

Capítulo 1

Sistemas de coordenadas y transformaciones

1.1 Sistemas de coordenadas

1.1.1 Coordenadas cartesianas

Un sistema de coordenadas cartesianas queda establecido al definir la situación del origen y la dirección de tres ejes mutuamente ortogonales

$$O, \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$$

La situación de un punto se expresa mediante el vector de posición \vec{x} , que va desde el origen del sistema al punto considerado. Dicho vector se escribe como una combinación lineal de los tres vectores de la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

En aplicaciones de navegación suelen emplearse sistemas cartesianos dextrógiros o dicho de otra forma, que siguen la “regla de la mano derecha” o “regla del sacacorchos”. Es decir

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 \quad \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \quad (1.2)$$

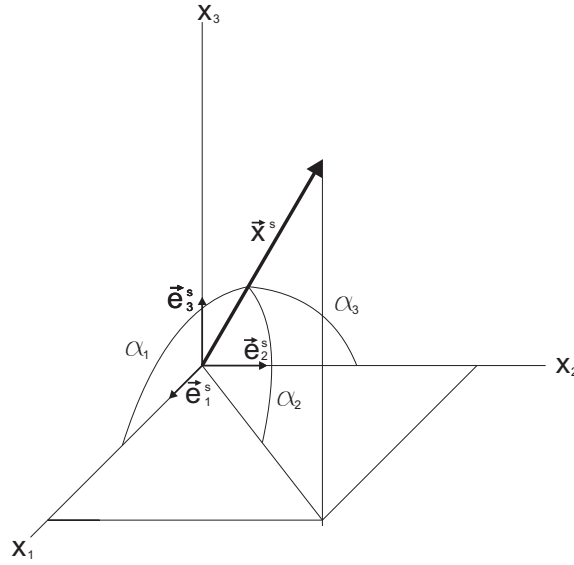


Figura 1.1: Sistema cartesiano

A los escalares (x_1, x_2, x_3) se les denomina coordenadas cartesianas y son respectivamente las proyecciones del vector \vec{x} sobre cada uno de los ejes

$$x_1 = \vec{x} \cdot \vec{e}_1 \quad x_2 = \vec{x} \cdot \vec{e}_2 \quad x_3 = \vec{x} \cdot \vec{e}_3 \quad (1.3)$$

de dónde se deducen los cosenos directores que permiten obtener los ángulos que forma el vector \vec{x} con respecto a cada uno de los ejes

$$\cos \alpha_1 = \frac{x_1}{\|\vec{x}\|} \quad \cos \alpha_2 = \frac{x_2}{\|\vec{x}\|} \quad \cos \alpha_3 = \frac{x_3}{\|\vec{x}\|} \quad (1.4)$$

1.1.2 Sistema inercial (*i-frame*)

Se define un sistema de coordenadas inercial (*i-frame*) como un sistema euclídeo en el cual se cumplen las leyes del movimiento de Newton. En un sistema de coordenadas inercial, un cuerpo con movimiento uniforme permanece con movimiento uniforme en ausencia de fuerzas aplicadas, lo que constituye la Primera Ley de Newton (**Jekeli-InertialNavigationSystems**).

La Segunda Ley de Newton establece que la variación en el tiempo de la cantidad de movimiento o momento lineal de una partícula es igual al sumatorio de las fuerzas aplicadas

$$\frac{d}{dt} (m_i \dot{\vec{x}}) = \vec{F} \quad (1.5)$$

donde $m_i \dot{\vec{x}}$ es el momento lineal de la partícula, \vec{x} su velocidad y m_i su masa inercial. Si la masa inercial es constante la ecuación 1.5 puede escribirse como

$$m_i \ddot{\vec{x}} = \vec{F} \quad (1.6)$$

que, aun siendo una forma menos correcta, resulta más habitual que 1.5.

La ecuación 1.6, además de ser el fundamento de los sistemas de coordenadas inerciales, es la base para describir la dinámica de las unidades de medición inercial (IMU).

En rigor no se pueden definir sistemas inerciales en el sistema solar debido al que el gradiente del campo gravitatorio es diferente en cada punto del espacio. A modo de ilustración supongamos unos ejes cartesianos con origen en el centro de masas del sistema solar y cuyos ejes no experimentasen rotación alguna respecto al espacio (ICRS). Un cuerpo inicialmente en reposo aceleraría debido a la atracción gravitatoria del Sol y de los planetas, no cumpliéndose la Primera Ley de Newton y como resultado, dicho sistema de coordenadas no sería inercial.

Para proceder es necesario modificar la Segunda Ley de Newton para adaptarla a la presencia de un campo gravitatorio de forma que

$$m_i \ddot{\vec{x}} = \vec{F} + m_g \vec{g} \quad (1.7)$$

El vector de aceleración gravitacional \vec{g} se interpreta como un factor de proporcionalidad entre la masa gravitacional m_g y la fuerza gravitacional \vec{F}_g tal como se formula en la Ley de Gravitación Universal de Newton

$$\vec{F}_g = k \frac{m_g M}{l^2} \vec{e}_l = m_g \vec{g} \quad (1.8)$$

dónde el campo gravitatorio es generado por una partícula de masa M situada a una distancia l de m_g en la dirección definida por el vector unitario \vec{e}_l y k es la constante gravitacional de Newton.

Introduciendo el principio de equivalencia débil¹ ambos tipos de masa pueden considerarse iguales, es decir $m_i = m_g = m$ y por tanto dividiendo entre m la ecuación 1.7 resulta

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{a} + \vec{g} \quad (1.9)$$

¹El principio de equivalencia es el principio físico de la relatividad general y de varias otras teorías métricas de la gravedad. El principio afirma que 'Un sistema inmerso en un campo gravitatorio es puntualmente indistinguible de un sistema de referencia no inercial acelerado'. El principio de equivalencia en forma débil especifica la igualdad entre las masas inercial y gravitacional, volviéndolas indistinguibles.

En la ecuación anterior, el término $\vec{a} = \vec{F}/m$ se conoce como fuerza específica o fuerza por unidad de masa. La fuerza específica es la aceleración medida por las unidades de medición inercial. Algunos ejemplos de fuerza específica son el rozamiento atmosférico o la fuerza de reacción que ejerce la superficie de la Tierra sobre nosotros para evitar la caída libre. El vector \vec{g} se supone conocido y se puede calcular a partir de modelos de gravedad y de las efemérides planetarias.

