

TEMA 4

SISTEMAS DE COORDENADAS EN FOTOGRAMETRIA

4.1- El proceso fotogramétrico. Proyección central

Se fundamenta en que para formar el rayo proyectivo hacen falta 3 elementos; el centro de proyección (CDP), un punto imagen y un punto terreno.

El origen del haz de rayos proyectivos es común (CDP).

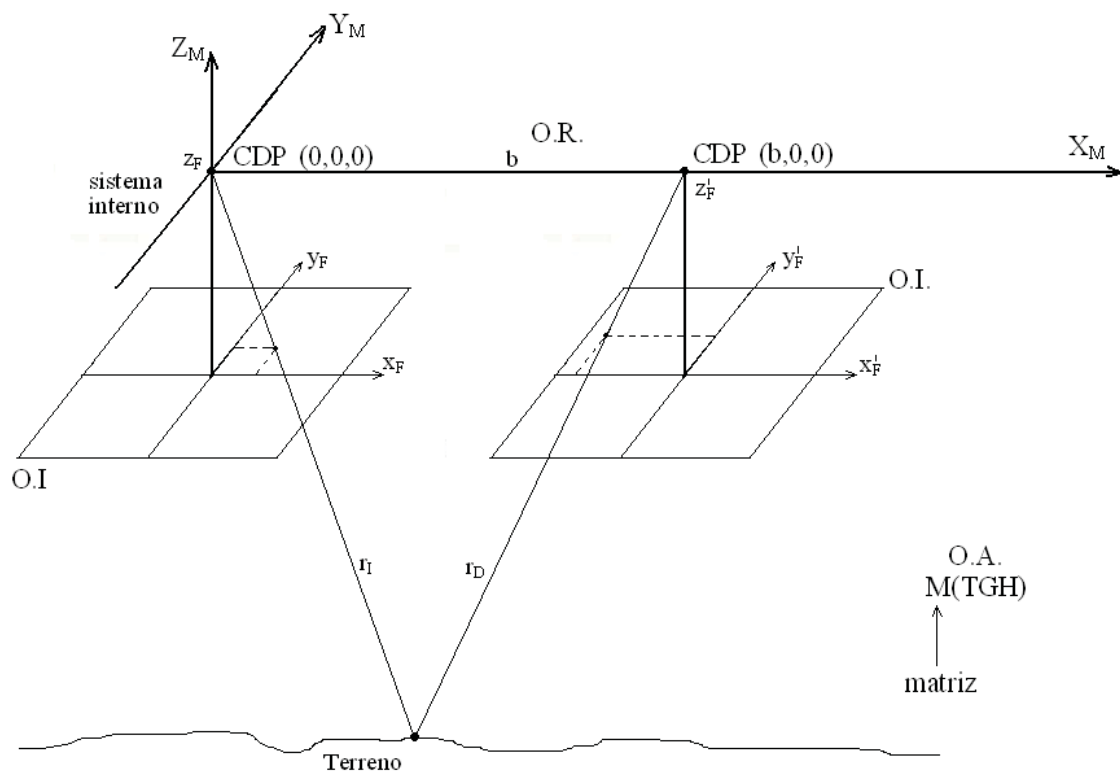
El rayo proyectivo es la línea determinada por CDP, un punto imagen y un punto terreno. El CDP es común para todo el haz de rayos proyectivos.

La restitución analógica, no requería la medición de coordenadas sobre los fotogramas (imagen), todo se realizaba de una forma mecánica, incluso el paso de los puntos obtenidos por intersección de haces en el modelo tridimensional (coordenadas modelo), se transformaba en la cartografía final resultado, y por tanto en las coordenadas terreno, mediante proporciones y relaciones entre escalas de modelo y escalas de plano. Situados los puntos de apoyo sobre una minuta, se encajaba – ajustaba la proyección del modelo estereoscópico a la salida final de la cartografía.

La metodología actual, la fotogrametría analítica y digital, parte de los mismos principios de la proyección central que la restitución analógica, pero sin la necesidad de realizar la materialización física del modelo estereoscópico tridimensional, se podría definir de la siguiente forma:

“Reconstrucción espacial o analítica de dos haces de rayos semejantes a los que inciden en el objetivo de la cámara de toma partiendo del terreno, mediante dos fotografías que, aún cuando sean necesarias, pueden considerarse siempre simultaneas geométricamente”

La reconstrucción analítica de cada uno de los haces, se realizará partiendo de uno de los principios básicos de la proyección central, la condición de colinearidad: el punto de la imagen, el punto centro de proyección y el punto del modelo/terreno, se encuentran en una misma recta. Teniendo definida la recta con dos puntos el tercero siempre tendremos métodos para determinarlo.



El objetivo es definir sistemas de coordenadas internas (ejes fiduciales) y luego definir sistemas de coordenadas que agrupe las dos imágenes.

Los puntos en el fotograma se llaman coordenadas fiduciales, esos mismos puntos en un sistema externo se llaman coordenadas comparador y definiendo la base, ya podemos hablar de un sistema modelo.

Ecuaciones de proyección central:

La condición de partida es que todos los sistemas se consideran paralelos entre sí.

Sobre una misma recta se encuentra el centro de proyección, punto imagen y punto terreno o modelo según el sistema en que nos encontramos.

$$r_1 = \left\{ \begin{array}{l} O_1(x_0, y_0, z_0) \\ (x_i, y_i) \\ (x_m, y_m, z_m) / (x, y, z) \end{array} \right\} r_i$$

$$r_2 = \begin{cases} O_2(x_1, y_1, z_1) \\ (x'_i, y'_i) \\ (x_m, y_m, z_m) / (x, y, z) \end{cases}$$

La intersección $r_1 \cap r_2 = \begin{vmatrix} x_m & y_m & z_m \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$

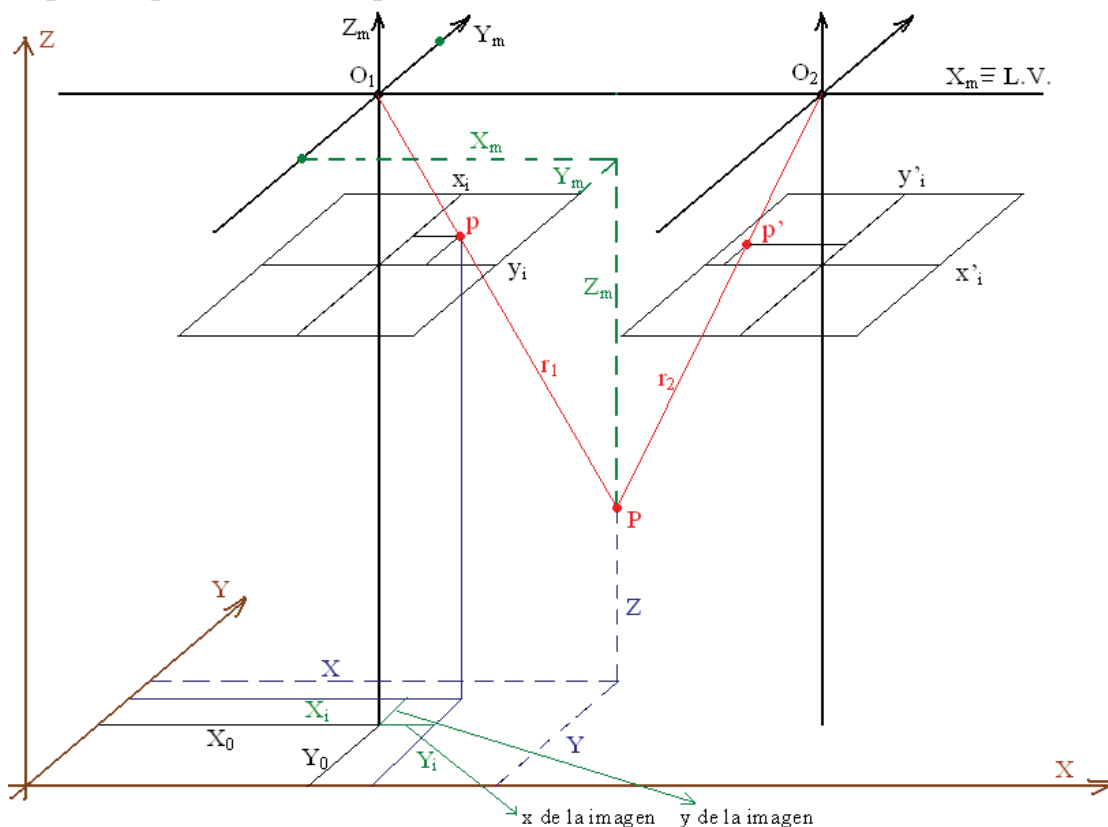
En definitiva, este es el teorema de colinealidad.

