

Sistemas de coordenadas y transformaciones

**Master Universitario en Ingeniería
Geomática y Geoinformación
Curso 2024-2025**



E.T.S.I. Geodesica, Cartográfica y Topográfica

Contenido

- Cordenadas cartesianas
- Sistemas de coordenadas empleados en navegación
- Transformaciones
- Velocidades angulares
- Ecuaciones diferenciales de una transformación
- Transformaciones específicas de coordenadas

Coordenadas cartesianas

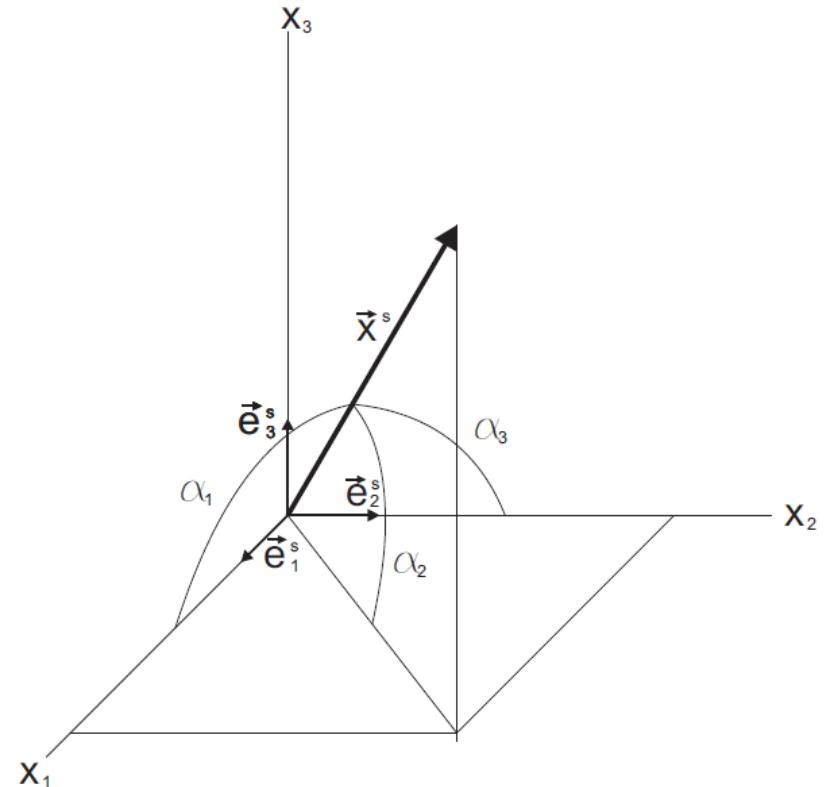
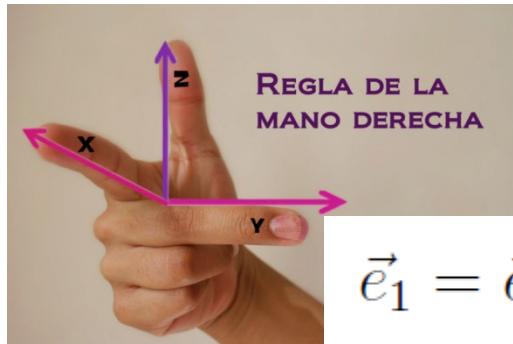
- Un Sistema de coordenadas (frame) se puede definir de dos formas equivalentes:
 - Origen y conjunto de ejes respecto a los cuales se puede describir el movimiento de un objeto
 - Situación y orientación de un objeto
- Es igualmente válido describir la situación y orientación de un sistema s con respecto a otro sistema t como describir la situación y orientación del sistema t con respecto a s .
- Este es el principio de relatividad: las leyes de la física son iguales independientemente del observador.
- En general, se establecen tres sistemas: el de **referencia**, el del **objeto** y el sistema **en que se quiere resolver** o expresar una determinada cuestión.
- Muchos problemas de navegación implican más de un sistema de referencia o más de un sistema objeto.

Sistema cartesiano

Un sistema cartesiano queda definido al situar el origen y la dirección de 3 ejes mutuamente ortogonales

$$O, \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$$

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$$



$$\vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_3$$

$$\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1$$

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$$

Sistema cartesiano

Coordenadas y ángulos

$$\vec{x} = (\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \vec{x} \cdot \vec{e}_1$$

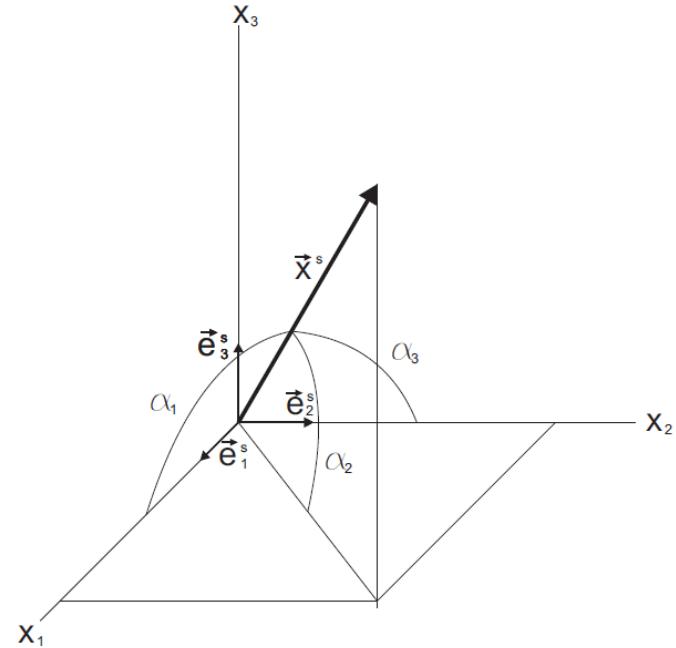
$$x_2 = \vec{x} \cdot \vec{e}_2$$

$$x_3 = \vec{x} \cdot \vec{e}_3$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{x_1}{\|\vec{x}\|}$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{x_2}{\|\vec{x}\|}$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{x_3}{\|\vec{x}\|}$$



Sistema inercial (*i-frame*)

Es un sistema euclídeo en el que se cumplen las Leyes del Movimiento de Newton

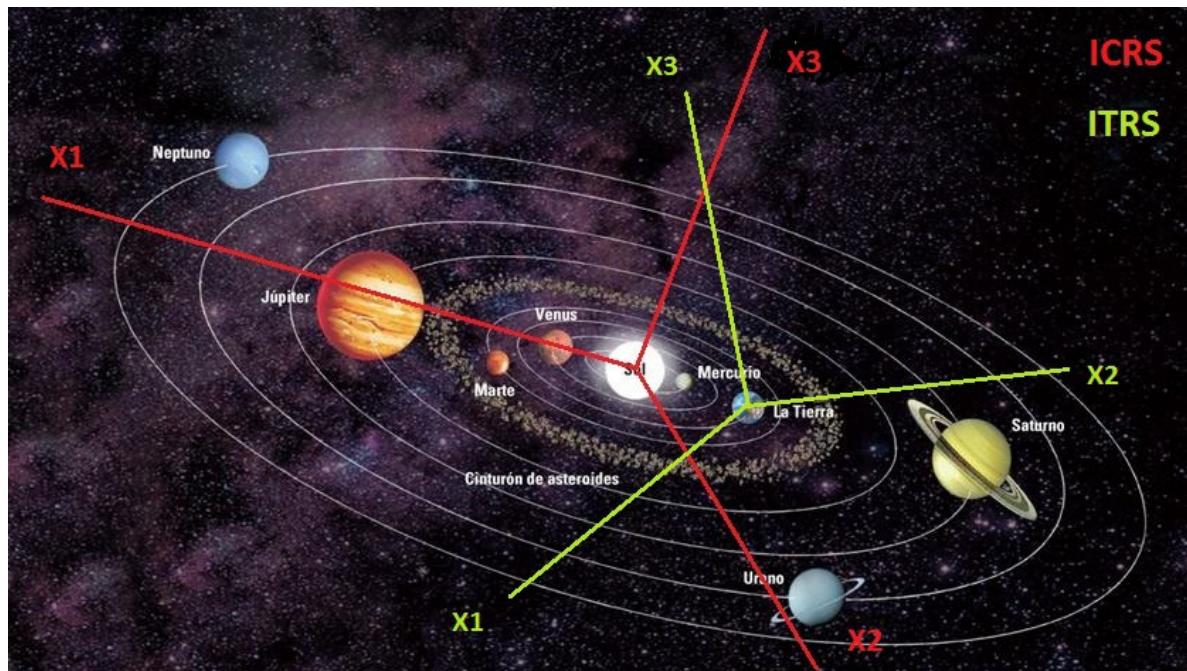
1. Un cuerpo con movimiento uniforme permanece con movimiento uniforme en ausencia de fuerzas aplicadas.
2. La variación en el tiempo del momento lineal de una partícula es igual al sumatorio de las fuerzas aplicadas

$$\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{x}} \right) = \vec{F} \quad \rightarrow \quad m_i \ddot{\vec{x}} = \vec{F}$$

La segunda ley es, además, la base para describir la dinámica de las unidades de medición inercial (IMU)

Sistema inercial (*i-frame*)

En rigor no se pueden definir sistemas inerciales en el sistema solar debido al que el campo gravitatorio posee gradientes variables para cada punto del espacio.



Un cuerpo inicialmente en reposo aceleraría debido a la atracción gravitatoria del Sol y de los planetas no cumpliéndose la Primera Ley de Newton

Sistema inercial (*i-frame*)

es necesario modificar la Segunda Ley de Newton para adaptarla a la presencia de un campo gravitatorio

$$m_i \ddot{\vec{x}} = \vec{F} + m_g \vec{g}$$

El vector de aceleración gravitacional \vec{g} se interpreta como un factor de proporcionalidad entre la masa gravitacional m_g y la fuerza gravitacional \vec{F}_g , tal como se formula en la Ley de Gravitación Universal de Newton

$$\vec{F}_g = k \frac{m_g M}{l^2} \vec{e}_l = m_g \vec{g}$$

Con $m_i = m_g = m$ (principio de equivalencia débil)

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{a} + \vec{g}$$

Sistema inercial (*i-frame*)

El término $\vec{a} = \vec{F}/m$ se conoce como **fuerza específica** o fuerza por unidad de masa. La fuerza específica es la aceleración medida por las unidades de medición inercial (IMU).

Algunos **ejemplos de fuerza específica** son el rozamiento atmosférico o la fuerza de reacción que ejerce la superficie de la Tierra sobre nosotros para evitar la caída libre.

El vector \vec{g} se supone **conocido** y se puede calcular a partir de modelos de gravedad y las efemérides planetarias.

En la práctica se adopta como sistema inercial (*i-frame*) un sistema de coordenadas cuyo origen coincide con el centro de la Tierra, que no rota y que está en caída libre respecto al Sol, la Luna y los demás planetas. La orientación permanece fija respecto a la esfera celeste que materializan los cuásares.

Sistema inercial (*i-frame*)

El International Earth Rotation Service (IERS) establece el [ICRS](#) como sistema de referencia inercial de forma que los ejes \vec{e}_3 y \vec{e}_1 prácticamente coinciden con los conceptos tradicionales de polo de la eclíptica y el punto vernal respectivamente.

