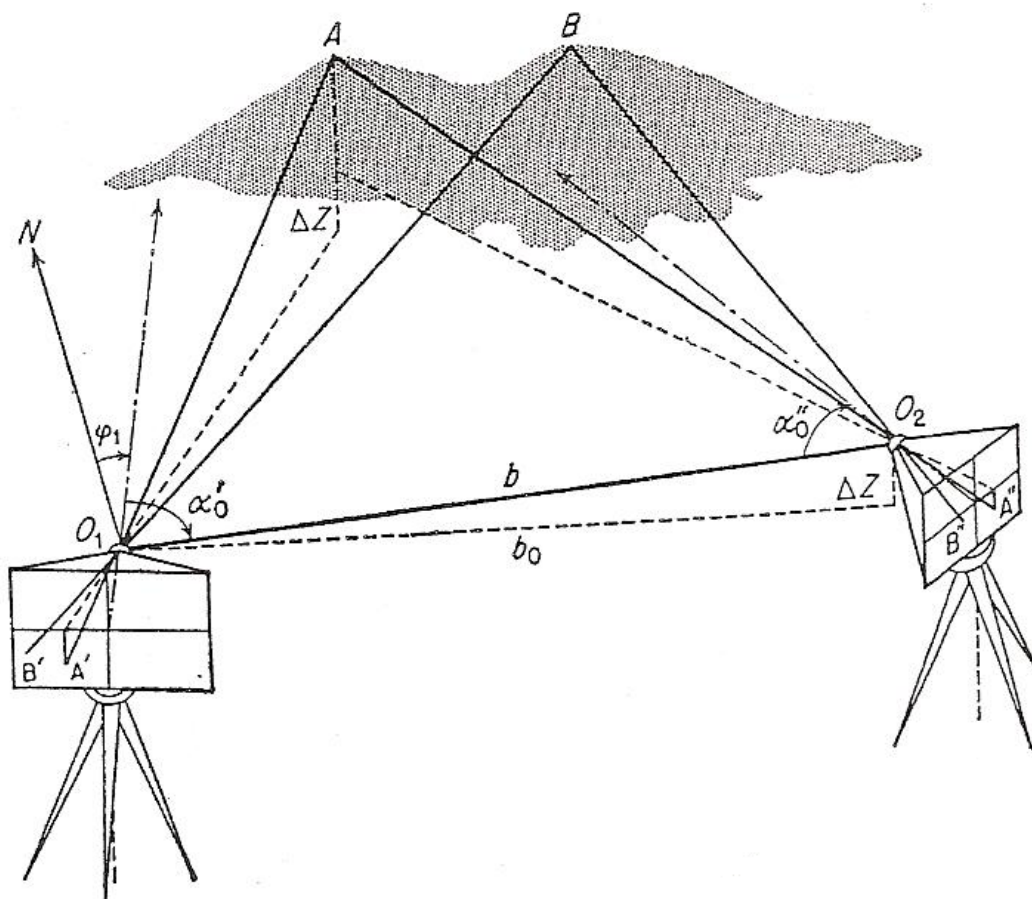


TEORIA FOTOGRAMETRÍA

1.- EL MÉTODO FOTOGRAMÉTRICO TERRESTRE

La fotogrametría deriva a partir de representaciones terrestres con la utilización de representaciones perspectivas de determinados objetos desde varios puntos de observación. Es decir, la fotogrametría terrestre con fines cartográficos comenzó a aplicarse en la última mitad del S. XIX. Después de los trabajos de Laussedat (1854) y del General Terrero (1862), se inician una serie de ensayos que culminan con el que se puede considerar con el primer levantamiento que se realiza por fotogrametría terrestre, el plano a $E=1/200.000$ de una extensa zona de las Montañas Rocosas, levantado por el francés Deville.

El método utilizado se basa en la fotogrametría de intersección, mediante el cual se determina la posición de un punto en el terreno, por intersección directa desde dos puntos correlados.



Estos puntos son los centros de estación y las direcciones se obtienen a partir de las fotografías. La dificultad del procedimiento, estriba fundamentalmente, en la magnitud que debe tener el distanciamiento entre

los puntos de estación para conseguir una precisión aceptable, y que el punto sea identificable en las respectivas fotografías de toma.

Estos dos condicionantes presentan soluciones contrapuestas. La precisión de la intersección exige base grande y la identificación de puntos homólogos, requiere una base pequeña.

Hasta 1901 no se obtiene la solución del problema, cuando la firma Zeiss construye el estereocomparador de Pulfrich, en el que mediante un índice móvil, se permite identificar puntos homólogos en un modelo estereoscópico.

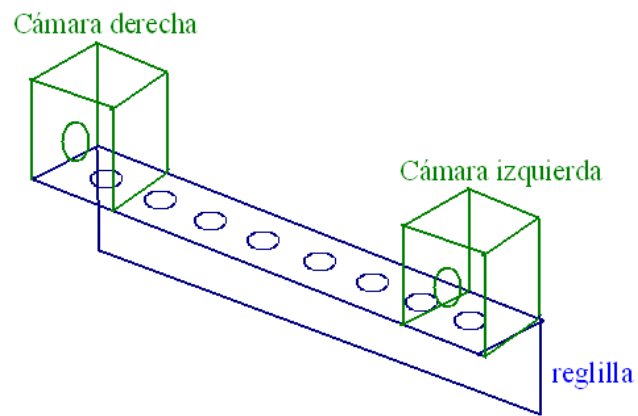
Basándose en estas técnicas, durante la 1ª guerra mundial, se ensayó la fotogrametría aérea, relegando a la terrestre a un segundo plano, pero complementándose en muchas ocasiones para levantamientos de planos a gran escala. Obteniéndose gran importancia cuando la toma fotogramétrica aérea no puede obtenerse o por su reducido tamaño no merece la pena el elevado coste de vuelo, siendo importantes los levantamientos de presas, glaciares...

Actualmente los principios de la fotogrametría terrestre han vuelto a resurgir, para microfotogrametría y levantamiento de monumentos para patrimonio principalmente.

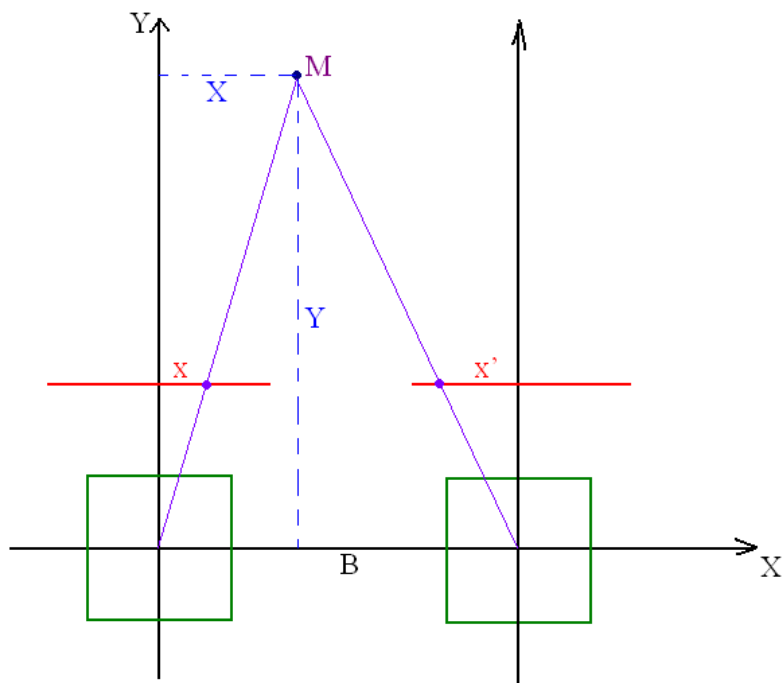
Para proyectar un levantamiento por fotogrametría terrestre, Deberemos proyectar de antemano el número de fotografías que necesitaremos para tener toda la superficie estereoscópicamente. Para ello atenderemos al tipo de levantamiento:

- Fachadas de edificios.
- M.D.T. de monumentos.
- Superficie terrestre (minas...)

