

## Capítulo 3

# Tratamiento de datos dinámicos

### 3.1 Generalidades

Muchos problemas conllevan la estimación de parámetros a partir de un conjunto de medidas redundantes. Las razones para efectuar medidas redundantes son fundamentalmente dos: ser capaz de detectar y valorar la existencia de errores y obtener la solución más exacta posible a partir de dichas medidas. Como no existen mediciones exactas, los datos redundantes producen soluciones inconsistentes. Es decir, que cada subconjunto de los datos medidos produce resultados diferentes en los parámetros a determinar. Para encontrar una solución única, se establece un modelo y la consistencia de los datos se obtiene mediante la aplicación de correcciones de las medidas respecto a dicho modelo. Este proceso de cálculo se conoce como ajuste, y en él se busca la consistencia de los datos con respecto a un modelo, con la finalidad de obtener una solución única y valorar su precisión. El escenario más habitual en ajustes topográficos es la realización de medidas redundantes para la obtención de una serie de parámetros constantes en el tiempo que son ajustados en bloque por mínimos cuadrados una vez finalizada la campaña de medición, es decir con post-proceso (Sec. 3.2).

Los parámetros a determinar pueden ser constantes como, por ejemplo, las coordenadas de una poligonal topográfica ajustada respecto a un marco de referencia oficial, o pueden variar con el tiempo como, por ejemplo, las coordenadas de un objeto en movimiento. Los parámetros pueden ser a su vez de carácter geométrico (coordenadas de una trayectoria, la orientación de un cuerpo en el espacio, deformaciones a lo largo del tiempo, etc.), de carácter físico (temperaturas, humedad, retardos atmosféricos, presión por radiación solar, etc.) o bien de carácter instrumental (estado de un reloj, sesgos, errores sistemáticos, etc.). En navegación, el vector de parámetros a determinar contiene como mínimo un vector de posición y un vector de velocidad y generalmente suele incorporar otros tres parámetros para

definir la orientación del cuerpo o posición (*attitude*). Dicho vector de parámetros suele recibir el nombre de vector de estado y evidentemente varía con el tiempo.

Por otra parte, en aplicaciones de navegación suele ser necesario disponer de las parámetros estimados en tiempo real (*real-time*) o al menos con una latencia lo suficientemente reducida para que permita no solo la navegación sino también el guiado, lo que se conoce como tiempo casi-real (*near real-time, quasi real-time*). Por tanto, es necesario reformular el ajuste por mínimos cuadrados para que permita una nueva estimación del vector de parámetros  $\vec{x}$  cada vez que se dispone de un nuevo vector de mediciones  $\vec{y}$  y al mismo tiempo reducir la carga computacional necesaria para obtener el vector de parámetros junto con su error. Es decir, una vez estimado el vector de parámetros y su error a partir de un cierto vector de observables, resulta conveniente no tener que incluir éste último al realizar un nuevo ajuste por mínimos cuadrados al disponer con posterioridad de un nuevo vector de observables. Para ello es necesario adaptar el método de mínimos cuadrados dando lugar a lo que se conoce como ajuste por mínimos cuadrados secuencial o recursivo (Sec. 3.3).

La esencia de un método recursivo es que permite actualizar la estimación del vector de parámetros cada vez que se dispone de un nuevo vector de observables sin tener que almacenar todas las mediciones anteriores. Por ejemplo, sea  $\vec{y}_{t-1}$  un conjunto de medidas correspondientes a la época  $t - 1$  que están linealmente relacionadas con un vector de parámetros constantes desconocidos  $\vec{x}$ . Entonces, las medidas  $\vec{y}_{t-1}$  se pueden ajustar por mínimos cuadrados para obtener  $\hat{\vec{x}}_{t-1}$ , es decir una estimación de los parámetros en  $t - 1$ . Supongamos que en una época posterior  $t$  se dispone de un nuevo conjunto de observables  $\vec{y}_t$  también relacionadas linealmente con los parámetros  $\vec{x}$ , entonces puede obtenerse una estimación  $\hat{\vec{x}}_t$  que mejoraría  $\hat{\vec{x}}_{t-1}$ .

