

## Parte II

# Sistemas de Navegación



## Capítulo 4

# Navegación mediante GNSS

### 4.1 Generalidades

Desde finales de la década de 1980 el GPS ha evolucionado hasta convertirse en el sistema de posicionamiento y navegación más accesible, exacto y sencillo de emplear por usuarios de todo tipo. Sirva de ejemplo el hecho de que prácticamente todos los *smarts phones* van equipados con GPS o que todos los satélites artificiales de órbita terrestre baja (LEO) cuentan con un receptor a bordo.

En la actualidad conviven diferentes sistemas de posicionamiento global por satélite (GNSS) con sus respectivas constelaciones de satélites: GPS, GLONASS, GALILEO y COMPASS y la tendencia es emplear receptores capaces de medir a todas las posibles constelaciones, lo que permite una mejor cobertura incluso en entornos poco favorables.

El posicionamiento mediante GNSS se basa fundamentalmente en principios geométricos y geodésicos como son la medida de distancias a satélites artificiales y los sistemas de referencia terrestres. En general, el resultado son las coordenadas del receptor/antena respecto a un sistema de referencia terrestre bien definido. En aplicaciones de navegación, el receptor se considera siempre en movimiento y por tanto se necesitan métodos GNSS dinámicos y/o cinemáticos, tanto en modo absoluto como relativo.

Dependiendo del tipo de receptor o receptores, del tipo de medidas y del tratamiento posterior, la exactitud con que se pueden obtener las coordenadas de la trayectoria de un objeto en movimiento puede oscilar desde unos pocos metros ( $\approx 5$  m) cuando se emplean métodos absolutos y pseudodistancias hasta unos pocos centímetros ( $\approx 5$  cm) cuando el método empleado es relativo, con medida de fase de las ondas portadoras y resolviendo las ambigüedades de ciclo.

Teniendo en cuenta la accesibilidad y la exactitud que ofrecen los GNSS en la actualidad, el resto de sistemas de navegación, como por ejemplo los INS, pueden parecer accesorios o incluso totalmente prescindibles, lo cual no es cierto. La necesidad de contar con sistemas de navegación complementarios al GNSS es clara en aplicaciones que requieren fiabilidad y exactitud (control del tráfico aéreo, sistemas de aterrizaje automático, prevención de colisiones, etc.), en aplicaciones en las que no siempre es posible recibir la señal de los satélites (minas, túneles, submarinos, vehículos en ciertos entornos urbanos, etc.) o en aplicaciones que requieren, además de la situación, la orientación en el espacio (georreferenciación de imágenes, robótica, etc.).

Es cierto que en la actualidad los GNSS son el único sistema de navegación que incorporan la mayoría de automóviles, barcos de recreo y avionetas privadas, pero esto no implica que estén exentos de problemas. En primer lugar, un GNSS no es un sistema autocontenido, como puede ser un INS, sino que depende de la correcta recepción de las señales transmitidas por los satélites. Aunque la cobertura en zonas despejadas no es un problema, las señales pueden resultar obstruidas localmente por edificios, árboles, montañas, puentes o túneles. En segundo lugar, la frecuencia con que un receptor GNSS suele ofrecer las coordenadas es de 1 Hz <sup>1</sup>, lo que para ciertas aplicaciones de alta dinámica puede resultar insuficiente (aplicaciones fotogramétricas, captura de datos precisos mediante sensores aerotransportados, gravimetría aérea, etc). Por último, el posicionamiento mediante GNSS se ve afectado de errores como el retardo atmosférico o el efecto multipath que son difíciles de modelar o directamente impredecibles.

Teniendo en cuenta las ventajas e inconvenientes tanto de los GNSS como de los INS, la integración entre ambos tipos de sistemas es una opción adecuada para múltiples aplicaciones. El INS es autocontenido, ofrece una frecuencia de datos muy alta, es sensible a los cambios de orientación, su precisión en periodo corto puede ser alta y, salvo en la inicialización, es autónomo. Por su parte los GNSS ofrecen coordenadas absolutas en un sistema de referencia terrestre bien definido y su exactitud a largo plazo es alta. En caso de disponer de ambos sistemas de navegación, la integración GNSS/INS se puede plantear o mecanizar de diversas formas: desacoplada (*uncoupled*) , débilmente acoplada (*loosely coupled*) y fuertemente acoplada (*tight coupled*).

## 4.2 Sistemas de posicionamiento global

En la actualidad coexisten cuatro sistemas de posicionamiento global (GNSS): GPS (E.E.U.U.), GLONASS (Rusia), Galileo (Europa) y COMPASS o BeiDou (China). Los dos primeros sistemas están plenamente operativos, mientras que Galileo y COMPASS están en fase de despliegue.

---

<sup>1</sup>Existen receptores capaces de proporcionar coordenadas con una mayor frecuencia, pero no es lo habitual.

Aunque las respectivas especificaciones técnicas difieren entre ellos, los aspectos fundamentales son similares. Por tanto, toda la teoría relativa a los métodos de posicionamiento, ecuaciones de observación y tratamiento de errores existente para el GPS es extensible al resto de sistemas con las oportunas modificaciones. La disponibilidad simultánea de múltiples sistemas con similares características técnicas favorecerá en el futuro el desarrollo de receptores mixtos<sup>2</sup>, es decir, capaces de medir simultáneamente la señal procedente de todas las constelaciones. Esto supondrá un factor clave para mejorar la calidad del posicionamiento, no solo en lo referente a la exactitud sino también en fiabilidad y disponibilidad.

Una cuestión importante a tener en cuenta es el sistema de referencia en que están expresadas las efemérides de cada sistema. Aunque la tendencia es unificar en lo posible los sistemas de referencia, tal como se describe en más adelante, siempre es posible recurrir a transformaciones de 7 parámetros.

Generalmente, los sistemas de navegación global van cambiando sus especificaciones a lo largo del tiempo y suelen incorporar mejoras progresivas, por lo que resulta difícil su descripción detallada. A continuación se resumen las características esenciales de los cuatro sistemas.

#### 4.2.1 GPS

La constelación estándar consiste en 24 satélites orbitando a una altitud de 20.200 km. Las órbitas, prácticamente circulares, se distribuyen en 6 planos regularmente distribuidos en longitud y con una inclinación de 55°. En un futuro se preve aumentar el número estándar a 27 y distribuirlos únicamente en tres planos.

El sistema de referencia se denomina WGS84 y sus parámetros fundamentales se muestran en la tabla 4.1. En su última versión se puede considerar prácticamente alineado con el ITRF05.

Parámetro	Valor	Descripción
$a$	6378137.0 m	semieje mayor
$f$	1/298.257223563	inverso del aplanamiento
$\omega_e$	$7292115 \times 10^{-11} \text{ rad s}^{-2}$	velocidad angular de rotación
$\mu$	$3986004.418 \times 10^8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$	constante gravitacional

**Tabla 4.1:** Parámetros fundamentales del sistema de referencia WGS84

Los satélites transmiten una señal con tres ondas portadoras (L1,L2,L5) cuyas respectivas frecuencias y longitudes de onda se muestran en la tabla 4.2. En cuanto a los códigos modulados, dispone de los siguientes: C/A, P1(Y1), M1, L1C, P2(Y2), M2, L2C, L5C.

---

<sup>2</sup>Ya se encuentran comercialmente disponibles múltiples receptores con recepción simultánea de GPS y GNSS.

Portadora	Frecuencia	Longitud onda
$L1$	1575.420 MHz	19.0 cm
$L2$	1227.600 MHz	24.4 cm
$L5$	1176.450 MHz	25.5 cm

**Tabla 4.2:** Ondas portadoras empleadas por el sistema GPS

Aunque la precisión de posicionamiento con código C/A (SPS) se estima habitualmente en  $\approx 5$  m, el cálculo la desviación experimental para 24 horas y al 95 % de probabilidad arroja los siguientes valores (Hofmann-Wellenhof, Lichtenegger y Wasle 2008)

$$\begin{aligned}\sigma_H &\leq 13 \text{ m} \\ \sigma_V &\leq 22 \text{ m}\end{aligned}\tag{4.1}$$

Las cifras anteriores no incluyen posibles problemas de interferencias, retardos, multipath o mala geometría receptor-satélites.

#### 4.2.2 GLONASS

La constelación estándar consiste en 24 satélites orbitando a una altitud de 19.100 km. Las órbitas, prácticamente circulares, se distribuyen en 3 planos regularmente distribuidos en longitud y con una inclinación de  $64.8^\circ$ .

El sistema de referencia se denomina PZ-90 y sus parámetros fundamentales se muestran en la tabla 4.3. Entre los años 1998 y 1999 se llevó a cabo el proyecto IGEX-98 cuyo objetivo era comparar el sistema PZ-90 con el ITRF97 (C. y Z. 2001). El proyecto, en el cual participaron diversos organismos (IAG, IGS, ION, IERS), produjo entre otros resultados los parámetros de transformación que se muestran en la tabla 4.4 y que han de emplarse junto con el modelo de transformación ( ec. 4.2). Por su parte, la *Radio Technical Commission for Maritime Services* (RTCM), en su estándar RTCM-SC 104 v2.3 recomienda únicamente efectuar una rotación  $R3 = -0,343$  arcs para integrar ambos sistemas. Aplicadas a las coordenadas ECEF de los satélites obtenidas de las efemérides, las transformaciones anteriores tienen una inconsistencia del orden de 1 m.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{des} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{ori} + \begin{pmatrix} T1 \\ T2 \\ T3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D & -R3 & R2 \\ R3 & D & -R1 \\ -R2 & R1 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{ori} \tag{4.2}$$

Parámetro	Valor	Descripción
$a$	6378136.0 m	semieje mayor
$f$	1/298.257839303	inverso del aplanamiento
$\omega_e$	$7292115 \times 10^{-11} \text{ rad s}^{-2}$	velocidad angular de rotación
$\mu$	$3986004.4 \times 10^8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$	constante gravitacional

**Tabla 4.3:** Parámetros fundamentales del sistema de referencia PZ-90

	T1	T2	T3	D	R1	R3	R3
Unid.	mm	mm	mm	ppb	mas	mas	mas
ITRF97	70.0	-0.0	-770.0	-3.00	19.000	4.000	-353.000

**Tabla 4.4:** Parámetros de transformación de PZ-90 a WGS84(ITRF97)

Los satélites transmiten una señal con tres ondas portadoras (G1,G2,G5) cuyas respectivas frecuencias y longitudes de onda se muestran en la tabla 4.5. En cuanto a los códigos modulados, dispone de unos equivalentes al C/A (estándar) y al P (preciso) del sistema GPS.

Portadora	Frecuencia	Longitud onda
$G1$	1602.000 MHz	18.7 cm
$G2$	1246.000 MHz	24.1 cm
$G5$	1204.704 MHz	24.9 cm

**Tabla 4.5:** Ondas portadoras empleadas por el sistema GLONASS

La precisión de posicionamiento con código estándar se declara oficialmente mejor que la del GPS cuando la SA esta activada y peor que la del GPS cuando la SA esta desactivada. Por tanto, la precisión (95 %) que ofrece el sistema GLONASS con código estándar se encuentra entre los siguientes valores

$$\begin{aligned} 13 \text{ m} &\leq \sigma_H \leq 100 \text{ m} \\ 22 \text{ m} &\leq \sigma_V \leq 156 \text{ m} \end{aligned} \tag{4.3}$$

### 4.2.3 Galileo

La constelación estándar consiste en 30 satélites orbitando a una altitud de 23.200 km. Las órbitas, prácticamente circulares, se distribuyen en 3 planos regularmente distribuidos en longitud y con una inclinación de  $56^\circ$ .