Si los centros de proyección están separados una distancia que corresponde a la base real (B) hay que trabajar con la altura de vuelo.

Sobre cada recta hay 3 elementos, conociendo dos de ellos, está definida la recta.

En principio conocemos coordenadas de puntos de apoyo y puntos de la imagen. Definiendo muchas rectas podemos determinar el centro de proyección.

El punto queda definido por la intersección de dos rectas.



NOTA: El dibujo no me ha salido bien del todo; la recta a trazos verde horizontal debería acabar en el punto verde.

$(X_I, Y_I, Z_I) \rightarrow$ Coordenadas imagen.

$(X_0, Y_0, Z_0) \rightarrow$ Coordenadas CDP.

$(X, Y, Z) \rightarrow$ Coordenadas terreno.

$(X_K, Y_K, Z_K) \rightarrow$ Coordenadas comparador.

Z es la focal.

$$\begin{matrix} X_I & Y_I & Z_I \\ X_0 & Y_0 & Z_0 \\ X & Y & Z \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} X_I - X_0 \\ Y_I - Y_0 \\ Z_I - Z_0 \end{matrix} = \frac{X_I - X_0}{X - X_0} = \frac{Y_I - Y_0}{Y - Y_0} = \frac{Z_I - Z_0}{Z - Z_0} \Rightarrow \right.$$

$$\frac{x_i}{X - X_0} = \frac{y_i}{Y - Y_0} = \frac{z_i \equiv f}{Z - Z_0}$$

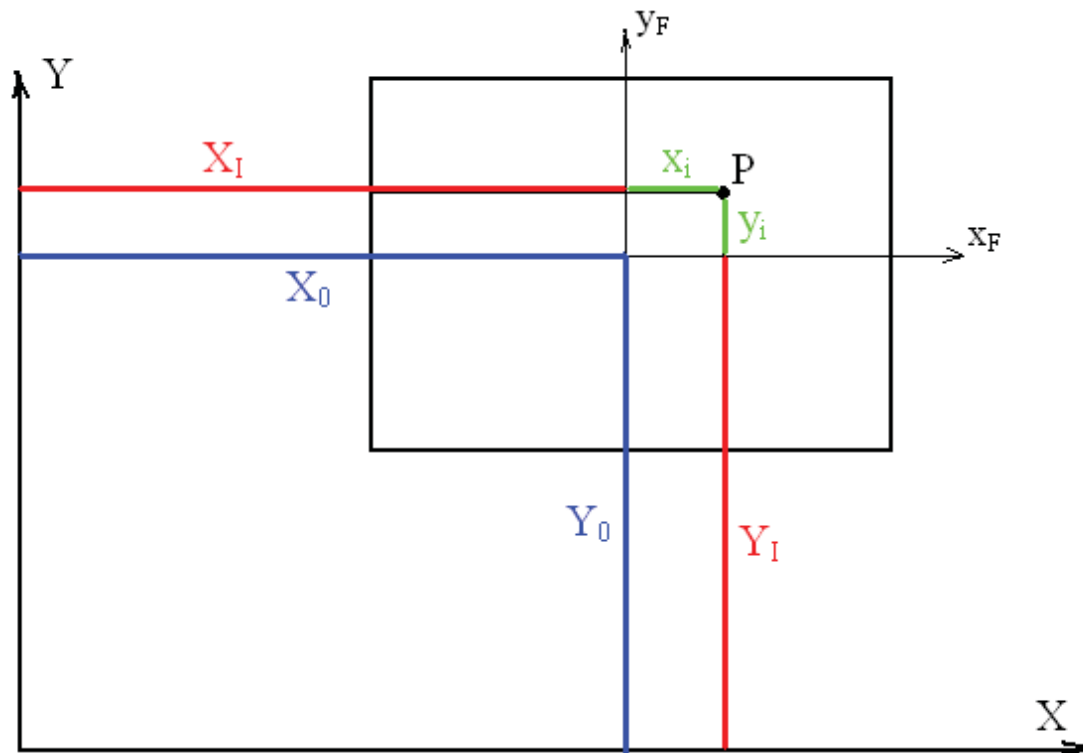
$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \frac{z_i}{Z - Z_0} \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix}$$

Ahora hay que introducir coordenadas comparador que va a estar girando con respecto al sistema imagen.

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = [R] \begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \\ f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \\ f \end{pmatrix} = [R^{-1}] \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$$

$$[R^{-1}] = [M] \equiv \text{matriz de rotación.}$$



$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \frac{z_i}{Z - Z_0} \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix}$$

Todas estas coordenadas están en un sistema paralelo y en un mismo origen. Obtener esas coordenadas supone un problema.

Ya que $[M]$ es la inversa de $[R]$; entonces $m_{13} = R_{31}$

$$[M] \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \frac{z_i}{Z - Z_0} [M] \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_\kappa \\ y_\kappa \\ f \end{pmatrix} = \frac{z_i}{Z - Z_0} [M] \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix}$$

$$a) X_{\kappa}(Z - Z_0) = Z_i \left[m_{11}(X - X_0) + m_{12}(Y - Y_0) + m_{13}(Z - Z_0) \right]$$

$$b) Y_{\kappa}(Z - Z_0) = Z_i \left[m_{21}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{23}(Z - Z_0) \right]$$

$$c) f(Z - Z_0) = Z_i \left[m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0) \right]$$

dividiendo a entre c:

$$X_{\kappa} = f \cdot \frac{\left[m_{11}(X - X_0) + m_{12}(Y - Y_0) + m_{13}(Z - Z_0) \right]}{\left[m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0) \right]}$$

Dividiendo b entre c:

$$Y_{\kappa} = f \cdot \frac{\left[m_{21}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{23}(Z - Z_0) \right]}{\left[m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0) \right]}$$

Y con esto ya se puede determinar r_1

Estas son las ecuaciones básicas de la proyección central.

Estas ecuaciones están ligando las coordenadas comparador, las coordenadas terreno y las del centro de proyección, para obtener x_i , y_i del punto en un fotograma. Pero ese fotograma no necesariamente está en la dirección del eje de las x terreno de ese modelo, por lo que todavía hay que hacer otro giro para obtener un sistema paralelo absoluto.

$$\frac{x_i}{X - X_0} = \frac{y_i}{Y - Y_0} = \frac{z_i \equiv f}{Z - Z_0}$$

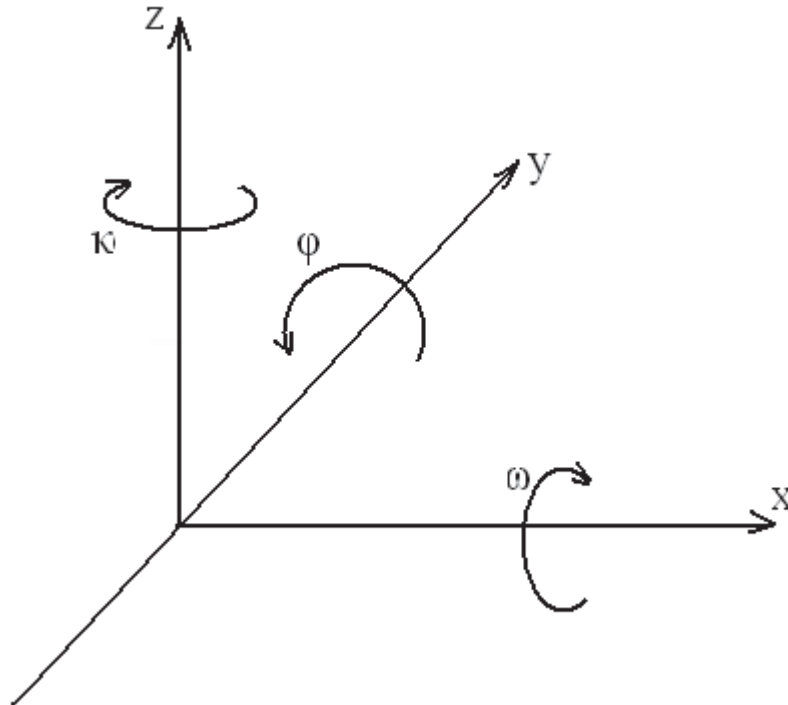
$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ f \end{pmatrix} \quad \text{Donde: } \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \text{es un sistema paralelo al terreno}$$

R es una matriz de rotación

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ f \end{pmatrix} = \text{Son coordenadas medidas.}$$

Obtención de la matriz de rotación tridimensional [M].

Sentido de los giros y sus signos.



