Capítulo 2

Ecuaciones de navegación

2.1 Generalidades

La navegación a partir de los datos de un INS consiste básicamente en la integración respecto al tiempo de las aceleraciones registradas por dicho INS. Desde un punto de vista matemático, implica resolver las ecuaciones diferenciales que relacionan las aceleraciones registradas con las derivadas segundas del vector de posición. Por ejemplo, como se vió en el apartado(1.1.2), para un sistema inercial la ecuación diferencial sería

$$\ddot{\vec{x}}^i = \vec{g}^i(\vec{x}^i) + \vec{a}^i \tag{2.1}$$

siendo

$\ddot{\vec{x}}^i$	derivada segunda del vector de posición
$\vec{x}^i$	vector de posición en el *i-frame*
$\vec{g}^i$	vector de aceleración debido a la gravedad
$\vec{a}^i$	vector de fuerza específica medida por el INS

La ecuación 2.1 se integra para obtener $\vec{x}^i$, asumiendo que $\vec{g}^i$ es conocido a partir de un modelo y que un INS proporciona el vector $\vec{a}^i$. Salvo la situación inicial $\vec{x}^i$, que ha de ser conocida por un otros medios (GNSS, por ejemplo), la trayectoria obtenida se basa exclusivamente en los datos del INS y por ello recibe el nombre de navegación inercial libre (*free-inertial navigation*).

Para cualquier otro sistema diferente al *i-frame* pueden plantearse ecuaciones similares, denominándose todas ellas ecuaciones de navegación. Como los diferentes sistemas de coordenadas rotan entre sí, tanto las ecuaciones de navegación como su posterior integración se han de formular de manera diferente.

La elección del sistema en el que se formulan y resuelven las ecuaciones de navegación dependen de la aplicación y sobre todo del tipo de mecanización escogido para el sistema inercial. De todas formas, independientemente de la mecanización y del sistema de coordenadas escogido, la trayectoría resultante debería ser siempre la misma [1], pudiendo ser llevada de un sistema a otro mediante las oportunas transformaciones. Por ejemplo, resolviendo las ecuaciones en el *n-frame* y transformando el resultado al *i-frame* tiene que resultar lo mismo que resolver las ecuaciones de navegación en éste último.

Por tanto, lo aconsejable es plantear las ecuaciones de navegación de una manera rigurosa en un sistema arbitrario o *a-frame* relacionándolo con el el *i-frame* en el cual se plantea la formulación general dada en 2.1. La formulación resultante es posteriormente particularizada para el sistema escogido, ya sea el *e-frame* o el *n-frame*.

2.2 Procedimiento unificado

Sea el *a-frame* un sistema de coordenadas arbitario que rota respecto al sistema inercial con una velocidad angular $\vec{\omega}_{ia}^{a}$. El objetivo es obtener una ecuación similar a 2.1 pero expresada en el *a-frame*. Para ello se asume que ambos sistemas son concéntricos[2].

Las coordenadas en el *i-frame* de un vector originalmente expresado en el *a-frame* son

$$\vec{x}^{i} = C_a^i \vec{x}^{a} \tag{2.2}$$

Derivando respecto al tiempo

$$\dot{\vec{x}}^{i} = \dot{C}_a^i \vec{x}^{a} + C_a^i \dot{\vec{x}}^{a} \tag{2.3}$$

y derivando nuevamente

$$\ddot{\vec{x}}^{i} = C_a^i \ddot{\vec{x}}^{a} + 2\dot{C}_a^i \dot{\vec{x}}^{a} + \ddot{C}_a^i vecx^{a} \tag{2.4}$$

Particularizando la ecuación (1.68) tenemos que

$$\dot{C}_a^i = C_a^i \Omega_{ia}^a \tag{2.5}$$

[1]Excluyendo posible errores numéricos o de modelización.

[2]No es el caso del *n-frame*, lo cual será tenido en cuenta en la particularización de dicho sistema.

cuya derivada respecto al tiempo resulta

$$\ddot{C}_a^i = C_a^i(\dot{\Omega}_{ia}^a + \Omega_{ia}^a \Omega_{ia}^a) \tag{2.6}$$

sustituyendo 2.5 y 2.6 en 2.4 e igualando con 2.1 se obtiene

$$\ddot{\vec{x}}^i = C_a^i \ddot{\vec{x}}^a + 2C_a^i \Omega_{ia}^a \dot{\vec{x}}^a + C_a^i(\dot{\Omega}_{ia}^a + \Omega_{ia}^a \Omega_{ia}^a)\vec{x}^a = \vec{g}^i(\vec{x}^i) + \vec{a}^i \tag{2.7}$$

y despejando

$$\ddot{\vec{x}}^a = -2\Omega_{ia}^a \dot{\vec{x}}^a - (\dot{\Omega}_{ia}^a + \Omega_{ia}^a \Omega_{ia}^a)\vec{x}^a + \vec{g}^a + \vec{a}^a \tag{2.8}$$

en la que se ha hecho uso de $(C_a^i)^{-1} = (C_a^i)^T = C_i^a$, de $\vec{g}^a = C_i^a \vec{g}^i$ y de $\vec{a}^a = C_i^a \vec{a}^i$