Asumiendo que en rigor no se puede definir un sistema de referencia inercial en el sistema solar, en la práctica denominamos sistema inercial (*i-frame*) a un sistema de coordenadas cuyo origen coincide con el centro de la Tierra, que no rota y que está en caída libre respecto al Sol, la Luna y los demás planetas. La orientación permanece fija respecto a la esfera celeste que materializan los *cuásares*. Las coordenadas de un punto en el *i-frame* se definen mediante un vector \vec{x}^i

$$\vec{x}^i = x_1^i \vec{e}_1^i + x_2^i \vec{e}_2^i + x_3^i \vec{e}_3^i = \begin{pmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ x_3^i \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

El *International Earth Rotation Service* (IERS) establece el ICRS como sistema de referencia inercial de forma que los ejes \vec{e}_3 y \vec{e}_1 prácticamente coinciden con los conceptos tradicionales de polo de la eclíptica y el punto vernal respectivamente. Ambas direcciones son materializadas mediante centenares de cuásares cuyas direcciones se determinan mediante la técnica VLBI junto con el catálogo estelar Hipparcos.

1.1.3 Sistema terrestre (*e-frame*)

Sea un sistema cartesiano cuyo origen coincida con el centro de masas de la Tierra y cuyos ejes \vec{e}_3 y \vec{e}_1 sigan respectivamente la dirección de un polo norte convencional y de un meridiano de referencia convencional (Greenwich). Las coordenadas de un punto en el *e-frame* se definen mediante un vector \vec{x}^e

$$\vec{x}^e = x_1^e \vec{e}_1^e + x_2^e \vec{e}_2^e + x_3^e \vec{e}_3^e = \begin{pmatrix} x_1^e \\ x_2^e \\ x_3^e \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Este sistema de coordenadas está fijado a la Tierra, por lo que también recibe el nombre de *Earth-Centered Earth-Fixed* (ECEF). Un ejemplo de este tipo de sistemas es el *International Terrestrial Reference System* (ITRS) establecido por el IERS a partir de las técnicas SLR y GPS y que puede ser relacionado de forma muy precisa con el ICRS gracias a la técnica VLBI.

Una desventaja de escoger el sistema de coordenadas ECEF como *e-frame* en algunas aplicaciones de navegación es que no permite la separación entre planimetría

y altimetría. La alternativa es introducir un elipsoide como superficie de referencia junto con las coordenadas geodésicas (φ, λ) más la altitud elipsoidal h como tercera componente.

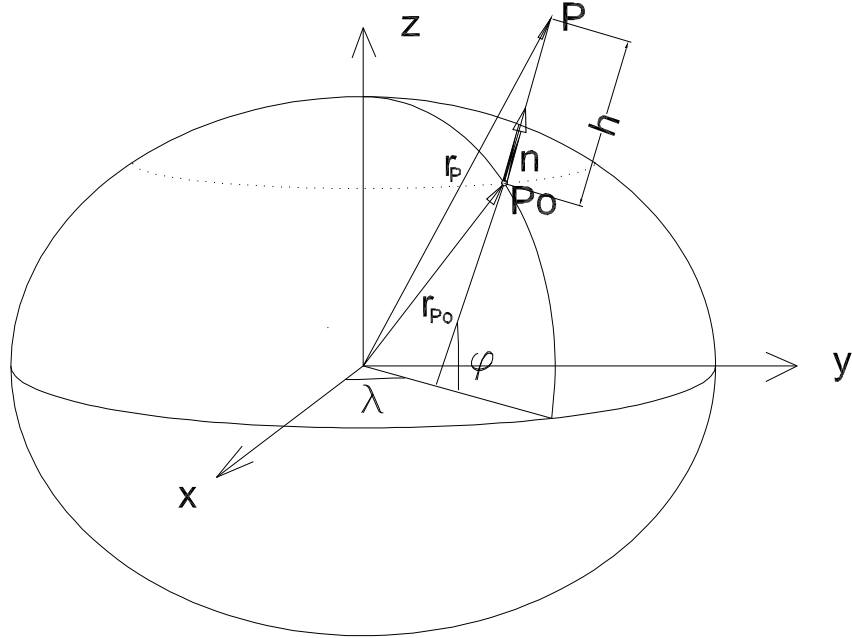


Figura 1.2: Relación entre las coordenadas ECEF y las coordenadas geodésicas.

La relación entre las coordenadas geodésicas y las coordenadas ECEF viene dada por

$$\begin{aligned} X &= (\nu + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ Y &= (\nu + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ Z &= [\nu (1 - e^2) + h] \sin \varphi \end{aligned} \quad (1.12)$$

siendo la conversión recíproca

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctg \frac{Z + e'^2 b \sin^3 \vartheta}{p - e^2 a \cos^3 \vartheta} & \vartheta &= \arctg \frac{Z a}{p b} \\ \lambda &= \arctg \frac{Y}{X} & e'^2 &= \frac{a^2 - b^2}{b^2} \\ h &= \frac{p}{\cos \varphi} - \nu & p &= \sqrt{X^2 + Y^2} \end{aligned} \quad (1.13)$$

en las que a , e y e' son respectivamente el semieje mayor, la primera excentricidad y la segunda excentricidad del elipsoide de referencia y ν es el radio de curvatura del primer vertical de latitud φ . Aunque las fórmulas anteriores son aproximadas,

garantizan el milímetro para puntos cercanos a la superficie terrestre y son válidas para la mayor parte de las aplicaciones de navegación.