$\omega \rightarrow$ positivo $OZ \rightarrow OY$

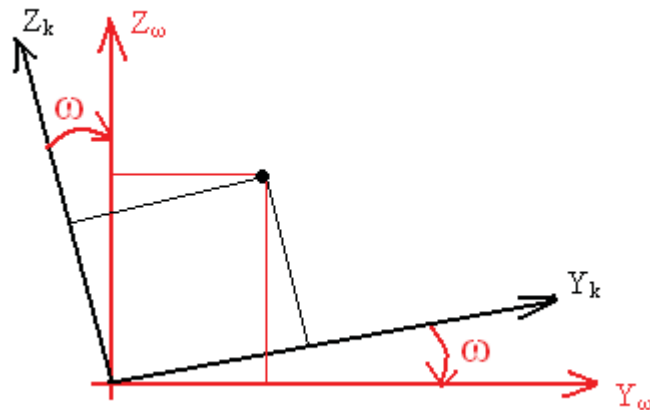
$\phi \rightarrow$ positivo $OX \rightarrow OZ$

$\kappa \rightarrow$ positivo $OY \rightarrow OX$

Un sistema externo y girado hay que ponerlo paralelo al posible sistema modelo.

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{pmatrix}$$

GIRO (ω)



Giro matricial:

$$X_{\omega} = X_{\omega}$$

$$Y_{\omega} = Y \cos \omega - f \sin \omega$$

$$Z_{\omega} = Y \sin \omega + f \cos \omega$$

Sentido matricial en dos dimensiones:

$$\begin{pmatrix} Y_{\omega} \\ Z_{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_k \\ Z_k \end{pmatrix}$$

Sistema matricial en tres dimensiones:

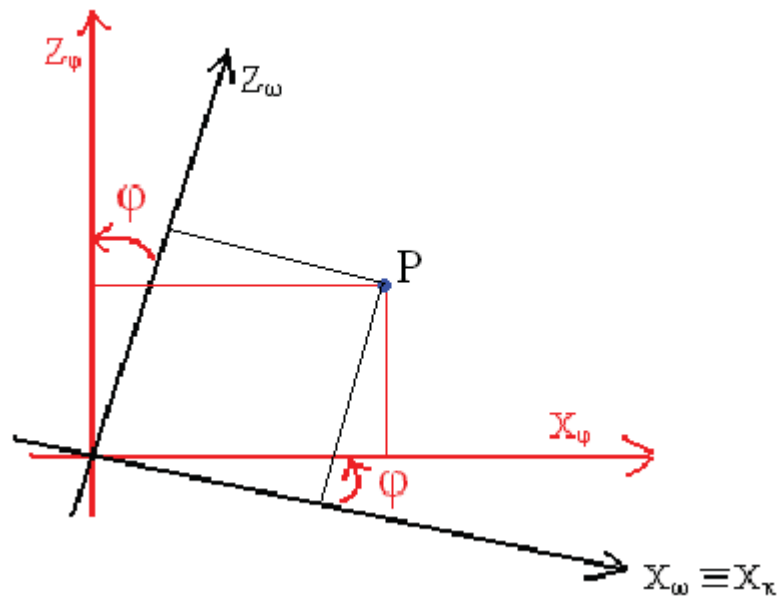
$$\begin{pmatrix} X_{\omega} \\ Y_{\omega} \\ Z_{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \\ f \end{pmatrix} = [R]_{\omega} \cdot \begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \\ f \end{pmatrix}$$

Si el giro se produce en sentido horario el signo $-$ aparecerá donde está.

Si el giro se produce en sentido antihorario el signo $-$ aparecerá en el otro

seno: $\begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ -\sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix}$

GIRO (φ)



Giro matricial

$$X_\varphi = X_\omega \cos \varphi + Z_\omega \sin \varphi$$

$$Y_\varphi = Y_\omega$$

$$Z_\varphi = -X_\omega \sin \varphi + Z_\omega \cos \varphi$$

Sentido matricial en dos dimensiones:

$$\begin{pmatrix} X_\varphi \\ Z_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_\omega \\ Z_\omega \end{pmatrix}$$

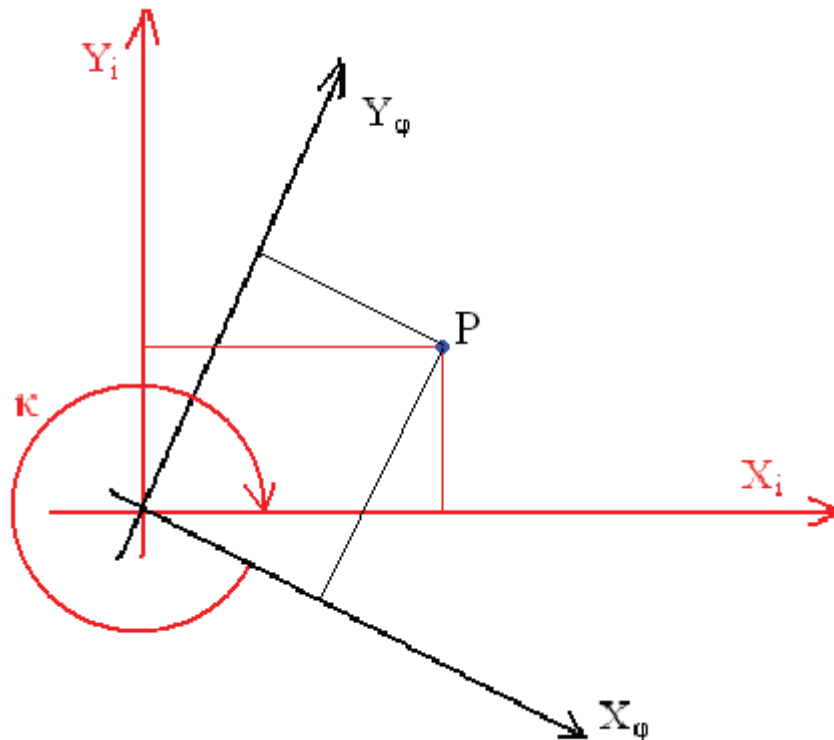
Sistema matricial en tres dimensiones:

$$\begin{pmatrix} X_\varphi \\ Y_\varphi \\ Z_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_\omega \\ Y_\omega \\ Z_\omega \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos:

$$[R]_\varphi \begin{pmatrix} X_\omega \\ Y_\omega \\ Z_\omega \end{pmatrix} = [R]_\varphi \cdot [R]_\omega \cdot \begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \\ f \end{pmatrix}$$

GIRO (κ)



Giro matricial

$$X_i = X_\varphi \cos \kappa + Y_\varphi \sen \kappa$$

$$Y_i = -X_\varphi \sen \kappa + Y_\varphi \cos \kappa$$

$$Z_i = Z_\varphi$$

Sentido matricial en dos dimensiones:

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \kappa & -\sen \kappa \\ \sen \kappa & \cos \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_\varphi \\ Y_\varphi \end{pmatrix}$$

Sentido matricial en tres dimensiones:

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \kappa & -\sen \kappa & 0 \\ \sen \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_\varphi \\ Y_\varphi \\ Z_\varphi \end{pmatrix} =$$

$$[R]_K \begin{pmatrix} X_\varphi \\ Y_\varphi \\ Z_\varphi \end{pmatrix} = [R]_K \cdot [R]_\varphi \cdot \begin{pmatrix} X_\omega \\ Y_\omega \\ Z_\omega \end{pmatrix} =$$

$$\underbrace{[R]_K \cdot [R]_\varphi \cdot [R]_\omega}_{[R]} \cdot \begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \\ f \end{pmatrix}$$

$$[R] = [R]_K \cdot [R]_\varphi \cdot [R]_\omega = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