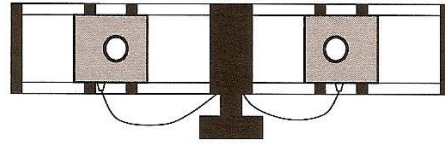
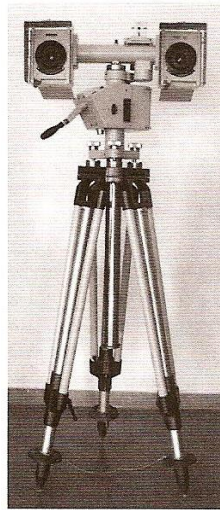
En resumen; hay que conseguir que se parezca lo máximo posible a un sistema de fotografía aérea.



Este esquema sería útil para la toma de fotografías estereoscópicas en tiempo real.

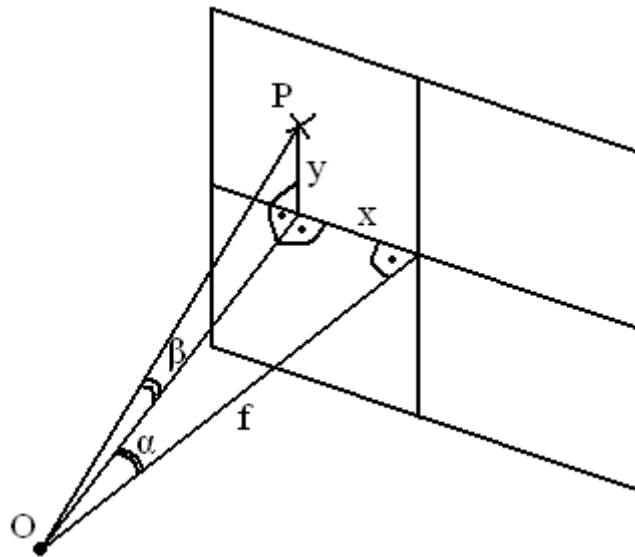


La cámara SMK, era una cámara estereoscópica muy útil para obtener fotogramas de objetos en movimiento.



1.1- Relaciones matemáticas de la fotogrametría terrestre:

Si midiéramos en un solo fotograma, podríamos obtener las coordenadas cliché de un punto de las relaciones:



$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{x}{y} \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + f^2}} \end{aligned} \right\}$$

$$x = f \cdot \operatorname{tg} \alpha;$$

$$tg \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + f^2}} = \frac{y}{\sqrt{f^2 \cdot tg^2 \alpha + f^2}} = \frac{y}{f \sqrt{tg^2 \alpha + 1}} = \frac{y}{f \sqrt{\frac{sen^2 \alpha}{cos^2 \alpha} + 1}}$$

$$= \frac{y}{f \sqrt{\frac{sen^2 \alpha + cos^2 \alpha}{cos^2 \alpha}}} = \frac{y}{\frac{f}{cos^2 \alpha} \sqrt{\underbrace{sen^2 \alpha + cos^2 \alpha}_1}} \Rightarrow$$

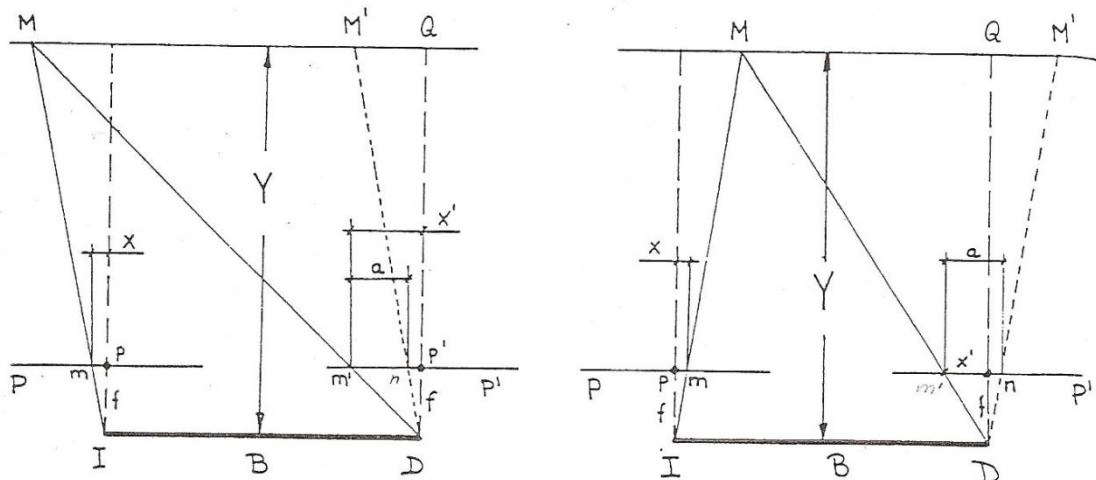
$$y = \frac{f}{cos \alpha} \cdot tg \beta$$

Para poder obtener las coordenadas terreno de un punto según el método estudiado, es necesario obtener la impresión fotográfica en al menos dos fotogramas tomados con una cierta separación denominada **base**, de forma que dos fotogramas consecutivos contengan una zona común del terreno denominada **recubrimiento**.

Según la disposición de dos fotogramas estereoscópicos, la toma será:

- Normal.
- Desviada.
- Convergente.

1.1.1- Toma normal:



Será cuando las direcciones de toma de cada fotograma sean paralelas entre sí, y perpendiculares a la base (caso de las estereocámaras).

Sean dos fotogramas P y P' tomados desde I y D respectivamente, M un punto del terreno (se muestran dos casos), con p y p' los puntos principales de cada placa, se tiene:

$$x = m \cdot p$$

FOTO IZQ

$$x' = m' \cdot p'$$

FOTO DCHA

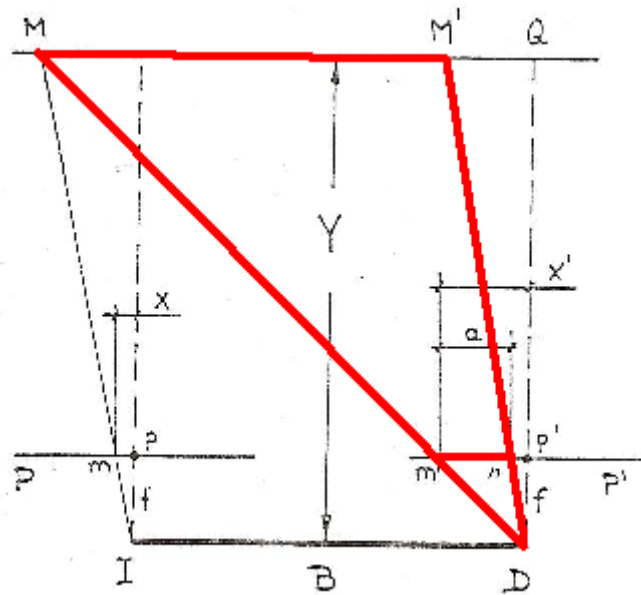
La diferencia de ambas será el paralaje de dicho punto:

$$a = p_a = x - x'$$

(Izquierda – derecha)

Trazando una paralela a IM, obtendremos DM, permitiendo hacer las relaciones.

$$Dm'n \square DMM'$$



$$\frac{\overline{MM'}}{\overline{m'n}} = \frac{\overline{DQ}}{\overline{Dp'}}$$

Siendo:

$$\overline{MM'} = \text{Base}$$

$$\overline{m'n} = a = p_a$$

$$\overline{DQ} = Y \text{ (distancia al plano de frente).}$$

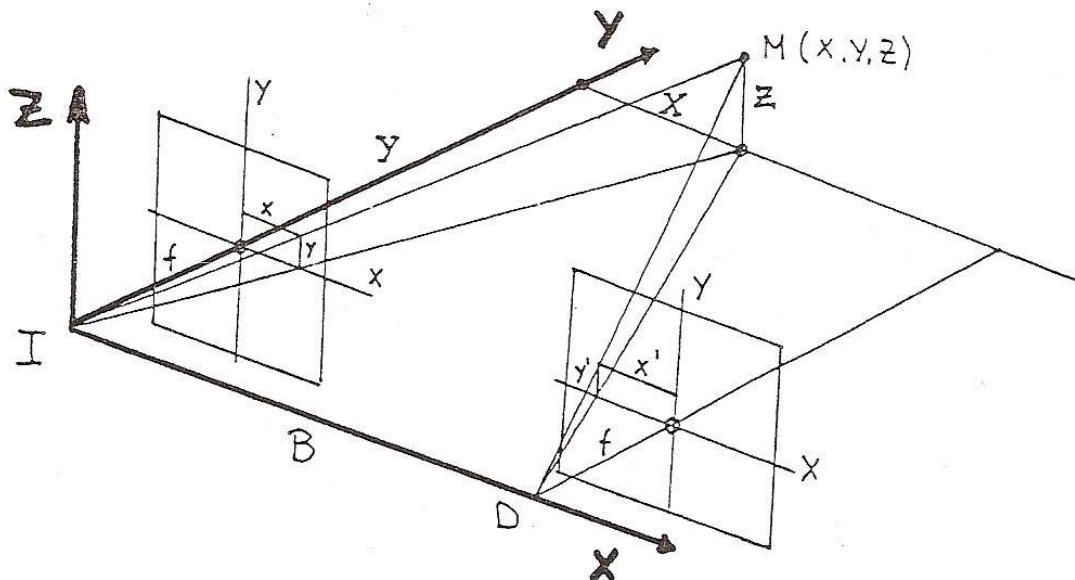
$$\overline{Dp'} = f$$

Resultando:

$$\frac{B}{a} = \frac{Y}{f} \Rightarrow \boxed{Y = \frac{B \cdot f}{a}}$$

Ecuación fundamental de la fotogrametría estereoscópica que define la distancia a un plano de frente en función de la paralaje.