El sistema de referencia se denomina *Galileo Terrestrial Reference Frame* (GTRF) y sus parámetros fundamentales, coincidentes con los del ITRS (GRS80), se muestran en la tabla 4.8. Según las especificaciones, la diferencia entre el GTRF y el ITRF

más reciente deben ser inferiores a 3 cm ( $2\sigma$ ). El *Galileo Geodetic Reference Service Provider* (GRSP) se encarga de la realización del GTRF. Para alinearlo con el ITRF se emplean estaciones del IGS. Las cuatro primeras realizaciones se muestran en la tabla 4.6

GTRF	Fecha	Validez (años)
GTRF07v00	08/2007	0.69
GTRF07v01	11/2007	0.92
GTRF08v01	08/2008	1.69
GTRF09v01	08/2009	2.34

**Tabla 4.6:** Cuatro primeras realizaciones del GTRF

Tal como muestra la tabla 4.7, la realización GTRF(GTRF08v01) se puede considerar prácticamente alineado con el ITRF05

	T1	T2	T3	D	R1	R3	R3
Unid.	mm	mm	mm	ppb	mas	mas	mas
ITRF05	-0.1	-0.3	-0.2	0.08	0.004	0.002	-0.002
Error	0.2	0.2	0.2	0.03	0.008	0.008	0.008
Rates	-0.1	-0.1	0.0	0.03	0.002	0.000	0.000
Error	0.2	0.2	0.2	0.03	0.008	0.008	0.008

**Tabla 4.7:** Parámetros de transformación de GTRF(GTRF08v01) a ITRF05 (época 07:241)

Parámetro	Valor	Descripción
$a$	6378137.0 m	semieje mayor
$f$	1/298.257222101	inverso del aplanamiento
$\omega_e$	$7292115 \times 10^{-11} \text{ rad s}^{-2}$	velocidad angular de rotación
$\mu$	$3986005.000 \times 10^8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$	constante gravitacional

**Tabla 4.8:** Parámetros fundamentales del sistema de referencia GTRF

Los satélites transmiten una señal con cinco ondas portadoras (E1,E6,E5,E5a,E5b) cuyas respectivas frecuencias y longitudes de onda se muestran en la tabla 4.9. En cuanto a los códigos modulados, dispone de los siguientes: E1A, E1B, E1C, E6A, E6B, E6C, E5a-I, E5a-Q, E5b-I y E5b-Q.

#### 4.2.4 COMPASS (BeiDou)

La constelación estándar consiste en 27 satélites de órbita media (MEO), cinco satélites geoestacionarios (GEO) y tres con órbita geosíncrona inclinada (IGSO). Las órbitas de los 27 satélites MEO, a 21.500 km de altitud, son prácticamente circulares y se distribuyen en 3 planos con una inclinación de  $55^\circ$ .



Portadora	Frecuencia	Longitud onda
$E1$	1575.420 MHz	19.0 cm
$E6$	1278.750 MHz	23.4 cm
$E5$	1191.795 MHz	25.2 cm
$E5a$	1176.450 MHz	25.5 cm
$E5b$	1207.140 MHz	24.8 cm

**Tabla 4.9:** Ondas portadoras empleadas por el sistema Galileo

El sistema de referencia del sistema BeiDou (BDC) está alineado con el *China Geodetic Coordinate System* (CGCS), en concreto con el *China Terrestrial Reference Frame 2000* (CTRF 2000) que es a su vez consistente con el ITRF97 (época 2000.0). En cuanto a los parámetros fundamentales (ver tabla 4.10), son los mismos que los del GRS80 excepto en la constante gravitacional que la del WGS84.

Parámetro	Valor	Descripción
$a$	6378137.0 m	semieje mayor
$f$	$1/298.257222101$	inverso del aplastamiento
$\omega_e$	$7292115 \times 10^{-11} \text{ rad s}^{-2}$	velocidad angular de rotación
$\mu$	$3986004.418 \times 10^8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$	constante gravitacional

**Tabla 4.10:** Parámetros fundamentales del sistema de referencia PZ-90

Los satélites transmiten una señal sobre cuatro portadoras (B1,B2,B3,B4) cuyas respectivas frecuencias y longitudes de onda se muestran en la tabla 4.11. Varias portadoras se solapan con las de Galileo, lo cual es una ventaja desde el punto de vista de la compatibilidad, pero un inconveniente en cuanto a la posible interferencia.

Portadora	Frecuencia	Longitud onda
$B1$	1561.098 MHz	19.2 cm
$B2$	1207.140 MHz	24.8 cm
$B3$	1268.520 MHz	23.6 cm
$B4$	1575.420 MHz	19.0 cm

**Tabla 4.11:** Ondas portadoras empleadas por el sistema BeiDou-2

## 4.3 Observables

### 4.3.1 Pseudodistancia

#### *Deducción de la ecuación*

La pseudodistancia  $P_k^p$  es la diferencia entre el tiempo nominal de recepción de la señal en el receptor  $k$  y el tiempo nominal de emisión de la misma en el satélite  $p$ , multiplicada por la velocidad de propagación de las ondas en el vacío  $c$

$$P_k^p(t_k) = c(t_k - t^p) + e_k^p(t_k) \quad (4.4)$$

siendo

$P_k^p(t_k)$	<i>pseudodistancia medida entre el receptor <math>k</math> y el satélite <math>p</math> en la época <math>t_k</math></i>
$t_k$	<i>instante de recepción de la señal según el oscilador del receptor</i>
$t^p$	<i>instante de emisión de la señal según el oscilador del satélite</i>
$e_k^p(t_k)$	<i>error aleatorio o ruido de la medición</i>

Como

$$t_k = t + dt_k \quad (4.5)$$

$$t^p = t - \tau_k^p + dt^p \quad (4.6)$$

siendo  $\tau_k^p$  el tiempo de tránsito de la señal, es decir, el tiempo transcurrido desde que la señal fue emitida por el satélite hasta que llegó al receptor. Sustituyendo

$$P_k^p(t_k) = c(t + dt_k - t - dt^p + \tau_k^p) + e_k^p(t_k) \quad (4.7)$$

$$P_k^p(t_k) = c\tau_k^p + c(dt_k - dt^p) + e_k^p(t_k) \quad (4.8)$$

El producto  $c\tau_k^p$  es la distancia que representa el tiempo real de tránsito en el vacío y se descompone en los siguientes términos

$$c\tau_k^p = \rho_k^p(t) + d^p + I_k^p(t) + T_k^p(t) + dm_k^p(t) + d_k \quad (4.9)$$

$\rho_k^p(t)$	distancia geométrica entre el receptor $k$ y el satélite $p$
$d^p$	retardo de hardware del satélite expresado en unidades de longitud
$I_k^p(t)$	retardo ionosférico evaluado en el instante $t$
$T_k^p(t)$	retardo troposférico evaluado en el instante $t$
$dm_k^p(t)$	efecto multitrayectoria sobre la pseudodistancia medida
$d_k$	retardo del hardware del receptor

### Obtención de las coordenadas de los satélites

Si las coordenadas de los satélites y las coordenadas aproximadas de los receptores estuvieran referidas a un sistema de referencia inercial, la distancia geométrica entre el receptor  $k$  y un satélite  $p$  vendría dada por la ecuación

$$\rho_k^p(t) = \sqrt{(X^p(t - \tau_k^p) - X_k(t))^2 + (Y^p(t - \tau_k^p) - Y_k(t))^2 + (Z^p(t - \tau_k^p) - Z_k(t))^2} \quad (4.10)$$

Sin embargo, las efemérides, tanto las transmitidas como las precisas, expresan las coordenadas de los satélites en un sistema de referencia geocéntrico y solidario a la Tierra (ECEF). Al no ser sistemas inerciales es necesario considerar la rotación de la Tierra durante el tránsito de la señal. Suponiendo una distancia de 22.000 km entre los satélites y la superficie de la Tierra y que la señal se propaga a la velocidad de la luz  $c$ , el tiempo de tránsito  $\tau$  es de unos 70 ms. La distancia geométrica correcta sería la que corresponde al instante en que la señal salió del satélite y no la que resultan de emplear las coordenadas del receptor en el instante  $t$  y las del satélite en el instante  $(t - \tau_k^p)$ . Por tanto, las coordenadas de cada satélite deben ser corregidas por el efecto de la rotación un ángulo igual al girado por la Tierra durante el transcurso del tiempo  $\tau_k^p$  de tránsito de la señal desde el satélite al receptor

$$\vec{r}^p = R_3(\omega\tau_k^p) \vec{r}_{ECEF}^p(t - \tau_k^p) \quad (4.11)$$

Una vez efectuada la operación anterior ya permiten calcular la distancia geométrica correcta empleando la fórmula 4.10.

### Linealización en torno al instante $t_k$

Al no conocer el instante real  $t$  no se puede evaluar directamente  $\rho_k^p(t)$  sino que es necesario efectuar un desarrollo en serie de Taylor en torno al instante nominal conocido  $t_k$

$$\rho_k^p(t) = \rho_k^p(t_k - dt_k) = \rho_k^p(t_k) - \dot{\rho}_k^p(t_k) dt_k \quad (4.12)$$

La velocidad radial  $\dot{\rho}_k^p$  a la que se acerca o se aleja el satélite  $p$  del receptor  $k$  se obtiene proyectando el vector de velocidad del satélite sobre el vector unitario de la dirección receptor-satélite

$$\dot{\rho}_k^p(t) = \frac{\vec{r}^p(t - \tau_k^p) \cdot \vec{v}^p(t - \tau_k^p)}{\rho_k^p(t)} \quad (4.13)$$

$$\begin{array}{ll} \vec{r}^p(t - \tau_k^p) & \text{vector de posición del satélite } p \\ \vec{v}^p(t - \tau_k^p) & \text{vector de velocidad del satélite } p \\ \rho_k^p(t) & \text{distancia receptor-satélite} \end{array}$$

Los vectores de posición y velocidad del satélite  $p$  en el instante  $(t - \tau_k^p)$  se obtienen a partir de las efemérides.

### ***Ecuación lineal***

Sustituyendo el valor calculado de la distancia geométrica se obtiene

$$c\tau_k^p = \rho_k^p(t_k) - \dot{\rho}_k^p(t_k) dt_k + d^p + I_k^p(t_k) + T_k^p(t_k) + dm_k^p(t_k) + d_k \quad (4.14)$$

con lo que la ecuación de pseudodistancia resulta

$$P_k^p(t_k) = \rho_k^p(t_k) - \dot{\rho}_k^p(t_k) dt_k + d^p + I_k^p(t_k) + T_k^p(t_k) + dm_k^p(t_k) + d_k + c(dt_k - dt^p) + e_k^p(t_k) \quad (4.15)$$

y reagrupando términos

$$P_k^p(t_k) = \rho_k^p(t_k) + (c - \dot{\rho}_k^p(t_k)) dt_k - cdt^p + I_k^p(t_k) + T_k^p(t_k) + dm_k^p(t_k) + d^p + d_k + e_k^p(t_k) \quad (4.16)$$

Debido a que en la práctica es complicado separar los retardos de hardware  $d^p + d_k$  de los retardos debidos al medio de propagación o al error del reloj del receptor, la expresión anterior suele aparecer simplificada de la siguiente manera

$$P_k^p(t_k) = \rho_k^p(t_k) + (c - \dot{\rho}_k^p(t_k)) dt_k - cdt^p + I_k^p(t_k) + T_k^p(t_k) + dm_k^p(t_k) + e_k^p(t_k) \quad (4.17)$$

### 4.3.2 Fase de la onda portadora

#### *Deducción de la ecuación*

La onda electromagnética que parte del satélite tiene una fase que es función del tiempo de transmisión

$$\varphi(t) = f \cdot (t - t_0) = \frac{t - t_0}{T} \quad (4.18)$$

Una vez que la señal ha sido emitida por el satélite viaja a través del espacio manteniendo la fase inicial  $\varphi(t)$  con que fue transmitida y llegaría a un receptor situado a una distancia  $\rho = c\Delta t$  con la misma fase más un número entero de ciclos, es decir  $\varphi(t) + N^p$ .