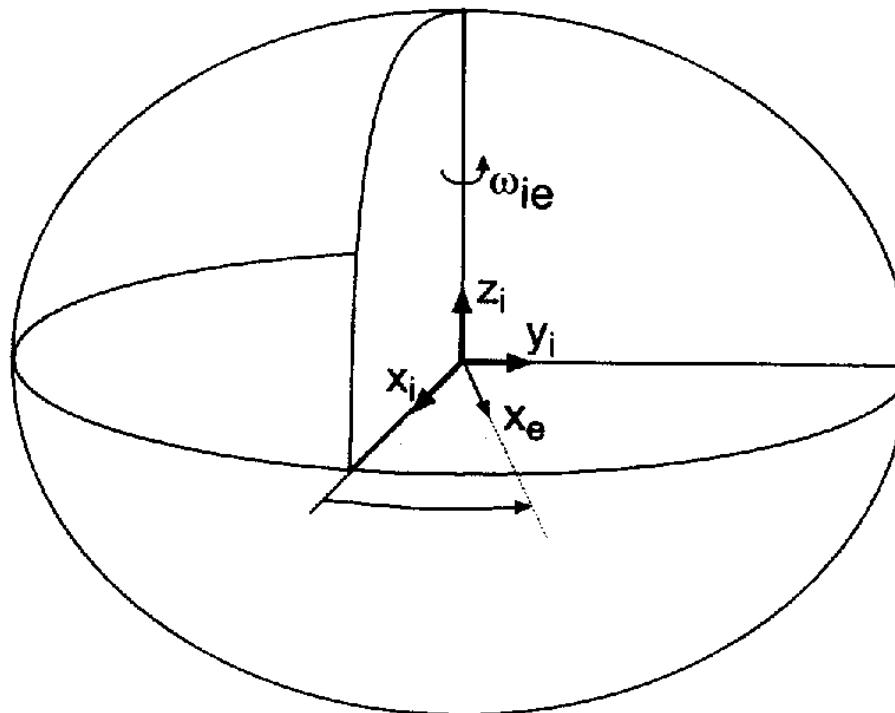
Ambas direcciones son materializadas mediante centenares de cuásares cuyas direcciones se determinan mediante la técnica VLBI junto con el catálogo estelar Hipparcos para el espectro óptico.

Las coordenadas de un punto en el (*i-frame*) se definen mediante un vector

$$\vec{x}^i = x_1^i \vec{e}_1^i + x_2^i \vec{e}_2^i + x_3^i \vec{e}_3^i = \begin{pmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ x_3^i \end{pmatrix}$$

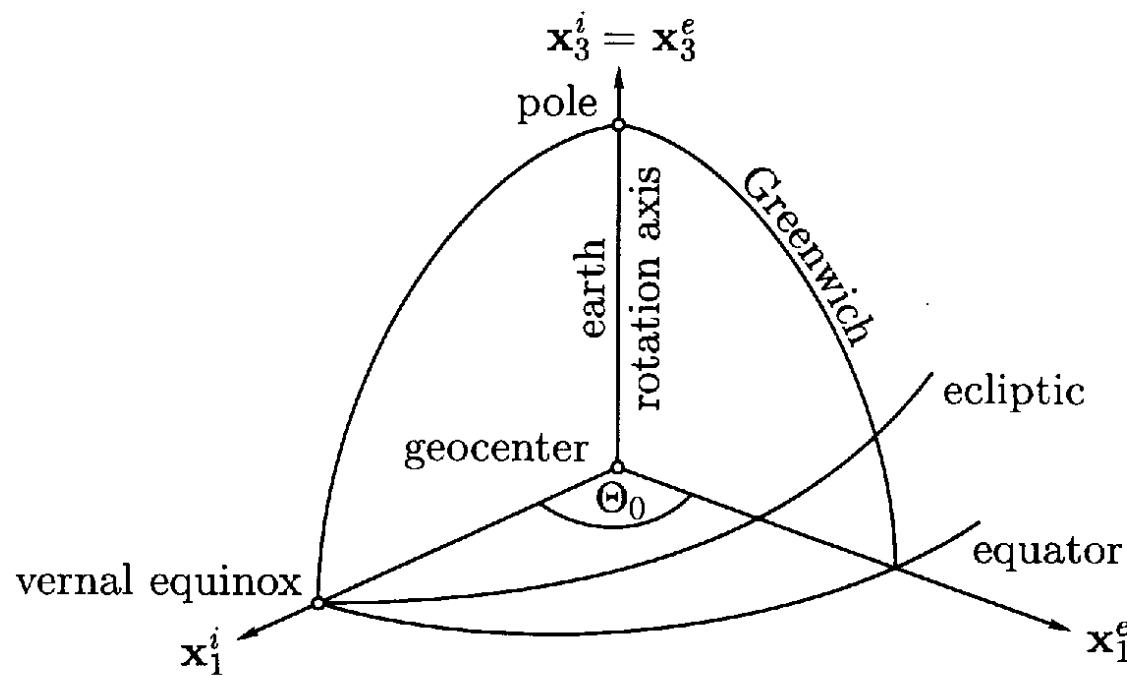
i-frame (Farrell)

Versión simplificada del *i-frame*



i-frame (Hofmann)

Versión simplificada del *i-frame*



Sistema terrestre (*e-frame*)

Es un sistema cartesiano cuyo origen coincide con el centro de masas de la Tierra y cuyos ejes \vec{e}_3 y \vec{e}_1 siguen respectivamente la dirección de un polo norte convencional y de un meridiano de referencia convencional (Greenwich).

Las coordenadas de un punto en el sistema terrestre (*e-frame*) se definen mediante un vector

$$\vec{x}^e = x_1^e \vec{e}_1 + x_2^e \vec{e}_2 + x_3^e \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} x_1^e \\ x_2^e \\ x_3^e \end{pmatrix}$$

También recibe el nombre de [Earth-Centered Earth-Fixed](#) (ECEF). Un ejemplo de este tipo de sistemas es el *International Terrestrial Reference System* (ITRS) establecido por el IERS a partir de las técnicas SLR y GPS y que puede ser relacionado con el ICRS gracias a la técnica VLBI.

Sistema terrestre (*e-frame*)

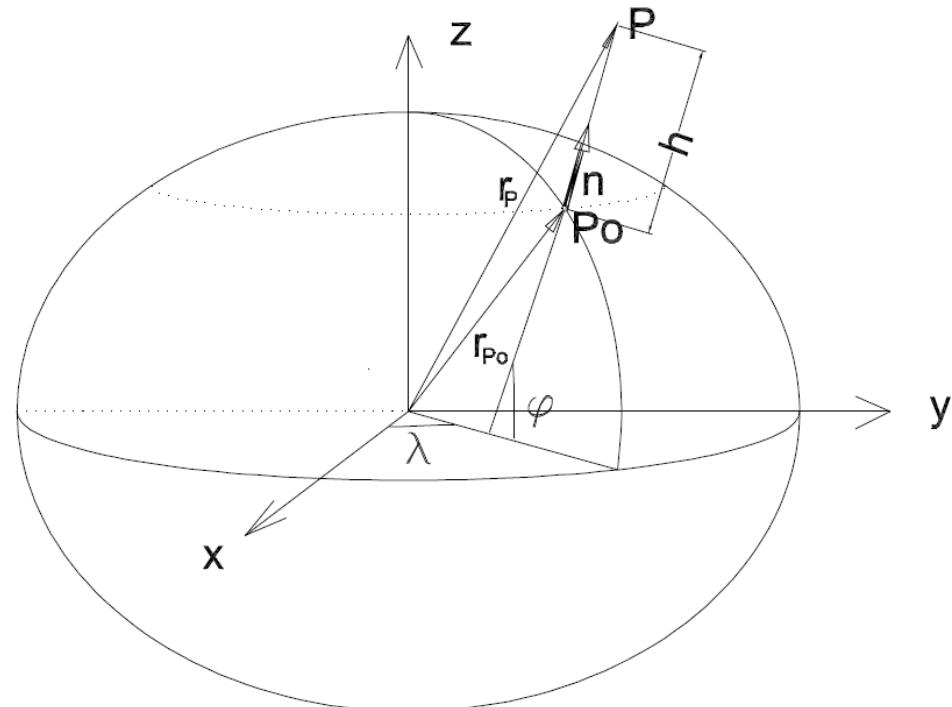
Una desventaja del sistema de coordenadas ECEF como *e-frame* es que no permite la separación entre planimetría y altimetría.

La alternativa es introducir un elipsoide como superficie de referencia junto con las **coordenadas geodésicas** y la altitud elipsoídica.

$$(\varphi, \lambda, h)$$

Altímetros \rightarrow
$$\begin{cases} h = H + N \\ N = N(\varphi, \lambda) \end{cases}$$

Modelos de Gravedad



\rightarrow
$$\begin{cases} \gamma_N = \gamma_N(\varphi, h) \\ \gamma_E = 0 \\ \gamma_D = \gamma_D(\varphi, h) \end{cases}$$

Sistema terrestre (*e-frame*)

$$X = (\nu + h) \cos \varphi \cos \lambda$$

$$Y = (\nu + h) \cos \varphi \sin \lambda$$

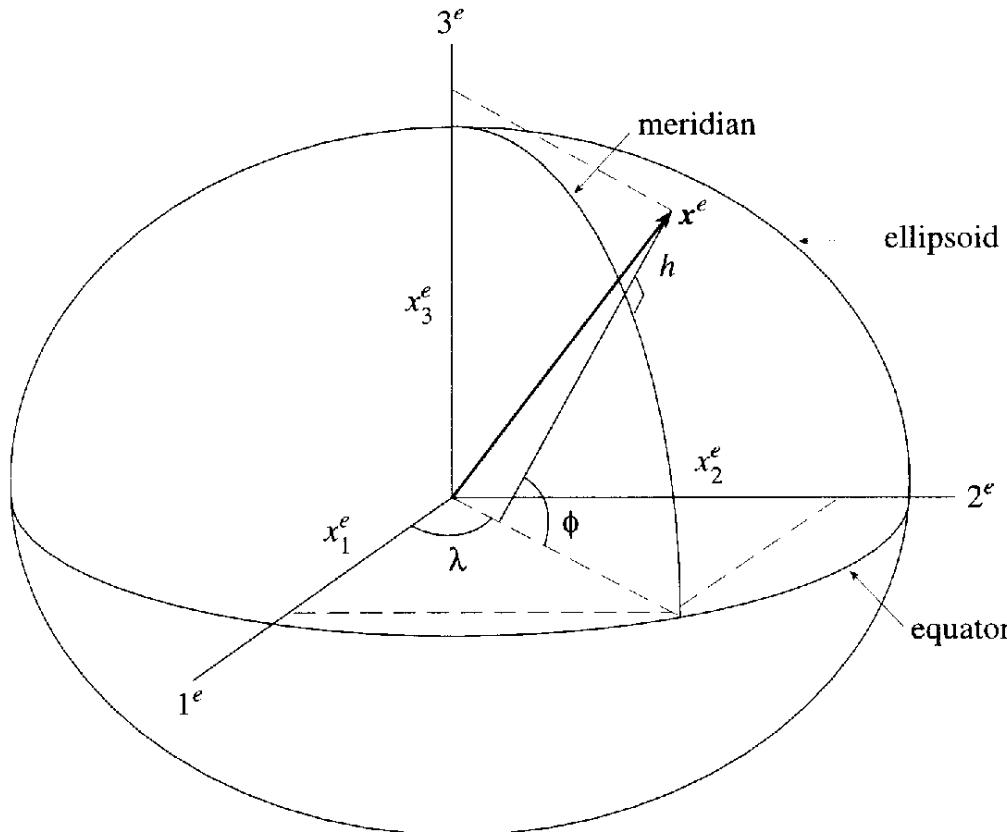
$$Z = [\nu (1 - e^2) + h] \sin \varphi$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{Z + e^2 b \sin^3 \vartheta}{p - e^2 a \cos^3 \vartheta} \quad \vartheta = \operatorname{arctg} \frac{Z a}{p b}$$