Las coordenadas (φ, λ, h) pueden emplearse en lugar de las coordenadas ECEF para definir la situación de un punto en el *e-frame*. Adicionalmente, en aplicaciones de navegación es habitual emplear la altitud proporcionada por los altímetros, es decir, la altitud sobre el nivel del mar o altitud ortométrica. Para relacionar la altitud elipsoídica h y la altitud ortométrica es necesario disponer de la ondulación de geoide N de forma que

$$h = H + N \quad (1.14)$$

La ondulación N se obtiene a partir de un modelo de geoide y varía en función de las coordenadas geodésicas (φ, λ)

$$N = N(\varphi, \lambda) \quad (1.15)$$

1.1.4 Sistema de navegación (*n-frame*)

Como sistema de coordenadas para la navegación (*n-frame*) se suele emplear un sistema cartesiano cuyo origen es local, es decir, situado en un punto arbitrario de coordenadas (φ, λ, h) y cuyo eje \vec{e}_3 sigue la dirección de la recta normal al elipsoide definida por las coordenadas geodésicas (φ, λ) .

Dependiendo del sentido escogido para los ejes pueden establecerse varios tipos de *n-frame*. La elección más habitual en navegación es la denominada *North-East-Down* (NED), en la cual el eje \vec{e}_3 apunta hacia abajo y los ejes \vec{e}_1 y \vec{e}_2 apuntan respectivamente al Norte y al Este. Otras posibles alternativas dextrógiras son trabajar con las secuencias de coordenadas *South-East-Up*(SEU) o *North-West-Up*(NWU). En adelante toda la formulación se referirá al un *n-frame* del tipo NED.

Las coordenadas de un punto en el *n-frame* se definen mediante un vector \vec{x}^n

$$\vec{x}^n = x_1^n \vec{e}_1^n + x_2^n \vec{e}_2^n + x_3^n \vec{e}_3^n = \begin{pmatrix} x_1^n \\ x_2^n \\ x_3^n \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

Es importante destacar de el *n-frame* no sirve para situar un vehículo. Al desplazarse el vehículo horizontalmente, las coordenadas (φ, λ) del origen del *n-frame* varían, produciendo a su vez una rotación del eje \vec{e}_3 . Por tanto, el principal propósito del *n-frame* es proporcionar localmente unas direcciones NED para referir localmente datos de navegación como velocidades, aceleraciones o velocidades angulares.

1.1.5 Sistema del vehículo (*b-frame*)

En algunas aplicaciones es conveniente establecer un sistema de coordenadas asociado a un determinado cuerpo ² o *b-frame*. Por ejemplo, para describir las maniobras necesarias para pilotar o dirigir un vehículo es conveniente establecer un *b-frame* asociado a dicho vehículo. En otras ocasiones el *b-frame* se asocia a la plataforma rígida o cuerpo en el que van montados todos los dispositivos o sensores integrados. Convencionalmente se suelen escoger las direcciones hacia delante (*forward*), hacia la derecha (*right*) y hacia el suelo (*through-the-floor*).

Las coordenadas de un punto en el *b-frame* se definen mediante un vector \vec{x}^b

$$\vec{x}^b = x_1^b \vec{e}_1^b + x_2^b \vec{e}_2^b + x_3^b \vec{e}_3^b = \begin{pmatrix} x_1^b \\ x_2^b \\ x_3^b \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

1.1.6 Sistema del sensor (*s-frame*)

Los sistemas de navegación inercial (INS) suelen estar compuestos por un cierto número de unidades de medición inercial (IMU). Lo más habitual es que cuente con al menos 3 acelerómetros lineales y 3 giróscopos. Por ello es necesario un único sistema de coordenadas para unificar, modelizar y filtrar los datos registrados por dicho conjunto de unidades de medición al que denominaremos sistema del sensor o *s-frame*. Si el INS es del tipo *strapdown*, el *s-frame* suele coincidir con el *b-frame*. Por el contrario, si el INS es de tipo cardán (*gimbaled*) se suele estabilizar alineado con el *n-frame*.

Las coordenadas de un punto en el *s-frame* se definen mediante un vector \vec{x}^s

$$\vec{x}^s = x_1^s \vec{e}_1^s + x_2^s \vec{e}_2^s + x_3^s \vec{e}_3^s = \begin{pmatrix} x_1^s \\ x_2^s \\ x_3^s \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

1.2 Transformaciones

Existen múltiples alternativas para transformar coordenadas, velocidades y aceleraciones de un sistema de coordenadas a otro. En general, el aspecto más importante es la orientación relativa entre los sistemas que se quieren relacionar. Las traslaciones, en caso de necesitarse, se describen mediante un vector de traslación que desplaza a todas las coordenadas por igual. En cuanto al factor de escala, no se suele incluir como parte de la transformación, ya que teóricamente la escala está

² *Body* en inglés.

definida por el SI. En caso de que los datos de algún sensor en particular no estuvieran convenientemente escalados, el factor de escala se aplicaría a los datos y no a la transformación.

Al considerar únicamente sistemas de coordenadas ortogonales, solamente son necesarios tres ángulos para describir la orientación relativa. La transformación es lineal y se puede expresar mediante una matriz de rotación, ángulos de rotación (Euler) o cuaterniones.

1.2.1 Matriz de rotación

Sean *s-frame* y *t-frame* dos sistemas de coordenadas concéntricos³ y cuya orientación relativa es arbitraria. La situación de un punto en ambos sistemas viene definida por sus coordenadas

$$\vec{x}^s = \begin{pmatrix} x_1^s \\ x_2^s \\ x_3^s \end{pmatrix} \quad \vec{x}^t = \begin{pmatrix} x_1^t \\ x_2^t \\ x_3^t \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

Las coordenadas de un punto en cada uno de los dos sistemas son las proyecciones ortogonales del vector de posición sobre cada uno de los ejes, es decir

$$\vec{x}^s = x_1^s \vec{e}_1^s + x_2^s \vec{e}_2^s + x_3^s \vec{e}_3^s = \begin{pmatrix} \vec{e}_1^s & \vec{e}_2^s & \vec{e}_3^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^s \\ x_2^s \\ x_3^s \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

$$\vec{x}^t = x_1^t \vec{e}_1^t + x_2^t \vec{e}_2^t + x_3^t \vec{e}_3^t = \begin{pmatrix} \vec{e}_1^t & \vec{e}_2^t & \vec{e}_3^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^t \\ x_2^t \\ x_3^t \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