Los componentes de la matriz de giro [R] son:

$$r_{11} = \cos \omega \cdot \cos \varphi$$

$$r_{12} = -\sin \kappa \cdot \cos \omega + \cos \kappa \cdot \sin \varphi \cdot \sin \omega$$

$$r_{13} = \sin \omega \cdot \sin \kappa + \cos \omega \cdot \sin \varphi \cdot \cos \kappa$$

$$r_{21} = \sin \kappa \cdot \cos \varphi$$

$$r_{22} = \cos \kappa \cdot \cos \omega + \sin \omega \cdot \sin \varphi \cdot \sin \kappa$$

$$r_{23} = -\sin \omega \cdot \cos \kappa + \cos \omega \cdot \sin \varphi \cdot \sin \kappa$$

$$r_{31} = -\sin \varphi$$

$$r_{32} = \sin \omega \cdot \cos \varphi$$

$$r_{33} = \cos \kappa \cdot \cos \varphi$$

Los componentes de la matriz de giro $[R]^{-1} = [M]$ son:

$$m_{11} = \cos \varphi \cdot \cos \kappa$$

$$m_{12} = \cos \varphi \cdot \sin \kappa$$

$$m_{13} = -\sin \varphi$$

$$m_{21} = \sin \varphi \cdot \sin \omega \cdot \cos \kappa - \cos \omega \cdot \sin \kappa$$

$$m_{22} = \sin \varphi \cdot \sin \omega \cdot \sin \kappa + \cos \omega \cdot \cos \kappa$$

$$m_{23} = \sin \omega \cdot \cos \varphi$$

$$m_{31} = \sin \varphi \cdot \cos \omega \cdot \cos \kappa + \sin \omega \cdot \sin \kappa$$

$$m_{32} = \sin \varphi \cdot \cos \omega \cdot \sin \kappa - \sin \omega \cdot \cos \kappa$$

$$m_{33} = \cos \omega \cdot \cos \varphi$$

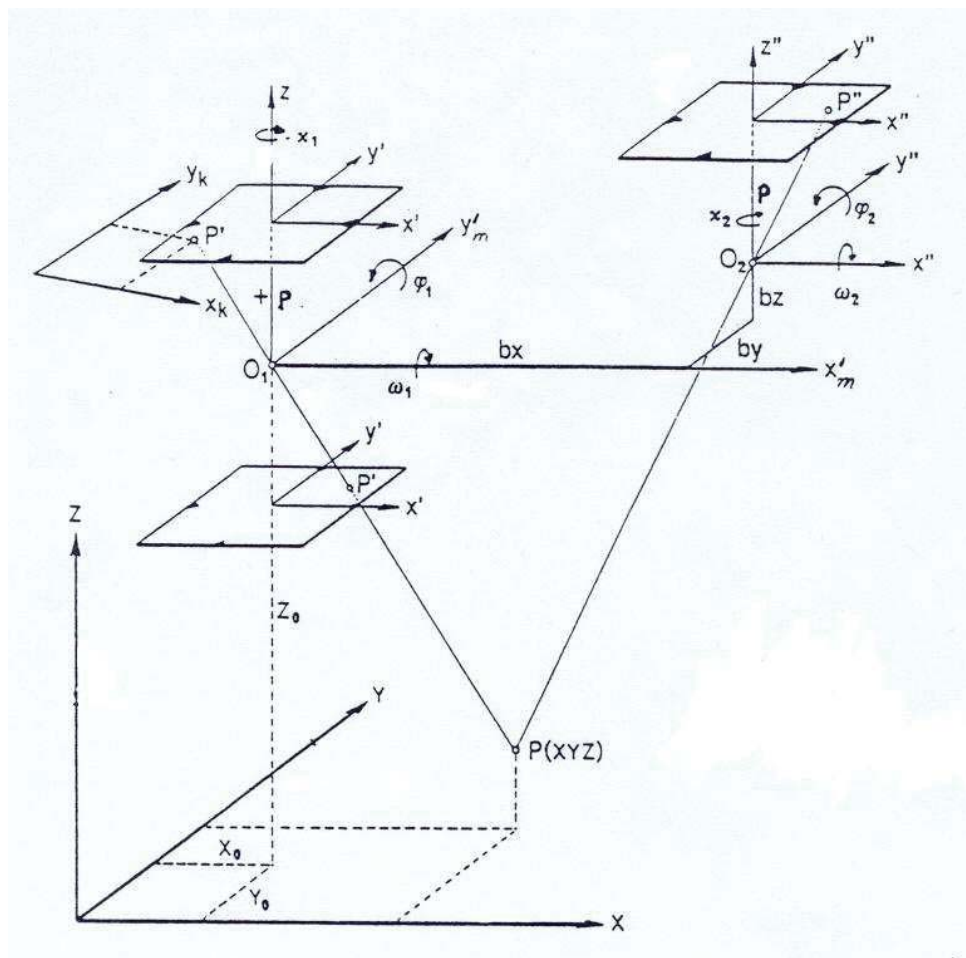
4.2- Sistemas de coordenadas: cámara, imagen, comparador, modelo, objeto/terreno.

A lo largo de un proceso fotogramétrico de restitución, en el que partiendo de unos fotogramas obtenemos datos del terreno, se van utilizando para un mismo punto distintos tipos de coordenadas cartesianas referenciadas a distintos ejes, según el momento en que se encuentre el proceso.

Nos encontraremos, siempre y cuando realicemos dos tomas de un mismo objeto, los siguientes tipos de coordenadas:

4.2.1- Coordenadas cliché. (x_k, y_k)

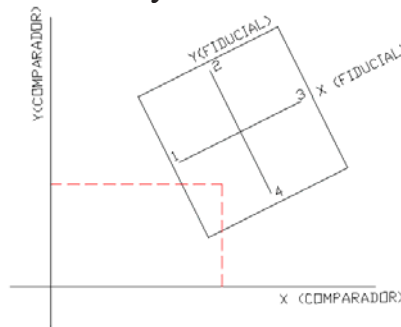
En la siguiente figura se muestran los sistemas de coordenadas que intervienen en el proceso, se parte de una condición teórica de tomas verticales y ejes paralelos entre sí.



Coordenadas planas, referidas a cualquier sistema cartesiano plano de la imagen del punto representado en el cliché.

Para cualquier punto del objeto fotografiado tendremos dos pares de coordenadas:

- Fotograma izquierdo: $x_k \quad y_k$
- Fotograma derecho: $x'_k \quad y'_k$



La medición de estas coordenadas puede considerarse como el único contacto físico que se va a tener sobre los fotogramas, por lo que se deberá llevar un control exhaustivo y una precisión máxima a la hora de determinar este tipo de coordenadas. Los instrumentos que utilizaremos para su determinación, pueden ser:

- Monocomparadores.
- Estereocomparadores.

4.2.2- Coordenadas imagen. $\begin{cases} (x, y, p) \\ (x', y', p) \end{cases}$

Coordenadas de la imagen de un punto respecto al sistema definido por las marcas fiduciales y el eje principal.

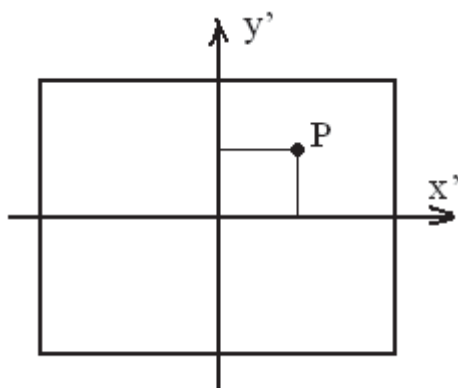
- Fotograma izquierdo: x, y, p
- Fotograma derecho: x', y', p

El sistema de coordenadas imagen, nos define la posición de un punto sobre el fotograma, a partir de estas coordenadas, podemos conocer la relación matemática existente entre el sistema de coordenadas imagen y el sistema de coordenadas terreno por medio de las ecuaciones matemáticas correspondientes a la proyección central.

El sistema de coordenadas imagen es ortogonal, y esta centrado en el centro de proyección izquierdo (O_1), según se observa en la figura 1, las coordenadas de un punto sobre los fotogramas vendrían definidos por:

Fotograma izquierdo: x_p, y_p

Fotograma derecho: x'_p, y'_p



El sistema de coordenadas imagen debe estar exento de los errores sistemáticos que se desarrollarán a lo largo de este tema. Los ejes x e y imagen llevan una dirección muy similar a la materializada por los ejes formados por la unión de marcas fiduciales opuestas en el fotograma, por este motivo y solo para medidas expeditas de fotografía vertical, pueden utilizarse estas coordenadas fiduciales como si de coordenadas imagen se tratara. Claro está que el punto central de la imagen fotográfica, punto centro del eje de coordenadas fiduciales, rara vez coincide con el punto centro de coordenadas imagen. Este desplazamiento existente entre ambos puntos centrales, físico y geométrico, viene definido por las coordenadas del punto principal, (x_{wf}, y_{wf}) , esta diferencia de posición entre los puntos principales imagen y fiducial viene de la existencia de errores sistemáticos en la lente de la cámara.

Los valores (x_{wf}, y_{wf}) y la focal, junto con los valores de las distorsiones producidas en el fotograma, constituyen los parámetros de orientación interna de la fotografía. La orientación interna, recrea la posición de los haces proyectivos en el momento de la toma en la cámara del restituidor.

Tratándose las coordenadas imagen como un sistema tridimensional, deberemos adoptar un valor para la coordenada z , la coordenada z de la imagen de un punto cualquiera en un positivo es igual a la distancia principal negativa ($-f$), mientras que en un negativo, la distancia principal se considera positiva (f).