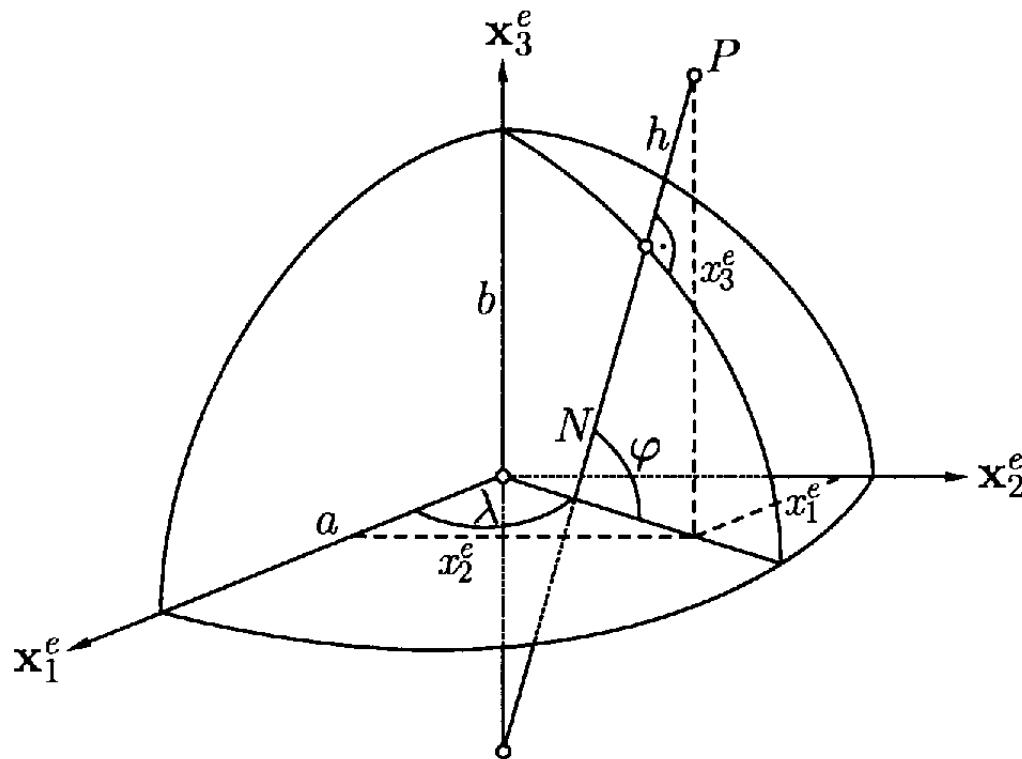
$$\lambda = \operatorname{arctg} \frac{Y}{X} \quad e^{,2} = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

$$h = \frac{p}{\cos \varphi} - \nu \quad p = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

e-frame (Jekeli)

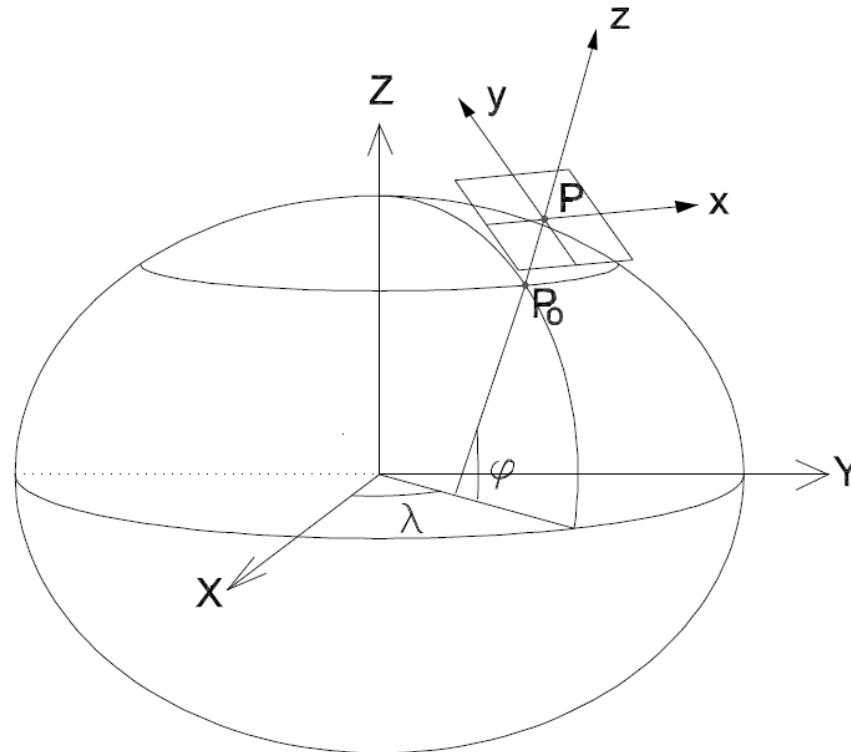


e-frame (Hofmann)



Sistema de navegación (*n-frame*)

Es equivalente al conocido como sistema geodésico local, aunque los ejes se suelen adoptar con sentidos diferentes



$$\begin{pmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ z_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \lambda_i & \cos \lambda_i & 0 \\ -\sin \varphi_i \cos \lambda_i & -\sin \varphi_i \sin \lambda_i & \cos \varphi_i \\ \cos \varphi_i \cos \lambda_i & \cos \varphi_i \sin \lambda_i & \sin \varphi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ Z_{ij} \end{pmatrix}$$

Local navigation frame (*n*-frame)

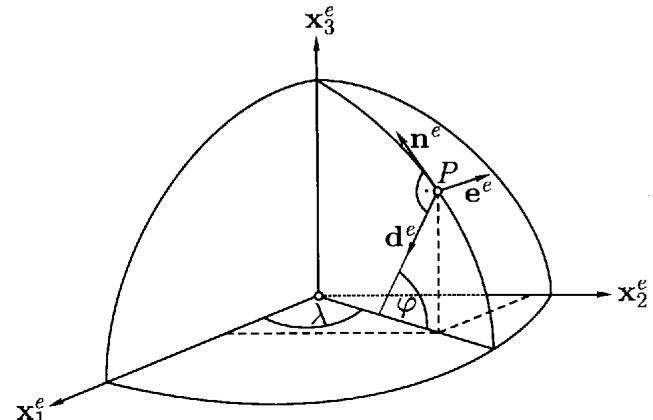
El Sistema de navegación local es importante porque el usuario quiere conocer su orientación respecto a las direcciones *north, east, down*.

Es un conjunto de ejes muy apropiado para resolver velocidad y la aceleración, pero no se emplea como sistema de referencia.

El eje *z*, también conocido como eje *down* (*D*), se define como la normal a la superficie del elipsoide de referencia y apunta aproximadamente al centro de la Tierra.

Los modelos de gravedad más simples asumen que el vector de gravedad coincide con el eje *z/D* del Sistema de navegación local.

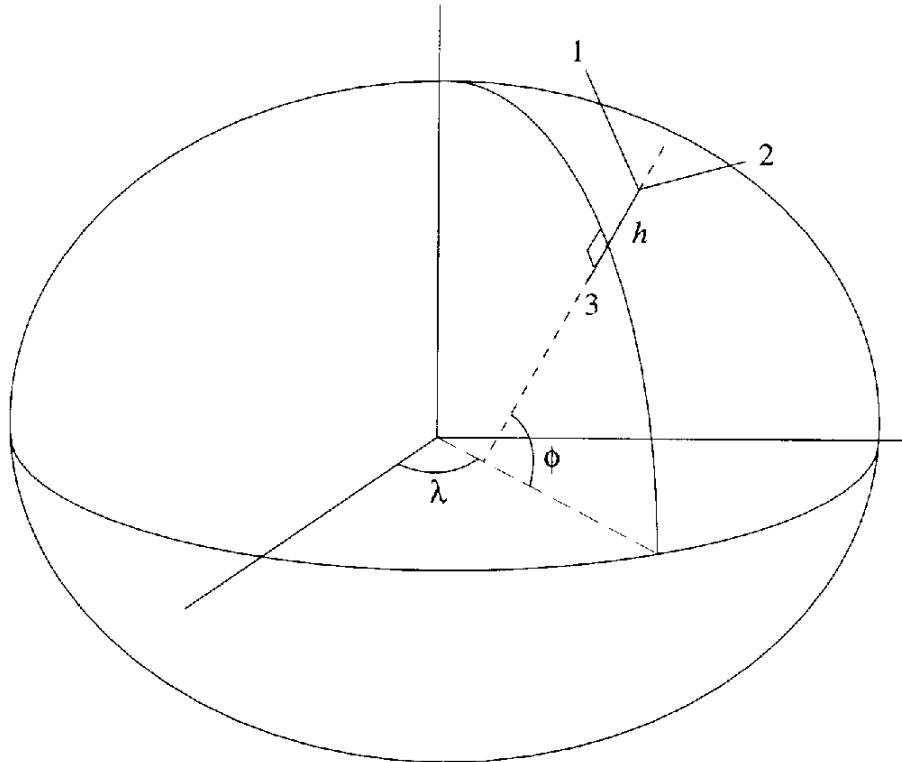
El vector de gravedad real se desvía del anterior debido a Las anomalías locales.



$$\left. \begin{array}{l} \xi_i = \xi(\varphi_i, \lambda_i) \\ \eta_i = \eta(\varphi_i, \lambda_i) \end{array} \right\}$$

n-frame

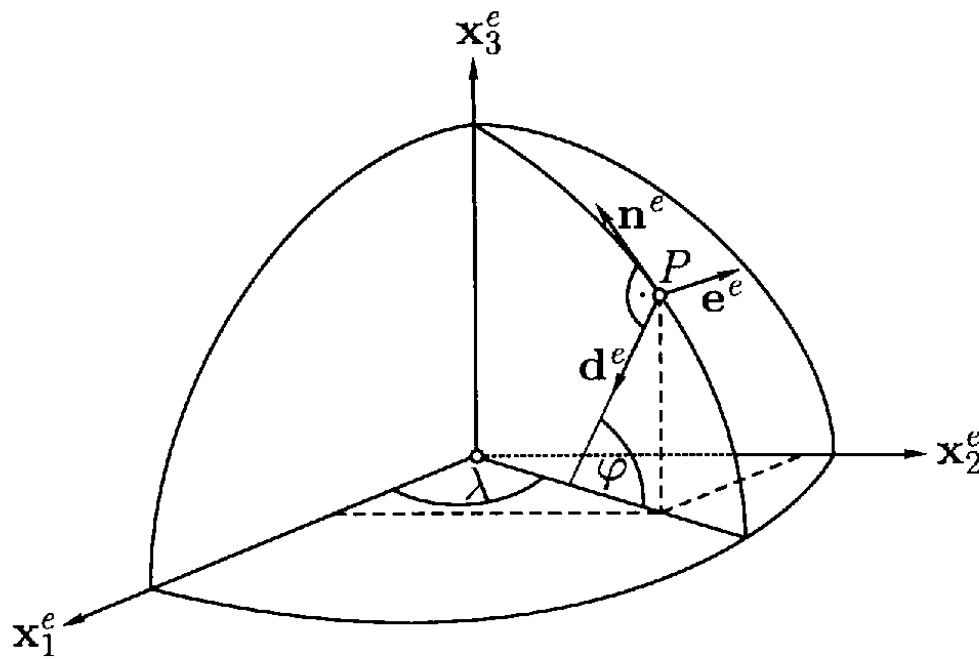
[Jekeli]



$$C_n^e = R_3(-\lambda)R_2(\varphi + \pi/2) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \lambda & -\cos \varphi \cos \lambda \\ -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \lambda & -\cos \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \end{pmatrix}$$

n-frame

[Hofmann]



b-frame

En casi todas las aplicaciones es conveniente establecer un sistema de coordenadas *b-frame* asociado a un determinado cuerpo (*body*).