El sistema 2.8, consistente en tres ecuaciones diferenciales de segundo orden, puede ser transformado a un sistema de seis ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\dot{\vec{x}}^a &= -2\Omega_{ia}^a \dot{\vec{x}}^a - (\dot{\Omega}_{ia}^a + \Omega_{ia}^a \Omega_{ia}^a)\vec{x}^a + \vec{g}^a + \vec{a}^a \\ \frac{d}{dt}\vec{x}^a &= \dot{\vec{x}}^a \end{aligned} \tag{2.9}$$

Las ecuaciones 2.9 son las ecuaciones de navegación expresadas en un sistema de coordenadas arbitrario *a-frame*. Los términos conocidos son el vector de gravedad $\vec{g}^a$ y el vector de aceleraciones $\vec{a}^a$ medido por el INS.

Si el INS está estabilizado de manera que su sistema de coordenadas es paralelo al *a-frame*, las aceleraciones medidas son directamente $\vec{a}^a$.

Si por el contrario, el INS estuviera rígidamente sujeto al vehículo (mecanización *strapdown*), las aceleraciones medidas se referiarían a otro sistema, como por ejemplo el *b-frame*. En ese caso, las aceleraciones deben ser previemente transformadas al *a-frame* mediante

$$\vec{a}^a = C_b^a \vec{a}^b \tag{2.10}$$

dónde la matriz de transformación C_b^a ha de ser determinada a partir de la velocidad angular $\vec{\omega}_{ib}^b$ medida los giróscopos del INS.

2.3 Ecuaciones particularizadas

2.3.1 Ecuaciones en el (*i-frame*)

En este caso, el *a-frame* y el *i-frame* coinciden y por tanto, al ser $\Omega_{ia}^{a} = 0$ y $\dot{\Omega}_{ia}^{a} = 0$, las ecuaciones 2.9 resultan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\dot{\vec{x}}^{i} &= \vec{g}^{i} + \vec{a}^{i} \\ \frac{d}{dt}\vec{x}^{i} &= \dot{\vec{x}}^{i} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Si la mecanización es del tipo *strapdown*, los datos registrados por el INS en un *b-frame* deben de ser traladados al *i-frame* mediante la correspondiente matriz C_b^i que se obtiene a partir de la integración de

$$\dot{C}_b^i = C_b^i \Omega_{ib}^b \tag{2.12}$$

Las ecuciones 2.11 y 2.12 representan la dinámica completa de un sistema del tipo *strapdown* en el *i-frame*.

2.3.2 Ecuaciones en el (*e-frame*)

En este caso el *e-frame* se toma como *a-frame* y por tanto $\dot{\Omega}_{ie}^{e} = 0$ en la particularización de las ecuaciones 2.9, obteniéndose

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\dot{\vec{x}}^{e} &= -2\Omega_{ie}^{e}\dot{\vec{x}}^{e} - (\Omega_{ie}^{e}\Omega_{ie}^{e})\vec{x}^{e} + \vec{g}^{e} + \vec{a}^{e} \\ \frac{d}{dt}\vec{x}^{e} &= \dot{\vec{x}}^{e} \end{aligned} \tag{2.13}$$

donde Ω_{ie}^{e} viene dado por

$$\vec{\omega}_{ie}^{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_e \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Omega_{ie}^{e} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_e & 0 \\ \omega_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

con $\omega_e = 729211510^{-11} rads^{-1}$, según el GRS80.

Si la mecanización es del tipo *strapdown*, los datos registrados por el INS en un *b-frame* deben de ser traladados al *e-frame* mediante la correspondiente matriz C_b^e que se obtiene a partir de la integración de

$$\dot{C}_b^e = C_b^e \Omega_{eb}^b \tag{2.15}$$

dónde las velocidades angulares $\vec{\omega}_{eb}^b$ se obtienen a partir de

$$\vec{\omega}_{eb}^b = \vec{\omega}_{ib}^b - C_e^b \vec{\omega}_{ie}^e \tag{2.16}$$