Sea un sistema de ejes cartesianos con origen en I foco del fotograma director.



Para un punto M del espacio se tienen las siguientes relaciones:

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{f}; \quad X = \frac{x}{f} Y$$

$$\frac{Z}{y} = \frac{Y}{f}; \quad Z = \frac{y}{f} \cdot Y$$

Sustituyendo el valor obtenido antes para Y:

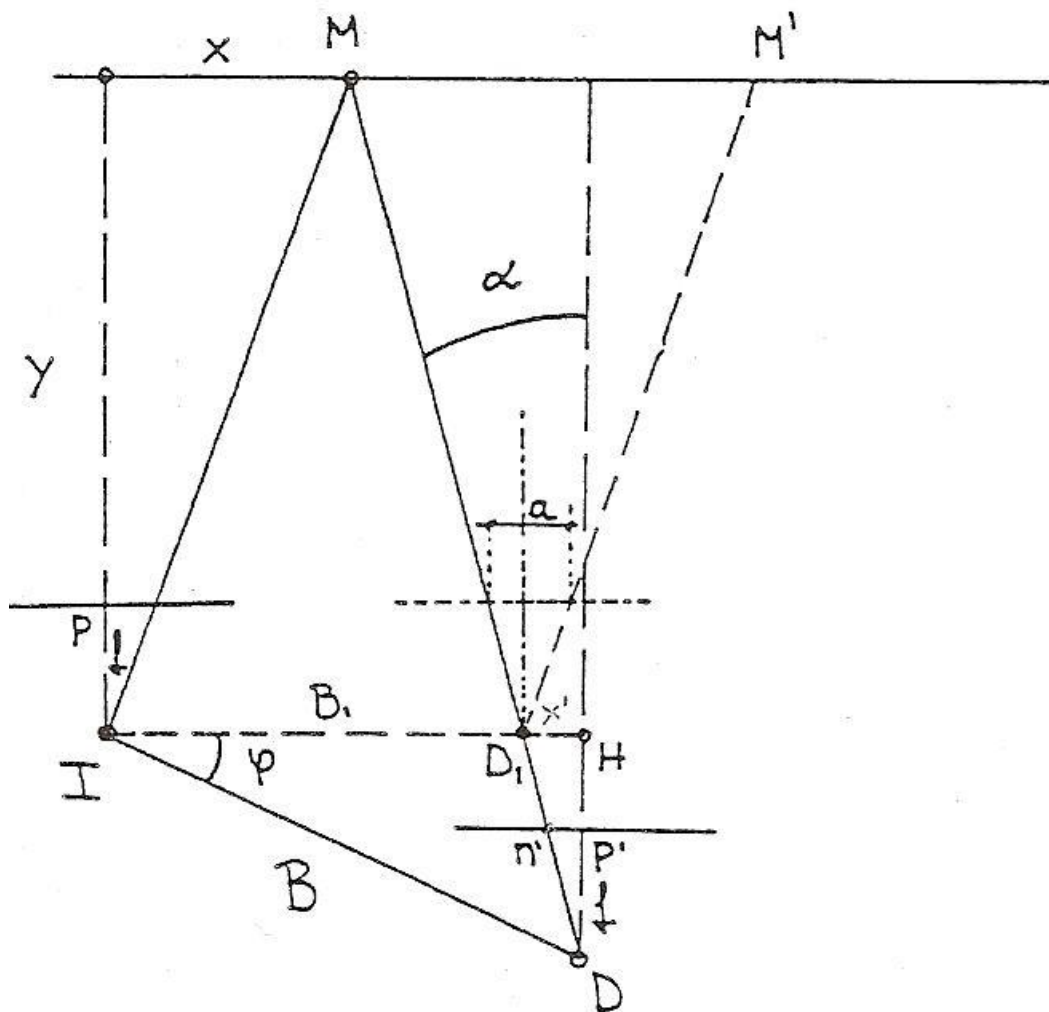
$$X = \frac{x}{f} \cdot \frac{B \cdot f}{a} = \frac{B}{a} \cdot x$$

$$Y = \frac{B}{a} \cdot f$$

$$Z = \frac{y}{f} \cdot \frac{B \cdot f}{a} = \frac{B}{a} \cdot y$$

Ecuaciones fundamentales de la fotogrametría estereoscópica.

1.1.2- Toma desviada.



Tal vez en este dibujo se vea mejor:

Sustituyendo en $Y = \frac{B_1 \cdot f}{p_a}$:

$$Y = \frac{B}{p_a} \underbrace{(f \cdot \cos \varphi - x' \cdot \operatorname{sen} \varphi)}_{f_1} \quad \rightarrow \quad Y = \frac{B}{p_a} \cdot f_1$$

Para poner con su signo x' :

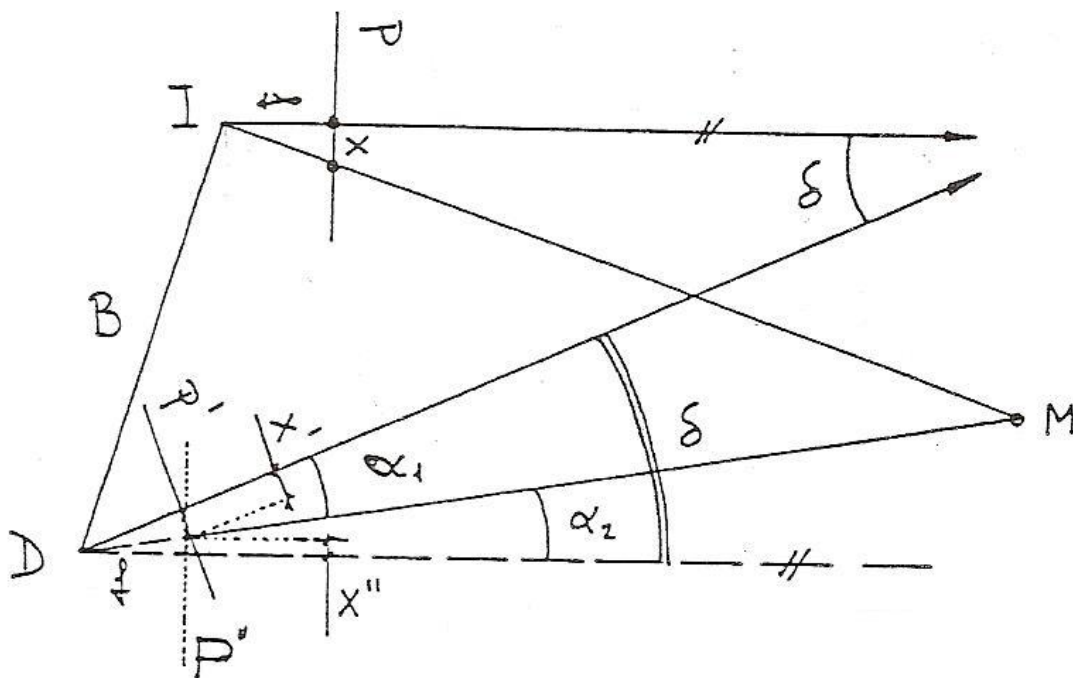
$$Y = \frac{B}{a} (f \cdot \cos \varphi - x' \cdot \operatorname{sen} \varphi) \quad \rightarrow \text{toma desviada a la derecha.}$$

$$Y = \frac{B}{a} (f \cdot \cos \varphi + x' \cdot \operatorname{sen} \varphi) \quad \rightarrow \text{toma desviada a la izquierda.}$$

$$X = \frac{B \cdot x}{P_a} \qquad Z = \frac{B \cdot y}{P_a}$$

1.1.3- Toma convergente.