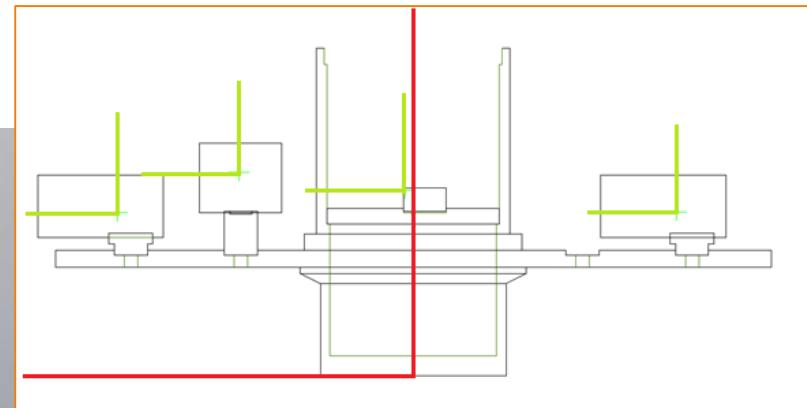
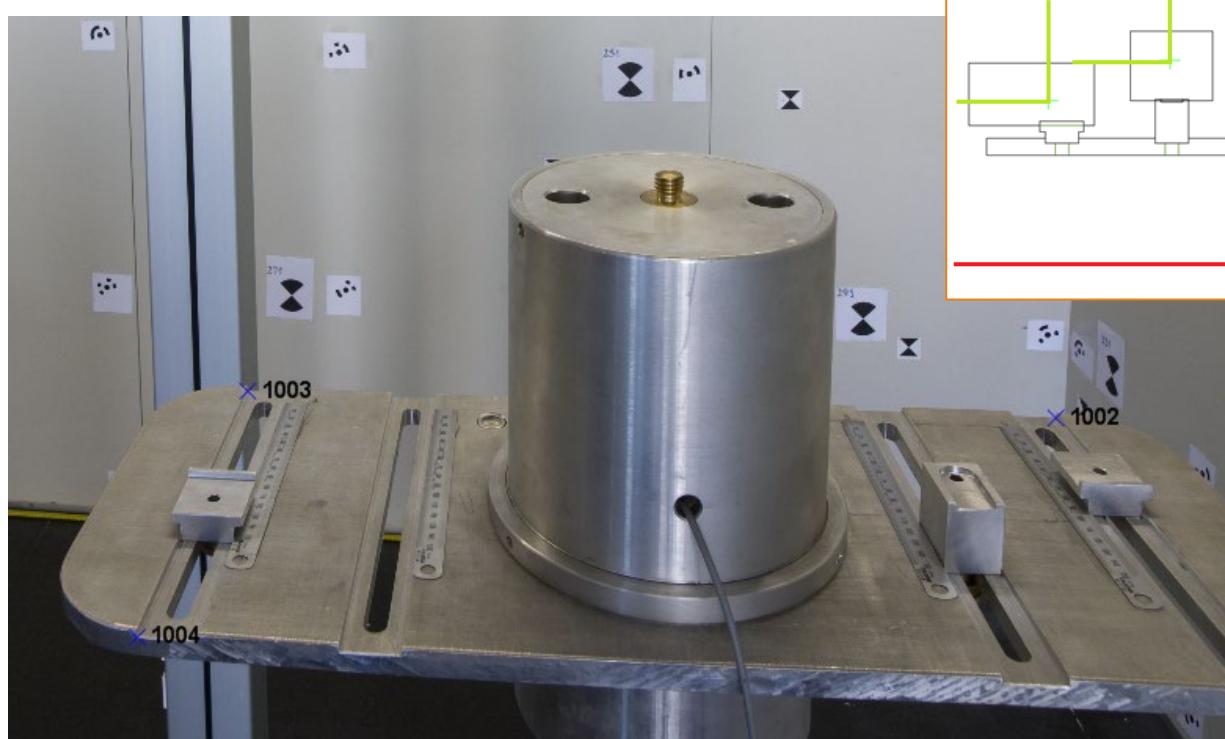
Ejemplo: describir las maniobras respecto al *n-frame* para pilotar o dirigir un vehículo



Convencionalmente se suelen escoger las direcciones hacia delante (*forward*), hacia la derecha (*right*) y hacia el suelo (*through-the-floor*).

b-frame

Ejemplo: *b-frame* asociado a la plataforma rígida o cuerpo en el que van montados todos los dispositivos o sensores a integrar.



b-frame

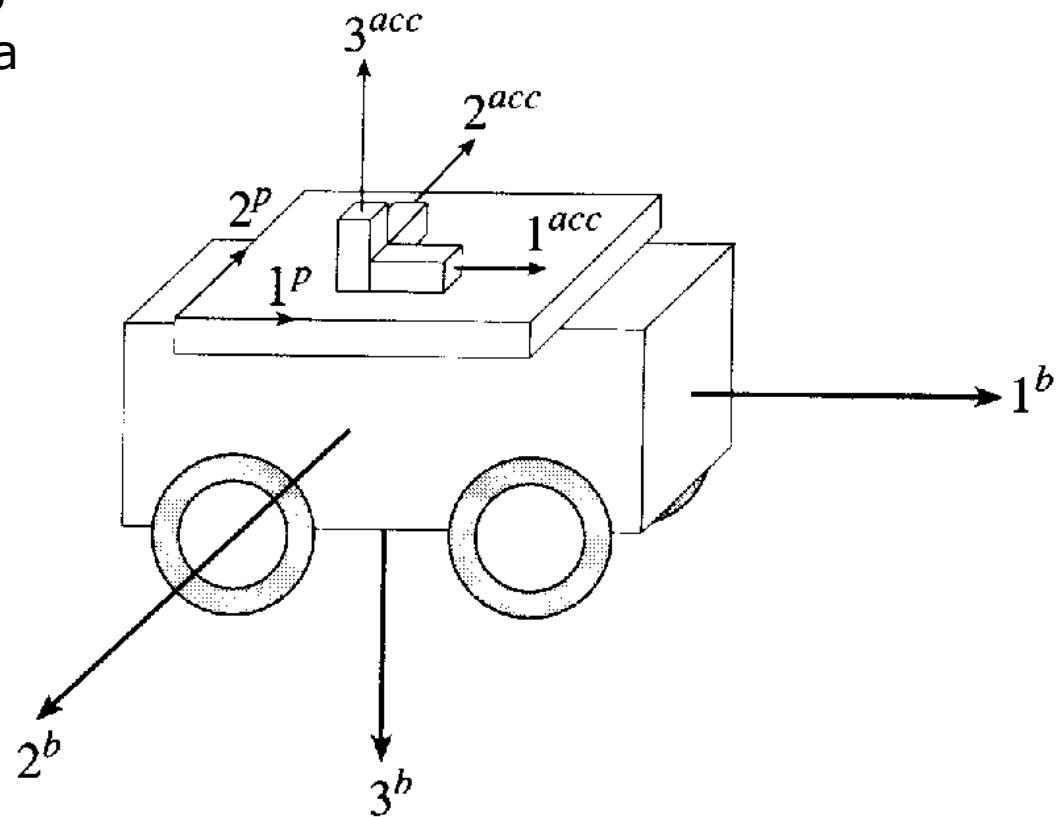


Sistema del vehículo (*b-frame*)

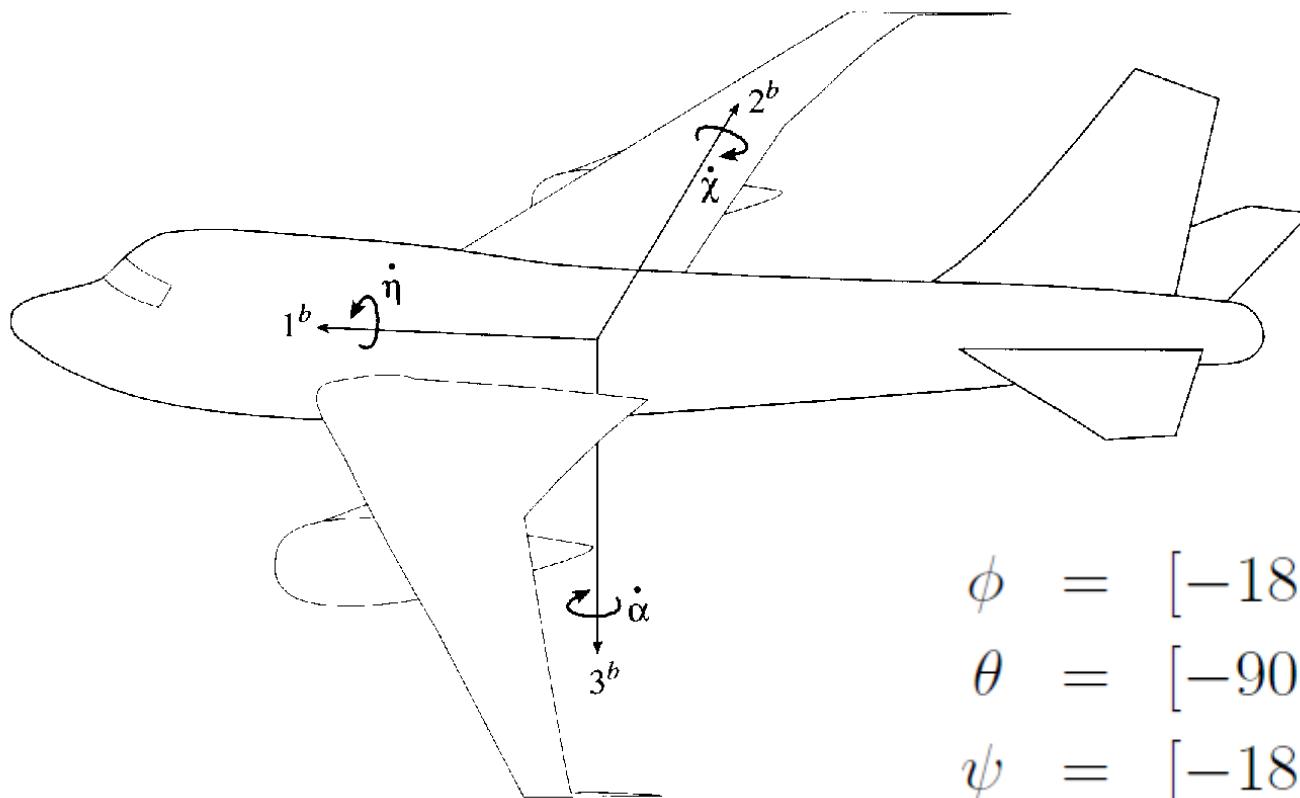
Es el sistema asociado al vehículo que efectúa la navegación.
Generalmente se adopta

X1 → hacia delante
X2 → hacia la derecha
X3 → hacia el suelo

[Jekeli]