Las coordenadas de los vectores $\vec{e}_1^t, \vec{e}_2^t, \vec{e}_3^t$ en el *s-frame* se obtienen efectuando las correspondientes proyecciones

$$\begin{aligned} c_{11} &= \vec{e}_1^t \cdot \vec{e}_1^s & c_{12} &= \vec{e}_1^t \cdot \vec{e}_2^s & c_{13} &= \vec{e}_1^t \cdot \vec{e}_3^s \\ c_{21} &= \vec{e}_2^t \cdot \vec{e}_1^s & c_{22} &= \vec{e}_2^t \cdot \vec{e}_2^s & c_{23} &= \vec{e}_2^t \cdot \vec{e}_3^s \\ c_{31} &= \vec{e}_3^t \cdot \vec{e}_1^s & c_{32} &= \vec{e}_3^t \cdot \vec{e}_2^s & c_{33} &= \vec{e}_3^t \cdot \vec{e}_3^s \end{aligned} \quad (1.22)$$

que permiten expresar los ejes del *t-frame* en el *s-frame*

$$\begin{aligned} \vec{e}_1^t &= c_{11} \vec{e}_1^s + c_{12} \vec{e}_2^s + c_{13} \vec{e}_3^s \\ \vec{e}_2^t &= c_{21} \vec{e}_1^s + c_{22} \vec{e}_2^s + c_{23} \vec{e}_3^s \\ \vec{e}_3^t &= c_{31} \vec{e}_1^s + c_{32} \vec{e}_2^s + c_{33} \vec{e}_3^s \end{aligned} \quad (1.23)$$

³En caso de no ser concéntricos la traslación se resuelve una vez efectuada la rotación.

Introduciendo 1.23 en 1.21 e igualando con 1.20 se obtiene

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1^s & \vec{e}_2^s & \vec{e}_3^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^s \\ x_2^s \\ x_3^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1^t & \vec{e}_2^t & \vec{e}_3^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^t \\ x_2^t \\ x_3^t \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

de donde se deduce fácilmente que la transformación entre ambos sistemas de coordenadas viene dada por

$$\vec{x}^s = C_t^s \vec{x}^t \quad (1.25)$$

donde la matriz de transformación C_t^s es

$$C_t^s = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

En cuanto a la notación escogida, es importante destacar que el subíndice de la matriz de transformación indica el sistema origen y el superíndice el sistema destino. Por otra parte, teniendo en cuenta que las entradas de la matriz de transformación son el producto escalar de vectores unitarios (1.22), cada coeficiente c_{jk} es el coseno del ángulo que forma el eje \vec{e}_j^s con el eje \vec{e}_k^t . Por tanto, C_t^s es la matriz de cosenos directores. Adicionalmente, la columna k de C_t^s representa el vector \vec{e}_k^t en el s -frame y la fila j de C_t^s representa el vector \vec{e}_j^s en el t -frame. Al ser sus columnas y sus filas mutuamente ortogonales, la matriz C_t^s es ortogonal, es decir

$$C_t^s (C_t^s)^T = I \Rightarrow C_t^s = (C_s^t)^{-1} = (C_s^t)^T \quad (1.27)$$

La ortogonalidad de C_t^s implica que sus entradas no son independientes, lo que equivale a decir que no son necesarios 9 parámetros para establecer la orientación relativa, sino tan solo 3, que son los grados de libertad.

La matriz C_t^s también permite transformar cualquier otra matriz de transformación A de 3×3 expresada en el sistema t -frame al sistema s -frame. Sea $\vec{y}^t = A^t \vec{x}^t$. Entonces, mediante 1.25 y 1.27 se tiene que

$$\vec{y}^t = A^t \vec{x}^t \Rightarrow C_s^t \vec{y}^s = A^t C_s^t \vec{x}^s \Rightarrow \vec{y}^s = C_t^s A^t C_s^t \vec{x}^s \quad (1.28)$$

de lo cual se deduce que

$$A^s = C_t^s A^t C_s^t \quad (1.29)$$

1.2.2 Ángulos de Euler

La orientación relativa entre los sistemas *t-frame* y *s-frame* se puede describir también mediante una secuencia de 3 rotaciones que se corresponden con los tres grados de libertad que existían en los coeficientes de la matriz de rotación.

Una rotación de ángulo θ en torno a cada uno de los ejes da lugar a diferentes matrices de rotación

$$R_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

en torno al eje \vec{e}_1^t

$$R_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\text{sen } \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

en torno al eje \vec{e}_2^t

$$R_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

en torno al eje \vec{e}_3^t .

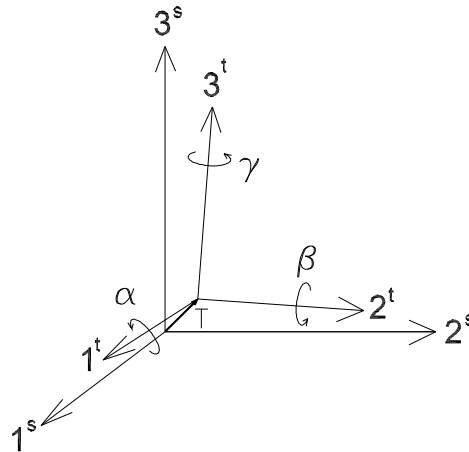


Figura 1.3: Rotaciones de Euler.

La rotación se considera positiva si un observador situado en el origen del sistema y mirando en dirección del eje correspondiente, el sentido del giro coincide con el sentido de giro de las agujas de un reloj o con la regla del sacacorchos (fig. 1.3). Por el contrario, si el observador se sitúa en el eje correspondiente y mira hacia el origen del sistema, la rotación se considerará positiva si sigue el sentido contrario a las agujas un reloj o a la regla del sacacorchos.

Las matrices 1.30, 1.31 y 1.32 son ortogonales y por tanto $R_j^{-1}(\theta) = R_j^T(\theta)$. La matriz inversa se corresponde también con la rotación recíproca, es decir $R_j^{-1}(\theta) = R_j(-\theta)$.