Si el problema planteado presenta un vector de parámetros que varía con el tiempo y los observables están disponibles de manera secuencial, entonces se plantean tres posibles tipos de estimación: el filtrado (*filtering*), el suavizado (*smoothing*) o la predicción (*prediction*). Se conoce como filtrado aquel ajuste en el que la estimación del vector de parámetros obtenido coincide con el instante correspondiente al último vector de observables. Cuando el vector de parámetros de interés se corresponde con un instante comprendido entre el inicio de las medidas y la última medida disponible, el ajuste se denomina suavizado. Por último, cuando se requiere la estimación del vector de estado para un instante del cual no se dispone aún de observables, hablamos de predicción. El denominado filtro de Kalman es un algoritmo basado en un ajuste recursivo en el que secuencialmente se hace una predicción y estimación tanto del vector de parámetros  $\vec{x}$  como del vector de observables  $\vec{y}$  (Sec. 3.4).

En este capítulo se presenta el filtro de Kalman como extensión del algoritmo de mínimos cuadrados recursivos y este a su vez como una evolución de método de mínimos cuadrados estándar. Adicionalmente, se introduce una notación fácilmente asimilable a la empleada en los principales textos de referencia que existen sobre integración de sensores y navegación.

## 3.2 Ajuste por mínimos cuadrados

El objetivo del algoritmo estándar de mínimos cuadrados es estimar un vector  $\vec{x}$  de  $n$  parámetros a partir de un conjunto de  $m$  observables  $\vec{y}$ , siendo  $m > n$ . Ambos vectores están relacionados mediante una transformación lineal que permite escribir el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\vec{y} = H\vec{x} + \vec{v} \quad (3.1)$$

$\vec{x}$  Vector de parámetros a determinar ( $n \times 1$ )  
 $\vec{y}$  Vector de observables medidos ( $m \times 1$ )  
 $\vec{v}$  Vector de residuos o ruido ( $m \times 1$ )  
 $H$  Matriz de configuración o de diseño ( $m \times n$  derivadas parciales)

Se asume que tanto las medidas como los residuos siguen una distribución normal de media cero, es decir

$$\vec{y} \sim N(0, R) \quad \vec{v} \sim N(0, R) \quad (3.2)$$

siendo

$R$  Matriz varianza-covarianza de las observables ( $m \times m$ )

La estimación  $\hat{\vec{x}}$  del vector de parámetros viene dada por la conocida expresión

$$\hat{\vec{x}} = (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} \vec{y} \quad (3.3)$$

y aplicando la ley de propagación de errores se obtiene la matriz cofactor de  $\hat{\vec{x}}$

$$P = (H^T R^{-1} H)^{-1} \quad (3.4)$$

con lo que (3.3) se puede reescribir como

$$\hat{\vec{x}} = P H^T R^{-1} \vec{y} \quad (3.5)$$

### 3.3 Ajuste por mínimos cuadrados recursivo

El sistema de ecuaciones (3.1) se puede reescribir para dos grupos de observables  $\vec{y}_0(m_0 \times 1)$  y  $\vec{y}_1(m_1 \times 1)$  incorrelados

$$\begin{pmatrix} \vec{y}_0 \\ \vec{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} \vec{v}_0 \\ \vec{v}_1 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

siendo la correspondiente matriz varianza covarianza

$$\begin{pmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & R_1 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Suponiendo que  $m_1 > n$ , la solución mínimo cuadrática para el grupo de observables  $\vec{y}_0$  se obtiene mediante (3.5)