La observable de fase en el receptor se obtiene por comparación entre la fase generada por el receptor  $\varphi_k(t_k)$  y la fase de la señal que proviene del satélite  $\varphi^p(t^p)$ . Teniendo en cuenta la observable de fase que llega al receptor procedente del satélite se puede expresar como  $\varphi^p(t) + N^p$  la medición de fase resulta

$$\varphi_k^p(t) = \varphi_k(t_k) + N_k - \varphi^p(t^p) - N^p \quad (4.19)$$

El número entero de ciclos de la fase generada por el receptor se inicializa de una forma aleatoria cada vez que el receptor es conectado. Este valor es constante siempre que no se produzca un corte en la recepción de la señal. Por tanto, la ecuación 4.19 se puede escribir como

$$\varphi_k^p(t) = \varphi_k(t_k) - \varphi^p(t^p) + N_k^p \quad (4.20)$$

$\varphi_k^p(t)$	<i>medición de fase en el instante <math>t</math></i>
$\varphi_k(t_k)$	<i>fase generada por el receptor en el instante <math>t_k</math></i>
$\varphi^p(t^p)$	<i>fase generada por el satélite en el instante <math>t^p</math></i>
$N_k^p$	<i>diferencia entre las ambigüedades de fase <math>N_k</math> y <math>N^p</math></i>

La fase recibida en el receptor en el instante  $t^p$  es exactamente la misma que partió del satélite un tiempo  $\tau_k^p$  atrás y por tanto

$$\varphi^p(t^p) = \varphi^p(t^p - \tau_k^p) \quad (4.21)$$

Teniendo en cuenta el error aleatorio cometido en el proceso, la medición de fase resultante es

$$\varphi_k^p(t) = \varphi_k(t_k) - \varphi^p(t^p - \tau_k^p) + N_k^p + \epsilon_k^p(t) \quad (4.22)$$

$\varphi_k^p(t)$	<i>observable de fase de la portadora registrada en el instante <math>t_k</math></i>
$\varphi_k(t_k)$	<i>fase generada por el receptor en el instante <math>t_k</math></i>
$\varphi^p(t^p - \tau_k^p)$	<i>fase generada por el satélite en el instante <math>t^p - \tau_k^p</math></i>
$N_k^p$	<i>ambigüedad en el número entero de ciclos</i>
$\epsilon_k^p(t)$	<i>error aleatorio de la observación o ruido</i>

Teniendo en cuenta la relación entre tiempos nominales y tiempos reales y que  $d\varphi = fdt$ , la fase generada por el receptor se puede expresar como

$$\varphi_k(t_k) = \varphi_k(t + dt_k) = \varphi_k(t) + fdt_k + \varphi_k(t_0) \quad (4.23)$$

y la fase emitida por el satélite<sup>3</sup>

$$\varphi^p(t^p - \tau_k^p) = \varphi^p(t + dt^p - \tau_k^p) = \varphi^p(t) + fdt^p - f\tau_k^p + \varphi^p(t_0) \quad (4.24)$$

y sustituyendo resulta

$$\varphi_k^p(t) = \varphi_k(t) + fdt_k + \varphi_k(t_0) - \varphi^p(t) - fdt^p + f\tau_k^p - \varphi^p(t_0) + N_k^p + \epsilon_k^p(t) \quad (4.25)$$

Como el método de medición se basa en atrasar o adelantar la fase generada para que coincida con la recibida, siempre se cumple que  $\varphi_k(t) - \varphi^p(t) = 0$ . Agrupando términos resulta

$$\varphi_k^p(t) = fdt_k - fdt^p + f\tau_k^p + [\varphi_k(t_0) - \varphi^p(t_0)] + N_k^p + \epsilon_k^p(t) \quad (4.26)$$

La ecuación (4.26) está expresada en ciclos. Multiplicando toda la ecuación por la longitud de onda  $\lambda = \frac{c}{f}$  se obtiene la ecuación expresada en metros

$$\Phi_k^p(t) = cdt_k - cdt^p + c\tau_k^p + \lambda[\varphi_k(t_0) - \varphi^p(t_0)] + \lambda N_k^p + \lambda\epsilon_k^p(t) \quad (4.27)$$

---

<sup>3</sup>En rigor, en el caso de la fase emitida por el satélite, es necesario considerar el hecho de que el oscilador del satélite no es perfectamente estable durante el tiempo de tránsito (aproximadamente 70 ms.). Para no introducir más términos, se aplica el mismo tratamiento que para la fase generada por el receptor. La mayor parte del posible error se cancela en las simples diferencias.

que es análoga a la pseudodistancia excepto en que contiene además los términos

$$\lambda [\varphi_k(t_0) - \varphi^p(t_0)] + \lambda N_k^p \quad (4.28)$$

Al igual que en el caso de la pseudodistancia, el producto de la velocidad de la luz en el vacío por el tiempo de tránsito se puede expresar como la distancia geométrica entre el satélite y el receptor más una serie de términos debidos a las diversas fuentes de error

$$c\tau_k^p = \rho_k^p(t_k) - \dot{\rho}_k^p(t_k) dt_k + \delta^p - I_k^p(t_k) + T_k^p(t_k) + \delta m_k^p(t_k) + \delta_k \quad (4.29)$$

$\rho_k^p(t)$	<i>distancia geométrica entre el receptor <math>k</math> y el satélite <math>p</math></i>
$\delta^p$	<i>retardo de hardware del satélite para la fase</i>
$I_k^p(t_k)$	<i>retardo ionosférico evaluado en el instante nominal <math>t_k</math></i>
$T_k^p(t_k)$	<i>retardo troposférico evaluado en el instante nominal <math>t_k</math></i>
$\delta m_k^p(t_k)$	<i>efecto multipath sobre la fase medida</i>
$\delta_k$	<i>retardo del hardware del receptor para la fase</i>

Al tratarse de la medición de fase el signo del retardo ionosférico es negativo. El efecto multipath y los retardos de hardware son diferentes a los correspondientes a la medición de código y por eso tienen una notación diferente.

Teniendo en cuenta (4.29), la ecuación (4.27) resulta

$$\begin{aligned} \Phi_k^p(t) &= \rho_k^p(t_k) + [c - \dot{\rho}_k^p(t_k)] dt_k - cdt^p - I_{k,\Phi}^p(t_k) + T_k^p(t_k) + \lambda N_k^p \\ &+ \delta m_{k,\Phi}^p(t_k) + [\Phi_k(t_0) - \Phi^p(t_0)] + \delta_k + \delta^p + \lambda \epsilon_k^p(t) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Debido a que en la práctica es complicado separar el retardo de hardware  $\delta_k + \delta^p$  y el error de cero  $[\Phi_k(t_0) - \Phi^p(t_0)]$  de los retardos debidos al medio de propagación y al error del reloj del receptor, la expresión anterior suele aparecer simplificada de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Phi_k^p(t) &= \rho_k^p(t_k) + [c - \dot{\rho}_k^p(t_k)] dt_k - cdt^p - \\ &- I_{k,\Phi}^p(t_k) + T_k^p(t_k) + \delta m_{k,\Phi}^p(t_k) + \lambda N_k^p + \lambda \epsilon_k^p(t) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Para expresarla en unidades de ciclo se divide por la longitud de onda, resultando la expresión

$$\begin{aligned}\varphi_k^p(t) &= \frac{f}{c} \rho_k^p(t_k) + f \left[ 1 - \frac{\dot{\rho}_k^p(t_k)}{c} \right] dt_k - f dt^p \\ &- I_{k,\varphi}^p(t_k) + \frac{f}{c} T_k^p(t_k) + \delta m_{k,\varphi}^p(t_k) + N_k^p + \epsilon_k^p(t)\end{aligned}\quad (4.32)$$

### 4.3.3 Combinación *iono-free*

Si se dispone de observables de al menos dos frecuencias, es posible combinarlas de manera que se cancele la mayor parte del retardo ionosférico. La nueva observable, combinación de las originales, se considera libre de retardo ionosférico, *ionosphere-free* o *iono-free*. No existe una única combinación *iono-free*.

#### *Pseudodistancias*

Un ejemplo de combinación de medidas de código para producir una pseudodistancia *iono-free* es

$$\begin{aligned}\left[ P_{k,1}^p(t_k) - \frac{f_2^2}{f_1^2} P_{k,2}^p(t_k) \right] \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} &= \rho_k^p(t_k) - [c - \dot{\rho}_k^p(t_k)] dt_k - c dt^p \\ &+ T_k^p(t_k) + dm_{k,1,2}^p(t_k) + e_{k,1,2}^p(t_k)\end{aligned}\quad (4.33)$$

Aunque la combinación anterior tiene la ventaja de eliminar prácticamente el retardo ionosférico, tanto el efecto multipath  $dm$  como el error aleatorio  $e$  aumentan respecto a las medidas de código originales.

#### *Medidas de fase*

Un ejemplo de combinación de medidas de fase para producir una observable de fase *iono-free* es

$$\begin{aligned}\left[ \Phi_{k,1}^p(t_k) - \frac{f_2^2}{f_1^2} \Phi_{k,2}^p(t_k) \right] \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} &= \rho_k^p(t_k) + [c - \dot{\rho}_k^p(t_k)] dt_k - c dt^p \\ &+ T_k^p(t_k) + \delta m_{k,1,2}^p(t_k) \\ &+ \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} \lambda_1 N_{k,1}^p + \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \lambda_2 N_{k,2}^p \\ &+ \lambda \epsilon_{k,1,2}^p(t)\end{aligned}\quad (4.34)$$

Aunque la combinación anterior tiene la ventaja de eliminar prácticamente el retardo ionosférico, tanto el efecto multipath  $\delta m$  como el error aleatorio  $\epsilon$  aumentan respecto a las medidas de código originales.



#### 4.3.4 Ecuaciones de dobles diferencias

En procesamiento relativo se suelen emplear las ecuaciones lineales de dobles diferencias, es decir la diferencia de observables simultaneas de dos receptores  $k$  y  $l$  a dos satélites  $p$  y  $q$ . La ventaja del empleo de las dobles diferencias es que se prácticamente se los errores con origen en los satélites y en los receptores y se reducen en gran medida los debidos al medio de propagación.

A continuación se muestran las ecuaciones correspondientes tanto a la medida de pseudodistancias como a la medida de fases.

##### *Dobles diferencias de código*

El modelo funcional de las dobles diferencias para la medición de código es la siguiente

$$P_{kl}^{pq}(t) = \rho_{kl}^{pq}(t) - \dot{\rho}_l^{pq}(t_l) dt_l - \dot{\rho}_k^{pq}(t_k) dt_k + I_{kl,P}^{pq}(t) + T_{kl}^{pq}(t) + dm_{kl,P}^{pq}(t) + e_{kl}^{pq}(t) \quad (4.35)$$

La ecuación (4.35) es lineal salvo en el término  $\rho_{kl}^{pq}(t)$  que se evalúa empleando los instantes  $t_k$  y  $t_l$  junto con las coordenadas aproximadas de los receptores  $k$  y  $l$ .

##### *Dobles diferencias de fase*

El modelo funcional de las dobles diferencias para la medición de fase expresada en unidades de longitud es la siguiente

$$\Phi_{kl}^{pq}(t) = \rho_{kl}^{pq}(t) - \dot{\rho}_l^{pq}(t_l) dt_l - \dot{\rho}_k^{pq}(t_k) dt_k - I_{kl,\Phi}^{pq}(t) + T_{kl}^{pq}(t) + \delta m_{kl,\Phi}^{pq}(t) + \lambda N_{kl}^{pq} + \lambda \epsilon_{kl}^{pq}(t) \quad (4.36)$$

La ecuación (4.36) es lineal salvo en el término  $\rho_{kl}^{pq}(t)$  que se evalúa empleando los instantes  $t_k$  y  $t_l$  junto con las coordenadas aproximadas de los receptores  $k$  y  $l$ .