Las direcciones de toma de cada fotograma, no son paralelas entre sí, ni perpendiculares a la base.



Se transformará de toma convergente a toma desviada, calculando el valor de x'' que será la coordenada x en el fotograma derecho, una vez realizado el giro correspondiente. Pudiendo de esta forma medir paralajes.

Observando la figura:

$$tg\alpha_1 = \frac{x'}{f} \Rightarrow \alpha_1 = arctg \frac{x'}{f}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \delta \Rightarrow \alpha_2 = \delta - \alpha_1 = \delta - arctg \frac{x'}{f}$$

$$tg\alpha_2 = \frac{x''}{f} \Rightarrow x'' = f \cdot tg\alpha_2 = f \cdot tg\left(\delta - arctg \frac{x'}{f}\right)$$

$$p_a = x - x'' \text{ (Cuidado con los signos de } x'')$$

1.2- Apoyo fotogramétrico.

Para poder dotar de escala al modelo estereoscópico, tomaremos sobre el terreno por métodos topográficos las coordenadas de unos puntos situados estratégicamente para que “cubran” la mayor zona de modelo estereoscópico posible.

Según el tipo de levantamiento fotogramétrico se tomará una distribución de puntos de apoyo determinada. A saber:

- Toma de fachada.
 - Toma de monumentos (3D).
 - Toma de terreno.
- Para el caso de fachadas habría que hacer un planeamiento de la distribución de los fotogramas en función del ángulo de apertura de la cámara y de la distancia a la fachada, para así, situar con pegatinas los puntos de apoyo, o seleccionar elementos bien definidos de la fachada.
 - Para monumentos y objetos en 3D se hará lo que se pueda.
 - Para la superficie terrestre, lo correcto es hacer un planeamiento de la distribución de los solapes y así repartir las placas de puntería. Para esto se necesita conocer la geometría del modelo estereoscópico que conseguimos con nuestra cámara.

$$\begin{aligned}
&= B^2 \left(k^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} - 4 \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} - (k-2) \right) = \\
&= B^2 \left[\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} (k^2 - 4) - (k-2) \right] = \\
&= B^2 \left[\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} (k-2)(k+2) - (k-2) \right] = \\
&= B^2 (k-2) \left[\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} (k+2) - 1 \right]
\end{aligned}$$

Sabiendo que $k = \frac{Y_{\max}}{B}$ y $k' = \frac{Y_{\min}}{B}$

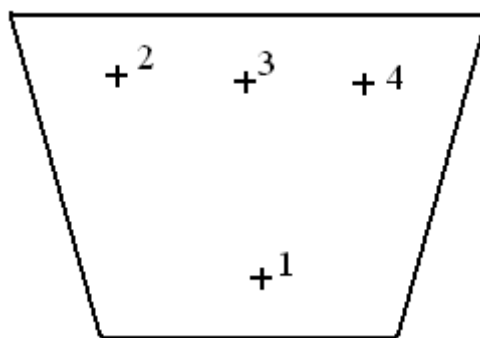
$$S = 2kB \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} - B = B \left(2k \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} - 1 \right)$$

S = Anchura máxima del modelo.

$$S' = B \left(2k' \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} - 1 \right)$$

S' = Anchura a una distancia Y.

Una correcta distribución de puntos de apoyo sería:



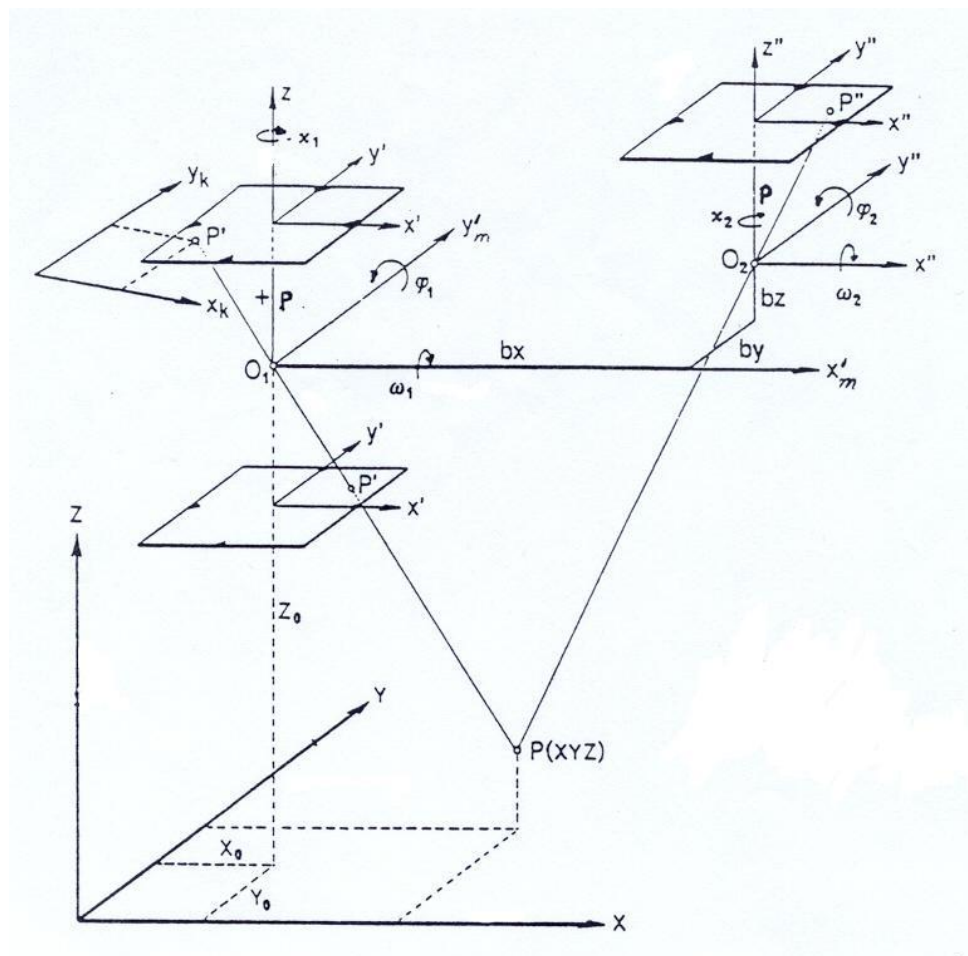
2.- Sistemas de coordenadas: píxel, imagen, modelo, objeto/terreno.

A lo largo de un proceso fotogramétrico de restitución, en el que partiendo de unos fotogramas obtenemos datos del terreno, se van utilizando para un mismo punto distintos tipos de coordenadas cartesianas referenciadas a distintos ejes, según el momento en que se encuentre el proceso.

Nos encontraremos, siempre y cuando realicemos dos tomas de un mismo objeto, los siguientes tipos de coordenadas:

2.1- Coordenadas fotográficas (píxel). (x_k, y_k)

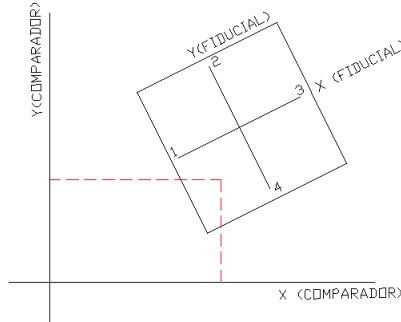
En la siguiente figura se muestran los sistemas de coordenadas que intervienen en el proceso, se parte de una condición teórica de tomas verticales y ejes paralelos entre sí.



Coordenadas planas, referidas a cualquier sistema cartesiano plano de definido sobre la imagen.