2.3.3 Ecuaciones en el (*n-frame*)

Para expresar las ecuaciones de navegación en el *n-frame* no basta con sustituir n por a en las ecuaciones 2.9 porque la integración se ha de hacer en un sistema cuyos ejes no varíen. No es el caso del *n-frame*, puesto que la orientación del mismo respecto a la Tierra depende de las coordenadas (φ, λ). Por tanto, se trata de efectuar la integración de la trayectoria en el *e-frame* pero expresando las velocidades y aceleraciones lineales en el *n-frame*. Es decir

$$\vec{v}^n = C_e^n \dot{\vec{x}}^e \tag{2.17}$$

Es importante resaltar que $\vec{v}^n \neq \dot{\vec{x}}^n$. El vector $\vec{v}^n$ contiene las componentes del vector velocidad lineal expresadas en el *n-frame* mientras que $\dot{\vec{x}}^n$ es la derivada respecto al tiempo de la trayectoria seguida. Lo mismo ocurre con el vector $\vec{a}^n$ respecto a $\ddot{\vec{x}}^n$. Tanto $\dot{\vec{x}}^n$ como $\ddot{\vec{x}}^n$ no pueden ser tratados como simples vectores debido a la Ley de Coriolis.

Una forma de obtener las ecuaciones de navegación en el *n-frame* es partir de las ya deducidas para el *e-frame* en 2.13,

$$\frac{d}{dt}\dot{\vec{x}}^e = -2\Omega_{ie}^e \dot{\vec{x}}^e - (\Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e)\vec{x}^e + \vec{g}^e + \vec{a}^e \tag{2.18}$$

pero teniendo en cuenta la relación 2.17, es decir

$$\vec{v}^n = C_e^n \dot{\vec{x}}^e \;\Rightarrow\; \dot{\vec{x}}^e = C_n^e \vec{v}^n \tag{2.19}$$

y diferenciando respecto al tiempo

$$\frac{d}{dt}\dot{\vec{x}}^e = \frac{d}{dt}(C_n^e \vec{v}^n) = \dot{C}_n^e \vec{v}^n + C_n^e \frac{d}{dt}\vec{v}^n \tag{2.20}$$

y como $\dot{C}_n^e = C_n^e \Omega_{en}^n$ se obtiene

$$\frac{d}{dt}\dot{\vec{x}}^e = C_n^e \left(\frac{d}{dt}\vec{v}^n + C_n^e \Omega_{en}^n \vec{v}^n \right) \tag{2.21}$$

y sustituyendo en 2.18 se llega a

$$\frac{d}{dt}\vec{v}^n = -2C_e^n \Omega_{ie}^e \dot{\vec{x}}^e - C_e^n \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e \vec{x}^e + C_e^n \vec{g}^e + C_e^n \vec{a}^e - \Omega_{en}^n \vec{v}^n \tag{2.22}$$

e introduciendo $\Omega_{ie}^e = C_n^e \Omega_{ie}^n C_e^n$ se llega finalmente a

$$\frac{d}{dt}\vec{v}^n = \vec{a}^n - (2\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n)\vec{v}^n + \vec{g}^n - C_e^n \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e \vec{x}^e \tag{2.23}$$

El término $\vec{g}^n$ es la aceleración gravífica, debida a la atracción de las masas terrestres y $C_e^n \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e \vec{x}^e$ es la aceleración centrífuga debida a la rotación terrestre. El vector de gravedad es la suma de ambas componentes

$$\vec{g}_{total}^n = \vec{g}^n - C_e^n \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e \vec{x}^e \tag{2.24}$$

que sustituida en 2.23 y teniendo en cuenta que

$$2\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n = \Omega_{in}^n + \Omega_{ie}^n \tag{2.25}$$

permite llegar a la expresión que relaciona la aceleración medida $\vec{a}^n$ con la variación de velocidad expresada en el *n-frame*

$$\frac{d}{dt}\vec{v}^n = \vec{a}^n - (\Omega_{in}^n + \Omega_{ie}^n)\vec{v}^n + \vec{g}_{total}^n \tag{2.26}$$

Pero las coordenadas de la trayectoría se han de expresar en el *e-frame*, por lo que se ha de tener en cuenta 2.17, que operando convenientemente resulta

$$\frac{d}{dt}\vec{x}^e = C_n^e \vec{v}^n \tag{2.27}$$

Sin embargo, lo habitual no es expresar $\vec{x}^e$ en coordenadas ECEF (X, Y, Z), sino en función de las coordenadas geodésicas (φ, λ, h), siendo la relación entre ambas

$$\begin{pmatrix} x_1^e \\ x_2^e \\ x_3^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\nu + h)\cos\varphi\cos\lambda \\ (\nu + h)\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\lambda \\ [\nu(1 - e^2) + h]\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