Introduciendo las matrices de rotación definidas, la relación entre las coordenadas de los sistemas *t-frame* y *s-frame* resulta

$$\vec{x}^s = R_3(\gamma)R_2(\beta)R_1(\alpha)\vec{x}^t \quad (1.33)$$

La transformación resultante de las tres rotaciones es también una matriz ortogonal y por tanto

$$(R_3(\gamma)R_2(\beta)R_1(\alpha))^{-1} = (R_3(\gamma)R_2(\beta)R_1(\alpha))^T = R_1(-\alpha)R_2(-\beta)R_3(-\gamma) \quad (1.34)$$

Lo que no se ha de olvidar es que el producto de matrices de rotación no reúne la propiedad conmutativa y por tanto el orden de las rotaciones es importante.

Por otra parte, resulta evidente que

$$C_t^s = R_3(\gamma)R_2(\beta)R_1(\alpha) \quad (1.35)$$

o de manera explícita

$$C_t^s = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \beta & \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha + \sin \gamma \cos \alpha & -\cos \gamma \sin \beta \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \\ -\sin \gamma \cos \beta & -\sin \gamma \sin \beta \sin \alpha + \cos \gamma \cos \alpha & \sin \gamma \sin \beta \cos \alpha + \cos \gamma \sin \alpha \\ \sin \beta & -\cos \beta \sin \alpha & \cos \beta \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

De 1.36 resulta fácil relacionar las entradas de la matriz de rotación C_t^s con las rotaciones de Euler

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= \cos \gamma \cos \beta \\
 c_{12} &= \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha + \sin \gamma \cos \alpha \\
 c_{13} &= -\cos \gamma \sin \beta \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \\
 c_{21} &= -\sin \gamma \cos \beta \\
 c_{22} &= -\sin \gamma \sin \beta \sin \alpha + \cos \gamma \cos \alpha \\
 c_{23} &= \sin \gamma \sin \beta \cos \alpha + \cos \gamma \sin \alpha \\
 c_{31} &= \sin \beta \\
 c_{32} &= -\cos \beta \sin \alpha \\
 c_{33} &= \cos \beta \cos \alpha
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

A partir de ellas se deduce fácilmente la relación recíproca

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \arctan \left(\frac{-c_{32}}{c_{33}} \right) = \arctan \left(\frac{\cos \beta \sin \alpha}{\cos \beta \cos \alpha} \right) \\
 \beta &= \arcsen (c_{31}) = \arcsen (\sin \beta) \\
 \gamma &= \arctan \left(\frac{-c_{21}}{c_{11}} \right) = \arctan \left(\frac{\sin \gamma \cos \beta}{\cos \gamma \cos \beta} \right)
 \end{aligned} \tag{1.38}$$

En las expresiones 1.38 ya se anticipa el problema de que la conversión recíproca no existe cuando las entradas c_{33} ó c_{11} son cero.

Cuando las rotaciones tienen caracter diferencial se puede aproximar $\cos \theta \approx 1$ y $\sin \theta \approx \theta$ y el producto de las tres matrices de rotación resulta

$$C_t^s = R_3(\gamma)R_2(\beta)R_1(\alpha) \approx \begin{pmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{pmatrix} \tag{1.39}$$

Cuando los ángulos (α, β, γ) son pequeños, el orden de las rotaciones no importa y cualquier combinación daría como resultado 1.39 que a su vez se puede descomponer como diferencia de dos matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix} = I - \Psi \tag{1.40}$$

Por tanto, para pequeños ángulos (α, β, γ)

$$C_t^s \approx I - \Psi = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{pmatrix} \tag{1.41}$$

Teniendo en cuenta el caracter diferencial de los giros, la matriz de transformación recíproca para pasar del sistema *s-frame* al *t-frame* resulta

$$C_s^t \approx \begin{pmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 0 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 0 \end{pmatrix} = I - \Psi^T \quad (1.42)$$

1.2.3 Ángulos de navegación

Cuando los ángulos de Euler (α, β, γ) se refieren a los giros de un sistema *b-frame* con respecto a un *n-frame* del tipo (*NED*) suelen recibir la denominación específica de ángulos de navegación debido a que son los que se emplean para describir las maniobras del vehículo al que está asociado dicho *b-frame*. Una notación bastante común es (ϕ, θ, ψ) con el siguiente dominio

$$\phi = [-180^\circ, +180^\circ] \quad (1.43)$$

$$\theta = [-90^\circ, +90^\circ] \quad (1.44)$$

$$\psi = [-180^\circ, +180^\circ] \quad (1.45)$$

Los valores (ϕ, θ, ψ) representan, por tanto, los ángulos que definen la posición del vehículo (*attitude*) respecto al sistema local de navegación. Es decir, si se quisiera maniobrar el vehículo para alinearlo con el *n-frame* sería necesario efectuar los giros $(-\phi, -\theta, -\psi)$, con lo cual los ejes del *b-frame* quedarían paralelos al los del *n-frame*.

Aunque en general se suelen denominan alabeo (*roll*), inclinación (*pitch*) y deriva (*yaw, heading*), el nombre de las maniobras pueden variar dependiendo del tipo de navegación. En navegación aérea los ángulos de Euler se denominan alabeo (ϕ), elevación (θ) y guiñada (ψ), mientras que en navegación marítima se denominan respectivamente escora (*roll*), inclinación (*pitch*) y deriva (*yaw, heading*).

Recuérdese que a la hora de describir o ejecutar una maniobra es importante el orden en la secuencia de los giros, ya que las matrices de rotación no tienen la propiedad conmutativa. Por ejemplo, en navegación aérea no sería lo mismo ejecutar una maniobra de alabeo, elevación y guiñada, en ese orden, que, con los mismos ángulos, efectuar la guiñada, el alabeo y la elevación, ya que la situación y posición final del avión serían diferentes.

La matriz de rotación $C_t^s = R_3(\psi)R_2(\theta)R_1(\phi)$ expresada de manera explícita en función de los ángulos de navegación resulta

$$C_t^s = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \phi + \sin \psi \cos \phi & -\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi \\ -\sin \psi \cos \theta & -\sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi + \cos \psi \sin \phi \\ \sin \theta & -\cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

1.2.4 Cuaterniones

Al emplear ángulos de navegación en las ecuaciones diferenciales pueden aparecer singularidades para ciertas dinámicas de movimiento. Una posible solución es emplear cuaterniones. Los cuaterniones, también llamados cuaternios, son vectores de cuatro componentes

$$q = (q_0, q_1, q_2, q_3) \quad (1.47)$$

Una de las posibles aplicaciones de los cuaterniones es describir una rotación ζ en torno a un vector unitario \vec{n}

$$q_\zeta = \left(\cos \frac{\zeta}{2}, \vec{n} \sin \frac{\zeta}{2} \right) = (q_0, q_1, q_2, q_3) \quad (1.48)$$

con $\|q_\zeta\| = 1$.