Para cualquier punto del objeto fotografiado tendremos dos pares de coordenadas:

- Fotograma izquierdo: $x_k \quad y_k$
- Fotograma derecho: $x'_k \quad y'_k$



2.2- Coordenadas imagen. $\begin{cases} (x, y, p) \\ (x', y', p) \end{cases}$

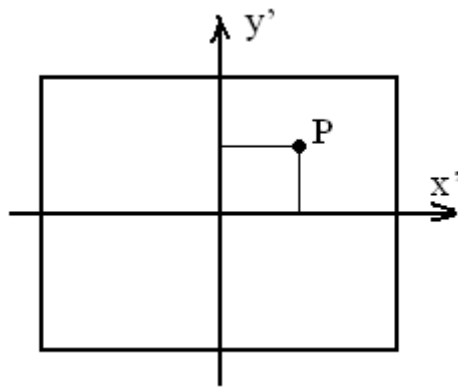
Coordenadas de la imagen de un punto respecto al sistema definido por las marcas fiduciales y el eje principal.

- Fotograma izquierdo: x, y, p
- Fotograma derecho: x', y', p

El sistema de coordenadas imagen, nos define la posición de un punto sobre el fotograma, a partir de estas coordenadas, podemos conocer la relación matemática existente entre el sistema de coordenadas imagen y el sistema de coordenadas terreno por medio de las ecuaciones matemáticas correspondientes a la proyección central.

El sistema de coordenadas imagen es ortogonal, y esta centrado en el centro de proyección izquierdo (O_1), según se observa en la figura 1, las coordenadas de un punto sobre los fotogramas vendrían definidos por:

Fotograma izquierdo: x_p, y_p
 Fotograma derecho: x'_p, y'_p



El sistema de coordenadas imagen debe estar exento de los errores sistemáticos que se desarrollarán a lo largo de este tema. Los ejes x e y imagen llevan una dirección muy similar a la materializada por los ejes formados por la unión de marcas fiduciales opuestas en el fotograma, por este motivo y solo para medidas expeditas de fotografía vertical, pueden utilizarse estas coordenadas fiduciales como si de coordenadas imagen se tratara. Claro está que el punto central de la imagen fotográfica, punto centro del eje de coordenadas fiduciales, rara vez coincide con el punto centro de coordenadas imagen. Este desplazamiento existente entre ambos puntos centrales, físico y geométrico, viene definido por las coordenadas del punto principal, (x_{wf}, y_{wf}) , esta diferencia de posición entre los puntos principales imagen y fiducial viene de la existencia de errores sistemáticos en la lente de la cámara.

Los valores (x_{wf}, y_{wf}) y la focal, junto con los valores de las distorsiones producidas en el fotograma, constituyen los parámetros de orientación interna de la fotografía. La orientación interna, recrea la posición de los haces proyectivos en el momento de la toma en la cámara del restituidor.

Tratándose las coordenadas imagen como un sistema tridimensional, deberemos adoptar un valor para la coordenada z , la coordenada z de la imagen de un punto cualquiera en un positivo es igual a la distancia principal negativa $(-f)$, mientras que en un negativo, la distancia principal se considera positiva (f) .

2.3- Coordenadas modelo. (x_m, y_m, z_m)

Coordenadas de un punto en el modelo métrico (modelo plástico en 3D), obtenido tras la orientación relativa, los ejes serán cartesianos y perpendiculares entre sí, pudiendo variar a nuestro antojo el punto origen $(0,0,0)$.

Cuando se trabaja en fotogrametría analítica, podemos obtener las coordenadas modelo o directamente las terreno. La formación del modelo estereoscópico no es requisito indispensable para la obtención de las coordenadas terreno. Si bien es mucho más sencillo obtener las coordenadas modelo para con posterioridad y mediante una transformación afín tridimensional muy sencilla, obtener las coordenadas terreno relacionando las coordenadas modelo obtenidas con las coordenadas de los puntos de apoyo medidas en campo.

El sistema de coordenadas modelo, según podemos observar en la figura 1, es el que tiene como origen de coordenadas el centro de proyección izquierdo (O_1), eje de las X, la componente b_x de la base estereoscópica, eje Y la componente b_y de la base estereoscópica y eje Z el perpendicular al plano formado por los dos anteriores y coincidente con la dirección de la focal. Las coordenadas que se midan en este sistema modelo serán el resultado de la intersección de dos haces homólogos. La escala de medida de este sistema de coordenadas puede ser variable en función de los distintos valores que puede adoptar b_x , definiéndose como escala de modelo, la relación:

$$mc = \text{base} - \text{restituidor} / \text{BASE} - \text{REAL}$$

2.4- Coordenadas terreno. (X, Y, Z)

Coordenadas de un punto restituido en el sistema definido por los puntos de apoyo, es decir, en el sistema absoluto de coordenadas.

A la vista de la gráfica de la página 4 del presente tema, se observan todos los sistemas perpendiculares entre sí, en la realidad esto no ocurre así, deberemos considerar un conjunto de giros (κ , ϕ , ω) respecto a los sistemas ya considerados, de forma que podamos:

- Realizar la orientación externa de los dos haces perspectivas.
- Situar el sistema de coordenadas modelo paralelo al sistema absoluto.

También deberemos tener en cuenta para conseguir el modelo estereoscópico los componentes de la base (b_x , b_y , b_z) para obtener la separación de los centros de proyección de las tomas.

Todo esto, dicho de otra forma; será un sistema de coordenadas terreno aquel que definan las coordenadas tomadas como puntos de apoyo, pudiendo ser una sistema cartográfico según una determinada proyección de referencia, o considerando supuesto de tierra plana con coordenadas locales,

o considerando un sistema terrestre para un determinado levantamiento arquitectónico. El sistema de coordenadas terreno será el que determina la salida final del proceso de restitución.

En la figura de la cuarta página, el sistema terreno viene definido con los ejes X,Y,Z, a este sistema se puede llegar directamente desde las ecuaciones de colinearidad, o a partir de la transformación afín tridimensional de las coordenadas modelo, en un caso deberemos trabajar con la distancia entre centros de proyección real en el momento de la toma fotogramétrica, y en otro con el determinado en el restituidor para obtener el modelo plástico tridimensional.

Con anterioridad se ha comentado el concepto de orientación interna, una vez realizada esta, y siguiendo una metodología puramente analítica, se deberá realizar la orientación externa, consistente en la localización y orientación de la proyección central que define la orientación interna sobre el sistema de coordenadas terreno. Los parámetros que definen la orientación externa son: la posición del centro de proyección en el sistema terreno y la orientación angular del sistema espacial de coordenadas imagen en el sistema terreno, mediante los giros κ , ϕ , ω , sobre los ejes X,Y,Z respectivamente.

3.- El proceso fotogramétrico. Proyección central

Se fundamenta en que para formar el rayo proyectivo hacen falta 3 elementos; el centro de proyección (CDP), un punto imagen y un punto terreno.

El origen del haz de rayos proyectivos es común (CDP).

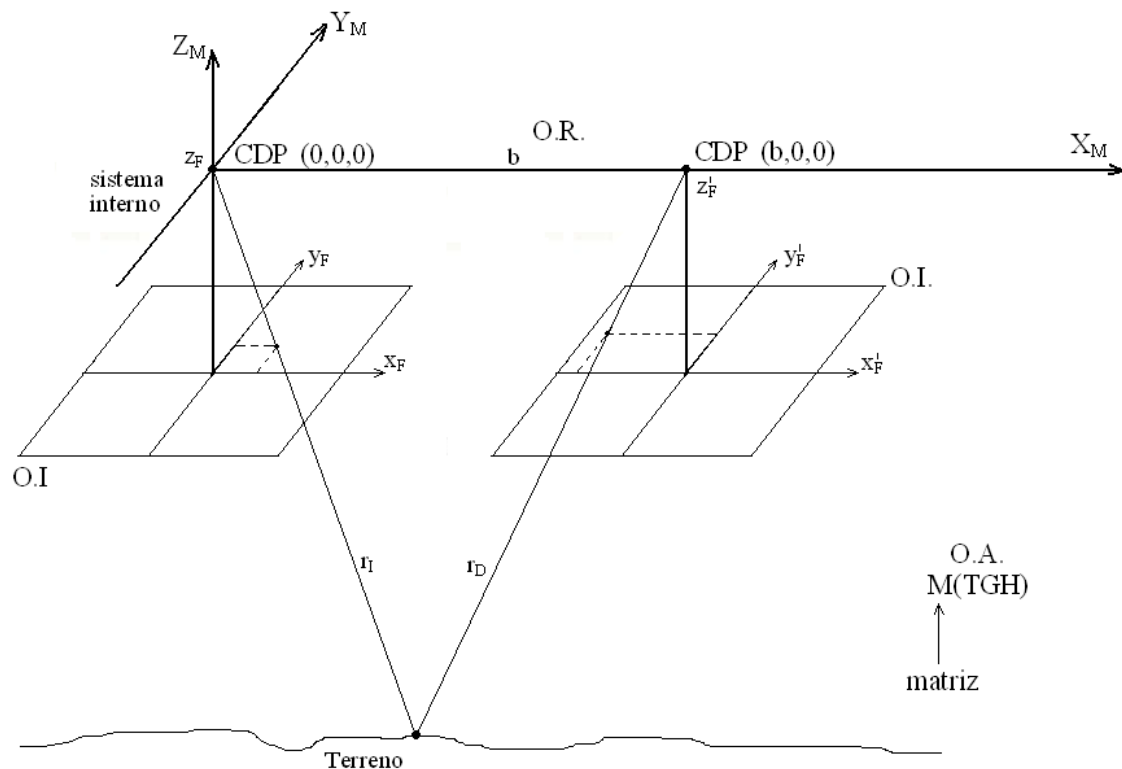
El rayo proyectivo es la línea determinada por CDP, un punto imagen y un punto terreno. El CDP es común para todo el haz de rayos proyectivos.