4.2.2- Coordenadas modelo. (x_m, y_m, z_m)

Coordenadas de un punto en el modelo métrico (modelo plástico en 3D), obtenido tras la orientación relativa, los ejes serán cartesianos y perpendiculares entre sí, pudiendo variar a nuestro antojo el punto origen (0,0,0).

Cuando se trabaja en fotogrametría analítica, podemos obtener las coordenadas modelo o directamente las terreno. La formación del modelo estereoscópico no es requisito indispensable para la obtención de las coordenadas terreno. Si bien es mucho más sencillo obtener las coordenadas modelo para con posterioridad y mediante una transformación afin tridimensional muy sencilla, obtener las coordenadas terreno relacionando las coordenadas modelo obtenidas con las coordenadas de los puntos de apoyo medidas en campo.

El sistema de coordenadas modelo, según podemos observar en la figura 1, es el que tiene como origen de coordenadas el centro de proyección izquierdo (O_1), eje de las X, la componente b_x de la base estereoscópica, eje Y la componente b_y de la base estereoscópica y eje Z el perpendicular al plano formado por los dos anteriores y coincidente con la dirección de la focal. Las coordenadas que se midan en este sistema modelo serán el resultado de la intersección de dos haces homólogos. La escala de medida de este sistema de coordenadas puede ser variable en función de los distintos valores que puede adoptar b_x , definiéndose como escala de modelo, la relación:

$$mc = \text{base} - \text{restituidor} / \text{BASE} - \text{REAL}$$

4.2.3- Coordenadas terreno. (X, Y, Z)

Coordenadas de un punto restituído en el sistema definido por los puntos de apoyo, es decir, en el sistema absoluto de coordenadas.

A la vista de la gráfica de la página 4 del presente tema, se observan todos los sistemas perpendiculares entre sí, en la realidad esto no ocurre así, deberemos considerar un conjunto de giros (κ, φ, ω) respecto a los sistemas ya considerados, de forma que podamos:

- Realizar la orientación externa de los dos haces perspectivas.

- Situar el sistema de coordenadas modelo paralelo al sistema absoluto.

También deberemos tener en cuenta para conseguir el modelo estereoscópico los componentes de la base (b_x , b_y , b_z) para obtener la separación de los centros de proyección de las tomas.

Todo esto, dicho de otra forma; será un sistema de coordenadas terreno aquel que definan las coordenadas tomadas como puntos de apoyo, pudiendo ser una sistema cartográfico según una determinada proyección de referencia, o considerando supuesto de tierra plana con coordenadas locales, o considerando un sistema terrestre para un determinado levantamiento arquitectónico. El sistema de coordenadas terreno será el que determina la salida final del proceso de restitución.

En la figura de la cuarta página, el sistema terreno viene definido con los ejes X,Y,Z, a este sistema se puede llegar directamente desde las ecuaciones de colinearidad, o a partir de la transformación afin tridimensional de las coordenadas modelo, en un caso deberemos trabajar con la distancia entre centros de proyección real en el momento de la toma fotogramétrica, y en otro con el determinado en el restituidor para obtener el modelo plástico tridimensional.

Con anterioridad se ha comentado el concepto de orientación interna, una vez realizada esta, y siguiendo una metodología puramente analítica, se deberá realizar la orientación externa, consistente en la localización y orientación de la proyección central que define la orientación interna sobre el sistema de coordenadas terreno. Los parámetros que definen la orientación externa son: la posición del centro de proyección en el sistema terreno y la orientación angular del sistema espacial de coordenadas imagen en el sistema terreno, mediante los giros κ , ϕ , ω , sobre los ejes X,Y,Z respectivamente.

4.3- Errores sistemáticos. Correcciones.

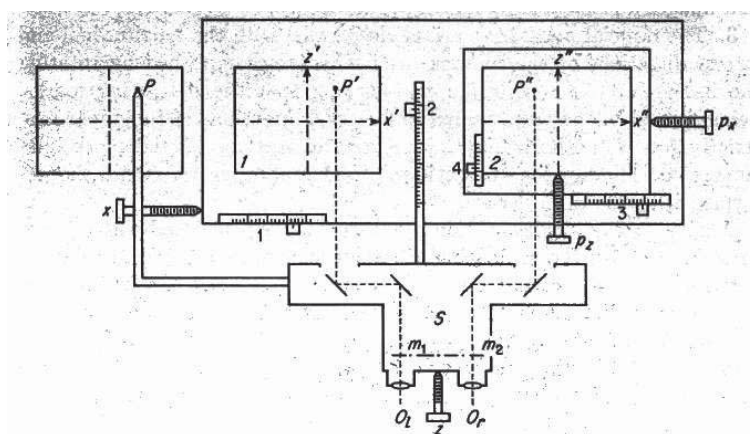
Para la aplicación de la proyección central con todas las garantías de colinearidad, debemos obtener unas coordenadas imagen exentas de errores propios en la medición sobre los fotogramas. Esta medición puede realizarse con monocomparadores, estereocomparadores, en el caso de imágenes fotográficas físicas, o desde escáneres o cámaras digitales en el caso de fotogrametría digital. Estos instrumentos, lógicamente no están

exentos de error. Tendremos que controlar por un lado los errores instrumentales que provocan deformaciones de las coordenadas medidas, y por otro lado, consideraremos los errores propios de la imagen fotográfica, a continuación enumeramos cada uno de ellos:

4.3.1- Corrección por error del comparador:

El instrumento que realiza la medición de las coordenadas cliché es el comparador, existiendo dos tipos:

- Monocomparadores: Se obtienen las coordenadas de puntos de un fotograma mediante punterías monoscópicas e individuales punto a punto.
- Estereocomparadores: Son la base de los restituidores analíticos, permiten obtener las coordenadas cliché de puntos homólogos, fotograma izquierdo y derecho a la vez mediante punterías estereoscópicas (medición simultánea de las coordenadas de un mismo punto en los clichés que forman el par fotogramétrico). Son mucho más precisos que los monocomparadores, especialmente para la determinación de coordenadas de puntos naturales, no artificiales. No obstante las precisiones en la determinación de las coordenadas de un punto, tanto en monocomparadores como en estereocomparadores, se encuentra entre 1 y 3 micras. En la figura 4 podemos observar el mecanismo básico de un estereocomparador.



El monocomparador queda limitado a puntos muy bien definidos en la foto, bien por medios naturales o artificiales (marcadores, transferidores...).

El estereocomparador al basarse en la visión estereoscópica, puede identificar puntos sin necesidad de una perfecta definición del punto a medir. Consiguiendo rendimientos mayores.

Los errores que pueda cometer un monocomparador, estereocomparador o un escáner fotogramétrico pueden ser conocidos siempre y cuando tengamos un patrón de referencia sobre el que comparar los resultados obtenidos. A este proceso se le conoce como calibración geométrica, y se define como el conjunto de operaciones que permiten determinar los parámetros que caracterizan el comportamiento de un equipo.

En el proceso de calibración se han de asignar los valores más probables de cada uno de los parámetros y sus desviaciones típicas, estos valores suelen ir definidos por los fabricantes de los instrumentos, en su defecto y teniendo una placa reticulada de vidrio de tipo reseau (figura 5), en perfecto estado de conservación y de la conocemos las coordenadas calibradas de la retícula, seríamos capaces de realizar una transformación de coordenadas, y con ella determinar la totalidad de los parámetros de transformación.



Figura 5. Placas Reseau y maracas fiduciales

En monocomparadores y estereocomparadores de calidad como son los restituidores analíticos, se pueden obtener coordenadas comparador con unos errores que oscilan entre 1 y 3 micras, errores prácticamente despreciables que pueden verse eclipsados por la calidad de medición del operador.

4.3.2- Corrección por deformación de la película:

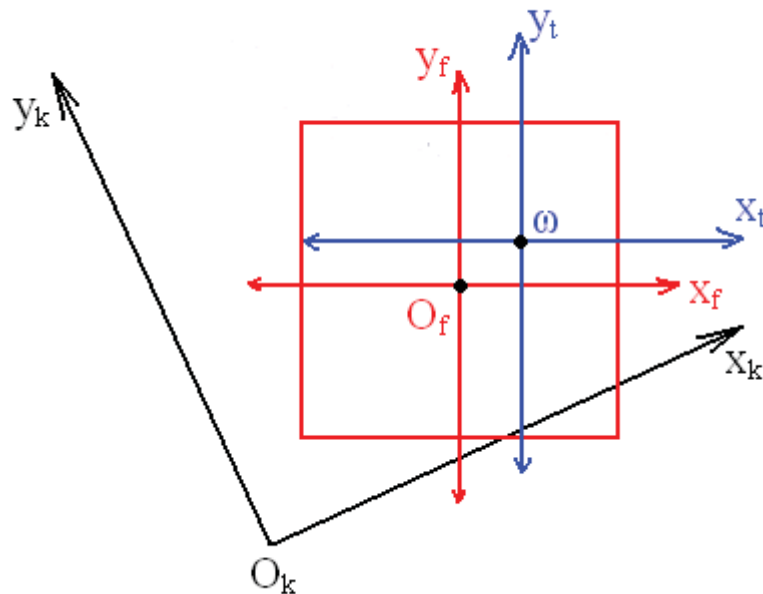
La película está sujeta a unas deformaciones en su soporte, producidas por diversas causas, enrollamiento, temperatura, humedad...