Derivando respecto al tiempo, es decir

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1^e \\ x_2^e \\ x_3^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^e}{\partial\varphi}\dot{\varphi} + \frac{\partial x_1^e}{\partial\lambda}\dot{\lambda} + \frac{\partial x_1^e}{\partial h}\dot{h} \\ \frac{\partial x_2^e}{\partial\varphi}\dot{\varphi} + \frac{\partial x_2^e}{\partial\lambda}\dot{\lambda} + \frac{\partial x_2^e}{\partial h}\dot{h} \\ \frac{\partial x_3^e}{\partial\varphi}\dot{\varphi} + \frac{\partial x_3^e}{\partial\lambda}\dot{\lambda} + \frac{\partial x_3^e}{\partial h}\dot{h} \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

y teniendo en cuenta que

$$\frac{d}{d\varphi}\left[(\nu + h)\cos\varphi\right] = -(\rho + h)\,\mathrm{sen}\,\varphi \tag{2.30}$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left[\big(\nu(1 - e^2) + h\big)\right] = (\rho + h)\cos\varphi \tag{2.31}$$

$$\tag{2.32}$$

se llega a

$$\dot{\vec{x}}^e = \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}(\rho + h)\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\lambda - \dot{\lambda}(\nu + h)\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\lambda + \dot{h}\cos\varphi\cos\lambda \\ -\dot{\varphi}(\rho + h)\,\mathrm{sen}\,\varphi\sin\lambda - \dot{\lambda}(\nu + h)\cos\varphi\cos\lambda + \dot{h}\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\lambda \\ \dot{\varphi}(\rho + h)\cos\varphi + \dot{h}\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

con lo que, teniendo en cuenta ecuación (1.76)

$$C_e^n = \begin{pmatrix} -\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\lambda & -\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\lambda & \cos\varphi \\ -\,\mathrm{sen}\,\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\cos\varphi\cos\lambda & -\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\lambda & -\sin\varphi \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

la ecuación 2.17 se convierte en

$$\vec{v}^n = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}(\rho + h) \\ \dot{\lambda}(\nu + h)\cos\varphi \\ -\dot{h} \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

Comparando 2.33 con 2.35 se ve claramente que los vectores $\dot{\vec{x}}^e$ y $\vec{v}^n$ son diferentes. El primero representa la derivada respecto al tiempo de la trayectoria expresada en el *e-frame*, mientras que el segundo es el vector de velocidad lineal expresado en el *n-frame* o lo que es lo mismo, el vector $\dot{\vec{x}}^e$ visto desde el *n-frame*.

Para obtener una expresión explícita de 2.26 solamente quedaría sustituir

$$\Omega_{in}^n = \begin{pmatrix} 0 & (\dot{\lambda}+\omega_e)\operatorname{sen}\varphi & -\dot{\varphi} \\ -(\dot{\lambda}+\omega_e)\operatorname{sen}\varphi & 0 & -(\dot{\lambda}+\omega_e)\cos\varphi \\ \dot{\varphi} & (\dot{\lambda}+\omega_e)\cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

y tener en cuenta que

$$\Omega_{ie}^n = C_e^n \Omega_{ie}^e C_n^e = \begin{pmatrix} 0 & \omega_e \operatorname{sen}\varphi & 0 \\ -\omega_e \operatorname{sen}\varphi & 0 & -\omega_e \cos\varphi \\ 0 & \omega_e \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

es decir,

$$\Omega_{in}^n + \Omega_{ie}^n = \begin{pmatrix} 0 & (\dot{\lambda}+2\omega_e)\operatorname{sen}\varphi & -\dot{\varphi} \\ -(\dot{\lambda}+2\omega_e)\operatorname{sen}\varphi & 0 & -(\dot{\lambda}+2\omega_e)\cos\varphi \\ \dot{\varphi} & (\dot{\lambda}+2\omega_e)\cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

con lo que se llega a las ecuaciones explícitas de navegación en el *n-frame* en función de las coordenadas geodésicas $(\varphi, \lambda\, h)$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_N + g_N - 2\omega_e v_E \operatorname{sen}\varphi + \dot{\varphi} v_D - \dot{\lambda}\operatorname{sen}\varphi v_E \\ a_E + g_E - 2\omega_e \operatorname{sen}\varphi v_N + 2\omega_e \cos\varphi v_D + \dot{\lambda}\operatorname{sen}\varphi v_N + \dot{\lambda}\cos\varphi v_D \\ a_D + g_D - 2\omega_e \cos\varphi v_E - \dot{\lambda}\cos\varphi v_E - \dot{\varphi} v_N \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

en la que los vectores $\vec{a}$, $\vec{v}$ y $\vec{g}$ han sido expresados también de forma explícita

$$\vec{a}^n = \begin{pmatrix} a_N \\ a_E \\ a_D \end{pmatrix} \quad \vec{v}^n = \begin{pmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{pmatrix} \quad \vec{g}^n = \begin{pmatrix} g_N \\ g_E \\ g_D \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

Las ecuaciones 2.39, junto con

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v_N}{(\rho+h)} \\ \frac{v_E}{(\nu+h)}\cos\varphi \\ -v_D \end{pmatrix} \tag{2.41}$$

constituyen seis ecuaciones diferenciales de navegación cuyas variables de integración son $(v_N, v_E, v_D, \varphi, \lambda, h)$

2.4 Técnicas de integración numérica

2.4.1 Integración numérica de ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones de navegación son un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden del tipo

$$\dot{\vec{y}}(t) = \vec{f}(t, \vec{y}(t)) \tag{2.42}$$

con condiciones iniciales

$$\vec{y}(t_0) = \vec{\mu} \tag{2.43}$$

En lo que se refiere a los algorítmos de integración empleados, no existe una diferencia sustancial entre considerar un sistema de ecuaciones $\dot{\vec{y}}(t)$ o una ecuación escalar del tipo

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)) \tag{2.44}$$

por lo que, para facilitar la notación, los algoritmos numéricos se describirán para este último caso.