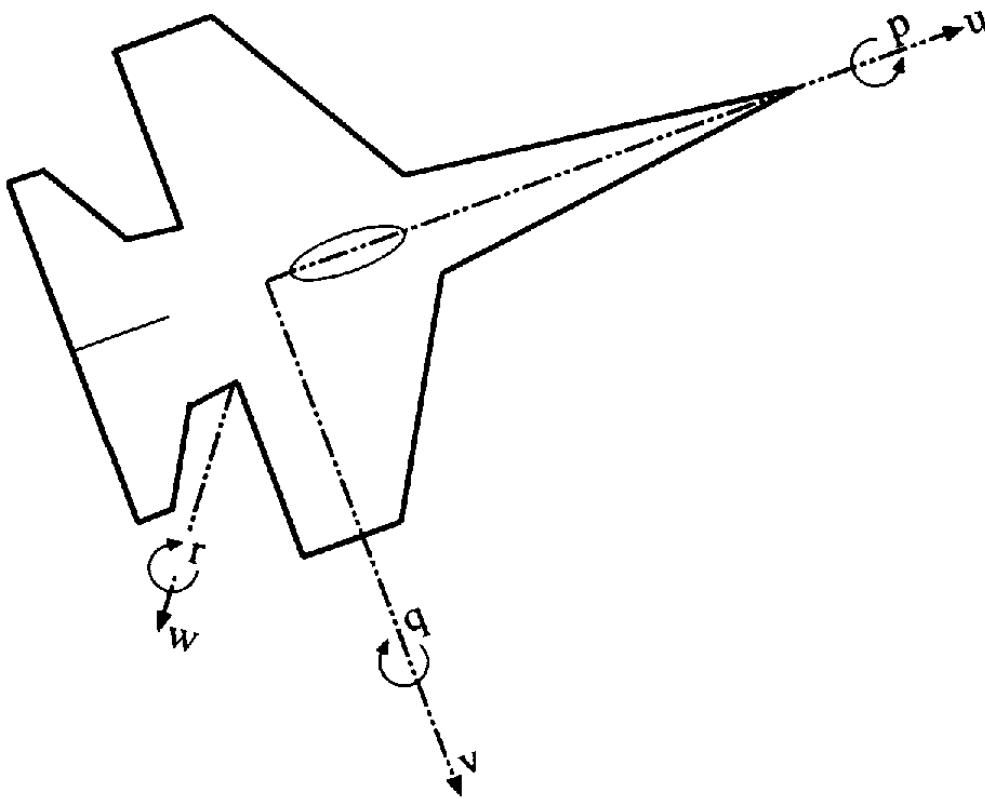
***b*-frame (Roll,Pitch,Yaw)**



$$\begin{aligned}\phi &= [-180^\circ, +180^\circ] \\ \theta &= [-90^\circ, +90^\circ] \\ \psi &= [-180^\circ, +180^\circ]\end{aligned}$$

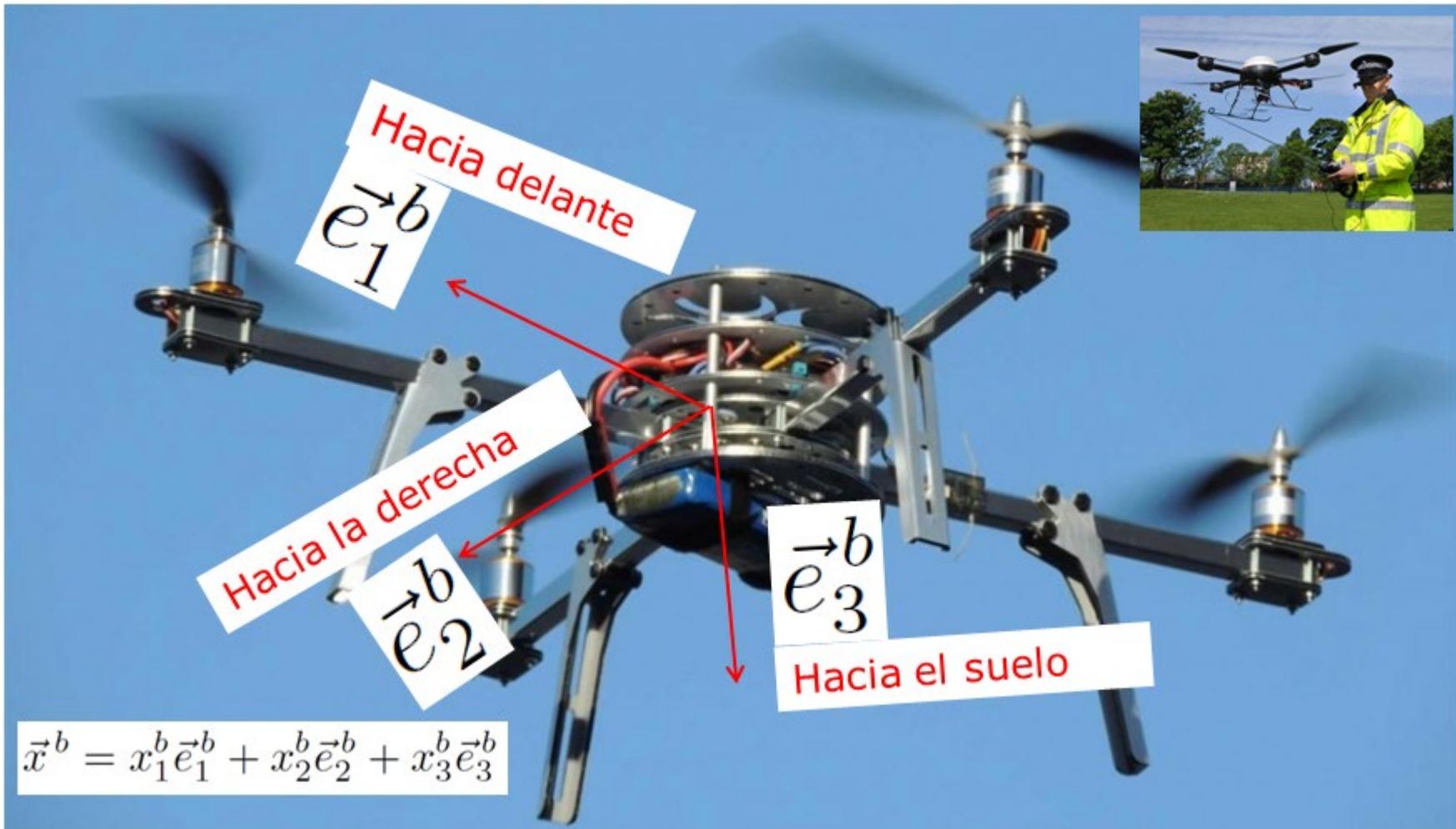
[Jekeli]

b-frame



[Farrell]

b-frame



s-frame

Son los sistemas de coordenadas asociados a cada sensor.



s-frame

Los sistemas de navegación inercial (INS) suelen estar compuestos por un cierto número de unidades de medición inercial (IMU).

Lo más habitual es que cuente con al menos 3 acelerómetros lineales y 3 giróscopos.

Se necesita un único sistema de coordenadas para unificar, modelizar y filtrar los datos registrados por dicho conjunto de IMUs.

Si el INS es del tipo *strapdown*, el s-frame suele coincidir con el ***b-frame***.

Si el INS es de tipo cardán (*gimbaled*) se suele estabilizar alineado con el ***n-frame***.

Transformaciones

Existen múltiples alternativas para transformar **coordenadas, velocidades y aceleraciones** de un sistema de coordenadas a otro.

Las **traslaciones**, en caso de necesitarse, se describen mediante un vector de traslación que desplaza a todas las coordenadas por igual.

El factor de **escala no** se suele incluir como parte de la transformación (definida por el SI). Se escalan los datos.

El aspecto más importante es la **orientación relativa** entre los sistemas que se quieren relacionar.

Al ser sistemas de coordenadas ortogonales, solamente son necesarios tres ángulos para describir la orientación relativa.

La transformación es lineal y se puede expresar mediante una **matriz de rotación, ángulos de rotación** (Euler) o **cuaterniones**.

Cinemática

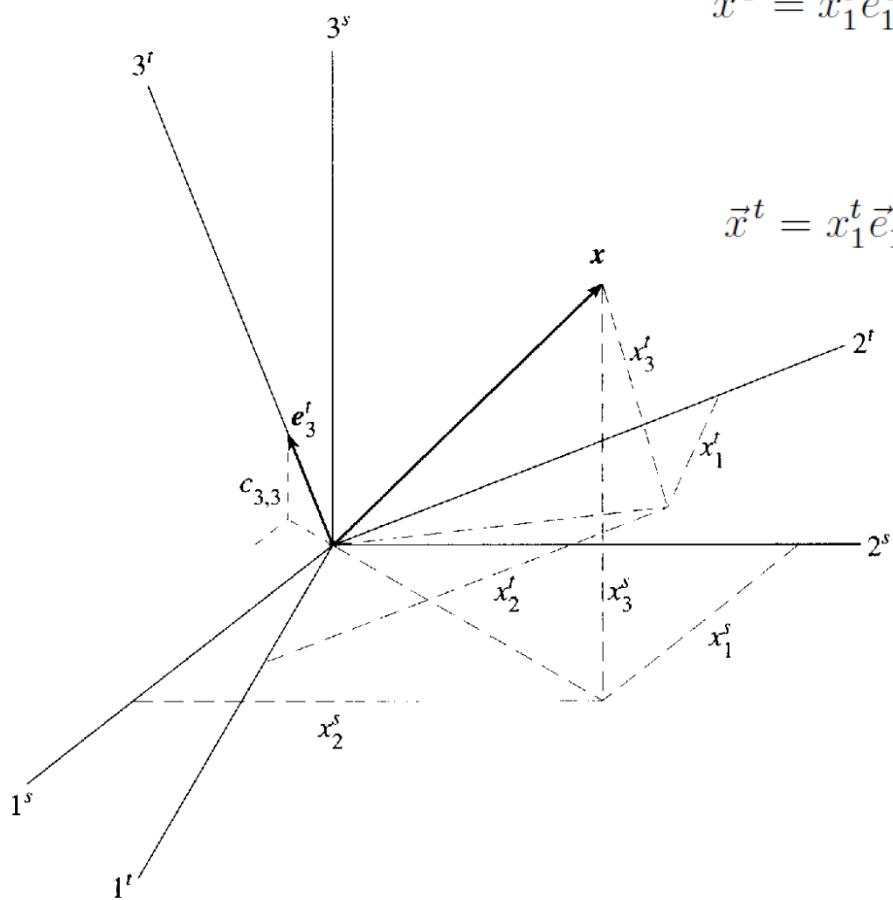
- En navegación, es necesario expresar el movimiento lineal y angular de un sistema de coordenadas respecto a otro.
- La mayoría de variables cinemáticas, como el vector de posición, de velocidad, de aceleración o las velocidades angulares implican en general tres sistemas de referencia:
 - **Objeto** → Sistema cuyo movimiento se describe
 - **Referencia** → Sistema con respecto al cual se describe el movimiento
 - **Resolución** → Sistema en que se representa el movimiento
- El Sistema objeto y el de referencia tienen que ser diferentes, de lo contrario no hay movimiento.
- El Sistema de resolución puede coincidir con el objeto, con el de referencia o con otro cualquiera.
- Una notación completa debería incluir explicitamente los tres sistemas (no es habitual)

$$\vec{x}_{\beta\alpha}^\gamma \quad \vec{v}_{\beta\alpha}^\gamma \quad \vec{a}_{\beta\alpha}^\gamma \quad \vec{\omega}_{\beta\alpha}^\gamma$$