##### *Linealización de la doble diferencia calculada*

La expresión (4.10) empleada para obtener la distancia geométrica calculada no es una función lineal y por ello tampoco lo es

$$\rho_{kl}^{pq}(t) = \rho_l^q(t) - \rho_k^q(t) - \rho_l^p(t) + \rho_k^p(t) \quad (4.37)$$

que debe ser linealizado en torno a los puntos de expansión definidos por las coordenadas aproximadas de los extremos

$$\vec{X}_k^{(0)} = \left( X_k^{(0)}, Y_k^{(0)}, Z_k^{(0)} \right) \quad (4.38)$$

$$\vec{X}_l^{(0)} = \left( X_l^{(0)}, Y_l^{(0)}, Z_l^{(0)} \right) \quad (4.39)$$

y teniendo en cuenta que la geometría definida por la situación relativa entre satélites y receptores aconseja fijar las coordenadas de un extremo de la línea, la doble diferencia calculada se expresa mediante

$$\rho_{kl}^{pq}(t) = \rho_{kl}^{pq}\left(t, \vec{X}_l^{(0)}\right) + \left| \frac{\partial \rho_{kl}^{pq}(t)}{\partial X} \right|_{\vec{X}_l^{(0)}} dX_l + \left| \frac{\partial \rho_{kl}^{pq}(t)}{\partial Y} \right|_{\vec{X}_l^{(0)}} dY_l + \left| \frac{\partial \rho_{kl}^{pq}(t)}{\partial Z} \right|_{\vec{X}_l^{(0)}} dZ_l \quad (4.40)$$

La expresión explícita de las derivadas parciales viene dada por

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \rho_{kl}^{pq}(t)}{\partial X} \right|_{\vec{X}_l^{(0)}} &= - \left[ \frac{X^p(t - \tau_l^p) - X_l^{(0)}}{\rho_l^p(t, \vec{X}_l^{(0)})} - \frac{X^q(t - \tau_l^q) - X_l^{(0)}}{\rho_l^q(t, \vec{X}_l^{(0)})} \right] = a_x^{pq}(t) \\ \left| \frac{\partial \rho_{kl}^{pq}(t)}{\partial Y} \right|_{\vec{X}_l^{(0)}} &= - \left[ \frac{Y^p(t - \tau_l^p) - Y_l^{(0)}}{\rho_l^p(t, \vec{X}_l^{(0)})} - \frac{Y^q(t - \tau_l^q) - Y_l^{(0)}}{\rho_l^q(t, \vec{X}_l^{(0)})} \right] = a_y^{pq}(t) \\ \left| \frac{\partial \rho_{kl}^{pq}(t)}{\partial Z} \right|_{\vec{X}_l^{(0)}} &= - \left[ \frac{Z^p(t - \tau_l^p) - Z_l^{(0)}}{\rho_l^p(t, \vec{X}_l^{(0)})} - \frac{Z^q(t - \tau_l^q) - Z_l^{(0)}}{\rho_l^q(t, \vec{X}_l^{(0)})} \right] = a_z^{pq}(t) \end{aligned} \quad (4.41a)$$

Sustituyendo (4.41a) en (4.35) y (4.36) se obtienen las correspondientes ecuaciones de dobles diferencias linealizadas.

Para las medidas de fase resulta la siguiente ecuación

$$a_x^{pq}(t) dX_l + a_y^{pq}(t) dY_l + a_z^{pq}(t) dZ_l + \lambda N_{kl}^{pq} - k(t) = \lambda \epsilon_{kl}^{pq}(t) \quad (4.42)$$

siendo

$$k(t) = \left[ \Phi_{kl}^{pq}(t) - \dot{\rho}_l^{pq}(t) dt_l - \dot{\rho}_k^{pq}(t) dt_k + T_{kl}^{pq}(t) - \rho_{kl}^{pq}\left(t, \vec{X}_l^{(0)}\right) \right] \quad (4.43)$$

El número de parámetros a determinar son cuatro. Tres de ellos ( $dX, dY, dZ$ ) corresponden a las coordenadas del extremo libre y el parámetro restante es la ambigüedad de la doble diferencia  $N_{kl}^{pq}$ . Si el término independiente  $k(t)$  ha sido correctamente modelado y no existen errores ionosféricos residuales, ni efecto multipath, etc., el residuo de la ecuación tras el ajuste ha de ser del mismo orden que el error aleatorio o ruido de la doble diferencia ( $\simeq 4\text{ mm}$ ), lo que permite resolver las ambigüedades.

## 4.4 Soluciones dinámicas

En la mayoría de aplicaciones de navegación se necesita conocer en tiempo real las coordenadas de un objeto en movimiento. Por ello, el presente apartado se centra exclusivamente en los métodos GNSS dinámicos y/o cinemáticos en tiempo real.

Generalmente se habla de método dinámico cuando el receptor/antena, cuyas coordenadas se quieren determinar, se encuentra en movimiento. Los métodos dinámicos pueden ser absolutos, lo que implica un único receptor, o relativos, lo que incluye o bien dos receptores (fijo y móvil) o bien un receptor móvil y un servicio que proporcione correcciones diferenciales.

Cuando método es dinámico, relativo e incluye el tratamiento de las observables de fase con fijación de ambigüedades, se suele denominar ‘cinemático’. Si el método cinemático es en tiempo real (RTK), se puede distinguir a su vez entre RTK tradicional (exige el empleo de dos receptores, uno de ellos fijo) y el RTK con solución de red (un solo receptor más un servicio de correcciones diferenciales).

Aunque alguna aplicación particular puede ser llevada a cabo en postproceso (sensores aerotransportados, fotogrametría, gravimetría aérea, etc.), se considerarán una excepción, al igual que los métodos estáticos, y por tanto no se incluyen en este apartado.

A continuación se enumeran y describen brevemente dos métodos absolutos (SSP y PPP) y dos métodos relativos (DGNSS y RTK).

### 4.4.1 Solución de navegación estándar (SPP)

La solución de navegación estándar o SPP (*Standard Point Positioning*) es un método absoluto basado exclusivamente en las observables de código.

### Modelo funcional

Partiendo de la ecuación de pseudodistancia (4.17) y suponiendo que en un determinado instante  $t$  se recibe la señal de  $m$  satélites se puede plantear el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} ax_k^1(t) & ay_k^1(t) & az_k^1(t) & 1 \\ ax_k^2(t) & ay_k^2(t) & az_k^2(t) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ax_k^m(t) & ay_k^m(t) & az_k^m(t) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_k \\ dY_k \\ dZ_k \\ cdt_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_k^1(t) \\ k_k^2(t) \\ \vdots \\ k_k^m(t) \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

siendo

$$\begin{aligned} ax_k^p(t) &= -\frac{X^p(t - \tau_k^p) - X_k^{(0)}(t)}{\rho_k^p(\vec{X}_k^{(0)}(t))} \\ ay_k^p(t) &= -\frac{Y^p(t - \tau_k^p) - Y_k^{(0)}(t)}{\rho_k^p(\vec{X}_k^{(0)}(t))} \\ az_k^p(t) &= -\frac{Z^p(t - \tau_k^p) - Z_k^{(0)}(t)}{\rho_k^p(\vec{X}_k^{(0)}(t))} \end{aligned} \quad (4.45)$$

y

$$k_k^p(t) = \left[ L_k^p(t) - \dot{\rho}_k^p(t)dt_k + T_k^p(t) - \rho_k^p(t, \vec{X}_k^{(0)}) \right] \quad (4.46)$$

donde  $L_k^p(t)$  representa la observable de código empleada, que puede ser un código estándar de precisión métrica ( $\sim 1$  m - 3 m), como por ejemplo el código C/A, un código preciso ( $\sim 30$  cm), como por ejemplo el código P1 ó una combinación de P1 y P2 libre de retardo ionosférico.

El sistema (4.44) se suele resolver independientemente para cada época mediante el algoritmo de mínimos cuadrados, considerando como caso más simple que todas las observaciones con igual peso.

**Error**

Para obtener la exactitud en posicionamiento absoluto no solamente se ha de tener en cuenta el ruido de la medida de pseudodistancia, sino también el resto de errores ( sec. 4.5). El error total en la distancia receptor-satélite se evalúa mediante el denominado UERE (*User Range Equivalent Error*) que viene dado por la expresión

$$\sigma_{UERE} = \sqrt{\sigma_{dt_k}^2 + \sigma_{dt^p}^2 + \sigma_{eph}^2 + \sigma_I^2 + \sigma_T^2 + \sigma_{mp}^2 + \sigma_e^2} \quad (4.47)$$

En la tabla (4.12) se muestra, desglosado por componentes, un cálculo aproximado del UERE para una solución SPP empleando el código C/A.

Fuente	Sesgo [m]	Aleatorio [m]	Total [m]
Efemérides	2.1	0.0	2.1
$dt^p$	2.0	0.7	2.1
Ionosfera	4.0	0.5	4.0
Troposfera	0.5	0.5	0.7
Multipath	1.0	1.0	1.4
Ruido	0.5	0.2	0.5
Total	5.1	1.4	5.3

**Tabla 4.12:** Cálculo del UERE para la solución SPP

Para obtener la exactitud del posicionamiento, además de la parte fija que supone el UERE, se ha de tener en cuenta la calidad de la geometría receptor-satélites, que es variable y depende del número de satélites y del entorno de observación. Una forma sencilla de estimar la precisión en el posicionamiento es emplear los factores de adulteración de la precisión

$$\sigma_{pos} = \sigma_{UERE} \times \text{factor de adulteración de la precisión} \quad (4.48)$$

**Adulteración de la precisión**

Un requisito para resolver el sistema es que  $m \geq 4$  pero además, la situación relativa del receptor y de los satélites ha de ser tal que las columnas de la matriz de diseño no presenten combinación lineal entre sí. Esta situación podría producirse en dos casos:

- Que todos los satélites se encuentren en una circunferencia que fuese la base de un cono cuyo vértice es el receptor.
- Que todos los satélites y el receptor se encuentran contenidos en un mismo plano.

A mayor cobertura de satélites más difícil es que se produzcan este tipo de situaciones y salvo que existan obstrucciones físicas. Dichas situaciones, de producirse, suelen durar poco tiempo, ya que los satélites y el receptor están siempre en continuo movimiento relativo. En cualquier caso, una mala geometría receptor-satélite siempre degrada o adultera la precisión de la solución de navegación.

Teniendo en cuenta que la precisión de los parámetros estimados se obtiene a partir de<sup>4</sup>

$$\Sigma_{xx} = \hat{\sigma}_0^2 (A^T A)^{-1} \quad (4.49)$$

se observa claramente que la influencia de la componente geométrica sobre la solución descansa en la matriz cofactor, mientras que el escalar  $\hat{\sigma}_0^2$  representa la exactitud de las mediciones. Por tanto, para mediciones con igual error aleatorio, la situación relativa receptor-satélites hace que la precisión de los parámetros estimados sea diferente. La forma rigurosa de evaluar la influencia de la configuración orbital sobre la solución pasaría por analizar los valores propios de la matriz cofactor, pero existen una alternativa más sencilla es emplear los denominados factores DOP (*Dilution of Precision*).

