Localización de landmarks cefalométricos por medio de técnicas de few-shot learning y análisis de redes convolucionales

Alejandro Borrego Megías

Tutores: Pablo Mesejo Santiago, Javier Merí de la Maza

Universidad de Granada, España

November 22, 2022

Índice Primera Parte

Análisis de redes convolucionales

Índice Primera Parte

Redes Neuronales Convolucionales

- Buen rendimiento, comprobable empíricamente.
- Vía de estudio abierta en lo que se refiere a la modelización matemática y la justificación teórica de estos resultados.

Destacamos:

Invarianza por traslaciones

Trabajamos sobre el espacio de funciones $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Definición de traslación

Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $L_c f(x) = f(x - c)$ es la traslación de f por $c \in \mathbb{R}^d$.

Invarianza por traslaciones de un operador Φ

Decimos que un operador Φ sobre $L^2(\mathbb{R}^d)$, es invariante por traslaciones si $\Phi(L_c f(x)) = \Phi(f)$ para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y para todo $c \in \mathbb{R}^d$.

Invarianza frente a pequeñas deformaciones

Deformación $\Longrightarrow$ *Difeomorfismo*
Deformaciones pequeñas $\Longrightarrow$ *Difeomorfismo cercanos a traslaciones*

Definición

Denotemos $L_\tau f(x) = f(x - \tau(x))$ como la acción del difeomorfismo $1 - \tau$ sobre f.
Donde τ es el campo de desplazamiento.

Invarianza frente a pequeñas deformaciones

$\Downarrow$

Lipschitz-continuidad frente a la acción de difeomorfismos

Invarianza frente a pequeñas deformaciones

Condición de Lipschitz clásica

Sea $f : M \to N$ una función entre dos espacios métricos M y N con sus respectivas distancias d_M y d_N. Se dice que f satisface la condición de Lipschitz si $\exists C > 0$ tal que:

$$d_N(f(x), f(y)) \leq C d_M(x, y), \quad \forall x, y \in M$$

En nuestro caso:

$$\|\Phi(f) - \Phi(L_\tau f)\| \leq \|f\| d(1, 1 - \tau) \tag{1}$$

Necesitamos una definición para la distancia entre dichos difeomorfismos.

Invarianza frente a pequeñas deformaciones

Distancia entre $1 - \tau$ y 1

Se define una distancia entre $1 - \tau$ y 1 en cualquier subconjunto compacto Ω de $\mathbb{R}^d$ como

$$d_\Omega(1, 1-\tau) = \sup_{x\in\Omega} |\tau(x)| + \sup_{x\in\Omega} |\nabla\tau(x)| + \sup_{x\in\Omega} |H\tau(x)| \tag{2}$$

La invarianza frente a pequeñas deformaciones de un operador Φ invariante por traslaciones viene determinada por:

$$\|\Phi(f) - \Phi(L_\tau f)\| \leq C\|f\|(\|\nabla\tau\|_\infty + \|H\tau\|_\infty). \tag{3}$$

Con $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $C > 0$.

Próximos pasos

¿Qué operador Φ tomar que cumpla todo lo anterior?

Índice Primera Parte

Módulo de la transformada de Fourier

Vamos a probar con el módulo de la transformada de Fourier:

$$\Phi(f) = |\widehat{f}| \;\; f \in L^2(\mathbb{R}^2)$$

.
Con este operador observamos que:

- Es invariante por traslaciones.
- No es Lipschitz continuo frente a pequeñas deformaciones.

Debemos buscar otro operador.

Alternativa: Ondeletas

Ondeleta Madre

Una ondeleta madre escalada por un factor 2^j con $j \in \mathbb{Z}$ y rotada por $r \in G$ siendo G el grupo finito de rotaciones, se escribe:

$$\psi_{2^j r}(x) = 2^j \psi(2^j r^{-1} x).$$

Usaremos ondeletas madre del tipo:

$$\psi(x) = e^{i\eta x}\Theta(x) \tag{4}$$

donde $\Theta(x)$ es una función real con soporte en una bola de baja frecuencia en $x = 0$, cuyo radio es del orden de π.