$$P_0 = (H_0^T R_0^{-1} H_0)^{-1} \quad (3.8)$$

$$\hat{\vec{x}}_0 = P_0 H_0^T R_0^{-1} \vec{y}_0 \quad (3.9)$$

Considerando la inclusión del nuevo grupo de observables  $\vec{y}_1$  se puede recalcular  $P$  mediante

$$P_1^{-1} = \begin{pmatrix} H_0^T & H_1^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_0^{-1} & 0 \\ 0 & R_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

es decir

$$P_1^{-1} = H_0^T R_0^{-1} H_0 + H_1^T R_1^{-1} H_1 \quad (3.11)$$

que, teniendo en cuenta la inversa de(3.8), permite escribir

$$P_1 = (P_0^{-1} + H_1^T R_1^{-1} H_1)^{-1} \quad (3.12)$$

y de forma análoga a (3.9), el vector de parámetros  $\hat{\vec{x}}_1$  se calcula mediante

$$\hat{\vec{x}}_1 = P_1 \begin{pmatrix} H_0^T & H_1^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_0^{-1} & 0 \\ 0 & R_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{y}_0 \\ \vec{y}_1 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

o, lo que es lo mismo

$$\hat{\vec{x}}_1 = P_1 (H_0^T R_0^{-1} \vec{y}_0 + H_1^T R_1^{-1} \vec{y}_1) \quad (3.14)$$

La cuestión ahora es cómo calcular el cambio experimentado por el vector de parámetros inicial  $\hat{\vec{x}}_0$  cuando se añade un nuevo grupo de observables  $\vec{y}_1$ . Para ello es conveniente reescribir (3.12) como

$$P_1 = P_0 - K_1 H_1 P_0 \quad (3.15)$$

siendo  $K_1$  la denominada matriz de ganancia que viene dada por

$$K_1 = P_0 H_1^T (H_1 P_0 H_1^T + R_1)^{-1} \quad (3.16)$$

que permite reescribir (3.14) para llegar finalmente a

$$\hat{\vec{x}}_1 = \hat{\vec{x}}_0 + K_1 (\vec{y}_1 - H_1 \hat{\vec{x}}_0) \quad (3.17)$$

donde la matriz de ganancia  $K_1$  determina la variación del vector de parámetros  $\hat{\vec{x}}_1$  previamente estimado una vez incluido el nuevo vector de medidas  $\vec{y}_1$ .

Generalizando el desarrollo anterior a un proceso iterativo mediante la sustitución de los subíndices 0 y 1 por  $j-1$  y  $j$  respectivamente y organizando convenientemente, los pasos del proceso de un ajuste recursivo se resumen en

$$\begin{aligned} K_j &= P_{j-1} H_j^T (H_j P_{j-1} H_j^T + R_j)^{-1} \\ \hat{\vec{x}}_j &= \hat{\vec{x}}_{j-1} + K_j (\vec{y}_j - H_j \hat{\vec{x}}_{j-1}) \\ P_j &= (I - K_j H_j) P_{j-1} \end{aligned} \quad (3.18)$$

El proceso comenzaría una vez realizado el primer ajuste que permitiría obtener el vector  $\hat{\vec{x}}_0$  y la matriz cofactor  $P_0$  y a partir de ellos se repetiría el proceso (3.18) tantas veces como número de nuevos vectores de observables  $\vec{y}_{j-1}$  se disponga. Obsérvese que en cada iteración solamente es necesario invertir una matriz de  $(m \times m)$ , siendo  $m$  el número de nuevas observables. Por tanto, el proceso resulta especialmente ventajoso cuando  $m < n$ .