Mediante el empleo de cuaterniones, las tres rotaciones definidas por los ángulos de Euler en torno a los correspondientes ejes son sustituidas por una única rotación ζ en torno al eje definido por el vector \vec{n} , cuya orientación cambia dependiendo de la rotación realizada.

La matriz de rotación 1.46 expresada en cuaterniones resulta

$$C_t^s = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 + q_3 q_0) & 2(q_1 q_3 - q_2 q_0) \\ 2(q_1 q_2 - q_3 q_0) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 + q_2 q_0) & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

de la cual se deduce que la relación entre los ángulos de Euler y los cuaterniones es

$$\begin{aligned} \alpha &= \arctan \left(\frac{-2(q_2 q_3 - q_0 q_1)}{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2} \right) \\ \beta &= -\arcsen(2(q_1 q_3 + q_2 q_0)) \\ \gamma &= \arctan \left(\frac{-2(q_1 q_2 - q_3 q_0)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2} \right) \end{aligned} \quad (1.50)$$

Por último, los cuaterniones se pueden obtener a partir de la matriz de rotación mediante

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{2}\sqrt{1 + c_{11} + c_{22} + c_{33}} \\ q_1 &= \frac{1}{4q_0}(c_{23} + c_{32}) \\ q_2 &= \frac{1}{4q_0}(c_{31} + c_{13}) \\ q_3 &= \frac{1}{4q_0}(c_{12} + c_{21}) \end{aligned} \quad (1.51)$$

1.2.5 Vectores axiales

Los datos angulares proporcionados por gran parte de las unidades de medición inercial (IMU) provienen de la integración de las velocidades angulares medidas en los ejes del sistema del sensor o *s-frame*. Por tanto, suele ser necesario transformar, además de las coordenadas, las velocidades angulares desde el *s-frame* hasta el *b-frame* o el *n-frame*, según convenga.

Para desarrollar las ecuaciones es necesario introducir previamente el concepto de vector axial. Un vector axial o pseudovector es una tripleta ordenada de ángulos de Euler (α, β, γ) , generalmente asociada con alguna magnitud física⁴. Dicha tripleta solamente se comporta como un vector bajo determinadas circunstancias. No cumple, por ejemplo, la propiedad conmutativa. Dados dos vectores axiales

$$\vec{\psi}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \quad \vec{\psi}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \quad (1.52)$$

en general $\vec{\psi}_1 + \vec{\psi}_2 \neq \vec{\psi}_2 + \vec{\psi}_1$. Esto se debe a que la transformación rotacional depende de el orden con que se efectúan las rotaciones. Si los ángulos de la tripleta $\vec{\psi} = (\alpha, \beta, \gamma)^T$ son de carácter diferencial, entonces $\vec{\psi}$ se comporta como un vector y permite transformaciones ortogonales arbitrarias. En el presente contexto, $\vec{\psi}$ se considerará siempre como si fuera un vector y que por tanto reúne las mismas propiedades que un vector.

Por tanto, cuando las rotaciones son de carácter diferencial, la transformación desde un sistema *t-frame* a hasta un sistema *s-frame* permite escribir 1.25 como

$$\vec{x}^s = C_t^s \vec{x}^t = (I - \Psi) \vec{x}^t = \vec{x}^t - \Psi \vec{x}^t = \vec{x}^t - \vec{\psi} \times \vec{x}^t. \quad (1.53)$$

⁴Algunos ejemplos de vectores axiales son el momento angular, el momento de una fuerza, la velocidad angular y el campo magnético.

Como puede apreciarse, existe una equivalencia entre la matriz Ψ y el producto vectorial con $\vec{\psi} \times$, es decir

$$[\vec{\psi} \times] = \left[\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \times \right] = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix} = \Psi \quad (1.54)$$

Supongamos que el vector axial $\vec{\psi}^t$ define una pequeña rotación en el sistema t -frame. Entonces, la correspondiente rotación diferencial se expresaría en el s -frame mediante

$$\vec{\psi}^s = C_t^s \vec{\psi}^t \quad (1.55)$$

ya que $\vec{\psi} = (\alpha, \beta, \gamma)^T$ se comporta como un vector y puede ser tratado como tal. La alternativa empleando matrices es

$$\Psi^s = C_t^s \Psi^t C_s^t \quad (1.56)$$

produciendo el empleo de ambas expresiones resultados equivalentes.

1.2.6 Velocidades angulares

Supongamos que un sistema t -frame rota respecto a otro sistema s -frame y que dicha rotación es función del tiempo. Supongamos que la evolución en el tiempo de los ángulos respecto a cada uno de los respectivos ejes instantáneos está definida por el vector axial $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$. Aunque las componentes de $\vec{\omega}$ no necesitan ser valores pequeños, ya que siempre representan la variación diferencial de un ángulo respecto a una variación diferencial de tiempo, es necesario tratarlo como un vector axial y no como un simple vector debido a que sólo se comportará como tal bajo determinadas secuencias de rotación.

Cuando en los cálculos intervienen las velocidades angulares de un sistema de coordenadas respecto a otro es importante que la notación empleada indique claramente en que sistema se está expresando el resultado de la rotación. Por ello, emplearemos $\vec{\omega}_{st}^t$ para denotar la velocidad angular del t -frame rotando en torno al s -frame con coordenadas en el t -frame. Siguiendo el mismo criterio $\vec{\omega}_{ts}^s$ denotaría la velocidad angular del s -frame rotando en torno al t -frame con coordenadas en el s -frame.