Existen muchos métodos para resolver ecuaciones diferenciales del tipo de (2.42), aunque en adelante se empleará solamente el método o técnica de Runge-Kutta. Es un método del tipo de los denominados de paso simple o único y que se adapta bien al caso que nos ocupa, es decir, la integración numérica de las ecuaciones de navegación a partir de unos valores iniciales conocidos.

2.4.2 Método de Runge-Kutta

El técnica de integración numérica Runge-Kutta se basa en dos ideas básicas: un desarrollo en serie de Taylor de la solución y la aproximación de las sucesivas derivadas de la función mediante polinomio.

El desarrollo en serie en torno a t_0 de la solución buscada es

$$y(t) = y(t_0) + \dot{y}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!}\ddot{y}(t_0)(t - t_0)^2 + \cdots + \frac{1}{m!}y^m(t_0)(t - t_0)^m + \cdots \tag{2.45}$$

en donde la primera derivada ya viene dada en 2.44 y las siguiente se obtendrían analítiamente derivando sucesivamente respecto al tiempo. Las derivadas hasta el tercer orden serían

$$\begin{aligned} \dot{y}(t_0) &= f \\ \ddot{y}(t_0) &= f_t + f_y f \\ \dddot{y}(t_0) &= f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2 + f_t f_y + f_y^2 f \end{aligned} \tag{2.46}$$

donde los subíndices indican la variable de la derivación parcial, que se entiende evaluada en $t = t_0$ y $y = y_0$, como por ejemplo

$$f_{ty} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}\right|_{t=t_0, y=y_0} \tag{2.47}$$

Como el valor inicial es conocido, $y(t_0) = y_0$, tanto la primera derivada $f(t_0, y_0)$ como las siguientes pueden ser evaluadas en y_0. Sustituyendo (2.46) en (2.45) se obtiene el valor aproximado en t.

Para evitar la derivación analítica de la función $f(t, y_t)$, que no siempre es sencilla, el método de Runge-Kutta aproxima la solución mediante el empleo de un polinomio en $(t - t_0)$ que coincida con el desarrollo en serie de Taylor (2.45) hasta un cierto orden previamente especificado. A su vez, no se evalúan las sucesivas derivadas analíticas sino que se hace una predicción basada en un promedio adecuado de las primeras derivadas de la función evaluadas en diferentes puntos del entorno de t_0.

En general, la solución para una secuencia discreta de valores de t se obtiene iterativamente, de forma que la solución en t_n se basa en la solución previamente obtenida en $tn - 1$. Aunque no es estrictamente necesario, se suele adoptar un paso de integración h constante

$$h = t_{n+1} - t_n \tag{2.48}$$

Establecidas las bases, la técnica se puede particularizar para obtener expresiones de diferentes órdenes.

Método de primer orden

En el método de Runge-Kutta de primer orden se busca que, en el intervalo de integración h, la estimación del algoritmo iguale la solución correcta hasta la primera potencia, con lo que se obtiene

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \tag{2.49}$$

Método de segundo orden

En el método de Runge-Kutta de segundo orden se busca que, en el intervalo de integración h, la estimación del algoritmo iguale la solución correcta hasta la segunda potencia, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f(t_n + h, y_n + hk_1) \end{aligned} \tag{2.50}$$

Método de tercer orden

En el método de Runge-Kutta de tercer orden se busca que, en el intervalo de integración h, la estimación del algoritmo iguale la solución correcta hasta la tercera potencia, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \\ k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 &= f(t_n + h, y_n - hk_1 + 2hk_2) \end{aligned} \tag{2.51}$$

Método de cuarto orden

En el método de Runge-Kutta de cuarto orden se busca que, en el intervalo de integración h, la estimación del algoritmo iguale la solución correcta hasta la cuarta potencia, con lo que se obtiene

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
k_1 &= f(t_n, y_n) \\
k_2 &= f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1) \\
k_3 &= f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2) \\
k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3)
\end{aligned} \tag{2.52}
$$

2.4.3 Integración numérica de funciones

Una vez obtenido en la sección 2.4.2 el algoritmo de integración numérica para reolver ecuaciones diferenciales de primer orden, resulta sencillo adaptar el método a la integración de funciones del tipo

$$\dot{y}(t) = f(t) \tag{2.53}$$

en las que la función f es independiente de la función $y(t)$. Las correspondientes expresiones para los algoritmos de primer, segundo, tercer y cuarto orden son

Primer orden (regla del rectángulo)

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n) \tag{2.54}$$

Segundo orden (regla del trapecio)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n) + f(t_n + h)\right) \tag{2.55}$$

Tercer y cuarto orden (regla de Simpson)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left(f(t_n) + 4f(t_n + \frac{h}{2}) + f(t_n + h)\right) \tag{2.56}$$

En todos los casos casos, el error del algoritmo es del orden de la potencia del término desechado en el desarrollo.