Estas deformaciones quedan patentes en los fotogramas por una falta de coincidencia de los ejes definidos por las marcas fiduciales y los

teóricos para definir las coordenadas imagen. A su vez, estos ejes pueden presentar entre sí un defecto de perpendicularidad.

También puede ocurrir que el fotograma se encoja o dilate.

Se presenta pues el siguiente caso:



Los ejes x_k , y_k son los que nos definen las coordenadas cliché, y queremos obtener unas coordenadas x_f , y_f que irán aproximándose durante el proceso a las coordenadas imagen, definidas por los ejes $(\omega \ x_f \ y_f)$.

El proceso de unas coordenadas a otras se puede obtener con una transformación afín de semejanza, según:

$$\begin{pmatrix} X_F \\ Y_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_K \\ Y_K \end{pmatrix}$$

En donde:

$\begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \end{pmatrix}$ Son las componentes de una translación definida por el vector $\overline{O_F O_K}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Es la matriz que corrige a las coordenadas cliché de:

Falta de paralelismo entre el eje fiducial definido por las marcas fiduciales y el sistema de ejes comparador. (**Figura 7**)

Se trata de realizar un giro α entre sistemas de coordenadas. Se aplicará la expresión general de giro:

$$x_F = x_K \cos \alpha - y_K \sin \alpha$$

$$y_F = x_K \sin \alpha + y_K \cos \alpha$$

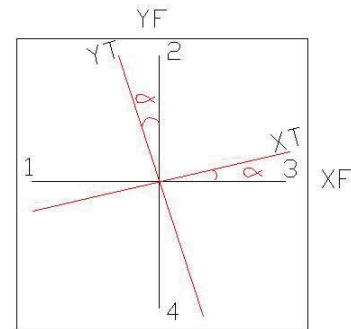


Figura 7

Matricialmente el giro a realizar será:

$$Giro = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

2) Falta de perpendicularidad entre los ejes definidos por las marcas fiduciales medidas. (**Figura 8**)

Observando la figura 8, se deduce que el sistema de coordenadas fiduciales medido con el comparador forma los ejes x' e y' , mientras que los ejes perfectamente ortogonales están definidos por x e y , se parte de la idea de $x = x'$, la falta de perpendicularidad se puede calcular sencillamente a partir de las expresiones que desarrollaremos a continuación, si la falta de perpendicularidad la consideramos como β , tendremos unas coordenadas de P en el sistema medido (erróneo) de:

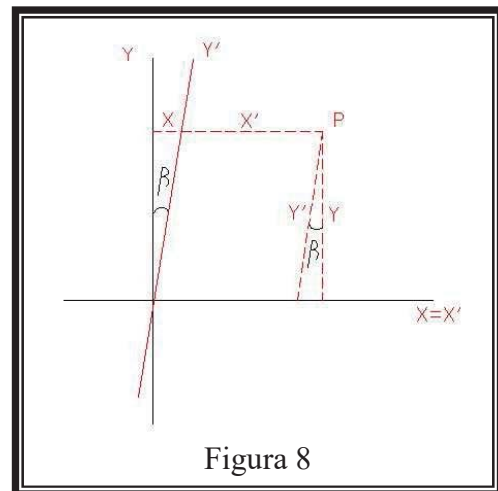


Figura 8

$$x' = x - y' \sin \beta$$

$$y' = y / \cos \beta$$

Las coordenadas que nos interesan son las referidas a los ejes perfectamente ortogonales:

$$x = x' + y' \sin \beta$$

$$y = y' \cos \beta$$

Matricialmente la transformación resulta:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \beta \\ 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

3) Dilatación o contracción dimensional del fotograma.

La distancia entre marcas fiduciales medidas puede ser mayor o menor que la distancia teórica calibrada, principalmente se produce por un malo almacenaje de los fotogramas, sometidos a condiciones de temperatura y humedad incorrectos, o incluso factores de tensión producidos por el almacenamiento durante largos periodos de tiempo en el rollo de la película. La corrección se realiza de forma sencilla obteniendo los parámetros de escala en la dirección del eje x y del eje y, según las expresiones:

$$x = H_x x'$$

$$y = H_y y'$$

En forma matricial resulta:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_x & 0 \\ 0 & H_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Por tanto podemos obtener la matriz a partir de estas tres:

G = Matriz de giro.

P = matriz para conseguir perpendicularidad.

H = homotecia.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = G \cdot P \cdot H = \begin{pmatrix} \cos \alpha & (-\sin \alpha) \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sin \beta \\ 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H_x & 0 \\ 0 & H_y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \cos \alpha \cdot \sin \beta - \sin \alpha \cdot \cos \beta \\ \sin \alpha & \sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos \alpha \cdot \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x & 0 \\ 0 & H_y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} H_x \cdot \cos \alpha & H_y \cdot (\cos \alpha \cdot \sin \beta - \sin \alpha \cdot \cos \beta) \\ H_x \cdot \sin \alpha & H_y \cdot (\sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos \alpha \cdot \cos \beta) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} H_x \cdot \cos \alpha & H_y \cdot \sin(\alpha - \beta) \\ H_x \cdot \sin \alpha & H_y \cdot \cos(\alpha - \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

La metodología de trabajo a seguir será la obtención de los parámetros a,b,c y d de la matriz de afinidad, para con posterioridad y operando entre ellos, obtener a posteriori los valores que se deducen de mencionada matriz, según las expresiones:

$$\frac{c}{a} = \operatorname{tg} \alpha$$

$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{c}{a}\right) \rightarrow$ Giro a realizar entre sistema comparador a fiducial.

$\beta = \alpha - \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{d}\right) \rightarrow$ Falta de perpendicularidad de los ejes fiduciales medidos

$H_x = \frac{c}{\sin \alpha} \rightarrow$ Factor de escala en dirección del eje x

$H_y = \frac{d}{\cos(\alpha - \beta)} \rightarrow$ Factor de escala en dirección del eje y

Las Coordenadas obtenidas hasta el momento, reciben el nombre de coordenadas fiduciales.

4.3.3- Corrección por desplazamiento del punto principal.

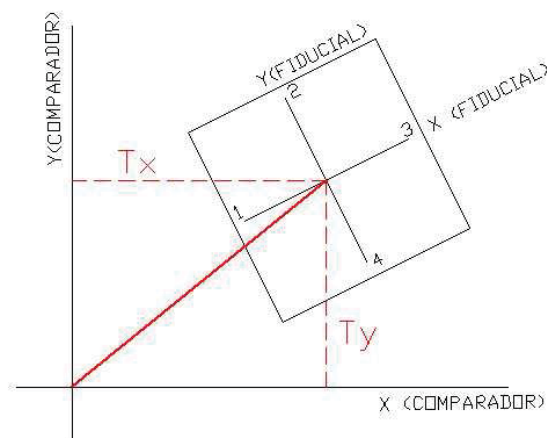
Se debe a un error de la cámara métrica y es la no coincidencia del punto principal (eje óptico) real y el que se obtiene por la intersección de las rectas que unen las marcas fiduciales.

Es un dato que debe dar el fabricante de la cámara tras su calibración.