Para facilitar la interpretación del significado de la matriz de ganancia  $K$  supongamos que la matriz de diseño  $H = I$ . En ese caso, la matriz de ganancia se reduce a

$$K_j = P_{j-1} (P_{j-1} + R_j)^{-1} \quad (3.19)$$

Si el nuevo vector de medidas  $\vec{y}_j$  es muy preciso se tendrá que  $R_j \approx 0$ ,  $K_j = I$  y  $\hat{\vec{x}}_j = \vec{y}_j$ , siendo alta la ganancia producida por las nuevas medidas. Si, por el contrario, la solución previamente existente es muy precisa se tendrá que  $P_{j-1} \approx 0$ ,  $K_j = 0$  y  $\hat{\vec{x}}_j = \hat{\vec{x}}_{j-1}$ , siendo nula la ganancia aportada por las nuevas medidas. En consecuencia, la matriz de ganancia determina en que medida es modificada la estimación previa del vector de parámetros  $\hat{\vec{x}}_{j-1}$  al incluir un nuevo grupo de medidas  $\vec{y}_j$ .

## 3.4 Filtros de Kalman

### 3.4.1 Filtro de Kalman discreto

El filtro de Kalman es un algoritmo desarrollado por Rudolf E. Kalman en 1960 que sirve para poder identificar el estado oculto (no medible) de un sistema dinámico lineal.

En adelante se describe el filtro de Kalman como una extensión de los mínimos cuadrados recursivos. La principal diferencia es que en el caso del filtro de Kalman se considera siempre que el vector de parámetros a estimar varía con el tiempo. Por tanto, se introduce la notación  $\vec{x}(t_k) = \vec{x}_k$  para indicar el estado del sistema en el instante  $t_k$  al que corresponden las observables o medidas, generalmente disponibles de forma discreta.

En primer lugar, el estado del sistema se modela describiendo la relación existente entre dos vectores de estado consecutivos. Para ello se emplea una función lineal del tipo

$$\hat{\vec{x}}_k = \Phi_{k-1} \vec{x}_{k-1} + G \vec{w}_k \quad (3.20)$$

dónde  $\Phi_{k-1}$  es una matriz de  $n \times n$  denominada matriz de transición y  $G \vec{w}_k$  es una componente aleatoria que conduce o excita el sistema.  $G$  es una matriz constante y se asume que el vector  $\vec{w}_k$ , que representa el ruido del sistema, sigue una distribución normal

$$\vec{w}_k \sim N(0, Q_k) \quad (3.21)$$

El ruido del sistema, descrito por la matriz varianza-covarianza  $Q_k$  de dimensión  $n \times n$ , describe la incertidumbre al modelar el comportamiento del sistema dinámico.

El modelo descrito por (3.20) permite incorporar el carácter dinámico del vector de parámetros al ajuste recursivo descrito en (3.18). Para adaptarlo, en primer lugar se sustituye el subíndice  $j$  por el subíndice  $k$ , que representa el estado una vez incorporadas las medidas  $\vec{y}_k$ , correspondientes al instante  $t_k$ . Ahora bien, tanto el vector de estado  $\vec{x}_{k-1}$  como su matriz de varianza  $P_{k-1}$  cambian con el tiempo y por tanto, no pueden sustituirse directamente en (3.18) sino que han de ser predichas introduciendo el modelo dinámico (3.20) dando lugar a  $\tilde{\vec{x}}_{k-1}$  y  $\tilde{P}_{k-1}$  respectivamente.

Independientemente de si se dispone de nuevas observables o no, siempre es posible predecir para cada instante un vector de estado junto con su matriz de error mediante

$$\tilde{\vec{x}}_{k+1} = \Phi_k \hat{\vec{x}}_k \quad (3.22)$$

$$\tilde{P}_{k+1} = \Phi_k P_k \Phi_k^T + G_k Q_k G_k^T \quad (3.23)$$

El proceso anterior se conoce como predicción o actualización en el tiempo.