2.5 Integración de las ecuaciones de navegación

2.5.1 Algoritmo de cuarto orden

Teniendo en cuenta las ecuaciones diferenciales deducidas en los apartados 2.2 y 2.3, una expresión general para las ecuaciones de navegación en sistema arbitario serían

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\vec{v}^{\,a} &= C_b^a\vec{a}^{\,b} + \vec{g}^{\,a} - 2\Omega_{ia}^a\vec{v}^{\,a} - (\dot{\Omega}_{ia}^a + \Omega_{ia}^a\Omega_{ia}^a)\vec{x}^{\,a} \\ \frac{d}{dt}\vec{x}^{\,a} &= \dot{\vec{v}}^{\,a} \end{aligned} \tag{2.57}$$

A su vez, las tres primeras ecuaciones se pueden escribir empleando una notación más compacta y conveniente para el desarrollo que vendrá a continuacón

$$\frac{d}{dt}\vec{v}^{\,a} = C_b^a\vec{a}^{\,b} + \vec{f}\left(\vec{x}^{\,a}, \vec{v}^{\,a}, \Omega_{ia}^a, \dot{\Omega}_{ia}^a, \vec{g}^{\,a}\right) \tag{2.58}$$

Los datos observados por el INS son el vector de aceleración $\vec{a}^{\,b}$ y el vector axial de velocidades angulares $\vec{\omega}_{ib}^b$. De este último se pueden obtener de forma recurrente C_b^a, Ω_{ia}^a y $\dot{\Omega}_{ia}^a$, tal como se explicará en el apartado 2.5.2. A partir de la integración del vector $\vec{a}^{\,a}$ se obtiene $\vec{v}^{\,a}$ y con él finalmente la situación $\vec{x}^{\,a}$

Generalmente, la variación en el tiempo de los términos de $\vec{a}^{\,b}$ es mucho más rápida que los términos contenidos en la función vectorial $\vec{f}$. En esta última, el término dominante sería Ω_{ia}^a, en el que a su vez domina la rotación terrestre en la mayoría de aplicaciones. Por ello el primer término de la derecha de la ecuación (2.58), es decir $C_b^a\vec{a}^{\,b}$, requiere algoritmos de integración de mayor orden que el segundo término $\vec{f}\left(\vec{x}^{\,a}, \vec{v}^{\,a}, \Omega_{ia}^a, \dot{\Omega}_{ia}^a, \vec{g}^{\,a}\right)$. Para este último suele bastar un algoritmo de primer orden con un único punto de evaluación, ya sea al comienzo o en medio del intervalo de integración. Por tanto, la solución numérica de la ecuación diferencial (2.58) se puede aproximar mediante

$$\Delta\vec{v}^{\,a} = \int_{\Delta t} C_b^a(t')\vec{a}^{\,b}(t')dt' + \vec{f}\left(\vec{x}^{\,a}, \vec{v}^{\,a}, \Omega_{ia}^a, \dot{\Omega}_{ia}^a, \vec{g}^{\,a}\right)\Delta t \tag{2.59}$$

En adelante se asumirá un intervalo de integración $\Delta t = 2\delta t$, siendo δt el intervalo de registro para los datos crudos del INS. Es decir, que en cada intervalo de integración se dispondrían de tres valores de aceleración medidos y que se corresponderían con las épocas t_{l-2}, t_{l-1} y t_l, respectivamente al principio, en el medio y al final del intervalo de integración Δt . Al disponer de tres valores se puede aplicar un algoritmo de integración de tercer orden, es decir la Regla de Simpson.

