM = \frac{100 + \frac{1000-967{,}82}{2}}{\frac{1000+967{,}82}{2}} = 0{,}11799$$

Por lo tanto consideraremos r=0.11799, y calculamos la duración del bono:

$$D_0 = \frac{1}{967{,}84} \cdot [\frac{100}{1{,}11799} + \frac{2200}{(1{,}11799)^2}]$$

$$D_0 = \frac{1}{967{,}84} \cdot [89{,}446 + 1760{,}1386] = \frac{1849{,}5846}{967{,}84} = 1{,}911$$

1.- Usted tiene la opción de comprar (*Recordando de la ayudantía pasada*) de 2 bonos los cuales sus caracteristicas estan expuestos en la siguiente tabla:

Bono	Maduración	Principal	Tasa Cupón	Valor Actual
A	1 año	1000	0 %	\$890
B	1 año	1000	10 % APR %	\$981

Considerando una tasa semestral del 6 %. Obtenga la duración y convexidad de ambos bonos.

Respuesta

Recordemos que la duración de un bono viene dado por:

$$D_0 = \frac{1}{q_0 \cdot (1+r)} \cdot [\sum_{t=1}^{T} \frac{F_t \cdot t}{(1+r)^t}]$$

Para el Bono A:

$$D_0 = \frac{1}{890} \cdot [\frac{1000 \cdot 2}{(1{,}06)^2}] = \frac{1779,99}{890} = 2$$

Para el Bono B:

$$D_0 = \frac{1}{981} \cdot [\frac{50}{(1+0{,}06)} + \frac{1050 \cdot 2}{(1+0{,}06)^2}] = \frac{1}{981} \cdot [47{,}1698 + 1868{,}99] = 1{,}953$$

Recordemos que la convexidad de un bono no perpetuo es:

$$\text{Co(r)} = \frac{\partial^2 q}{\partial r^2}\frac{1}{q^2} = \frac{1}{q \cdot (1+r)^2}\sum_{t=1}^{T}\frac{(1+t)t \cdot F_t}{(1+r)^t}$$

Reemplazando los datos del bono A:

$$C_0 = \frac{(n+1)\cdot n}{(1+r)^2} = \frac{2}{(1{,}06)^2} = 1{,}78$$

Reemplazando con los datos del bono B:

$$Co(r) = \frac{1}{981 \cdot (1+0{,}06)^2} \cdot \sum_{t=1}^{2}\frac{(1+t)t \cdot F_t}{(1+0{,}06)^t}$$

$$Co(r) = \frac{1}{1102{,}2516} \cdot [\frac{2 \cdot 50}{1{,}06} + \frac{6 \cdot 1050}{(1{,}06)^2}]$$

$$Co(r) = \frac{1}{1102{,}2516} \cdot [5701{,}3172]$$

$$Co(r) = \frac{5701{,}3172}{1102{,}2516}$$

$$Co(r) = 5{,}1724$$

3.- **Ejercicio Propuesto** Demuestre que la duración de un bono es equivalente a la semi-elasticidad del precio ante un cambio en la tasa interes.

Respuesta

Consideremos la valoración de un bono de la forma:

$$q_0 = \sum_{t=1}^{T}\frac{F_t}{(1+r)^t}$$

Siendo F_t el flujo de efectivo en el periodo t. Derivamos con respecto a r.

$$\frac{\partial q_0}{\partial r} = -\sum_{t=1}^{T} t \cdot \frac{F_t}{(1+r)^{t+1}}$$

$$\frac{\partial q_0}{\partial r} = \frac{1}{(1+r)} \cdot -\sum_{t=1}^{T} t \cdot \frac{F_t}{(1+r)^t}$$

Multiplicamos por $\frac{q_0}{q_0}$:

$$\frac{\partial q_0}{\partial r}\frac{1+r}{q_0} = -\frac{1}{q_0}\sum_{t=1}^{T} t \cdot \frac{F_t}{(1+r)^t}$$

$$\frac{\partial q_0}{\partial r}\frac{1+r}{q_0} = -D_0$$

Inmunización.

Las administradoras de fondos de pensiones (AFPs) deben pagar anualidades de por vida a sus beneficiarios. Si una AFP desea mantenerse en el negocio indefinidamente, sus obligaciones se asemejarán a una perpetuidad. Suponga que usted es un gerente de una AFP que debe pagar anualmente US \$2 millones a sus beneficiarios, a perpetuidad. La tasa de interés es un 16 % para todos los vencimientos.
Nota: El valor presente de una perpetuidad viene dado por $VP = \frac{P}{r}$, Dónde P es el pago anual de la renta y r es la tasa de interés.

a) Si la duración de un bono a 5 años, con cupones anuales de 12 % es 4 años, y la duración de un bono a 20 años con cupones anuales de 6 % es 11 años, ¿cuánto dinero debería usted invertir en cada bono para financiar e inmunizar su posición?