La restitución analógica, no requería la medición de coordenadas sobre los fotogramas (imagen), todo se realizaba de una forma mecánica, incluso el paso de los puntos obtenidos por intersección de haces en el modelo tridimensional (coordenadas modelo), se transformaba en la cartografía final resultado, y por tanto en las coordenadas terreno, mediante proporciones y relaciones entre escalas de modelo y escalas de plano. Situados los puntos de apoyo sobre una minuta, se encajaba – ajustaba la proyección del modelo estereoscópico a la salida final de la cartografía.

La metodología actual, la fotogrametría analítica y digital, parte de los mismos principios de la proyección central que la restitución analógica, pero sin la necesidad de realizar la materialización física del modelo estereoscópico tridimensional, se podría definir de la siguiente forma:

“Reconstrucción espacial o analítica de dos haces de rayos semejantes a los que inciden en el objetivo de la cámara de toma partiendo del terreno, mediante dos fotografías que, aún cuando sean necesarias, pueden considerarse siempre simultaneas geométricamente”

La reconstrucción analítica de cada uno de los haces, se realizará partiendo de uno de los principios básicos de la proyección central, la condición de colinearidad: el punto de la imagen, el punto centro de proyección y el punto del modelo/terreno, se encuentran en una misma recta. Teniendo definida la recta con dos puntos el tercero siempre tendremos métodos para determinarlo.



El objetivo es definir sistemas de coordenadas internas (ejes fiduciales) y luego definir sistemas de coordenadas que agrupe las dos imágenes.

Los puntos en el fotograma se llaman coordenadas fiduciales, esos mismos puntos en un sistema externo se llaman coordenadas comparador y definiendo la base, ya podemos hablar de un sistema modelo.

Ecuaciones básicas de la proyección central o ecuaciones básicas de la fotogrametría:

La condición de partida es que todos los sistemas se consideran paralelos entre sí.

Sobre una misma recta se encuentra el centro de proyección, punto imagen y punto terreno o modelo según el sistema en que nos encontramos.

$$r_1 = \left\{ \begin{array}{l} O_1(x_0, y_0, z_0) \\ (x_i, y_i) \\ (x_m, y_m, z_m) / (x, y, z) \end{array} \right\} r_i$$

$$r_2 = \left\{ \begin{array}{l} O_2(x_1, y_1, z_1) \\ (x'_i, y'_i) \\ (x_m, y_m, z_m) / (x, y, z) \end{array} \right\}$$

$$\text{La intersección } r_1 \cap r_2 = \begin{vmatrix} x_m & y_m & z_m \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

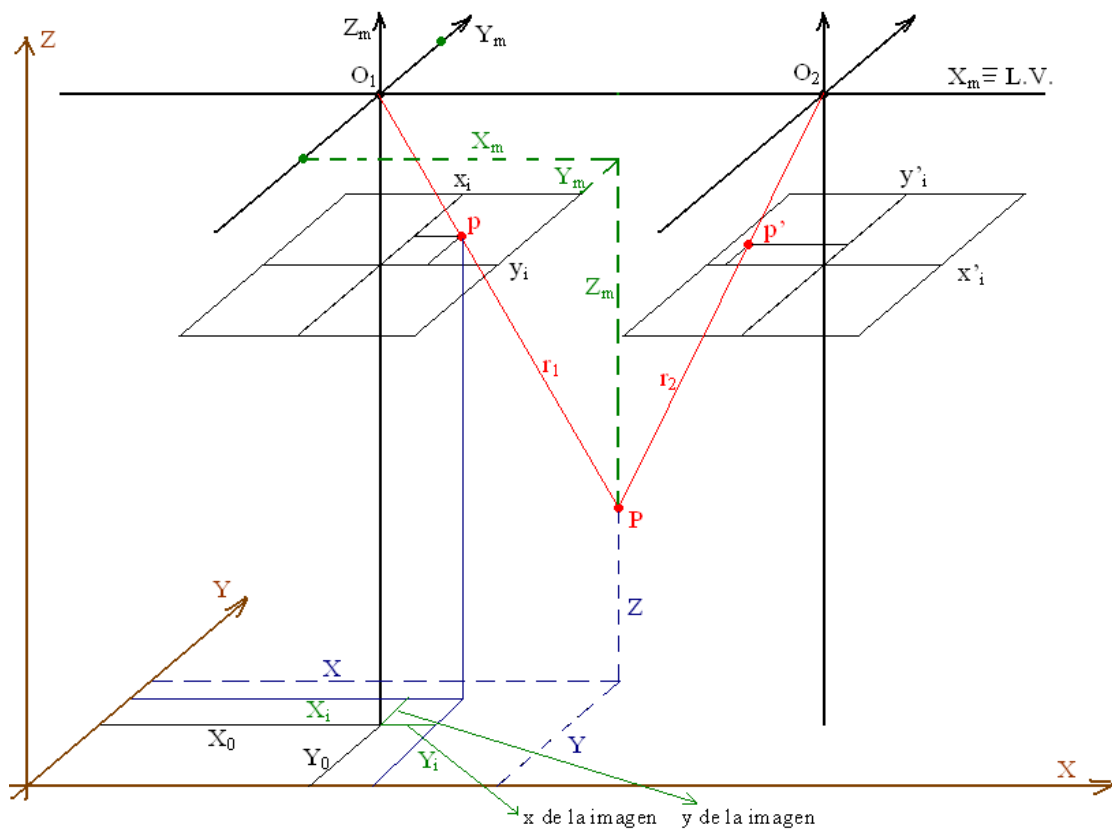
En definitiva, este es el teorema de colinealidad.

Si los centros de proyección están separados una distancia que corresponde a la base real (B) hay que trabajar con la altura de vuelo.

Sobre cada recta hay 3 elementos, conociendo dos de ellos, está definida la recta.

En principio conocemos coordenadas de puntos de apoyo y puntos de la imagen. Definiendo muchas rectas podemos determinar el centro de proyección.

El punto queda definido por la intersección de dos rectas.



$(X_i, Y_i, Z_i) \rightarrow$ Coordenadas imagen.

$(X_0, Y_0, Z_0) \rightarrow$ Coordenadas CDP.

$(X, Y, Z) \rightarrow$ Coordenadas terreno.

$(X_K, Y_K, Z_K) \rightarrow$ Coordenadas comparador.