Aproximando la aceleración en el intervalo de integración Δt por un desarrollo en serie de Taylor de primer orden

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_{l-2} + \dot{\vec{a}}_{l-2}(t - t_{l-2}) + O(\Delta t^3) \tag{2.60}$$

y teniendo en cuenta que los incrementos de velocidad obtenidos a partir de las aceleraciones medidas y expresados en el *b-frame* vienen dados por

$$\delta\vec{v}_l^b = \int_{t_{l-1}}^{t_l} \vec{a}^b(t')dt' \tag{2.61}$$

se pueden estimar dos velocidades para el intervalo de integración $[t_{l-2}, t_l]$

$$\delta\vec{v}_{l-1}^b = \int_{t_{l-2}}^{t_{l-1}} \vec{a}^b(t')dt' = \vec{a}_{l-2}\delta t + \frac{1}{2}\dot{\vec{a}}_{l-2}\delta t^2 + O(\Delta t^3) \tag{2.62}$$

y

$$\delta\vec{v}_l^b = \int_{t_{l-1}}^{t_l} \vec{a}^b(t')dt' = \vec{a}_{l-2}\delta t + \frac{3}{2}\dot{\vec{a}}_{l-2}\delta t^2 + O(\Delta t^3) \tag{2.63}$$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones formado por (2.62) y (2.63) se tiene que

$$\begin{aligned} \vec{a}_{l-2}^b &= \frac{1}{2\delta t}(3\delta\vec{v}_{l-1}^b - \delta\vec{v}_l^b) \\ \dot{\vec{a}}_{l-2}^b &= \frac{1}{\delta t^2}(\delta\vec{v}_l^b - \delta\vec{v}_{l-1}^b) \end{aligned} \tag{2.64}$$

A partir de las dos valores anteriores se pueden estimar las aceleraciones en las épocas correspondientes al intervalo Δt mediante

$$\begin{aligned} \hat{\vec{a}}_{l-2}^b\Delta t &= 3\delta\vec{v}_{l-1}^b - \delta\vec{v}_l^b \\ \hat{\vec{a}}_{l-1}^b\Delta t &= \delta\vec{v}_{l-1}^b + \delta\vec{v}_l^b \\ \hat{\vec{a}}_l^b\Delta t &= 3\delta\vec{v}_l^b - \delta\vec{v}_{l-1}^b \end{aligned} \tag{2.65}$$

A continuación asumimos que se dispone de una estimación $\hat{C}_b^a$ para cada una de las épocas t_{l-2}, t_{l-1} y t_l. En general, dichas estimaciones se obtienen mediante la integración de las de velocidades angulares ω_{ib}^b registradas por el INS o bien, en algunos casos, son proporcionadas directamente por el sensor empleado. Aplicando la regla de Simpson se obtiene el valor correspondiente al primer término de (2.59)

$$\int_{\Delta t} C_b^a(t')\vec{a} \approx \frac{\Delta t}{6}\left(\hat{C}_b^a(l-2)\hat{\vec{a}}_{l-2}^b + 4\hat{C}_b^a(l-1)\hat{\vec{a}}_{l-1}^b + \hat{C}_b^a(l)\hat{\vec{a}}_l^b\right) \tag{2.66}$$

y por tanto la velocidad para la época t_l estimada en el *a-frame* resulta

$$\begin{aligned}\hat{\vec{v}}_l^a =& \hat{\vec{v}}_{l-2}^a + \frac{1}{6}[\hat{C}_b^a(l-2)(3\delta\vec{v}_{l-1}^b - \delta\vec{v}_l^b) + 4\hat{C}_b^a(l-1)(\delta\vec{v}_{l-1}^b + \delta\vec{v}_l^b) \\ &+ \hat{C}_b^a(l)(3\delta\vec{v}_l^b - \delta\vec{v}_{l-1}^b)] + \vec{f}\left(\vec{x}^a, \vec{v}^a, \Omega_{ia}^a, \dot{\Omega}_{ia}^a, \vec{g}^a\right)_{t=t_{l-2}}\Delta t\end{aligned} \tag{2.67}$$

Obsérvese que con un único conjunto de valores iniciales solamente se podría estimar el valor de $\hat{\vec{v}}_l^a$ en las épocas pares y que la función $\vec{f}$ es evaluada en el instante correspondiente a la época t_{l-2}, es decir al principio del intervalo. Una posible mejora del algoritmo sería comenzar con dos conjuntos de valores iniciales, unos para las épocas pares t_{l-2} y otros para las épocas impares t_{l-1}. Esta segunda integración serviría para obtener los valores de la la función $\vec{f}$ justo en la época t_{l-1} correspodiente al punto medio del intervalo δt.

La ecuación 2.67 representa una algoritmo de cuarto orden para la determinación de la velocidad (Jekeli 2001) siempre y cuando las matrices $\hat{C}_b^a$ se hayan integrado con un algoritmo de orden 3.