Debido a que las velocidades angulares son tratadas como vectores, dichos vectores se pueden transformar entre diferentes sistemas de igual forma que se transforman vectores de posición (1.25), es decir

$$\vec{\omega}_{st}^t = C_s^t \vec{\omega}_{st}^s = -C_s^t \vec{\omega}_{ts}^s \quad (1.57)$$

ya que

$$\vec{\omega}_{st}^s = -\vec{\omega}_{ts}^s \quad (1.58)$$

Adicionalmente, los vectores de velocidades angulares se pueden sumar y restar componente a componente siempre que la operación se realice en un único sistema de coordenadas

$$\vec{\omega}_{st}^t = \vec{\omega}_{su}^t + \vec{\omega}_{ut}^t \quad (1.59)$$

La alternativa a usar $\vec{\omega}_{st}^t$ empleando una matriz es

$$[\vec{\omega}_{st}^t \times] = \Omega_{st}^t = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.60)$$

1.3 Ecuaciones diferenciales de la transformación

En general se han de relacionar dos sistemas de coordenadas que rotan uno respecto al otro, es decir, que su orientación relativa cambia a lo largo del tiempo. Para describir dicha dinámica se necesita expresar las derivadas de las transformaciones de rotación respecto al tiempo y que denotaremos mediante \dot{C}_t^s . Dada la importancia de identificar claramente en cual de los dos sistemas tiene lugar la diferenciación, como regla general se entenderá que la diferenciación se efectúa en el sistema que aparece en el superíndice de la variable.

La derivada de una transformación de rotación C_t^s que es función del tiempo es

$$\dot{C}_t^s = \lim_{\delta\tau \rightarrow 0} \frac{C_t^s(\tau + \delta\tau) - C_t^s(\tau)}{\delta\tau} \quad (1.61)$$

siendo τ el instante inicial y $\tau + \delta\tau$ el instante final. Es decir, la transformación en el instante $\tau + \delta\tau$ es el resultado de la transformación hasta el instante τ más un

pequeño cambio en el s -frame durante el intervalo de tiempo $\delta\tau$. Por tanto, también se puede expresar cómo

$$C_t^s(\tau + \delta\tau) = \delta C^s C_t^s(\tau) \quad (1.62)$$

dónde, introduciendo la expresión (1.41), la transformación rotacional diferencial δC^s puede escribirse también cómo

$$\delta C^s = I - \Psi^s \quad (1.63)$$

Sustituyendo 1.62 y 1.63 en 1.61 resulta

$$\dot{C}_t^s = \lim_{\delta\tau \rightarrow 0} \frac{(I - \Psi^s)C_t^s(\tau) - C_t^s(\tau)}{\delta\tau} = \quad (1.64)$$

$$= \lim_{\delta\tau \rightarrow 0} \frac{-\Psi^s C_t^s(\tau)}{\delta\tau} = - \lim_{\delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Psi^s}{\delta\tau} C_t^s(\tau) = -\Omega_{ts}^s C_t^s \quad (1.65)$$

$$(1.66)$$

Es decir, que en el límite, una pequeña rotación del s -frame con respecto al tiempo, $\delta\tau$, representa la velocidad angular del s -frame respecto al t -frame en el s -frame. Mediante 1.29 y 1.58 se llega a

$$\Omega_{ts}^s = -\Omega_{st}^s = -C_t^s \Omega_{st}^t C_s^t \quad (1.67)$$

y por tanto la derivada respecto al tiempo de la matriz de transformación es

$$\dot{C}_t^s = C_t^s \Omega_{st}^t \quad (1.68)$$

También se pueden relacionar las velocidades lineales de los sistemas t -frame y s -frame derivando 1.25

$$\dot{\vec{x}}^s = C_t^s \dot{\vec{x}}^t + \dot{C}_t^s \vec{x}^t = C_t^s (\dot{\vec{x}}^t + \Omega_{st}^t \vec{x}^t) \quad (1.69)$$

o, lo que es lo mismo

$$C_s^t \dot{\vec{x}}^s = \dot{\vec{x}}^t + \vec{\omega}_{st}^t \times \vec{x}^t \quad (1.70)$$

que es la Ley de Coriolis. El término de la izquierda es un vector en el t -frame, pero la diferenciación respecto al tiempo se realiza en el s -frame. El término de la derecha está en su conjunto expresado en el t -frame.

1.4 Transformaciones específicas

1.4.1 Entre el e -frame y el i -frame

Aunque el movimiento del polo y el conjunto precesión-nutación necesariamente ha de incluirse en aplicaciones de alta precisión al relacionar los sistemas e -frame y el i -frame, en el presente contexto se hará una aproximación simplificada y generalmente suficiente para la mayoría de aplicaciones de navegación terrestre.

Como primera aproximación se asume que los sistemas e -frame y el i -frame son concéntricos y que el primero rota alrededor del segundo con una velocidad angular uniforme ω_e . El correspondiente vector de rotación es

$$\vec{\omega}_{ie}^e = (0, 0, \omega_e)^T \quad (1.71)$$

El ángulo rotado por la Tierra en un tiempo t es $\omega_e t$, de modo que la matriz de rotación en torno al eje \vec{e}_3^i resulta

$$C_i^e = R_3(\omega_e t) = \begin{pmatrix} \cos \omega_e t & \sen \omega_e t & 0 \\ -\sen \omega_e t & \cos \omega_e t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.72)$$

que además permite comprobar que

$$\vec{\omega}_{ie}^e = \vec{\omega}_{ie}^i \quad (1.73)$$

Particularizando 1.25 con la inclusión de 1.72, la relación explícita entre las coordenadas de el e -frame y el i -frame resulta

$$\begin{pmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ x_3^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega_e t & -\sen \omega_e t & 0 \\ \sen \omega_e t & \cos \omega_e t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^e \\ x_2^e \\ x_3^e \end{pmatrix} \quad (1.74)$$

y finalmente, incluyendo las coordenadas geodésicas (φ, λ, h)

$$\begin{pmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ x_3^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega_e t & -\sen \omega_e t & 0 \\ \sen \omega_e t & \cos \omega_e t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\nu + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (\nu + h) \cos \varphi \sen \lambda \\ [\nu(1 - e^2) + h] \sen \varphi \end{pmatrix} \quad (1.75)$$