Z es la focal.

$$\left. \begin{matrix} X_i & Y_i & Z_i \\ X_0 & Y_0 & Z_0 \\ X & Y & Z \end{matrix} \right\} \frac{X_i - X_0}{X - X_0} = \frac{Y_i - Y_0}{Y - Y_0} = \frac{Z_i - Z_0}{Z - Z_0} \Rightarrow$$

$$\frac{x_i}{X - X_0} = \frac{y_i}{Y - Y_0} = \frac{z_i \equiv f}{Z - Z_0}$$

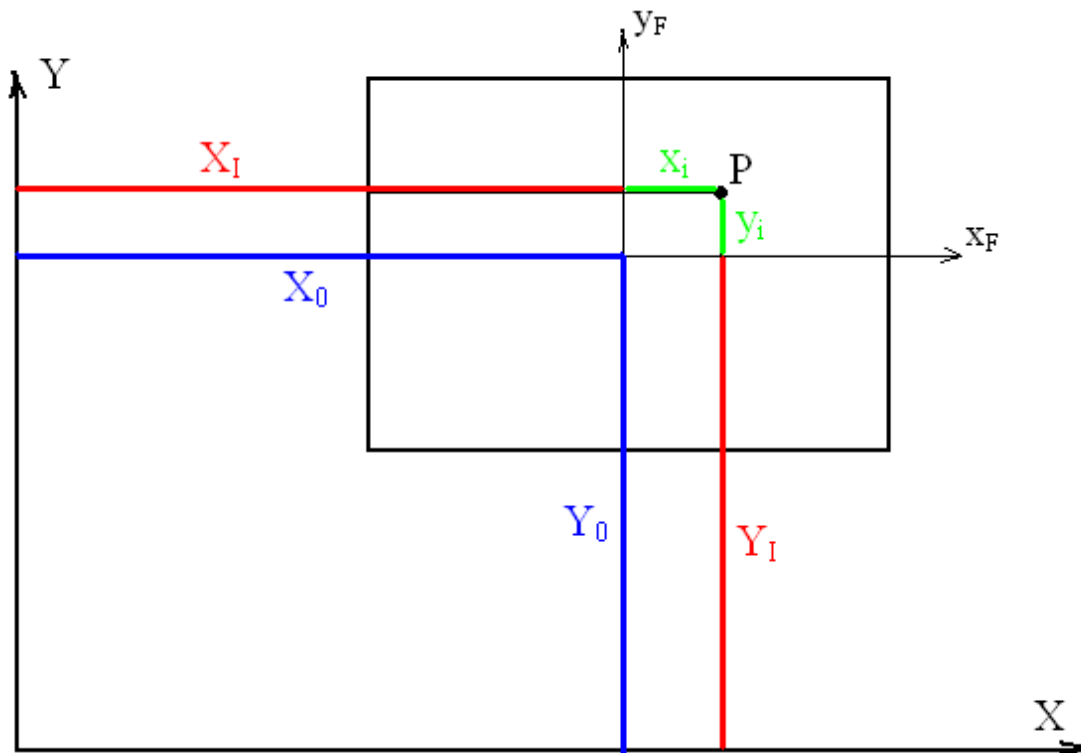
$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \frac{z_i}{Z - Z_0} \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix}$$

Ahora hay que introducir coordenadas comparador que va a estar girando con respecto al sistema imagen.

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = [R] \begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \\ f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \\ f \end{pmatrix} = [R^{-1}] \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$$

$[R^{-1}] = [M] \equiv$ matriz de rotación.



$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \frac{z_i}{Z - Z_0} \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix}$$

Todas estas coordenadas están en un sistema paralelo y en un mismo origen. Obtener esas coordenadas supone un problema.

Ya que $[M]$ es la inversa de $[R]$; entonces $m_{13} = R_{31}$

$$[M] \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \frac{z_i}{Z - Z_0} [M] \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_\kappa \\ y_\kappa \\ f \end{pmatrix} = \frac{z_i}{Z - Z_0} [M] \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix}$$

$$\text{a) } X_\kappa (Z - Z_0) = Z_i [m_{11} (X - X_0) + m_{12} (Y - Y_0) + m_{13} (Z - Z_0)]$$

$$\text{b) } Y_\kappa (Z - Z_0) = Z_i [m_{21} (X - X_0) + m_{22} (Y - Y_0) + m_{23} (Z - Z_0)]$$

$$\text{c) } f (Z - Z_0) = Z_i [m_{31} (X - X_0) + m_{32} (Y - Y_0) + m_{33} (Z - Z_0)]$$

dividiendo a entre c:

$$X_\kappa = f \cdot \frac{[m_{11} (X - X_0) + m_{12} (Y - Y_0) + m_{13} (Z - Z_0)]}{[m_{31} (X - X_0) + m_{32} (Y - Y_0) + m_{33} (Z - Z_0)]}$$

Dividiendo b entre c:

$$Y_\kappa = f \cdot \frac{[m_{21} (X - X_0) + m_{22} (Y - Y_0) + m_{23} (Z - Z_0)]}{[m_{31} (X - X_0) + m_{32} (Y - Y_0) + m_{33} (Z - Z_0)]}$$

Y con esto ya se puede determinar la recta r_1

Estas son las ecuaciones básicas de la proyección central.

Estas ecuaciones están ligando las coordenadas comparador, las coordenadas terreno y las del centro de proyección, para obtener x_i , y_i del punto en un fotograma. Pero ese fotograma no necesariamente está en la dirección del eje de las x terreno de ese modelo, por lo que todavía hay que hacer otro giro para obtener un sistema paralelo absoluto.

$$\frac{x_i}{X - X_0} = \frac{y_i}{Y - Y_0} = \frac{z_i \equiv f}{Z - Z_0}$$

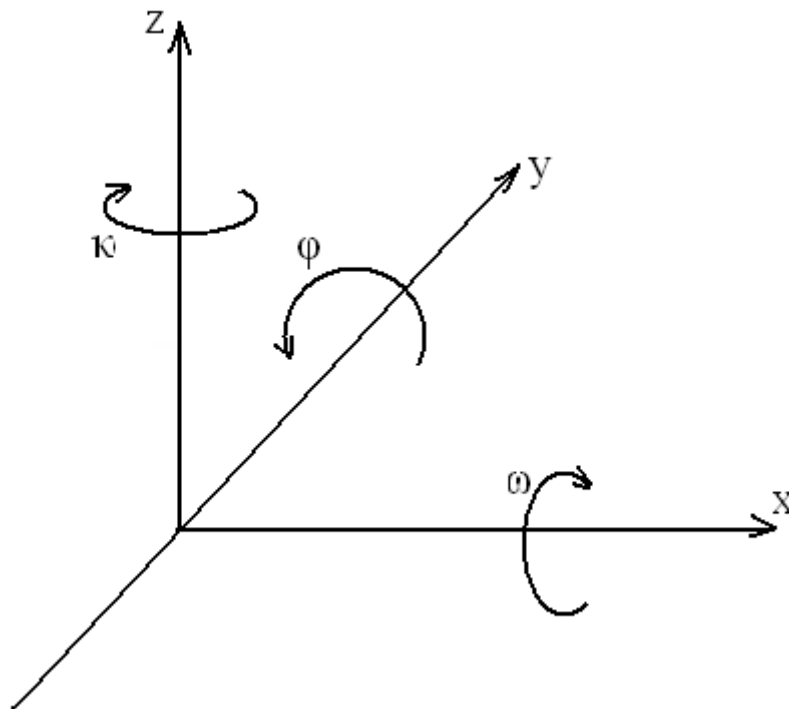
$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ f \end{pmatrix} \quad \text{Donde: } \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \text{es un sistema paralelo al terreno}$$

R es una matriz de rotación

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ f \end{pmatrix} = \text{Son coordenadas medidas.}$$

Obtención de la matriz de rotación tridimensional [M].

Sentido de los giros y sus signos.

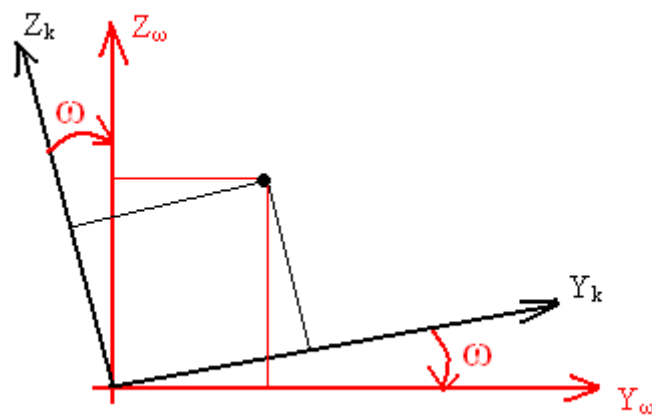


$\omega \rightarrow$ positivo $OZ \rightarrow OY$
 $\phi \rightarrow$ positivo $OX \rightarrow OZ$
 $\kappa \rightarrow$ positivo $OY \rightarrow OX$

Un sistema externo y girado hay que ponerlo paralelo al posible sistema modelo.