Los factores DOP<sup>5</sup> son funciones de los elementos de la diagonal principal de la matriz cofactor

$$(A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_{XX}^2 & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} & \sigma_{XT} \\ \sigma_{YX} & \sigma_{YY}^2 & \sigma_{YZ} & \sigma_{YT} \\ \sigma_{ZX} & \sigma_{ZY} & \sigma_{ZZ}^2 & \sigma_{ZT} \\ \sigma_{TX} & \sigma_{TY} & \sigma_{TZ} & \sigma_{TT}^2 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

- GDOP. Representa la repercusión de la geometría de la constelación sobre la solución de navegación obtenida. Es decir, sobre la determinación de coordenadas más el error del oscilador del receptor

$$GDOP = \sqrt{\sigma_{XX}^2 + \sigma_{YY}^2 + \sigma_{ZZ}^2 + \sigma_{TT}^2} \quad (4.51)$$

- PDOP. Factor de adulteración de la precisión que mide la influencia de la configuración de los satélites sobre la determinación de las coordenadas

$$PDOP = \sqrt{\sigma_{XX}^2 + \sigma_{YY}^2 + \sigma_{ZZ}^2} \quad (4.52)$$

<sup>4</sup>Se supone de nuevo la igualdad de peso en todas las ecuaciones.

<sup>5</sup>Para el cálculo relativo se define el RDOP, que es la traza de la matriz cofactor de las dobles diferencias flotantes.

- TDOP. Representa la influencia de la configuración de los satélites en la determinación del estado del reloj del receptor

$$TDOP = \sqrt{\sigma_{TT}^2} = \sigma_{TT} \quad (4.53)$$

- HDOP. Expresa la influencia de la geometría de la constelación sobre la componente planimétrica de las coordenadas obtenidas en la solución de navegación

$$HDOP = \sqrt{\sigma_{nn}^2 + \sigma_{ee}^2} \quad (4.54)$$

- VDOP. Expresa la influencia de la geometría de la constelación sobre la componente altimétrica de las coordenadas obtenidas en la solución de navegación

$$VDOP = \sigma_{uu} \quad (4.55)$$

Para separar las componentes planimétrica y altimétrica de la solución de navegación se emplea la matriz de rotación que relaciona incrementos de coordenadas en el sistema de coordenadas cartesiano geocéntrico con incrementos en el sistema topocéntrico local

$$\begin{bmatrix} dn \\ de \\ du \end{bmatrix} = R(\varphi, \lambda) \begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

$$R(\varphi, \lambda) = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Siguiendo la ley de propagación de matrices de error

$$\begin{bmatrix} \sigma_{nn}^2 & \sigma_{ne} & \sigma_{nu} \\ \sigma_{en} & \sigma_{ee}^2 & \sigma_{eu} \\ \sigma_{ue} & \sigma_{ue} & \sigma_{uu}^2 \end{bmatrix} = R(\varphi, \lambda) \begin{bmatrix} \sigma_{XX}^2 & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} \\ \sigma_{YX} & \sigma_{YY}^2 & \sigma_{YZ} \\ \sigma_{ZX} & \sigma_{ZY} & \sigma_{ZZ}^2 \end{bmatrix} R(\varphi, \lambda)^T \quad (4.58)$$

Los factores DOP informan de forma aproximada de la amplificación que la matriz cofactor ejerce sobre la precisión de un determinado parámetro

$$error \text{ parametro} = DOP \times error \text{ pseudodistancia} \quad (4.59)$$

El valor de los factores DOP es siempre mayor que 1 y es tanto más alto cuanto peor es la configuración geométrica de los satélites respecto al receptor.

#### 4.4.2 Solución de navegación precisa (PPP)

La solución de navegación precisa o PPP (*Precise Point Positioning*) es un método absoluto que emplea tanto las medidas de código como en las medidas de fase. Aunque el concepto de PPP fue introducido por primera vez en 1976, ha cobrado un creciente interés en los últimos años aunque aún plantea ciertos retos en lo concerniente a receptores en movimiento y soluciones en tiempo real (RT-PPP)(T. 2013).

La observable de fase tiene una precisión de  $\sim 2$  mm, pero dicha precisión potencial se ve fuertemente limitada por los errores de las órbitas, por los errores de los relojes de los satélites y por los retardos, que impactan directamente sobre la solución (Hofmann-Wellenhof, Lichtenegger y Wasle 2008). Por tanto, el método PPP exige el empleo de receptores bifrecuencia medición precisa de código junto con información precisa de los satélites, tanto de efemérides como de errores de los relojes.

Para soluciones dinámicas en tiempo real con empleo de los actuales productos (IGS, JPL, etc.), la técnica PPP permite precisiones del orden de 2 - 3 dm (Hofmann-Wellenhof, Lichtenegger y Wasle 2008) respecto a un sistema global bien definido (ITRS), lo que claramente mejora la exactitud de la solución de navegación estándar (SPP). Además no tiene las limitaciones de las técnicas relativas o diferenciales, que exigen que el receptor en movimiento se encuentre dentro de un determinado radio respecto al receptor fijo o respecto al servicio que proporciona las correcciones diferenciales. Sin embargo, en comparación con los métodos relativos, la técnica PPP necesita en general un mayor tiempo de observación para que la solución fija converga y en aplicaciones dinámicas es prácticamente imposible resolver las ambigüedades debido a que, como en todos los métodos absolutos, los errores de los satélites (efemérides y relojes) impactan directamente en la solución. Por ello, el modelo habitualmente empleado se basa en la combinación de observables *iono-free*, tanto para las medidas de código como de fase. Generalmente, las ambigüedades no se fijan, sino que son tratadas como números reales, lo que se conoce como solución flotante.



**Modelo funcional**

Partiendo de la ecuación de pseudodistancia (4.16) y suponiendo que en un determinado instante  $t$  se recibe la señal de  $m$  satélites se puede plantear el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} ax_k^1(t) & ay_k^1(t) & az_k^1(t) & 1 & 0 & 0 \\ ax_k^2(t) & ay_k^2(t) & az_k^2(t) & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ax_k^m(t) & ay_k^m(t) & az_k^m(t) & 1 & 0 & 0 \\ ax_k^1(t) & ay_k^1(t) & az_k^1(t) & 1 & \frac{\lambda_1 f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} & \frac{\lambda_2 f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \\ ax_k^2(t) & ay_k^2(t) & az_k^2(t) & 1 & \frac{\lambda_1 f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} & \frac{\lambda_2 f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ax_k^m(t) & ay_k^m(t) & az_k^m(t) & 1 & \frac{\lambda_1 f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} & \frac{\lambda_2 f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_k \\ dY_k \\ dZ_k \\ cdt_k \\ N_{k,1}^p \\ N_{k,2}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_k^1(t) \\ k_k^2(t) \\ \vdots \\ k_k^m(t) \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

siendo

$$\begin{aligned} ax_k^p(t) &= -\frac{X^p(t - \tau_k^p) - X_k^{(0)}(t)}{\rho_k^p(\vec{X}_k^{(0)}(t))} \\ ay_k^p(t) &= -\frac{Y^p(t - \tau_k^p) - Y_k^{(0)}(t)}{\rho_k^p(\vec{X}_k^{(0)}(t))} \\ az_k^p(t) &= -\frac{Z^p(t - \tau_k^p) - Z_k^{(0)}(t)}{\rho_k^p(\vec{X}_k^{(0)}(t))} \end{aligned} \quad (4.61)$$

y

$$k_k^p(t) = \left[ L_k^p(t) - \dot{\rho}_k^p(t) dt_k + T_k^p(t) - \rho_k^p(t, \vec{X}_k^{(0)}) \right] \quad (4.62)$$

donde  $L_k^p(t)$  representa una combinación de códigos libre de retardo ionosférico (4.33) en unas ecuaciones y una combinación de medidas de fase libre de retardo ionosférico (4.34) en otras.

Es habitual resolver el sistema (4.44) mediante el algoritmo de mínimos cuadrados y un filtro de Kalman.

### 4.4.3 Solución diferencial de código (DGNSS)

La solución diferencial de código es una técnica en tiempo real que emplea dos receptores, uno de ellos fijo y estacionado en un punto de coordenadas conocidas. En el receptor fijo se pueden calcular para cada instante las correcciones a las pseudodistancias mediante el siguiente modelo

$$\Delta\rho_k^p(t) = \rho_k^p(t) - P_k^p(t) \quad (4.63)$$

Suponiendo que el receptor fijo registra pseudodistancias cada segundo, se tendría una corrección por satélite y época

$$\begin{aligned} \Delta\rho_k^p(t_0) &= \rho_k^p(t_0) - P_k^p(t_0) \\ \Delta\rho_k^p(t_1) &= \rho_k^p(t_1) - P_k^p(t_1) \\ \Delta\rho_k^p(t_2) &= \rho_k^p(t_2) - P_k^p(t_2) \\ &\vdots \\ \Delta\rho_k^p(t_m) &= \rho_k^p(t_m) - P_k^p(t_m) \end{aligned} \quad (4.64)$$

aunque, teniendo en cuenta que la variación de la corrección es lenta, es mas conveniente transmitir la variación de la corrección desde la época inicial, es decir

$$\dot{\rho}_k^p(t) = \rho_k^p(t) - P_k^p(t) - (\rho_k^p(t_0) - P_k^p(t_0)) = \Delta\rho_k^p(t) - \Delta\rho_k^p(t_0) \quad (4.65)$$

con ello no solamente se reduce la carga de datos a transmitir, sino que además el receptor móvil podría seguir estimando una corrección diferencial en caso de que se interrumpiera la comunicación con el receptor fijo <sup>6</sup>. Estas correcciones se suelen transmitir empleando un protocolo estándar como por ejemplo el RTCM-104.

Recibidas las correcciones diferenciales, el receptor móvil corrige sus propias pseudodistancias medidas empleando

$$\rho_k^p(t) = P_k^p(t) + \Delta\rho_k^p(t_0) + \dot{\rho}_k^p(t)(t - t_0) \quad (4.66)$$

para a continuación calcular la solución de navegación mediante (4.44). Considerando que las coordenadas empleadas en el receptor fijo son correctas, las coordenadas obtenidas en el receptor móvil tras el empleo de las correcciones tienen una exactitud de entre 1m y 3 m, incluso empleando únicamente el código C/A.

<sup>6</sup>La antigüedad de las últimas correcciones disponibles se denomina latencia.

En la tabla (4.13) se muestra, desglosado por componentes, el cálculo del UERE para una solución SPP empleando el código C/A.

Fuente	GNSS [m]	DGNSS [m]
Efemérides	2.1	0.1
$dt^p$	2.1	0.1
Ionosfera	4.0	0.2
Troposfera	0.7	0.2
Multipath	1.4	1.4
Ruido	0.5	0.5
Total	5.3	1.5

**Tabla 4.13:** Cálculo del UERE para la solución DGNSS y comparación con la SPP

Una alternativa al empleo de un receptor fijo es emplear un servicio de correcciones diferenciales facilitado por una red de estaciones GNSS. Como principales ventajas se puede destacar que no se necesita receptor fijo y que permite navegar en áreas extensas sin preocuparse de la distancia entre los receptores móvil y fijo, lo cual supone un factor de degradación de la precisión en métodos DGNSS.

#### 4.4.4 Solución RTK

Un par de receptores que observan simultáneamente a un número  $s$  de satélites pueden formar  $s-1$  ecuaciones de dobles diferencias del tipo (4.36). Por tanto, el número de parámetros a determinar son  $3+s-1$ . Tres de ellos ( $dX_l, dY_l, dZ_l$ ) corresponden a las coordenadas del extremo libre y el parámetro restante es la ambigüedad de la doble diferencia  $N_{kl}^{pq}$ . Si el término independiente  $k(t)$  ha sido correctamente modelado y no existen errores ionosféricos residuales, ni efecto multipath, etc., el residuo de la ecuación tras el ajuste ha de ser del mismo orden que el error aleatorio o ruido de la doble diferencia ( $\simeq 4 \text{ mm}$ ).

A medida que se dispone nuevas observaciones, empleando un filtro de Kalman se pueden fijar las ambigüedades y obtener las coordenadas de la trayectoria seguida por el receptor móvil.