Formas de representar la orientación

- La orientación se puede representar de formas diversas: **matrices de rotación**, (dirección cosines), **ángulos de Euler** (ángulos de navegación) y **cuaterniones**.
- Todas estas formas cumplen dos funciones:
 - **Describen la orientación** de un sistema de coordenadas respecto a otro (e.g., un sistema objeto respecto a uno de referencia)
 - **Proporcionan el medio de transformar la expresión** de un vector desde un sistema a otro

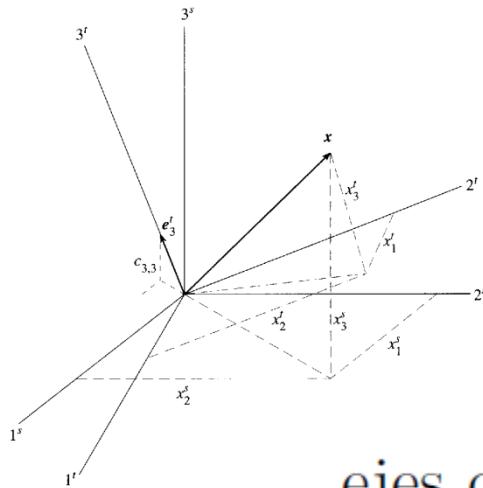
Matriz de rotación



$$\vec{x}^s = x_1^s \vec{e}_1^s + x_2^s \vec{e}_2^s + x_3^s \vec{e}_3^s = \begin{pmatrix} \vec{e}_1^s & \vec{e}_2^s & \vec{e}_3^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^s \\ x_2^s \\ x_3^s \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}^t = x_1^t \vec{e}_1^t + x_2^t \vec{e}_2^t + x_3^t \vec{e}_3^t = \begin{pmatrix} \vec{e}_1^t & \vec{e}_2^t & \vec{e}_3^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^t \\ x_2^t \\ x_3^t \end{pmatrix}$$

Matriz de rotación



vectores $\vec{e}_1^t, \vec{e}_2^t, \vec{e}_3^t$ en el *s-frame*

$$\begin{array}{lll} c_{11} = \vec{e}_1^t \cdot \vec{e}_1^s & c_{12} = \vec{e}_1^t \cdot \vec{e}_2^s & c_{13} = \vec{e}_1^t \cdot \vec{e}_3^s \\ c_{21} = \vec{e}_2^t \cdot \vec{e}_1^s & c_{22} = \vec{e}_2^t \cdot \vec{e}_2^s & c_{23} = \vec{e}_2^t \cdot \vec{e}_3^s \\ c_{31} = \vec{e}_3^t \cdot \vec{e}_1^s & c_{32} = \vec{e}_3^t \cdot \vec{e}_2^s & c_{33} = \vec{e}_3^t \cdot \vec{e}_3^s \end{array}$$

ejes del *t-frame* en el *s-frame*

$$\begin{aligned} \vec{e}_1^t &= c_{11}\vec{e}_1^s + c_{12}\vec{e}_2^s + c_{13}\vec{e}_3^s \\ \vec{e}_2^t &= c_{21}\vec{e}_1^s + c_{22}\vec{e}_2^s + c_{23}\vec{e}_3^s \\ \vec{e}_3^t &= c_{31}\vec{e}_1^s + c_{32}\vec{e}_2^s + c_{33}\vec{e}_3^s \end{aligned}$$

Matriz de rotación

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1^s & \vec{e}_2^s & \vec{e}_3^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^s \\ x_2^s \\ x_3^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1^s & \vec{e}_2^s & \vec{e}_3^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^t \\ x_2^t \\ x_3^t \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{x}^s = C_t^s \vec{x}^t} \quad C_t^s = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

Matriz ortonormal

$$C_t^s (C_t^s)^T = I \Rightarrow C_t^s = (C_s^t)^{-1} = (C_s^t)^T$$

Matriz de rotación

La matriz C_t^s también permite transformar matrices de rotación definidas en el sistema t

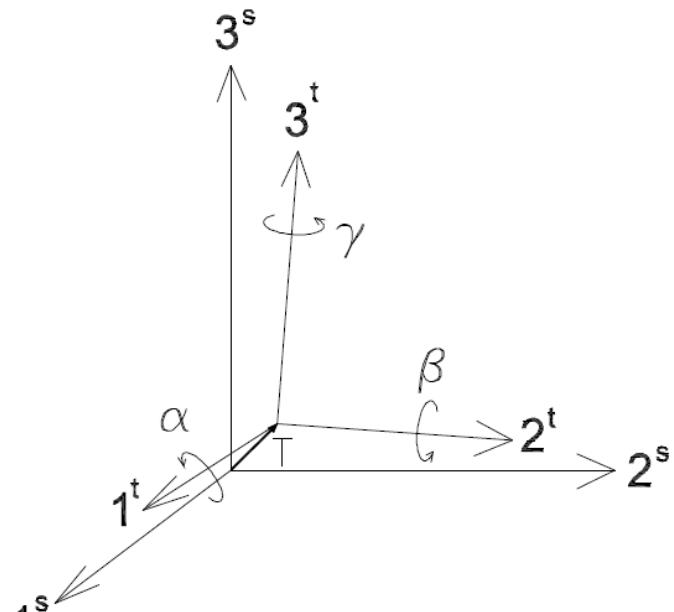
$$\text{Sea } \vec{y}^t = A^t \vec{x}^t$$

$$\vec{y}^t = A^t \vec{x}^t \Rightarrow C_s^t \vec{y}^s = A^t C_s^t \vec{x}^s \Rightarrow \vec{y}^s = C_t^s A^t C_s^t \vec{x}^s$$

$$A^s = C_t^s A^t C_s^t$$

Ángulos de rotación (Euler)

La orientación relativa entre los sistemas *t-frame* y *s-frame* se puede describir también mediante una **secuencia de 3 rotaciones** que se corresponden con los tres grados de libertad de los coeficientes de la matriz de rotación.



$$\vec{x}^s = R_3(\gamma)R_2(\beta)R_1(\alpha)\vec{x}^t$$

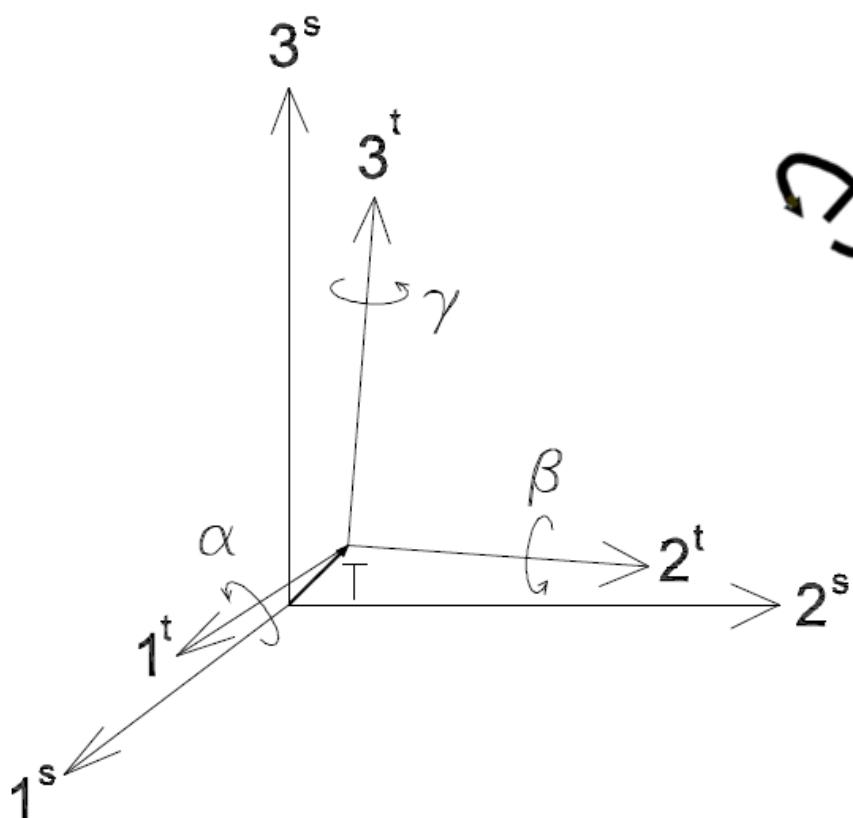
$$R_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad R_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$R_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_j^{-1}(\theta) = R_j^T(\theta)$$

$$R_j^{-1}(\theta) = R_j(-\theta)$$

Ángulos de rotación (Euler)



La **rotación** se considera **positiva** si un observador situado en el origen del sistema y mirando en dirección del eje correspondiente, el sentido del giro coincide con el sentido de giro de las agujas de un reloj o con la regla del sacacorchos

Ángulos de rotación (Euler)

$$C_t^s = R_3(\gamma)R_2(\beta)R_1(\alpha)$$

$$C_t^s = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \beta & \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha + \sin \gamma \cos \alpha & -\cos \gamma \sin \beta \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \\ -\sin \gamma \cos \beta & -\sin \gamma \sin \beta \sin \alpha + \cos \gamma \cos \alpha & \sin \gamma \sin \beta \cos \alpha + \cos \gamma \sin \alpha \\ \sin \beta & -\cos \beta \sin \alpha & \cos \beta \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$(R_3(\gamma)R_2(\beta)R_1(\alpha))^{-1} = (R_3(\gamma)R_2(\beta)R_1(\alpha))^T = R_1(-\alpha)R_2(-\beta)R_3(-\gamma)$$

Relación recíproca

$$\begin{aligned} \alpha &= \arctan \left(\frac{-c_{32}}{c_{33}} \right) &= \arctan \left(\frac{\cos \beta \sin \alpha}{\cos \beta \cos \alpha} \right) && \text{atan2} \\ \beta &= \arcsen(c_{31}) &= \arcsen(\sin \beta) && \\ \gamma &= \arctan \left(\frac{-c_{21}}{c_{11}} \right) &= \arctan \left(\frac{\sin \gamma \cos \beta}{\cos \gamma \cos \beta} \right) && \end{aligned}$$

Ángulos de rotación (Euler)

Para rotaciones diferenciales $\cos \theta \approx 1$ $\sin \theta \approx \theta$

Todas las secuencias producen el mismo resultado

$$C_t^s = R_3(\gamma)R_2(\beta)R_1(\alpha) \approx \begin{pmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix} = I - \Psi$$

$$C_t^s \approx I - \Psi = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Ángulos de rotación (Euler)

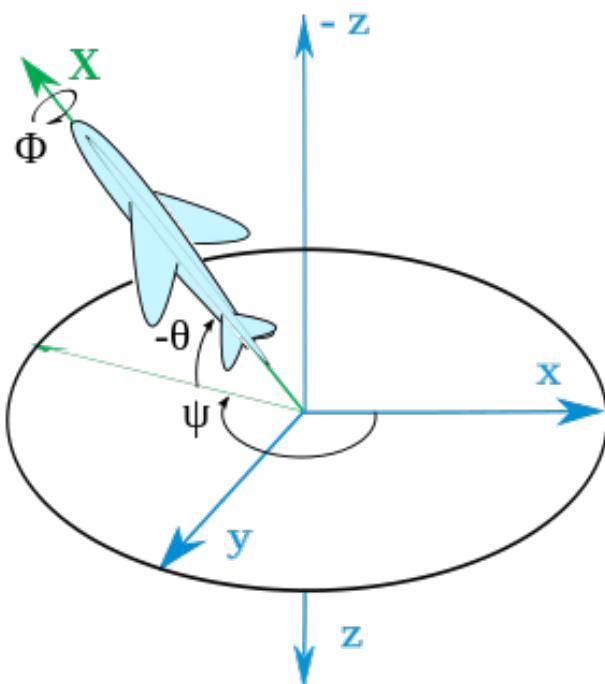
La matriz de rotación directa (giros diferenciales)

$$C_t^s \approx I - \Psi = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de rotación inversa (giros diferenciales)

$$C_s^t \approx \begin{pmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 0 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 0 \end{pmatrix} = I - \Psi^T$$