Con este valor ya podemos dar las coordenadas transformadas.

$$x_T = x_F + x_{\omega f}$$

$$y_T = y_F + y_{\omega f}$$



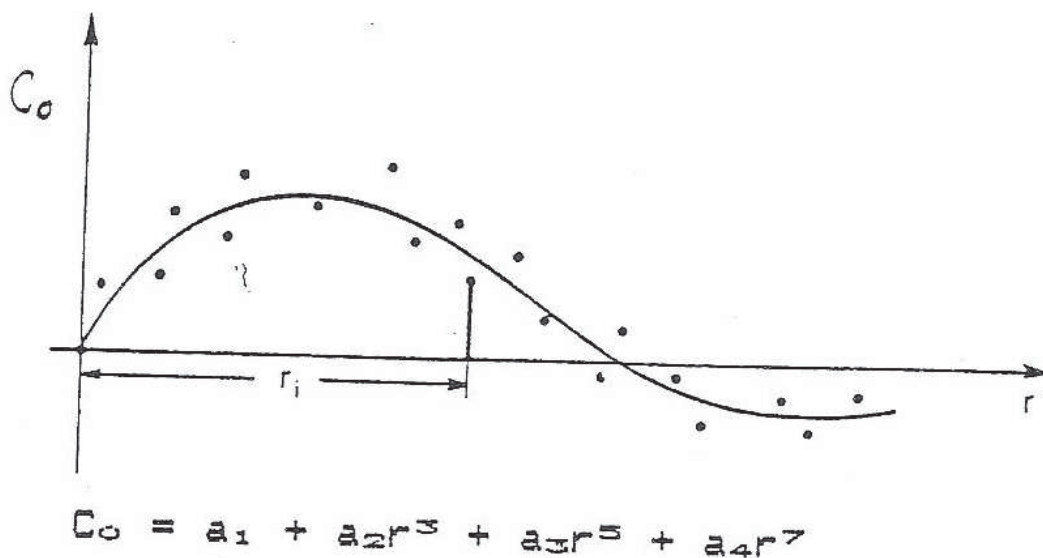
Hasta el momento se tienen unas coordenadas transformadas a partir de las coordenadas cliché

$$x_T = T_x + ax_k + by_k - x_{wf}$$

$$y_T = T_y + cx_k + dy_k - y_{wf}$$

A estas coordenadas habría que aplicar otras correcciones para obtener las coordenadas imagen.

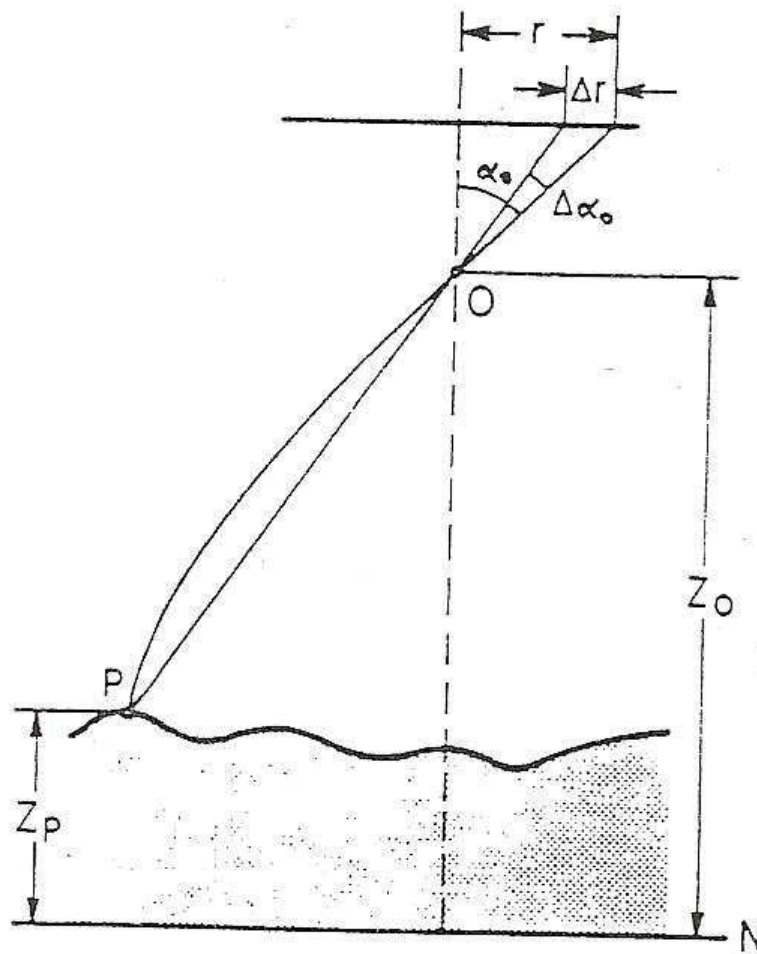
4.3.4- Corrección por distorsión de la lente.



Es radial con origen en el punto principal, se obtiene directamente a partir de la curva del calibrado, o a partir de una función polinómica aproximada.

Todo lo suministra el fabricante. r es la distancia al P.P.

4.3.5- Corrección por refracción atmosférica:



Dicho error provoca un desplazamiento del punto sobre el fotograma.

Suponiendo las condiciones atmosféricas estándar delimitadas por la aviación civil (ICAD) y tomas verticales, podemos aplicar las siguientes expresiones:

$$CR = \frac{\sqrt{X_T^2 + Y_T^2}}{f^2} \cdot (f^2 + X_T^2 + Y_T^2) \Delta\alpha_0$$

$$\Delta\alpha_0 = \frac{T}{636620} - \frac{Q_0 - Q_p}{Z_0 - Z_p}$$

$$T = 178,46 - 17,14 Z_0 + 0,6296 Z_0^2 - 1,01071 Z_0^3 + 0,000077 Z_0^4$$

$$Q_0 = (2803,11 Z_0 - 134,629 Z_0^2 + 3,2966 Z_0^3 - 0,04205 Z_0^4 + 0,000242 Z_0^5) \cdot 10^{-7}$$

$$Q_p = (2803,11 Z_p - 134,629 Z_p^2 + 3,2966 Z_p^3 - 0,04205 Z_p^4 + 0,000242 Z_p^5) \cdot 10^{-7}$$

Siendo:

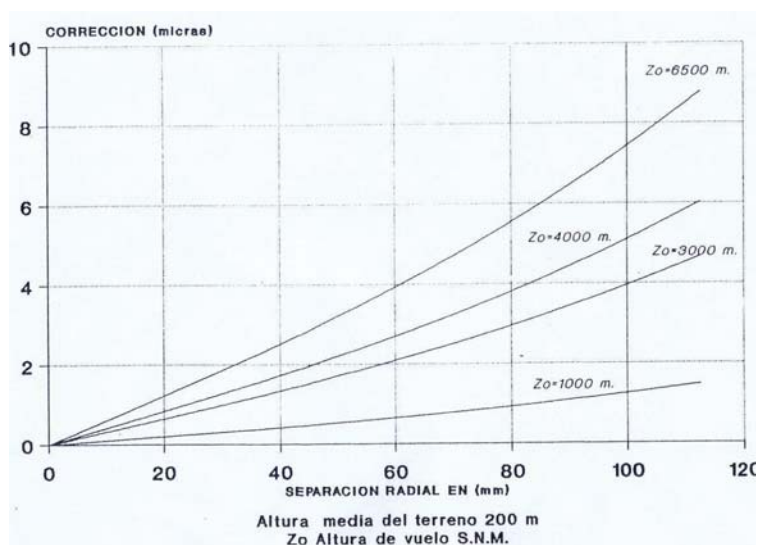
$f \rightarrow$ focal en mm.

$Z_0 \rightarrow$ Altitud de vuelo en km.

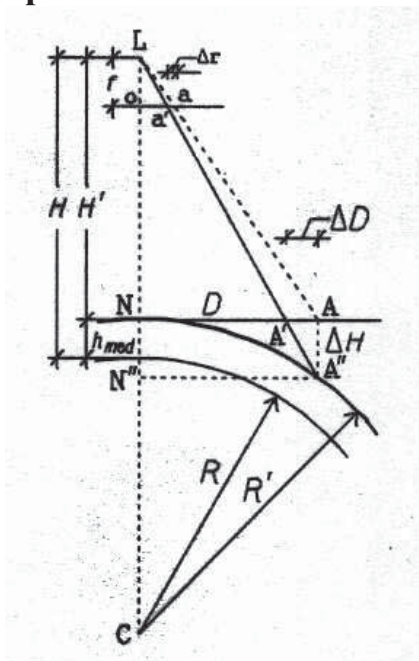
$Z_p \rightarrow$ Altitud del terreno (snm) en km.

$X_T, Y_T \rightarrow$ Coordenadas transformadas en mm.

Gráfica de la corrección:



4.3.6- Corrección por curvatura terrestre.