La precisión que rinde el método RTK cuando el receptor está en continuo movimiento es claramente inferior a la que se consigue cuando el receptor se detiene unas cuantas épocas en un punto. La tabla (4.14) muestra la precisión para ambos modos, estático y cinemático (Hofmann-Wellenhof, Lichtenegger y Wasle 2008)

Método	Constante [mm]	Proporcional [ppm]
Estático	05.0	0.5
Cinemático	50.0	5.0

**Tabla 4.14:** Precisión de la técnica RTK

El GPS-RTK tradicional, es decir, el que emplea dos receptores y un enlace vía radio, presenta limitaciones que aconsejan no superar los 10 km de distancia. En trabajos de mayor ámbito o localizados en diferentes zonas, es necesario desplazar el receptor fijo y asignarle nuevas coordenadas, lo que repercute en la producción y añade posibles fuentes de error. Una alternativa al GNSS-RTK tradicional es el empleo del método cinemático en tiempo real con solución de red, lo que permite prescindir del receptor de referencia. Además de no necesitar el receptor de referencia, el GNSS-RTK con solución de red mejora en muchos aspectos el tradicional y son cada vez más los organismos que proporcionan correcciones a partir de una red de estaciones GNSS permanentes.

Para generar la solución de red, todos los receptores de la red de estaciones GNSS permanentes envían cada segundo sus mediciones a un servidor, que realiza las siguientes operaciones:

- Para cada estación se comprueba la validez de las mediciones de código y de fase, se estiman residuos, se rechazan observables erróneos, se detectan y reparan las pérdidas de ciclo y se estima el error del oscilador.
- Para cada vector de la red se procesan las triples diferencias de fase, se detectan y corrigen las pérdidas de ciclo de las dobles diferencias y se desechan las observables con un ruido elevado.
- Con los datos que han superado los anteriores controles de integridad, se lleva a cabo un procesamiento continuo de las dobles diferencias, estimando para las mismas los retardos ionosférico y troposférico, los errores de efemérides y las ambigüedades de ambas portadoras.
- A partir de los parámetros obtenidos es posible estimar los errores que contendrían las mediciones de un receptor que se encontrase en el ámbito cubierto por la red de estaciones GPS permanentes y generar unas *correcciones* para usuarios de GPS-RTK.

Un inconveniente del método RTK con solución de red es que las coordenadas absolutas del fijo virtual dependen del lugar y las condiciones de inicialización tienen una repetibilidad del orden de 5 cm, que han de ser añadidos a las precisiones relativas mostradas en la tabla (4.14).

**Modelo funcional**

Suponiendo que en una determinada época  $t$  los receptores  $k$  y  $l$  han efectuado medición de fase simultánea a  $s$  satélites se formarían  $s$  simples diferencias observadas

$$\begin{aligned}
 \Phi_{kl}^1(t) &= \Phi_l^1(t) - \Phi_k^1(t) \\
 \Phi_{kl}^2(t) &= \Phi_l^2(t) - \Phi_k^2(t) \\
 &\vdots \\
 \Phi_{kl}^r(t) &= \Phi_l^r(t) - \Phi_k^r(t) \\
 &\vdots \\
 \Phi_{kl}^s(t) &= \Phi_l^s(t) - \Phi_k^s(t)
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

Tomando el satélite  $r$  como referencia se podrían formar  $s - 1$  dobles diferencias observadas independientes

$$\begin{aligned}
 \Phi_{kl}^{r1}(t) &= \Phi_{kl}^1(t) - \Phi_{kl}^r(t) \\
 \Phi_{kl}^{r2}(t) &= \Phi_{kl}^2(t) - \Phi_{kl}^r(t) \\
 &\vdots \\
 \Phi_{kl}^{rs}(t) &= \Phi_{kl}^s(t) - \Phi_{kl}^r(t)
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

cualquier otra doble diferencia formada sería combinación lineal de las anteriores. Las  $s - 1$  dobles diferencias observadas dan lugar a  $s - 1$  ecuaciones de observación, que aplicando el modelo funcional 4.70 producen para la época correspondiente al instante  $t_1$  el sistema matricial

$$\begin{bmatrix} a_x^{r1}(t_1) & a_y^{r1}(t_1) & a_z^{r1}(t_1) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ a_x^{r2}(t_1) & a_y^{r2}(t_1) & a_z^{r2}(t_1) & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_x^{rs}(t_1) & a_y^{rs}(t_1) & a_z^{rs}(t_1) & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_l \\ dY_l \\ dZ_l \\ N_{kl}^{r1} \\ N_{kl}^{r2} \\ \vdots \\ N_{kl}^{rs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{kl}^{r1}(t_1) \\ k_{kl}^{r2}(t_1) \\ \vdots \\ k_{kl}^{rs}(t_1) \end{bmatrix} \tag{4.69}$$

dónde los coeficientes  $a_x^{pq}$ ,  $a_y^{pq}$  y

$$a_x^{pq}(t) dX + a_y^{pq}(t) dY + a_z^{pq}(t) dZ + \lambda N_{kl}^{pq} - k(t) = \lambda \epsilon_{kl}^{pq}(t) \tag{4.70}$$

$$k(t) = \left[ \Phi_{kl}^{pq}(t) - \dot{\rho}_l^{pq}(t) dt_l - \dot{\rho}_k^{pq}(t) dt_k + T_{kl}^{pq}(t) - \rho_{kl}^{pq}(t, \vec{X}_l^{(0)}) \right] \tag{4.71}$$

El modelo anterior debe ser convenientemente adaptado si en vez de una frecuencia se emplean las dos o una combinación de ambas.

#### 4.4.5 Protocolo NMEA 0183

La forma más habitual de integrar un receptor GNSS junto a otros sensores es hacerlo de forma desacoplada, es decir, el receptor se encarga de calcular una solución para las coordenadas (SPP, PPP, DGPS o RTK) y esta extraída del dispositivo mediante por un puerto en serie. Casi todos los receptores GNSS permiten extraer las coordenadas, el tiempo, los factores DOP, etc. mediante el estándar denominado NMEA 0183. De hecho, es la manera más sencilla de conectar un receptor de GNSS a otros dispositivos.

La *National Marine Electronics Association* (NMEA) es una asociación sin ánimo de lucro formada por fabricantes, distribuidores, universidades y otros organismos interesados en el empleo de dispositivos electrónicos en aplicaciones marinas. En concreto, la norma NMEA 0183 define un interface eléctrico y un protocolo de datos para la conexión de dispositivos electrónicos mediante un puerto en serie a 4800 baudios. Los datos son básicamente una cadena de caracteres en código ASCII y permite incluir entre otra información las coordenadas, la velocidad, profundidad, etc.

Es un estándar industrial voluntario cuya primera versión dada de marzo de 1983. Cada cierto tiempo es actualizada siendo la versión más actual la 4.10, que sustituye a la anterior NMEA 0183 V4.0, publicada en noviembre de 2008. Entre otras mejoras, incluye sentencias GNS para la inclusión de información procedente de Galileo y teóricamente es compatible con la versión NMEA 0183 V2.0. Adicionalmente, existe una extensión para transmitir los datos a mayor velocidad (38400 baudios) llamada NMEA 0183-HS (*High Speed*) V1.01.

##### ***Formato estándar***

Todos los datos se transmiten en forma de sentencias. Solamente se permiten caracteres ASCII imprimibles, más <CR> (retorno de carro) y <LF> (avance de línea). Todas las sentencias comienzan con el carácter '\$' y terminan con <CR><LF>. Hay tres clases de sentencias: *talker sentences*, *proprietary sentences* y *query sentences*.

El formato general para una *talker sentence* es

`$ttsss,d1,d2,...<CR><LF>`

Los dos primeros caracteres a continuación de '\$' sirven para identificar al *talker* o dispositivo emisor que comunica la información. Los tres caracteres siguientes (sss) identifican la sentencia. A continuación van los datos transmitidos separados por comas, un *checksum*<sup>7</sup> opcional y por último los caracteres <CR><LF>. Una

---

<sup>7</sup> Valor al final de un bloque de datos digitales con el objeto de detectar posibles errores en la transmisión de la información. Generalmente lo lee e interpreta el receptor una vez recibida la información para verificar la integridad de los datos.

sentencia puede contener hasta 80 caracteres, sin contar '\$' ni <CR><LF>. Por ejemplo,

\$HCHDM,238,M<CR><LF>

donde

HC	dispositivo emisor o <i>talker</i> , HC = brújula magnética
HDM	tipo de mensaje, HDM = rumbo magnético
238	valor del rumbo
M	indica que el rumbo es magnético
<CR><LF>	caracteres que indican el final del mensaje

Cuando el dato de un determinado campo no está disponible no se transmite, pero si se envían las comas sin espacio. El ejemplo no contiene *checksum*, ya que es opcional. Cuando se transmite, el *checksum* consiste en un carácter '\*' más dos dígitos en formato hexadecimal que son el resultado de realizar la operación OR de todos los caracteres de la sentencia, excluyendo '\$' y '\*'.

La norma permite definir sentencias en formato propietario. Han de comentar con "\$P" seguido de tres caracteres identificando al fabricante y a continuación cualquier dato que el fabricante desee.

Las sentencias del tipo *query* permiten al dispositivo que recibe la información solicitar una determinada tipo de información al dispositivo que se la proporciona. El formato general es

\$tt11Q,sss,<CR><LF>

Los dos primeras caracteres (tt) a continuación del carácter '\$' sirven para identificar al *talker* o dispositivo que solicita la información, los dos siguiente (11) identifican al *listener* o dispositivo al que se le solicita la información y el quinto carácter es siempre una 'Q' que define la sentencia como tipo *query*. El siguiente campo (sss) son tres letras identificando el tipo de sentencia solicitada. Por ejemplo,

\$CCGPQ,GGA<CR><LF>

donde

CC	dispositivo que solicita la información o <i>talker</i> , CC = computer
GP	dispositivo que recibe la solicitud o <i>listener</i> , GP = recetor GPS
GGA	tipo de sentencia solicitada
<CR><LF>	caracteres que indican el final del mensaje

Una vez recibida la sentencia, el receptor de GPS transmitiría una sentencia GGA por segundo hasta que recibiera otra sentencia del tipo *query*.

Entre las sentencias NMEA más empleadas por dispositivos GNSS se encuentran las siguientes:

GGA Time, Position and fix related data for a GPS receiver  
 GGL Geographic Position, Latitude \Longitude  
 GSA GPS DOP and active satellites  
 GSV Satellites in view  
 ALM GPS Almanac Data

De las sencias mostradas en la tabla anterior, la más habitual es la del tipo GGA, por que más abajo se incluye su definición

GGA Global Positioning System Fix Data. Time, Position and fix related data for a GPS receiver

	1	2	3 4	5 6 7 8	9	10 11 12 13	14	15

\$--GGA,hhmmss.ss,llll.ll,a,yyyy.yy,a,x,xx,x.x,x.x,M,x.x,M,x.x,xxxx\*hh

- 1) Time (UTC)
- 2) Latitude
- 3) N or S (North or South)
- 4) Longitude
- 5) E or W (East or West)
- 6) GPS Quality Indicator,
  - 0 - fix not available,
  - 1 - GPS fix,
  - 2 - Differential GPS fix
- 7) Number of satellites in view, 00 - 12
- 8) Horizontal Dilution of precision
- 9) Antenna Altitude above/below mean-sea-level (geoid)
- 10) Units of antenna altitude, meters
- 11) Geoidal separation, the difference between the WGS-84 earth ellipsoid and mean-sea-level (geoid), "-" means mean-sea-level below ellipsoid
- 12) Units of geoidal separation, meters
- 13) Age of differential GPS data, time in seconds since last SC104 type 1 or 9 update, null field when DGPS is not used
- 14) Differential reference station ID, 0000-1023
- 15) Checksum

A continuación se muestra como ejemplo las sentencias emitidas por un receptor Leica System 300

```
$GPGGA,114650.00,3928.76869,N,00020.34111,0,1,06,1.9,61.90,M,,,*,30
$GPGGA,114651.00,3928.76869,N,00020.34111,0,1,06,1.9,61.92,M,,,*,33
$GPGGA,114652.00,3928.76869,N,00020.34111,0,1,06,1.9,61.95,M,,,*,37
$GPGGA,114653.00,3928.76869,N,00020.34110,0,1,06,1.9,62.01,M,,,*,39
```



### ***Formatos propietarios***

Como ya se describió en la sección (4.4.5), el protocolo NMEA 0183 admite la posibilidad de crear sentencias particularmente adaptadas a las necesidades de un determinado fabricante o a una aplicación concreta. Un ejemplo es la transmisión de la información resultante del posicionamiento relativo mediante técnicas RTK. A continuación se muestran dos ejemplos concretos.