Ángulos de navegación (*b-frame*)

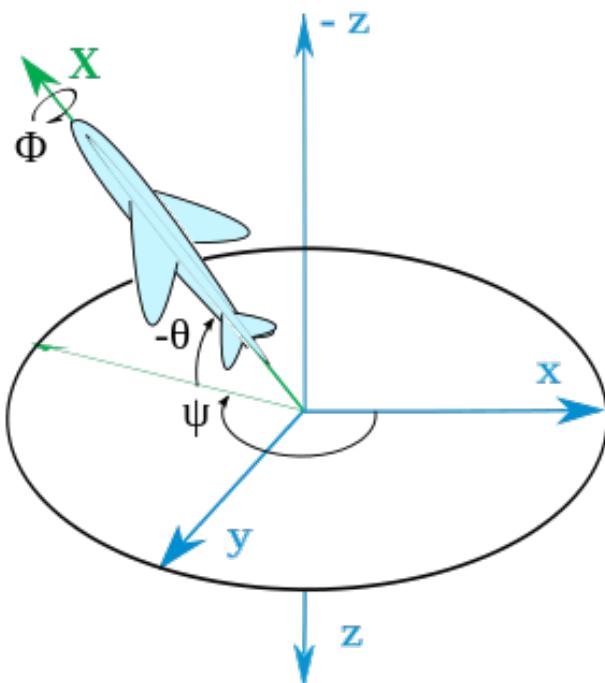


Cuando los ángulos de Euler se refieren a los giros de un sistema *b-frame* con respecto a un *n-frame* del tipo (NED) suelen recibir la denominación específica de ángulos de navegación porque son los que se emplean para describir las maniobras del vehículo.

Una notación bastante común es (ϕ, θ, ψ) con el siguiente dominio

$$\begin{aligned}\phi &= [-180^\circ, +180^\circ] \\ \theta &= [-90^\circ, +90^\circ] \\ \psi &= [-180^\circ, +180^\circ]\end{aligned}$$

Ángulos de navegación (*b-frame*)



Cuando los ángulos de Euler relacionan la posición (*attitude*) del vehículo (*b-frame*) respecto al sistema de navegación (*n-frame*) se denominan *roll*, *pitch* y *yaw* (bank/elevation/heading) y se suelen denotar mediante (ϕ, θ, ψ) (Jekeli η, χ, α)

Por ejemplo: para alinear un vehículo con el sistema de navegación es necesario efectuar los giros $(-\phi, -\theta, -\psi)$, con lo cual los ejes del *b-frame* quedarían paralelos al los del *n-frame*.

$$C_b^n = R_3(-\alpha)R_2(-\chi)R_1(-\eta) \text{ Jekeli Eq.1,91}$$

Es importante el orden en la secuencia de los giros

Navegación aérea: alabeo (ϕ), elevación (θ) y guiñada (ψ).

Navegación marítima: escora (ϕ), inclinación (θ) y deriva (ψ).

Ángulos de navegación

$$\vec{x}^s = C_t^s \vec{x}^t$$

$$C_t^s = R_3(\psi)R_2(\theta)R_1(\phi)$$

$$C_t^s = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \phi + \sin \psi \cos \phi & -\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi \\ -\sin \psi \cos \theta & -\sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi + \cos \psi \sin \phi \\ \sin \theta & -\cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix}$$

Cuidado con la matriz de rotación en el Xsens MTx → User Manual

$$R_{GS} = R_\psi^Z R_\theta^Y R_\phi^X$$

$$\mathbf{x}_G = R_{GS} \mathbf{x}_S$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \\ -\sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}$$

Cuaterniones o cuaternios

Al emplear ángulos de navegación en las ecuaciones diferenciales pueden aparecer singularidades para ciertas dinámicas de movimiento.

Una posible solución es emplear **cuaterniones**.

Los cuaterniones son una secuencia ordenada de cuatro valores

$$q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$$

que permiten describir una rotación ζ en torno a un eje definido por un vector unitario \vec{n}

$$q_\zeta = \left(\cos \frac{\zeta}{2}, \vec{n} \sin \frac{\zeta}{2} \right) = (q_0, q_1, q_2, q_3)$$

Cuaterniones o cuaternios

Las tres rotaciones definidas por los ángulos de Euler en torno a los correspondientes ejes son sustituidas por una única rotación ζ en torno a un eje definido por el vector \vec{n} cuya orientación cambia dependiendo de la rotación realizada

$$C_t^s = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_0) & 2(q_1q_3 - q_2q_0) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_0) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_0) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= \arctan\left(\frac{-2(q_2q_3 - q_0q_1)}{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2}\right) \\ \beta &= -\arcsen(2(q_1q_3 + q_2q_0)) \\ \gamma &= \arctan\left(\frac{-2(q_1q_2 - q_3q_0)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q_0 &= \frac{1}{2}\sqrt{1 + c_{11} + c_{22} + c_{33}} \\ q_1 &= \frac{1}{4q_0}(c_{23} + c_{32}) \\ q_2 &= \frac{1}{4q_0}(c_{31} + c_{13}) \\ q_3 &= \frac{1}{4q_0}(c_{12} + c_{21})\end{aligned}$$

Traslación

- Reference frame, object frame, and resolving frame

$$\mathbf{r}_{\beta\alpha}^\gamma = -\mathbf{r}_{\alpha\beta}^\gamma$$

$$\mathbf{r}_{\beta\alpha}^\gamma = \mathbf{r}_{\beta\delta}^\gamma + \mathbf{r}_{\delta\alpha}^\gamma$$

$$\mathbf{r}_{\beta\alpha}^\delta = \mathbf{C}_\gamma^\delta \mathbf{r}_{\beta\alpha}^\gamma$$

$$\mathbf{r}_{\alpha\beta}^\alpha = -\mathbf{C}_\beta^\alpha \mathbf{r}_{\beta\alpha}^\beta$$

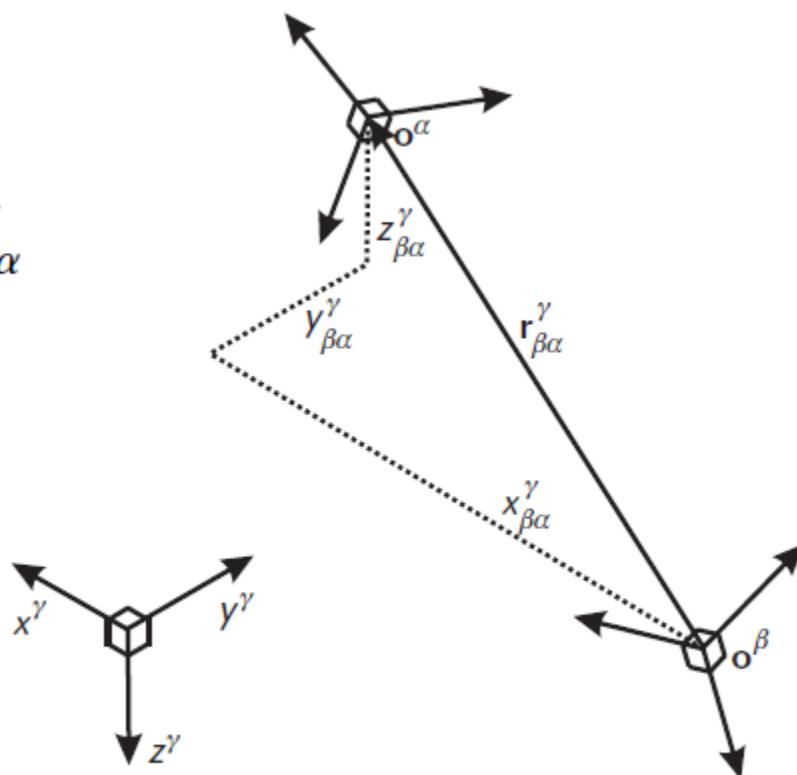


Figure 2.9 Position of the origin of frame α with respect to the origin of frame β in frame γ axes.

Vectores axiales

Los datos angulares proporcionados por las *unidades de medición inercial* (IMUs) generalmente provienen de la integración de las velocidades angulares medidas en los ejes del *s-frame*.

Se necesita transformar, además de las coordenadas, las *velocidades angulares* desde el *s-frame* hasta el *b-frame* o el *n-frame*, según convenga.

Un *vector axial* o *pseudovector* es una tripleta ordenada de ángulos de Euler (α, β, γ), generalmente asociada con alguna magnitud física (*momento angular, el momento de una fuerza, la velocidad angular, campo magnético, etc.*)

Dicha tripleta solamente se comporta como un vector bajo determinadas circunstancias.

Vectores axiales

No cumple la propiedad conmutativa.

$$\vec{\psi}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \quad \vec{\psi}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \quad \vec{\psi}_1 + \vec{\psi}_2 \neq \vec{\psi}_2 + \vec{\psi}_1$$

Se debe a que la transformación rotacional depende del orden con que se efectúan las rotaciones.

Si los ángulos de la tripleta $\vec{\psi} = (\alpha, \beta, \gamma)^T$ son de carácter diferencial, entonces $\vec{\psi}$ se comporta como un vector y permite transformaciones ortogonales arbitrarias.

En el presente contexto $\vec{\psi}$ se considerará siempre como si fuera un vector y que por tanto reúne las mismas propiedades que un vector.

Vectores axiales

Existe una equivalencia entre la matriz Ψ y el producto vectorial

$$[\vec{\psi} \times] = \left[\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \times \right] = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix} = \Psi$$

Por tanto, cuando las rotaciones son de carácter diferencial la transformación desde un sistema *t-frame* hasta un sistema *s-frame* puede escribirse

$$\vec{x}^s = C_t^s \vec{x}^t = (I - \Psi) \vec{x}^t = \vec{x}^t - \Psi \vec{x}^t = \vec{x}^t - \vec{\psi} \times \vec{x}^t$$

Vectores axiales

Supongamos que el vector axial $\vec{\psi}^t$ define una pequeña rotación en el ***t-frame***. Entonces, la correspondiente rotación diferencial se expresaría en el ***s-frame*** mediante

$$\vec{\psi}^s = C_t^s \vec{\psi}^t$$

ya que $\vec{\psi} = (\alpha, \beta, \gamma)^T$ se comporta como un vector y puede ser tratado como tal.

La alternativa empleando matrices es

$$\Psi^s = C_t^s \Psi^t C_s^t$$

produciendo el empleo de ambas expresiones resultados equivalentes

Velocidades angulares

Supuestos previos:

- Un sistema *t-frame* rota respecto a otro sistema *s-frame*
- Dicha rotación es función del tiempo.

La evolución en el tiempo de los ángulos respecto a cada uno de los respectivos ejes instantáneos está definida por el vector axial

$$\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$$

Al ser velocidades angulares (variación diferencial de un ángulo respecto a una variación diferencial de tiempo) **sus componentes no necesitan ser valores pequeños**, pero es necesario tratarlo como un vector axial porque **sólo se comportaría como un vector bajo determinadas secuencias de rotación**.