Si en un determinado instante el sistema incorpora un nuevo vector de mediciones  $\vec{y}_k$ , se puede estimar un nuevo valor del vector de estado  $\hat{\vec{x}}_k$  a partir de dichas observables mediante

$$\hat{\vec{x}}_k = \tilde{\vec{x}}_k + K_k (\vec{y}_k - H_k \tilde{\vec{x}}_k) \quad (3.24)$$

$$P_k = (I - K_k H_k) \tilde{P}_k \quad (3.25)$$

en dónde la matriz de ganancia  $K_k$  se calcula mediante

$$K_k = \tilde{P}_k H_k^T (H_k \tilde{P}_k H_k^T + R_k)^{-1} \quad (3.26)$$

El proceso anterior se conoce como corrección o actualización de medidas.

Por tanto, la actualización del filtro de Kalman contiene básicamente dos pasos. El primero es la actualización en el tiempo del vector de estado y su error. El segundo es la actualización de dichas predicciones mediante la incorporación de las nuevas medidas disponibles.

A continuación se enumeran los pasos habituales en una implementación estándar de un filtro de Kalman:

1. Inicialización

$$\tilde{\vec{x}}_k = \vec{x}_0 \quad (3.27)$$

$$\tilde{P}_k = P_0 \quad (3.28)$$

2. Cálculo de la ganancia

$$K_k = \tilde{P}_k H_k^T \left( H_k \tilde{P}_k H_k^T + R_k \right)^{-1} \quad (3.29)$$

3. Corrección o actualización de las medidas

$$\hat{\tilde{x}}_k = \tilde{x}_k + K_k \left( \vec{y}_k - H_k \tilde{x}_k \right) \quad (3.30)$$

4. Cálculo o actualización de la varianza

$$P_k = (I - K_k H_k) \tilde{P}_k \quad (3.31)$$

5. Predicción o actualización en el tiempo

$$\tilde{x}_{k+1} = \Phi_k \hat{\tilde{x}}_k \quad (3.32)$$

$$\tilde{P}_{k+1} = \Phi_k P_k \Phi_k^T + G_k Q_k G_k^T \quad (3.33)$$

La primera iteración del filtro Kalman arranca con el primer paso, las siguientes iteraciones son una repetición de los pasos 2 al 5.

### 3.4.2 Cuestiones numéricas

Las expresiones mostradas se corresponden con una versión básica del filtro de Kalman discreto y se ha escogido una notación que permita relacionarlo directamente con los mínimos cuadrados recursivos.

Algunas cuestiones numéricas a tener en cuenta son las siguientes:

La matriz de error  $P$  es simétrica por definición, pero a medida que se suceden las operaciones, los errores numéricos pueden hacer que dicha propiedad se vaya perdiendo. Para mantener la simetría de  $P$  a lo largo del proceso existen básicamente cuatro técnicas:

1. En vez de utilizar la forma

$$P_k = (I - K_k H_k) \tilde{P}_k \quad (3.34)$$

emplear la expresión equivalente (forma de Joseph)

$$P_k = (I - K_k H_k) \tilde{P}_k (I - K_k H_k) + K_k R_k K_k^T \quad (3.35)$$

2. Forzar la simetría de  $P$  cada cierto tiempo mediante

$$P_k = \frac{1}{2} (P + P^T) \quad (3.36)$$



3. Calcular sólo la diagonal principal y la parte triangular superior o inferior, lo cual es más eficiente computacionalmente y además ahorra memoria.
4. Usar métodos numéricos estables como la factorización  $P = UDU^T$

Por último, cada aplicación requiere una formulación concreta tanto de la función de transición  $\Phi_k$  como del modelo funcional  $H$ . Cuando se pretende abordar la solución de ecuaciones diferenciales del tipo

$$\dot{\vec{x}}(t) = F(t)\vec{x}(t) + G(t)\vec{w}(t) \quad (3.37)$$

la matriz de transición para un sistema continuo viene dada por

$$\Phi_k(t, t') = I + F(t - t') + \frac{1}{2}(F(t - t'))^2 + \frac{1}{3}(F(t - t'))^3 + \dots \quad (3.38)$$