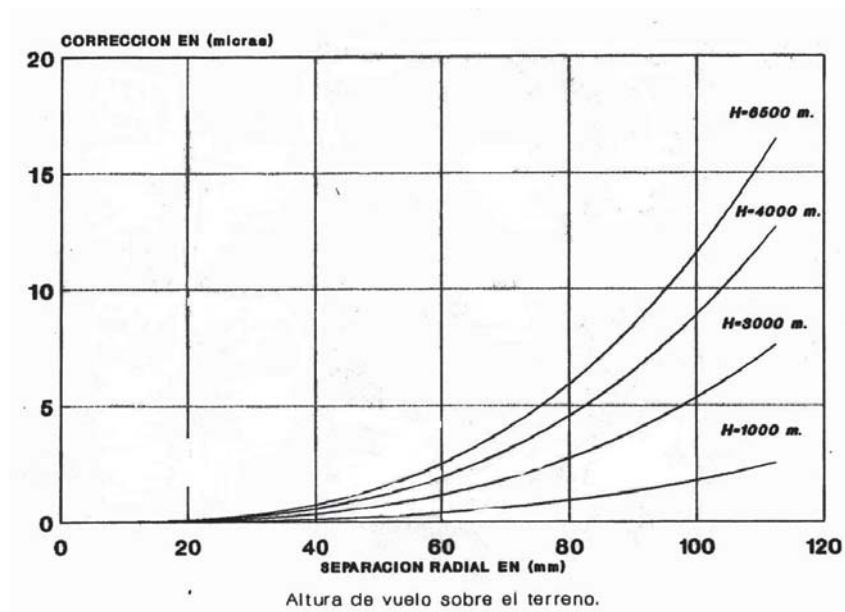
$$Ce = \frac{H'}{2R \cdot f^2} \cdot r^3 = \frac{H'}{2R \cdot f^2} \cdot \left(\sqrt{X_T^2 + Y_T^2} \right)^3$$

Siendo:

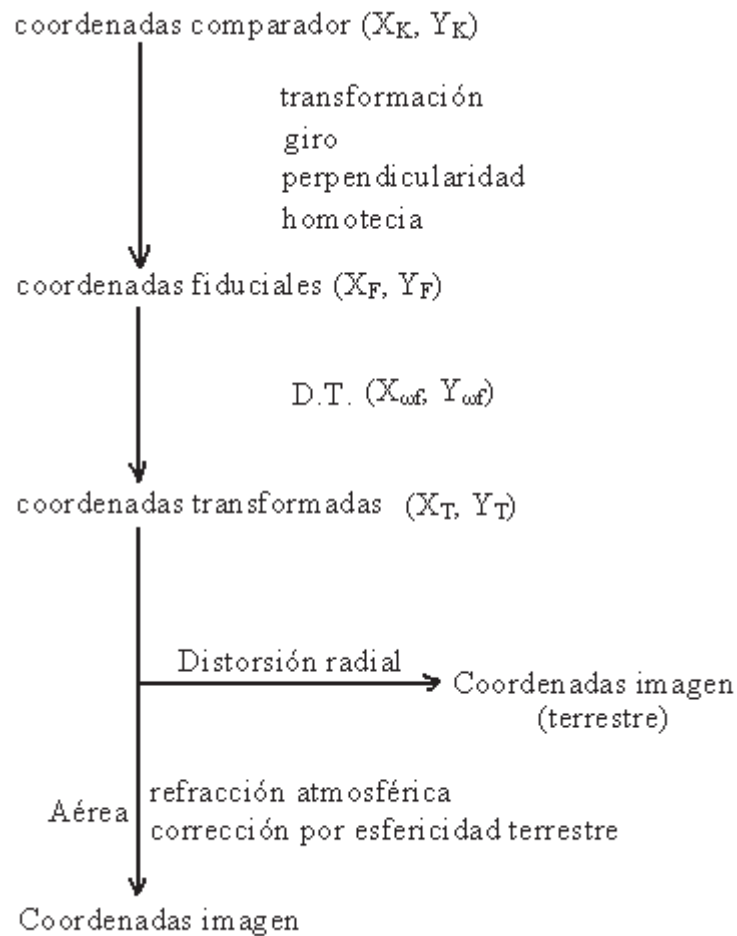
H → Altura de vuelo sobre el terreno.

R → Radio de la Tierra.

Gráfica de la corrección:



Esquema resumen:

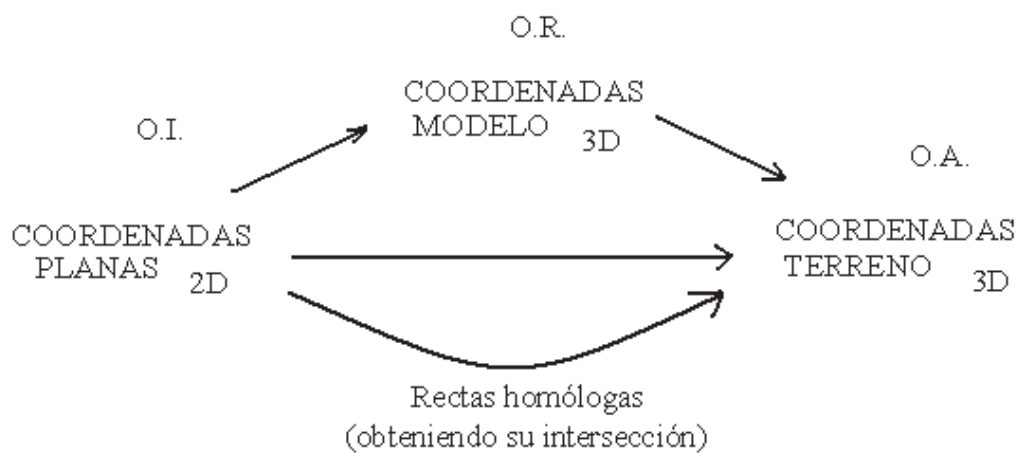
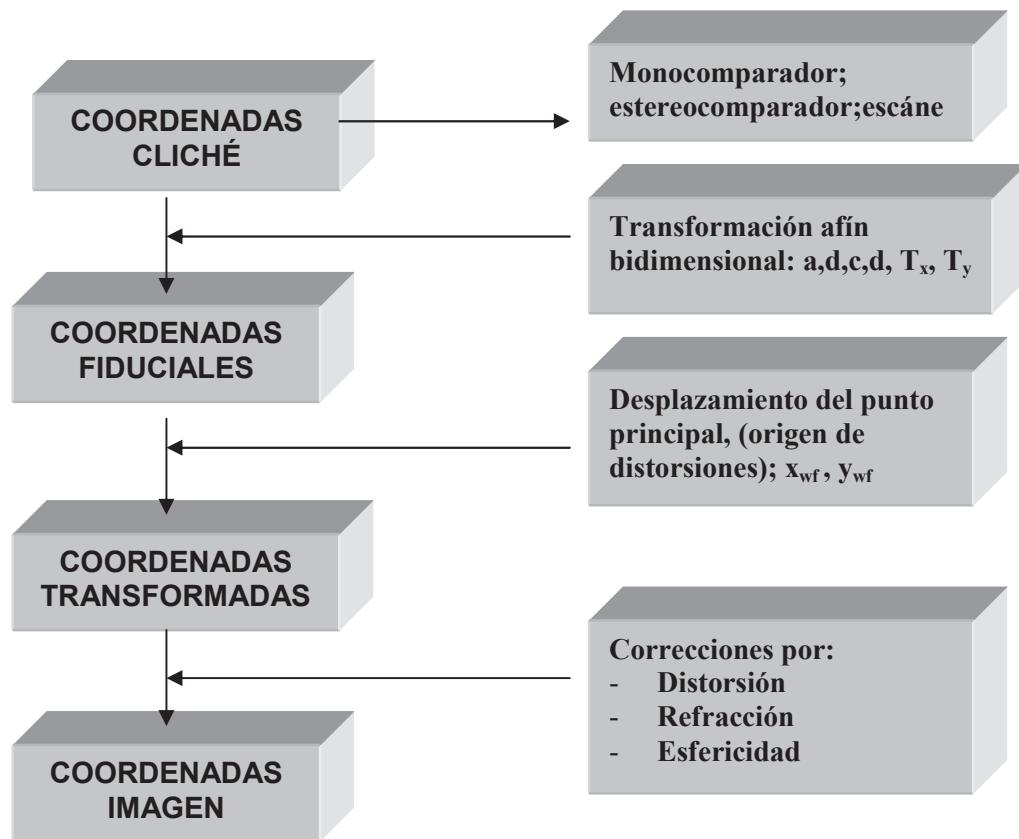


Con todo esto se tendrá que para obtener las coordenadas imagen a partir de las coordenadas cliché, aplicaremos:

$$x' = X_T + (\pm C_O - C_R + C_e) \cdot \frac{X_T}{\sqrt{X_T^2 + Y_T^2}}$$

$$y' = Y_T + (\pm C_O - C_R + C_e) \cdot \frac{Y_T}{\sqrt{X_T^2 + Y_T^2}}$$

A modo de resumen:



4.4- Transformaciones de coordenadas.