1.4.2 Entre el n -frame y el e -frame

Para un determinado instante, la relación entre el sistema n -frame y el sistema terrestre e -frame, se deduce de forma similar a la relación entre un sistema geodésico local con un sistema terrestre aunque adaptándolos a unos ejes locales (NED) en vez de (NEU). La transformación equivale a efectuar una rotación de ángulo $\varphi + \pi/2$ entorno al eje E local y a continuación rotar un ángulo $-\lambda$ en torno al nuevo eje D , es decir

$$C_n^e = R_3(-\lambda)R_2(\varphi + \pi/2) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \lambda & -\cos \varphi \cos \lambda \\ -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \lambda & -\cos \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \end{pmatrix} \quad (1.76)$$

Las velocidades angulares se pueden deducir mediante 1.68, que particularizado para el caso que nos ocupa permite escribir $\Omega_{en}^n = C_e^n \dot{C}_n^e$. Derivando C_n^e respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{C}_n^e = \begin{pmatrix} -\dot{\varphi} \cos \varphi \cos \lambda + \dot{\lambda} \sin \varphi \sin \lambda & -\dot{\lambda} \cos \lambda & \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \lambda \\ -\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \lambda - \dot{\lambda} \sin \varphi \cos \lambda & -\dot{\lambda} \sin \lambda & \dot{\varphi} \sin \varphi \sin \lambda \\ -\dot{\varphi} \sin \varphi & 0 & -\dot{\varphi} \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (1.77)$$

con lo que resulta

$$\Omega_{en}^n = C_e^n \dot{C}_n^e = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\lambda} \sin \varphi & \dot{\varphi} \\ -\dot{\lambda} \sin \varphi & 0 \sin \lambda & -\dot{\lambda} \cos \varphi \\ \dot{\varphi} & \dot{\lambda} \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \quad (1.78)$$

que permite deducir el vector axial de las rotaciones mediante 1.60

$$\vec{\omega}_{en}^n = (\dot{\lambda} \cos \varphi, -\dot{\varphi}, -\dot{\lambda} \sin \varphi)^T \quad (1.79)$$

Las velocidades angulares $\dot{\varphi}$ y $\dot{\lambda}$ son la variación respecto al tiempo de las coordenadas latitud y longitud. Para expresarlas en unidades lineales basta con multiplicarlas por los correspondientes radios de curvatura del elipsoide para el punto en cuestión

$$\begin{aligned} v_n &= \dot{\varphi}(\rho + h) \\ v_e &= \dot{\lambda}(\nu + h) \cos \varphi \\ v_d &= -\dot{h} \end{aligned} \quad (1.80)$$

Para expresar las velocidades angulares en un sistema *i-frame* simplificado, a la ecuación 1.79 se le ha de incluir la rotación terrestre ω_e de forma que

$$\vec{\omega}_{in}^n = ((\dot{\lambda} + \omega_e) \cos \varphi, -\dot{\varphi}, -(\dot{\lambda} + \omega_e) \sin \varphi)^T \quad (1.81)$$

1.4.3 Entre el *b-frame* y el *n-frame*

Prácticamente en todas las aplicaciones de navegación es necesario transformar entre el *b-frame* y el *n-frame*. El *b-frame* puede estar asociado al vehículo que navega o bien al cuerpo rígido que sustenta el conjunto de sensores cuyos datos se quieren integrar.

Si la orientación relativa del sistema *b-frame* está definida respecto al *n-frame* mediante la secuencia de giros (α, β, γ) , la matriz de rotación C_b^n para transformar del *b-frame* al *n-frame* se obtiene mediante $C_b^n = (C_n^b)^T = R_1(-\alpha)R_2(-\beta)R_3(-\gamma)$.

En caso de que la orientación relativa del sistema *b-frame* estuviera definida respecto al *n-frame* mediante los ángulos de navegación (ϕ, θ, ψ) , la matriz de rotación C_b^n se obtendría manera análoga, resultando en este caso $C_b^n = (C_n^b)^T = R_1(-\phi)R_2(-\theta)R_3(-\psi)$.

$$C_b^n = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta & -\sin \psi \cos \theta & \sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \sin \phi + \sin \psi \cos \phi & -\sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & -\cos \theta \sin \phi \\ -\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi + \cos \psi \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \quad (1.82)$$

Para obtener la relación entre las velocidades angulares $\vec{\omega}_{nb}^b$ y la variación respecto al tiempo de los ángulos de navegación $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ se recurre de nuevo a la ecuación 1.68, que particularizada para el caso que nos ocupa permite escribir $\Omega_{nb}^b = C_n^b \dot{C}_b^n$. Efectuadas las oportunas derivadas y sustituyendo se obtiene finalmente

$$\vec{\omega}_{nb}^b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \psi \\ 0 & \cos \phi & \cos \psi \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \psi \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (1.83)$$

y teniendo en cuenta que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \psi \\ 0 & \cos \phi & \cos \psi \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \psi \cos \phi \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{pmatrix} \quad (1.84)$$

se despeja el vector de velocidades angulares

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{pmatrix} \vec{\omega}_{nb}^b \quad (1.85)$$

Las ecuaciones diferenciales 1.85 pueden ser integradas para obtener los ángulos de navegación de un vehículo a partir de las velocidades angulares del *b-frame* respecto al *n-frame* definidas por el vector axial $\vec{\omega}_{nb}^b$. Un problema es que presentan puntos singulares cuando $\theta = \pm 90^\circ$ debido a los términos $\tan \theta$ y $\sec \theta$ y por tanto, para ciertas dinámicas de movimiento fallarían.

Una posible alternativa es plantear las ecuaciones diferenciales en cuaterniones. Las derivadas de los cuaterniones respecto al tiempo se dan a continuación

$$\begin{aligned} \dot{q}_0 &= \frac{1}{2}(q_1\omega_1 + q_2\omega_2 + q_3\omega_3) \\ \dot{q}_1 &= \frac{1}{2}(-q_0\omega_1 - q_3\omega_2 + q_2\omega_3) \\ \dot{q}_2 &= \frac{1}{2}(q_3\omega_1 - q_0\omega_2 - q_1\omega_3) \\ \dot{q}_3 &= \frac{1}{2}(-q_2\omega_1 + q_1\omega_2 - q_0\omega_3) \end{aligned} \quad (1.86)$$