Por último, una vez que se dispone de las velocidades obtenidas mediante 2.67, se pueden calcular las coordenadas de la trayectoria mediante las siguientes expresiones:

si la trayectoria se está integrando en un sistema *i-frame*,

$$\hat{\vec{x}}_l^i = \hat{\vec{x}}_{l-2}^i + \hat{\dot{\vec{x}}}_{l-1}^i\Delta t \tag{2.68}$$

si la trayectoria se está integrando en un sistema *e-frame*,

$$\hat{\vec{x}}_l^e = \hat{\vec{x}}_{l-2}^e + \hat{\dot{\vec{x}}}_{l-1}^e\Delta t \tag{2.69}$$

si la trayectoria se está integrando en un sistema *n-frame*

$$
\begin{aligned}
\hat{\varphi}_l &= \hat{\varphi}_{l-2} + \frac{(\hat{v}_N)_{l-1}\Delta t}{(\hat{\rho}_{l-1} + \hat{h}_{l-1})} \\
\hat{\lambda}_l &= \hat{\lambda}_{l-2} + \frac{(\hat{v}_E)_{l-1}\Delta t}{(\hat{\nu}_{l-1} + \hat{h}_{l-1})\cos\hat{\varphi}_{l-1}} \\
\hat{h}_l &= \hat{h}_{l-2} - (\hat{v}_D)_{l-1}\Delta t
\end{aligned} \tag{2.70}
$$

2.5.2 Cálculo de la matriz de transformación

Si el INS que proporciona los datos está rígidamente sujeto a una plataforma o al vehículo que navega (mecanización *strapdown*), es decir, en un sistema *b-frame*, se necesita la matriz de transformación C_b^a. Dicha matriz se obtiene integrando las velocidades angulares $\vec{\omega}_{ib}^b$ medidas por los giróscopos del INS mediante el empleo de la ecuación (1.68) particularizada al caso que nos ocupa.

Teniendo en cuenta que

$$\vec{\omega}_{ab}^b = \vec{\omega}_{ai}^b + \vec{\omega}_{ib}^b \tag{2.71}$$

que $\vec{\omega}_{ai}^b = -\vec{\omega}_{ia}^b$ y que la velocidad angular $\vec{\omega}_{ia}^a$ es conocida, se llega a

$$\vec{\omega}_{ab}^b = \vec{\omega}_{ib}^b - C_a^b \vec{\omega}_{ia}^a \tag{2.72}$$

en la que $\vec{\omega}_{ia}^a$, al igual que Ω_{ia}^a en 2.9, pueden depender a su vez de la solución de navegación obtenida para $\vec{x}^{\,a}$, como sería el caso si se emplea el *n-frame*.

Para ello, se emplea un desarrollo en serie de Taylor

$$C(t) = C_0 + \dot{C}_0\Delta t + \frac{1}{2!}\ddot{C}_0^2\Delta t^2 + \frac{1}{3!}\dddot{C}_0^3\Delta t^3 + \cdots \tag{2.73}$$

siendo

$C(t)$	Matriz de transformación C_a^i for epoch t
C_0	Matriz de transformación C_a^i en el instante t_0

Teniendo en cuenta que las sucesivas derivadas de C son

$$
\begin{aligned}
\dot{C} &= C\Omega \\
\ddot{C} &= C(\Omega^2 + \dot{\Omega}) \\
\dddot{C} &= C(\Omega^3 + \dot{\Omega}\Omega + 2\Omega\dot{\Omega} + \ddot{\Omega})
\end{aligned} \tag{2.74}
$$

la matriz de transformación para un instante t se obtiene mediante

$$C(t) = C_0\left(I + \Omega_0\Delta t + \frac{1}{2!}(\dot{\Omega}_0\Omega_0^2)\Delta t + \frac{1}{3!}(\Omega_0^3 + \dot{\Omega}_0\Omega_0 + 2\Omega_0\dot{\Omega}_0 + \ddot{\Omega}_0)\Delta t^3 + \cdots\right) \tag{2.75}$$

siendo

$C(t)$	Matriz de transformación C_a^i en el instante t
C_0	Matriz de transformación C_a^i en el instante t_0
Ω_0	Matriz de velocidades angulares $\Omega_a^i = [\vec{\omega}_{ib}^b \times]$ en el instante t_0

Una alternativa que requiere menos carga computacional es el empleo de cuaterniones junto con un algoritmo de integración de Runge-Kutta de tercer orden. A continuación se facilitan las expresiones cuya deducción se puede encontrar en (Jekeli 2001)

$$\hat{\vec{q}}_l = \hat{\vec{q}}_{l-2} + \frac{\Delta t}{6}\left(\Delta\vec{q}_0 + 4\Delta\vec{q}_1 + \Delta\vec{q}_2\right) \tag{2.76}$$

siendo

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{q}_0 &= f(t_{l-2}, \hat{\vec{q}}_{l-2}) \\
\Delta\vec{q}_1 &= f(t_{l-2}, \hat{\vec{q}}_{l-2} + \frac{\delta t}{2}\Delta\vec{q}_0) \\
\Delta\vec{q}_2 &= f(t_{l-2}, \hat{\vec{q}}_{l-2} + \delta t\Delta\vec{q}_0 + 2\delta t\Delta\vec{q}_1)
\end{aligned} \tag{2.77}$$