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{pmatrix}$$

GIRO (ω)



Giro matricial:

$$X_{\omega} = X_{\omega}$$

$$Y_{\omega} = Y \cos \omega - f \sin \omega$$

$$Z_{\omega} = Y \sin \omega + f \cos \omega$$

Sentido matricial en dos dimensiones:

$$\begin{pmatrix} Y_{\omega} \\ Z_{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_k \\ Z_k \end{pmatrix}$$

Sistema matricial en tres dimensiones:

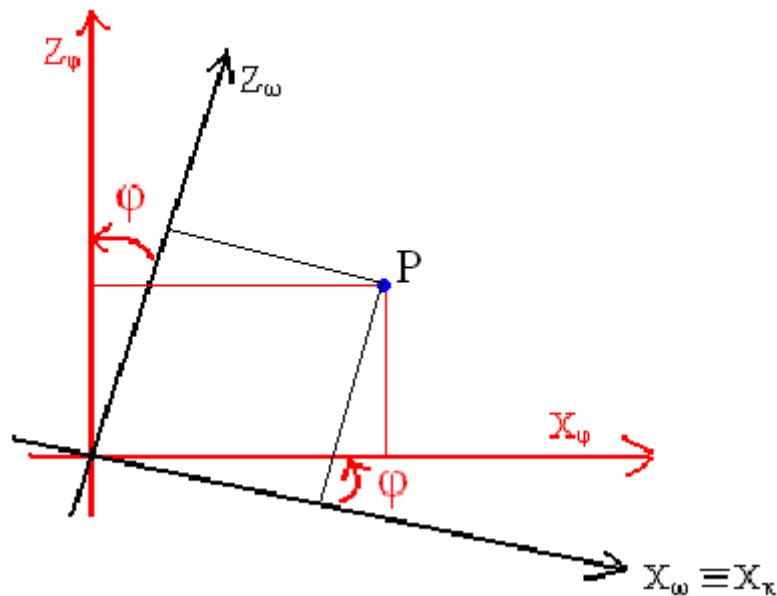
$$\begin{pmatrix} X_{\omega} \\ Y_{\omega} \\ Z_{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \\ f \end{pmatrix} = [R]_{\omega} \cdot \begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \\ f \end{pmatrix}$$

Si el giro se produce en sentido horario el signo – aparecerá donde está.

Si el giro se produce en sentido antihorario el signo – aparecerá en el otro

seno:
$$\begin{pmatrix} \cos \omega & \text{sen} \omega \\ -\text{sen} \omega & \cos \omega \end{pmatrix}$$

GIRO (φ)



Giro matricial

$$X_\varphi = X_\omega \cos \varphi + Z_\omega \text{sen} \varphi$$

$$Y_\varphi = Y_\omega$$

$$Z_\varphi = -X_\omega \text{sen} \varphi + Z_\omega \cos \varphi$$

Sentido matricial en dos dimensiones:

$$\begin{pmatrix} X_\varphi \\ Z_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \text{sen} \varphi \\ -\text{sen} \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_\omega \\ Z_\omega \end{pmatrix}$$

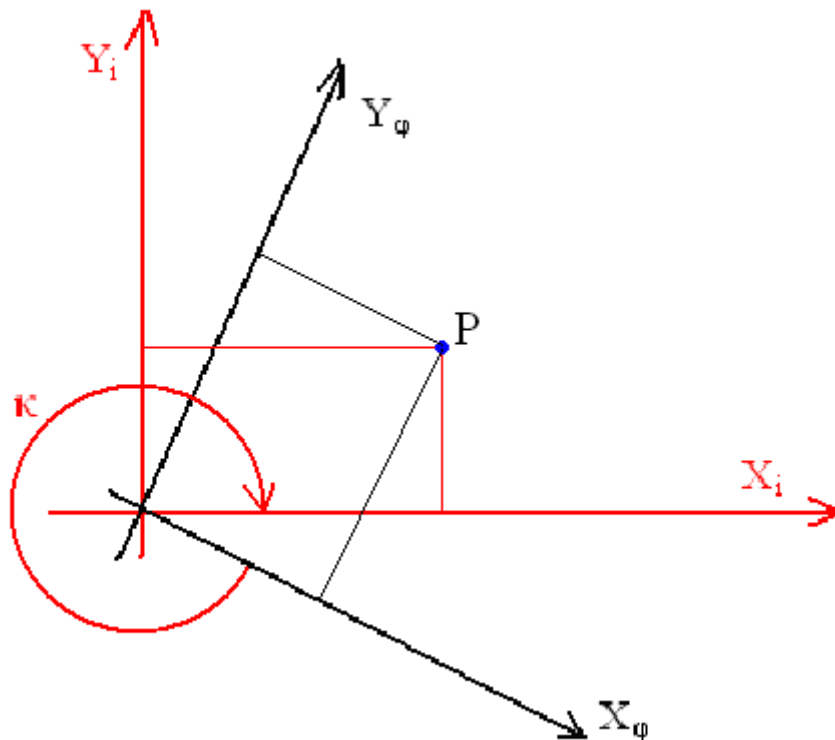
Sistema matricial en tres dimensiones:

$$\begin{pmatrix} X_\varphi \\ Y_\varphi \\ Z_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \operatorname{sen} \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_\omega \\ Y_\omega \\ Z_\omega \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos:

$$[R]_\varphi \begin{pmatrix} X_\omega \\ Y_\omega \\ Z_\omega \end{pmatrix} = [R]_\varphi \cdot [R]_\omega \cdot \begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \\ f \end{pmatrix}$$

GIRO (κ)



Giro matricial

$$X_i = X_\varphi \cos \kappa - Y_\varphi \operatorname{sen} \kappa$$

$$Y_i = X_\varphi \operatorname{sen} \kappa + Y_\varphi \cos \kappa$$

$$Z_i = Z_\varphi$$

Sentido matricial en dos dimensiones:

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \kappa & -\operatorname{sen} \kappa \\ \operatorname{sen} \kappa & \cos \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_\varphi \\ Y_\varphi \end{pmatrix}$$

Sentido matricial en tres dimensiones:

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \kappa & -\operatorname{sen} \kappa & 0 \\ \operatorname{sen} \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_\varphi \\ Y_\varphi \\ Z_\varphi \end{pmatrix} =$$

$$[R]_K \begin{pmatrix} X_\varphi \\ Y_\varphi \\ Z_\varphi \end{pmatrix} = [R]_K \cdot [R]_\varphi \cdot \begin{pmatrix} X_\omega \\ Y_\omega \\ Z_\omega \end{pmatrix} =$$

$$\underbrace{[R]_K \cdot [R]_\varphi \cdot [R]_\omega}_{[R]} \cdot \begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \\ f \end{pmatrix}$$

$$[R] = [R]_K \cdot [R]_\varphi \cdot [R]_\omega = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

Los componentes de la matriz de giro [R] son:

$$r_{11} = \cos \omega \cdot \cos \varphi$$

$$r_{12} = -\operatorname{sen} \kappa \cdot \cos \omega + \cos \kappa \cdot \operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} \omega$$

$$r_{13} = \operatorname{sen} \omega \cdot \operatorname{sen} \kappa + \cos \omega \cdot \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos \kappa$$

$$r_{21} = \operatorname{sen} \kappa \cdot \cos \varphi$$

$$r_{22} = \cos \kappa \cdot \cos \omega + \operatorname{sen} \omega \cdot \operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} \kappa$$

$$r_{23} = -\operatorname{sen} \omega \cdot \cos \kappa + \cos \omega \cdot \operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} \kappa$$

$$r_{31} = -\operatorname{sen} \varphi$$

$$r_{32} = \operatorname{sen} \omega \cdot \cos \varphi$$

$$r_{33} = \cos \kappa \cdot \cos \varphi$$

Los componentes de la matriz de giro $[R]^{-1} = [M]$ son:

$$m_{11} = \cos \varphi \cdot \cos \kappa$$

$$m_{12} = \cos \varphi \cdot \sin \kappa$$

$$m_{13} = -\sin \varphi$$

$$m_{21} = \sin \varphi \cdot \sin \omega \cdot \cos \kappa - \cos \omega \cdot \sin \kappa$$

$$m_{22} = \sin \varphi \cdot \sin \omega \cdot \sin \kappa + \cos \omega \cdot \cos \kappa$$

$$m_{23} = \sin \omega \cdot \cos \varphi$$

$$m_{31} = \sin \varphi \cdot \cos \omega \cdot \cos \kappa + \sin \omega \cdot \sin \kappa$$

$$m_{32} = \sin \varphi \cdot \cos \omega \cdot \sin \kappa - \sin \omega \cdot \cos \kappa$$

$$m_{33} = \cos \omega \cdot \cos \varphi$$