Respuesta

El valor presente del pasivo (perpetuidad) de la AFP es:

$$VP = \frac{US\$2 \ \ millones}{0,16} = US\$12{,}5 \quad millones$$

Y la duración del pasivo vendrá dada por:

$$\frac{1+y}{y} = \frac{1,16}{0,16} = 7,25 \quad años$$

ya que 16 % es anual.
A fin de inmunizarnos, debemos replicar el valor y la duración de nuestro pasivo. Sea ω la proporción invertida en el bono a 5 años y $(1-\omega)$ la proporción invertida en el bono a 20 años. Sabemos que la duración de un portafolio es el promedio ponderado de las duraciones de los activos que lo componen:

$$4 \cdot \omega + 11 \cdot (1-\omega) = 7,25 \Rightarrow \omega = 0,5357 = 53,57\,\%$$

Por lo tanto, debemos invertir en el bono a 5 años:

$$0,5357 \cdot US\$12{,}5 \quad millones = US\$6,7 \quad millones$$

Lo que se debe invertir en el bono a 20 años:

$$0,4643 \cdot US\$12{,}5 \quad millones = US\$5,8 \quad millones$$

b) ¿Cómo cambiaría la composición de su portafolio si decidiera inmunizarse con bonos cero cupón a 5 y 20 años?

Respuesta

Cuando existe un bono cupón cero, la duración coincide con el vencimiento. Por lo tanto:

$$5 \cdot \omega + 20 \cdot (1 - \omega) = 7,25 \Rightarrow \omega = 0,85 = 85\,\%$$

Por lo tanto, debemos invertir en el bono a 5 años cupón cero:

$$0,85 \cdot US\$12{,}5 \quad millones = US\$10,63 \quad millones$$

Lo que se debe invertir en el bono a 20 años cupón cero:

$$0,15 \cdot US\$12{,}5 \quad millones = US\$1,88 \quad millones$$

c) Suponiendo que se inmuniza con bonos cero cupón a 5 y 20 años, ¿qué pasaría con su posición frente a una caída en las tasas de interés a un 15 %? ¿Cómo debería rebalancear su cartera una vez ocurrida la caída de tasas? Suponga que los bonos tienen un principal de US$1.000.

Respuesta

Si las tasas caen un 15 %, la duración del pasivo será:

$$\frac{1+y}{y} = \frac{1{,}15}{15} = 7,67 \quad años$$

El valor presente vendrá dado por:

$$VP = \frac{US\$2 \;\; millones}{0,15} = US\$13{,}33 \quad millones$$

Cuando la tasa de interés era de 16 %, los bonos cupón cero costaban:

$$q_0^{5 \;\; años} = \frac{1000}{1,16^5} = US\$476,1$$

$$q_0^{20 \;\; años} = \frac{1000}{1,16^{20}} = US\$51,39$$

Es decir que, de bonos cero cupón a 5 años se compraron:

$$\frac{US\$10,63 \quad millones}{US\$476,1 \quad millones} = 22327{,}24 \quad bonos$$

de bonos cero cupón a 20 años se compraron:

$$\frac{US\$10,88 \quad millones}{US\$51,39 \quad millones} = 36583 \quad bonos$$

Ahora, a la nueva tasa, los precios de los bonos serán:

$$q_0^{5 \;\; años} = \frac{1000}{1,15^5} = US\$497,18$$

$$q_0^{20\ años} = \frac{1000}{1,15^{20}} = US\$61,1$$

Por lo tanto, el valor de nuestra cartera de bonos será igual a:

$$497,18 \cdot 22327{,}24 + 61{,}1 \cdot 36583 \cong US\$13{,}34 \quad millones$$

Con esto podemos sacar ω:

$$\omega = \frac{497,18 \cdot 22327{,}24}{US\$13{,}34 \quad millones} = 0,832$$

La duración será:

$$5 \cdot 0,832 + 20 \cdot 0{,}168 = 7,52 \quad años$$

Para volver a una situación en la que estamos exactamente cubiertos, debemos recalcular la proporción y cantidad a invertir en cada bono:

$$5 \cdot \omega + 20 \cdot (1 - \omega) = 7,67 \Rightarrow \omega = 0{,}822 = 82,2\,\%$$

Por lo que se invertie en bono cupón cero a 5 años:

$$0,822 \cdot 13,33 = US\$10,96 \quad millones$$

Se invertie en bono cupón cero a 20 años:

$$0,178 \cdot 13,33 = US\$2,37 \quad millones$$