Mensajes emitidos por un receptor Leica System 300

```
$RTGGK,150257.0,121707,3928.764979,N,00020.258639,W,3,05,03.2,57.306,M*2  
$RTGGK,150258.0,121707,3928.764980,N,00020.258638,W,3,05,03.2,57.310,M*2  
$RTGGK,150259.0,121707,3928.764979,N,00020.258639,W,3,05,03.2,57.314,M*2  
$RTGGK,150300.0,121707,3928.764979,N,00020.258638,W,3,05,03.2,57.302,M*2  
$RTGGK,150301.0,121707,3928.764975,N,00020.258639,W,3,05,03.2,57.308,M*2
```

Mensajes emitidos por un receptor Trimble 3700

```
$PTNL,GGK,082659.00,111910,3922.90714136,N,00019.55134878,W,6,05,3.5,EHT54.491,M*53  
$PTNL,GGK,082700.00,111910,3922.90714107,N,00019.55135089,W,6,05,3.5,EHT54.479,M*5D  
$PTNL,GGK,082701.00,111910,3922.90713759,N,00019.55135286,W,6,05,3.5,EHT54.494,M*58  
$PTNL,GGK,082702.00,111910,3922.90714252,N,00019.55135294,W,6,05,3.5,EHT54.472,M*59  
$PTNL,GGK,082703.00,111910,3922.90713824,N,00019.55135218,W,6,05,3.5,EHT54.491,M*5D
```

## **4.5 Errores**

### **4.5.1 Clasificación de los errores**

Los errores pueden clasificarse atendiendo a la fuente de error en tres apartados (Parkinson y Spilker 1995):

1. *Errores con origen en los satélites*: Fundamentalmente son el error en las coordenadas de los satélites, error del oscilador del satélite, el retardo de hardware y el error de cero en la fase. Los dos primeros no serán tratados en este capítulo al no estar incluidos en la propia medición.
2. *Errores debidos al medio de propagación*: En este apartado se incluyen los retardos ionosférico y troposférico.
3. *Errores imputables al receptor, a la antena y al entorno de medición*: Son el error aleatorio de la medición o ruido, el retardo de hardware del receptor, el error de cero en la medida de fase, el efecto multitrayectoria, desplazamiento y variación del centro de fase de las antenas.

Otra forma de clasificar los errores es en función del tipo:

1. Errores sistemáticos. Entre los errores sistemáticos se encuentra el error de cero y el error de hardware del satélite, los retardos ionosférico y troposférico, el error de cero y de hardware del receptor, el efecto multitrayectoria y el desplazamiento y variación del centro de fase de las antenas. Algunos de estos errores sistemáticos a veces son tratados como aleatorios. Es el caso de la variación del centro de fase, que tiende a minimizarse cuando los tiempos de medición son elevados o el de el efecto multipath, que habitualmente no es modelado.
2. Errores aleatorios. Fundamentalmente lo constituye el error aleatorio de la medición o ruido. Si todos los errores sistemáticos han sido correctamente modelados durante el proceso de cálculo, los residuos de las ecuaciones de observación deberían contener únicamente esta componente aleatoria. El ruido de las mediciones se establece, de forma general, en un 1 % de la longitud de onda, lo que supone  $\sim 1$  m - 3 m para códigos estándar (por ejemplo, C/A),  $\sim 30$  cm para códigos precisos (por ejemplo P) y  $\sim 2$  mm para la medida de fase de las ondas portadoras.

A continuación se describen más detalladamente los errores más significativos.

#### 4.5.2 Refracción ionosférica

El retardo ionosférico cenital para cada época de observación es función del contenido total de electrones (TEC) de la ionosfera. Dicho contenido se mide en unidades conocidas como TECU (*Total Electron Content Unit*) y sus valores pueden oscilar desde un mínimo de 1 TECU hasta 100 TECU, dependiendo del grado de actividad ionosférica. La tabla 4.15 muestra, para las frecuencias  $L_1$  y  $L_2$  de GPS, la influencia que el retardo ionosférico cenital puede ejercer en el momento de máxima y mínima actividad solar.

Frecuencia	1 TECU	100 TECU
1575.42 MHz( $L_1$ )	0.16 m	16 m
1227.60 MHz( $L_2$ )	0.26 m	26 m

**Tabla 4.15:** Valores límite del retardo ionosférico cenital

Los valores mostrados en la tabla se refieren al retardo cenital, que es común a todos los satélites observados en un mismo instante. A continuación se muestran las expresiones que permiten calcular su influencia para las observables de pseudodistancia, de fase expresada en metros y de de fase expresada en ciclos respectivamente

$$\begin{aligned}
I_P &= \frac{40,3}{f^2} TEC \\
I_\Phi &= -\frac{40,3}{f^2} TEC \\
I_\varphi &= -\frac{40,3}{cf} TEC
\end{aligned}
\tag{4.72}$$

El retardo particularizado para cada satélite es diferente ya que depende de la distancia recorrida por la señal y esta a su vez depende de la elevación. La relación entre el retardo ionosférico cenital y el retardo ionosférico correspondiente a la dirección receptor-satélite se obtiene introduciendo las denominadas funciones de proyección ( $mf$ )

$$\begin{aligned}
I_{k,P}^p &= mf(\beta_k^p) I_P \\
I_{k,\Phi}^p &= mf(\beta_k^p) I_\Phi \\
I_{k,\varphi}^p &= mf(\beta_k^p) I_\varphi
\end{aligned}
\tag{4.73}$$

Existen modelos para determinar el TEC, aunque solamente corrigen el retardo ionosférico de forma aproximada ( $\simeq 50\%$ ). También existen productos, como por ejemplo los *TEC-grid* del IGS, que permiten estimar y prácticamente eliminar en post-proceso el retardo ionosférico. Otra alternativa es emplear métodos relativos, ya sea empleando dos receptores no muy alejados ó métodos de aumentación. En cualquier caso, lo más eficiente es el empleo de receptores bifrecuencia.

Teniendo en cuenta que los retardos ionosféricos de las observables están relacionados entre sí, el uso de dos frecuencias permite eliminar prácticamente el retardo ionosférico. El retardos ionosférico de dos frecuencias  $f_1$  y  $f_2$  diferentes se pueden relacionar entre si mediante

$$\begin{aligned}
\frac{I_{k,1,P}^p}{I_{k,2,P}^p} &= \frac{f_2^2}{f_1^2} \\
\frac{I_{k,1,\Phi}^p}{I_{k,2,\Phi}^p} &= \frac{f_2^2}{f_1^2} \\
\frac{I_{k,1,\varphi}^p}{I_{k,2,\varphi}^p} &= \frac{f_2}{f_1}
\end{aligned}
\tag{4.74}$$

que permiten relacionar los retardos experimentados por las diversas observables GNSS

$$I_{k,1,P}^p = \frac{f_2^2}{f_1^2} I_{k,2,P}^p = -I_{k,1,\Phi}^p = -\frac{f_2^2}{f_1^2} I_{k,2,\Phi}^p = -\frac{c}{f_1} I_{k,1,\varphi}^p = -\frac{c}{f_2} I_{k,2,\varphi}^p \quad (4.75)$$

En resumen, las técnicas para eliminar o reducir la influencia del retardo ionosférico se pueden resumir en las tres siguientes:

1. Empleo de receptores bifrecuencia
2. Empleo de métodos relativos o sistemas de aumentación.
3. Empleo de modelos ionosféricos o mapas de corrección

En cualquier caso, debido a que el error por retardo ionosférico no eliminado se produce en la dirección satélite-receptor, siempre afecta en mayor medida a la componente vertical. La componente horizontal se ve mucho menos afectada, aunque siempre depende de la geometría receptor-satélites.

### ***Influencia en métodos absolutos***

Si el método de observación es absoluto y se emplea una única frecuencia, el error en la componente vertical puede variar desde 0 m hasta varias decenas de metros dependiendo de la actividad ionosférica en el momento de la observación y del modelo empleado. También, en ciertos casos en que la navegación en tiempo real no sea una cuestión crítica, existen productos, como por ejemplo los TEC-*grid* del IGS que permiten estimar y prácticamente eliminar el retardo ionosférico.

En cualquier caso, el empleo de receptores de al menos dos frecuencias es la solución más eficiente. Empleando receptores bifrecuencia se puede considerar que el error por retardo ionosférico es prácticamente nulo

$$I_{k,P}^p = -I_{k,\Phi}^p = -I_{k,\phi}^p \approx 0 \quad (4.76)$$

### ***Influencia en métodos relativos***

Cuando el método de observación es relativo depende no solo de la actividad ionosférica, sino también de la distancia y diferencia de altitud entre el receptor fijo y el móvil. Si los receptores están muy próximos entre sí, el camino recorrido por las

Ángulo de elevación	90°	20°	15°	10°	5°
$T_s$	2.31 m	6.71 m	8.81 m	12.90 m	23.61 m
$T_h$	0.20 m	0.58 m	0.77 m	1.14 m	2.21 m
$T$	2.51 m	7.29 m	9.58 m	14.04 m	25.82 m

**Tabla 4.16:** Valores máximos para el retardo troposférico

señales es prácticamente el mismo y por tanto el término  $I_{kl}^{pq}$  de la doble diferencia es prácticamente nulo

$$I_{kl}^{pq} \approx 0 \quad (4.77)$$

Ahora bien, si la actividad ionosférica es alta o las distancias entre receptores son superiores a 10 km, el retardo ionosférico residual contenido en la doble diferencia puede suponer varios centímetros. Este error no representa un problema cuando solamente se emplean medidas de código, pero si es crítico en métodos cinemáticos con empleo de medidas de fase. En este último caso, puede llegar a impedir la resolución de ambigüedades en movimiento y por tanto no es posible alcanzar precisiones centimétricas. Teniendo en cuenta que la precisión de la solución flotante siempre se degrada varios decímetros, es altamente recomendable el empleo de receptores bifrecuencia.

### 4.5.3 Refracción troposférica

#### *Influencia en métodos absolutos*

El retardo troposférico cenital se puede descomponer en dos partes, denominadas componente seca  $T_s$  y componente húmeda  $T_h$

$$T = T_s + T_h \quad (4.78)$$

El retardo experimentado por señales no cenitales se obtiene introduciendo la correspondiente función de proyección

$$T_k^p = mf(\beta_k^p)T \approx \frac{1}{\cos \beta_k^p}T \quad (4.79)$$

siendo  $\cos \beta_k^p$  el ángulo cenital de la señal entre el receptor  $k$  y el satélite  $p$ .

El cuadro 4.16 muestra los valores máximos que pueden alcanzar ambas componentes del retardo troposférico en función del ángulo de elevación.

En este caso de la troposfera de nada sirve el empleo de dos frecuencias y el término  $T$  ha de ser estimado.

La medición de parámetros meteorológicos en superficie no se suele llevar a cabo en la práctica, ya que no son representativos de toda la trayectoria, lo que conduce errores significativos. En concreto, la humedad relativa del aire es muy difícil de medir con precisión.

La dificultad que ofrece la estimación de parámetros meteorológicos a lo largo de la trayectoria descrita por la señal hace que el tratamiento habitual para el retardo troposférico sea la utilización de modelos troposféricos. Existen múltiples modelos para la corrección troposférica: Hopfield, Saastamoinen, Goad-Goodman, Black, etc.