Velocidades angulares

Notación:

$\vec{\omega}_{st}^t$ Velocidad angular del *t-frame* respecto al *s-frame* expresado en el *t-frame*.

$\vec{\omega}_{ts}^s$ Velocidad angular del *s-frame* respecto al *t-frame* expresado en el *s-frame*.

Se pueden transformar entre diferentes sistemas de igual forma que se transforman los vectores de posición

$$\vec{\omega}_{st}^t = C_s^t \vec{\omega}_{st}^s = -C_s^t \vec{\omega}_{ts}^s$$

ya que

$$\vec{\omega}_{st}^s = -\vec{\omega}_{ts}^s$$

Velocidades angulares

Los vectores de velocidades angulares se pueden acumular (sumar y restar) siempre que se haga en un mismo marco

$$\vec{\omega}_{st}^t = \vec{\omega}_{su}^t + \vec{\omega}_{ut}^t$$

La alternativa a usar $\vec{\omega}_{st}^t$ empleando una matriz es

$$[\vec{\omega}_{st}^t \times] = \Omega_{st}^t = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones diferenciales de la transformación

En general, la orientación relativa entre dos sistemas puede variar con el tiempo y por tanto, se necesita conocer la derivada respecto al tiempo de las matrices de rotación

$$\dot{C}_t^s$$

Es importante identificar claramente en cual de los dos sistemas tiene lugar la diferenciación ([regla general: la diferenciación se efectúa en el sistema que aparece en el superíndice](#)).

$$\dot{C}_t^s = \lim_{\delta\tau \rightarrow 0} \frac{C_t^s(\tau + \delta\tau) - C_t^s(\tau)}{\delta\tau}$$

τ Instante inicial

$\tau + \delta\tau$ Instante final

Ecuaciones diferenciales de la transformación

La transformación en el instante $\tau + \delta\tau$ es el resultado de la transformación hasta el instante τ más un pequeño cambio en el *s-frame* durante el intervalo de tiempo $\delta\tau$

$$C_t^s(\tau + \delta\tau) = \delta C^s C_t^s(\tau)$$

dónde la transformación rotacional diferencial puede escribirse como

$$\delta C^s = I - \Psi^s$$

Ecuaciones diferenciales de la transformación

Por tanto, la derivada de la matriz de rotación respecto del tiempo resulta

$$\begin{aligned}\dot{C}_t^s &= \lim_{\delta\tau \rightarrow 0} \frac{(I - \Psi^s)C_t^s(\tau) - C_t^s(\tau)}{\delta\tau} = \\ &= \lim_{\delta\tau \rightarrow 0} \frac{-\Psi^s C_t^s(\tau)}{\delta\tau} = -\lim_{\delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Psi^s}{\delta\tau} C_t^s(\tau) = -\Omega_{ts}^s C_t^s\end{aligned}$$

$$\vec{\omega}_{st}^s = -\vec{\omega}_{ts}^s$$

$$\Omega_{ts}^s = -\Omega_{st}^s = -C_t^s \Omega_{st}^t C_s^t$$



$$\boxed{\dot{C}_t^s = C_t^s \Omega_{st}^t}$$

Relación entre velocidades lineales

También se pueden relacionar las velocidades lineales del *t-frame* respecto al *s-frame*

$$\dot{\vec{x}}^s = C_t^s \dot{\vec{x}}^t + \dot{C}_t^s \vec{x}^t = C_t^s (\dot{\vec{x}}^t + \Omega_{st}^t \vec{x}^t)$$

o lo que es lo mismo (Ley de Coriolis)

$$C_s^t \dot{\vec{x}}^s = \dot{\vec{x}}^t + \vec{\omega}_{st}^t \times \vec{x}^t$$

El término de la izquierda es un vector en el *t-frame* , pero la diferenciación se efectúa en el *s-frame*

Transformaciones específicas

Entre las transformaciones más habituales en la integración de sensores se encuentran

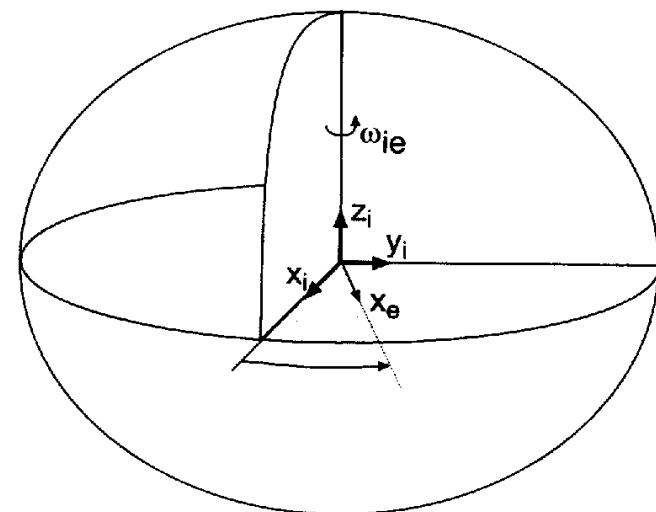
- ✓ Entre el *e-frame* y el *i-frame*
- ✓ Entre el *n-frame* y el *e-frame*
- ✓ Entre el *b-frame* y el *n-frame*

Entre el *e-frame* y el *i-frame*

Aunque el movimiento del polo y el conjunto precesión-nutación ha de incluirse en aplicaciones de alta precisión, en el presente contexto se hará una aproximación simplificada

Simplificación válida para la mayoría de aplicaciones de navegación terrestre:

- ✓ Los sistemas *e-frame* y el *i-frame* son concéntricos.
- ✓ El primero rota alrededor del segundo con una velocidad angular uniforme $\omega = 7292115\text{e-}11 \text{ rad/s}$



$$\vec{\omega}_{ie}^e = (0, 0, \omega_e)^T$$

Entre el *e-frame* y el *i-frame*

El ángulo rotado por la Tierra en un tiempo t es $\omega_e t$, de modo que la matriz de rotación en torno al eje \vec{e}_3^i resulta

$$C_i^e = R_3(\omega_e t) = \begin{pmatrix} \cos \omega_e t & \sin \omega_e t & 0 \\ -\sin \omega_e t & \cos \omega_e t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Compruébese que

$$\vec{\omega}_{ie}^e = \vec{\omega}_{ie}^i$$

Entre el *e-frame* y el *i-frame*

La relación explícita entre las coordenadas del *e-frame* y el *i-frame*

$$\begin{pmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ x_3^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega_e t & -\sin \omega_e t & 0 \\ \sin \omega_e t & \cos \omega_e t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^e \\ x_2^e \\ x_3^e \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ x_3^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega_e t & -\sin \omega_e t & 0 \\ \sin \omega_e t & \cos \omega_e t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\nu + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (\nu + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ [\nu(1 - e^2) + h] \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Entre el *n-frame* y el *e-frame*

$(X, Y, Z) \rightarrow (END)$

La transformación equivale a efectuar una rotación de ángulo $(\varphi + \pi/2)$ entorno al eje *E* local y a continuación rotar un ángulo $-\lambda$ en torno al nuevo eje *D*, es decir

$$C_n^e = R_3(-\lambda)R_2(\varphi + \pi/2) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \lambda & -\cos \varphi \cos \lambda \\ -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \lambda & -\cos \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \end{pmatrix}$$

Entre el *n-frame* y el *e-frame*

Deducción de la velocidad angular relativa

$$\dot{C}_t^s = C_t^s \Omega_{st}^t$$



$$\Omega_{en}^n = C_e^n \dot{C}_n^e$$

$$\dot{C}_n^e = \begin{pmatrix} -\dot{\varphi} \cos \varphi \cos \lambda + \dot{\lambda} \sin \varphi \sin \lambda & -\dot{\lambda} \cos \lambda & \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \lambda \\ -\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \lambda - \dot{\lambda} \sin \varphi \cos \lambda & -\dot{\lambda} \sin \lambda & \dot{\varphi} \sin \varphi \sin \lambda \\ -\dot{\varphi} \sin \varphi & 0 & -\dot{\varphi} \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\Omega_{en}^n = C_e^n \dot{C}_n^e = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\lambda} \sin \varphi & \dot{\varphi} \\ -\dot{\lambda} \sin \varphi & 0 \sin \lambda & -\dot{\lambda} \cos \varphi \\ \dot{\varphi} & \dot{\lambda} \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega}_{en}^n = (\dot{\lambda} \cos \varphi, -\dot{\varphi}, -\dot{\lambda} \sin \varphi)^T$$

Entre el *n-frame* y el *e-frame*

Relación entre la variación de coordenadas geodésicas y la velocidad lineal en el ***n-frame***

$$v_n = \dot{\varphi}(\rho + h)$$

$$v_e = \dot{\lambda}(\nu + h) \cos \varphi$$

$$v_d = -\dot{h}$$

La velocidad angular del ***n-frame*** respecto al ***i-frame*** es sencilla de obtener a partir de

$$\vec{\omega}_{en}^n = (\dot{\lambda} \cos \varphi, -\dot{\varphi}, -\dot{\lambda} \sin \varphi)^T$$

$$\vec{\omega}_{in}^n = ((\dot{\lambda} + \omega_e) \cos \varphi, -\dot{\varphi}, -(\dot{\lambda} + \omega_e) \sin \varphi)^T$$

Entre el ***b-frame*** y el ***n-frame***

Prácticamente en todas las aplicaciones de navegación es necesario transformar entre el ***b-frame*** y el ***n-frame***.

El ***b-frame*** puede estar asociado al vehículo que navega o bien al cuerpo rígido que sustenta el conjunto de sensores cuyos datos se quieren integrar.

$$(\alpha, \beta, \gamma) \quad C_b^n = (C_n^b)^T = R_1(-\alpha)R_2(-\beta)R_3(-\gamma)$$

$$(\phi, \theta, \psi) \quad C_b^n = (C_n^b)^T = R_1(-\phi)R_2(-\theta)R_3(-\psi)$$

$$C_b^n = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta & -\sin \psi \cos \theta & \sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \sin \phi + \sin \psi \cos \phi & -\sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & -\cos \theta \sin \phi \\ -\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi + \cos \psi \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix}$$

Entre el *b-frame* y el *n-frame*

Los giróscopos suelen medir las velocidades angulares y a partir de ellas se deducen los giros

$$\dot{C}_t^s = C_t^s \Omega_{st}^t \quad \vec{\omega}_{nb}^b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \psi \\ 0 & \cos \phi & \cos \psi \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \psi \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \psi \\ 0 & \cos \phi & \cos \psi \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \psi \cos \phi \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{pmatrix} \vec{\omega}_{nb}^b$$

Entre el *b-frame* y el *n-frame*

Un problema es que presentan puntos singulares cuando

$$\theta = \pm 90^\circ$$



$$\tan \theta \text{ y } \sec \theta$$

Solución: empleo de cuaterniones,
que además es **más eficiente**
desde un punto de vista
computacional

$$\begin{cases} \dot{q}_0 &= \frac{1}{2}(q_1\omega_1 + q_2\omega_2 + q_3\omega_3) \\ \dot{q}_1 &= \frac{1}{2}(-q_0\omega_1 - q_3\omega_2 + q_2\omega_3) \\ \dot{q}_2 &= \frac{1}{2}(q_3\omega_1 - q_0\omega_2 - q_1\omega_3) \\ \dot{q}_3 &= \frac{1}{2}(-q_2\omega_1 + q_1\omega_2 - q_0\omega_3) \end{cases}$$