Para emplear un modelo es necesario conocer las coordenadas aproximadas de los receptores y la elevación de los satélites<sup>8</sup>. El retardo producido por la componente seca se suele determinar con un 2 % -5 % de error, lo que corresponde aproximadamente a unos 4 cm. en la dirección del cenit. La componente húmeda, aunque solo representa el 10 % del total, es más difícil de modelar por la gran variabilidad que existe en la distribución del vapor de agua. En general, su determinación mediante medición de parámetros meteorológicos en superficie conlleva errores del 10 % - 20 % lo que corresponde a unos 3-5 cm. de error en la dirección cenital.

### *Influencia en métodos relativos*

El retardo troposférico de la ecuación de doble diferencia se obtiene evaluando el retardo troposférico que corresponde a cada una de las mediciones que intervienen, de forma que

$$T_{kl}^{pq}(t) = T_l^q(t) - T_k^q(t) - T_l^p(t) + T_k^p(t) \quad (4.80)$$

$k, l$  receptores

$p, q$  satélites

Si los receptores  $k, l$  se encuentran próximos entre si y a una altitud parecida se tendrá que

$$T_{kl}^{pq}(t) \approx 0 \quad (4.81)$$

En caso contrario, el error que afectará a cada ecuación es la diferencia entre el retardo troposférico real y el retardo troposférico obtenido a partir del modelo

$$\Delta T_{kl}^{pq} = T_{kl-real}^{pq}(t) - T_{kl-mod}^{pq} \quad (4.82)$$

---

<sup>8</sup>En el caso de utilizar modelos troposféricos más complejos puede que sean necesarias más parámetros: las tres coordenadas del receptor, el acimut de la dirección de cada señal, etc.

En mediciones de ámbito topográfico, en que los extremos de la línea se hallan próximos y a altitudes parecidas se tiene que

$$1 \text{ cm} < e_{trop} < 3 \text{ cm} \quad (4.83)$$

Los errores en la determinación del retardo troposférico se trasladan directamente a la componente altimétrica del vector según la expresión

$$\Delta h = \frac{\Delta T_{kl}^{pq}}{\cos \beta} \quad (4.84)$$

$\Delta h$	error altimétrico
$\Delta T_{kl}^{pq}$	error en la determinación del retardo troposférico cenital
$\beta$	ángulo cenital del satélite más bajo

Por tanto, en mediciones de ámbito topográfico, con el error troposférico residual dado en 4.83 y considerando  $\beta = 70^\circ$ , el error en la determinación de la componente altimétrica de la línea medida alcanza un valor

$$3 \text{ cm} < \Delta h < 9 \text{ cm} \quad (4.85)$$

#### 4.5.4 Efecto multitrayectoria

El efecto multitrayectoria o multicamino (*multipath*) se produce porque a la antena del receptor le llegan, además de la señal directa, varias reflejadas. Las señales indirectas proceden de reflexiones que tienen lugar, o bien en el entorno del satélite, o bien en el entorno del receptor. En líneas de poca longitud, las que tienen lugar en el entorno del satélite tienden a cancelarse al formar las simples diferencias. Por el contrario, las que se producen en el entorno del receptor son más difíciles de eliminar. Los objetos reflectantes más típicos son la superficie terrestre, edificios, árboles, colinas, etc. Las azoteas de los edificios suelen ser zonas especialmente críticas.

El resultado del efecto multicamino es una señal compuesta por la directa y las reflejadas. Esta señal compuesta es procesada por el receptor, produciendo una medición errónea, tanto en las pseudodistancias como en la medición de fase de la portadora. El error siempre es una parte fraccional de la longitud de onda de la señal.

El efecto multitrayectoria sobre las observables de código y de fase es complejo ya que depende de múltiples factores como la diferencia de fuerza y retardo de las señales reflejadas respecto a las directas, las características de la antena empleada y la calidad de las técnicas electrónicas de medición y procesamiento de los receptores.

Las observaciones estáticas se ven favorecidas por el carácter cíclico del error multitrayectoria. Cuanto mayor es el tiempo de observación menor es su efecto sobre

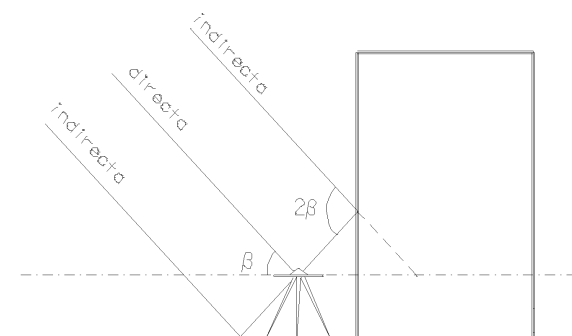


Figura 4.1: Efecto multitrayectoria

la determinación del vector. En aplicaciones cinemáticas la cuestión se complica aún más ya que el entorno de la antena cambia constantemente. Algunas de las características que ayudan a tratar el efecto multicamino son las siguientes:

- Las señales reflejadas siempre inciden en la antena con menor potencia que las señales directas. El grado de atenuación de las señales depende del material de la superficie reflectante y del ángulo de incidencia en la reflexión. En general, las señales con un ángulo de incidencia mayor presentan menor atenuación. Esta es una de las razones por las que las señales procedentes de satélites muy bajos en el horizonte tienden a generar un fuerte efecto multitrayectoria.
- Las señales reflejadas siempre presentan un mayor retardo que las directas. Como se aprecia en el gráfico 4.1, las señales reflejadas siempre recorren un camino mayor.
- El error por efecto multitrayectoria tiene un carácter cíclico en estacionamientos estáticos. Existe un ciclo diario, ya que la situación de los satélites respecto al receptor se repite cada día sidéreo. También existen variaciones cíclicas de periodo más corto, cuya frecuencia de repetición depende de la longitud de onda de la señal, la distancia a la que se encuentra el objeto reflectante y del ángulo de elevación de la señal. Este carácter cíclico puede ser útil para detectar y analizar la presencia de efecto multitrayectoria en estacionamientos críticos.
- Cuando los ángulos de reflexión son pequeños cambia el sentido de la polarización. Las señales parten del satélite polarizadas a derechas. En caso de producirse una fuerte reflexión, la señal resultante incide en la antena polarizada a izquierdas, lo que permite eliminarla.

Aunque existen propuestas para detectar y corregir el efecto multitrayectoria en ciertas aplicaciones o bien para modelizarlo correctamente, en general no se modeliza en el proceso de cálculo. Por ello es importante utilizar antenas y receptores de calidad con entornos de medición favorables.



El tipo y calidad de las antenas empleadas es un factor decisivo a la hora de reducir el efecto multitrayectoria. Las antenas no tienen la misma sensibilidad en todas las direcciones y por tanto se pueden diseñar para que la ganancia de señales próximas al horizonte sea mínima. Algunos modelos incorporan un plano de tierra o superficie metálica por las que circula corriente eléctrica cuya finalidad es atenuar las señales que inciden por debajo del horizonte. Un tipo de antena especialmente indicado para eliminar el efecto multipath son las de tipo *choke ring*, generalmente empleadas en las estaciones permanentes aunque por su peso, tamaño y precio no son adecuadas para la mayoría de aplicaciones de navegación.

#### 4.5.5 Excentricidad y variación de fase de las antenas

El centro de fase de las antenas es el punto al que están referidas las mediciones de fase y generalmente no coincide con el centro mecánico de la antena. La diferencia entre ambos depende de la elevación, del acimut y de la intensidad de la señal que proviene del satélite. Esto es debido a que la respuesta radioeléctrica de la antena no es la misma en todas las direcciones y además varía en función de la intensidad de la señal. La antena presenta centros de fase diferentes para cada frecuencia y estos variarán dependiendo de la dirección de la cual provenga la señal.

Es necesario distinguir entre dos tipos de errores. Por un lado se encuentra el desplazamiento de los centros nominales<sup>9</sup> o excentricidad. La excentricidad es el desplazamiento relativo que los centros nominales de las diferentes frecuencias tienen con respecto al centro mecánico de la antena. El denominado error de variación del centro de fase afecta de forma diferente a cada una de las señales. Por tanto, cada ecuación de dobles diferencias formada debe ser corregida dependiendo del modelo de antena y de la dirección de la señal empleando los ficheros de calibración de las antenas.

Desafortunadamente, para poder aplicar los ficheros de calibración, las antenas deben estar estáticas y orientadas al norte, lo que no es posible en aplicaciones dinámicas. Por tanto, la excentricidad y el centro de fase no siempre pueden ser eliminados y repercutirán sobre las coordenadas de la trayectoria. Por ello, uno de los parámetros a tener en cuenta a la hora de evaluar la calidad de una antena es el grado de variación que presente el centro de fase.

Las variaciones del centro de fase de las antenas pueden influir en los vectores calculados desde unos milímetros hasta algunos centímetros. En caso de que este error sea crítico, puede ser modelado en el proceso de cálculo. Para ello es necesario conocer los datos de calibración del modelo o modelos de antena que se estén empleando. A continuación, a modo de ejemplo, se muestra un fichero de calibración relativa de para una antena Leica AT502.

<sup>9</sup>En inglés *offset*.

```

-----
RECEIVER TYPE      ANTENNA S/N  FREQ  PHASE CENTER OFFSETS (M)
ANTENNA  TYPE      FROM   TO    L*    NORTH   EAST   UP    FMT

LEICA SR530          0 999999   1     0.0003  0.0020  0.0618   2
AT502 POLE           2     -0.0014  0.0018  0.0654

```

## FORMAT INDICATOR:

```

FMT=0 : ONLY PHASE CENTER OFFSETS ARE USED
FMT=1 : ZENITH DEPENDENT CORRECTIONS GIVEN TO THE RIGHT OF THE OFFSET
        VALUES ARE USED
FMT=2 : PHASE CENTER MAPS OR SPHERICAL HARMONICS ARE USED (ZENITH/AZIMUTH
        DEPENDENT)

```

ANTENNA PHASE CENTER OFFSETS MEASURED FROM ANTENNA REFERENCE POINT (ARP)  
TO THE MEAN L1/L2 PHASE CENTER.

PHASE CENTER MAPS AND/OR COEFFICIENTS OF SPHERICAL HARMONICS IN MILLIMETERS:

```

-----
TYPE 1 : ELEVATION/AZIMUTH GRID
TYPE 2 : SPHERICAL HARMONICS COEFFICIENTS (UNNORMALIZED)
TYPE 3 : SPHERICAL HARMONICS COEFFICIENTS (NORMALIZED)
TYPE 4 : SPHERICAL HARMONICS COEFFICIENTS, UPPER HEMISPHERE ONLY (NORMALIZED)

```

```

D(Z) : ZENITH TABULAR INTERVAL (DEGREES)
D(A) : AZIMUTH TABULAR INTERVAL (DEGREES)
N(Z) : DEGREE OF SPHERICAL HARMONICS DEVELOPMENT
N(A) : ORDER OF SPHERICAL HARMONICS DEVELOPMENT

```

```

RECEIVER TYPE      ANTENNA TYPE      FROM   TO    TYP  D(Z) D(A)
*****
LEICA SR530          AT502 POLE          0 999999   1     5 360

      A\Z      0      5      10      15      20      25      30      35      40      45
L1  0  0.00  1.50  2.90  4.20  5.30  6.40  7.40  8.20  8.80  9.10
L2  0  0.00 -1.20 -1.50 -1.30 -0.60  0.30  1.10  2.00  2.60  2.90

      50      55      60      65      70      75      80      85      90
      9.10  8.90  8.30  7.10  5.50  3.30  0.30  0.00  0.00
      2.80  2.40  1.60  0.50 -1.10 -2.70 -4.60  0.00  0.00

```