La transformada de Littlewood-Paley

Con esta generamos la siguiente base ortonormal de ondeletas:

$$\{\psi_\lambda(x)\}_{\lambda=2^j r \in 2^{\mathbb{Z}}\times G} \tag{5}$$

transformada de Littlewood-Paley

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad W[\lambda]f(x) = f * \psi_\lambda(x) = \int f(u)\psi_\lambda(x-u)du. \tag{6}$$

donde $\lambda \in 2^j r \in 2^{\mathbb{Z}} \times G$

Problema: La escala

Fijada una escala 2^J $J \in \mathbb{Z}$, se establece un umbral tal que solo se mantienen las ondeletas de escala $2^j > 2^{-J}$.

Problema: La escala

Surge la necesidad de promediar las frecuencias no cubiertas por el factor de escala fijado:

$$A_J f = f * \phi_{2^J} \text{ con } \quad \phi_{2^J}(x) = 2^{-J}\phi(2^{-J}x). \tag{7}$$

Así, los coeficientes obtenidos, fijada una escala son:

$$W_J f = \{A_J f, (W[\lambda]f)_{\lambda \in \Lambda_J}\}$$

con $\Lambda_J = \{\lambda = 2^j r : \; r \in G^+, \; 2^j > 2^{-J}\}$.

Coeficientes unitarios

Condición W_J unitario

Para cualquier $J \in \mathbb{Z}$ o $J = \infty$, W_J es unitario en el espacio de funciones reales o complejas de $L^2(\mathbb{R}^d)$ si y solo si para casi todo $\omega \in \mathbb{R}^d$ se cumple:

$$\beta \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{r \in G} |\widehat{\psi}(2^{-j} r^{-1} \omega)|^2 = 1 \ \ y \ \ |\widehat{\phi}(\omega)|^2 = \beta \sum_{j=-\infty}^{0} \sum_{r \in G} |\widehat{\psi}(2^{-j} r^{-1} \omega)|^2, \quad (8)$$

donde $\beta = 1$ para funciones complejas y $\beta = \frac{1}{2}$ para funciones reales.

Convenios

Tranajaremos con funciones reales.

- W_J es unitario.
- $\widehat{\phi}(\omega)$ es real y simétrica, por lo que ϕ también lo será y $\phi(rx) = \phi(x) \ \ \forall r \in G$.
- Las derivadas de ϕ pertenecen a $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Operador de dispersión

Operador de dispersión

Sea $\mathcal{P}_\infty$ el conjunto de todos los caminos finitos. La transformada de dispersión de $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ se define para cualquier camino $p \in \mathcal{P}_\infty$ como:

$$\overline{S}f(p) = \int_{\mathbb{R}^d} U[p]f(x)dx \tag{9}$$

Siendo $\overline{S}f(p)$ invariante a traslaciones para un f fijo.

Operador de dispersión

Operador de dispersión

Sea $\mathcal{P}_\infty$ el conjunto de todos los caminos finitos. La transformada de dispersión de $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ se define para cualquier camino $p \in \mathcal{P}_\infty$ como:

$$\overline{S}f(p) = \int_{\mathbb{R}^d} U[p]f(x)dx \tag{10}$$

Siendo $\overline{S}f(p)$ invariante a traslaciones para un f fijo.

Caminos de frecuencias

Ondeleta Madre

Una secuencia ordenada $p = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ con $\lambda_k \in \Lambda_\infty = 2^{\mathbb{Z}} \times G^+$ se denomina **camino**. Al camino vacío se le denota por $p = \varnothing$.

Usaremos caminos de frecuencias descendentes $p = (\lambda_k)_{k \leq m}$ en el cual $|\lambda_{k+1}| \leq |\lambda_k|$. Pues el propagador $U[\lambda]$ progresivamente lleva la energía de la señal a frecuencias cada vez menores.

Operador de dispersión

Operador de dispersión

Sea $\mathcal{P}_\infty$ el conjunto de todos los caminos finitos. La transformada de dispersión de $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ se define para cualquier camino $p \in \mathcal{P}_\infty$ como:

$$\overline{S}f(p) = \int_{\mathbb{R}^d} U[p]f(x)dx \tag{11}$$

Siendo $\overline{S}f(p)$ invariante a traslaciones para un f fijo.

Propagador de dispersión

El operador $W[\lambda]f = f * \psi_\lambda$ es Lipschitz-continuo bajo la acción de difeomorfismos para $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ fijo.

¿Pero invariante a traslaciones?

Condición para coeficientes I.T.

Si $U[\lambda]$ es un operador definido en $L^2(\mathbb{R}^d)$, no necesariamente lineal pero que conmuta con traslaciones, entonces $\int_{\mathbb{R}^d} U[\lambda]f(x)dx$ es invariante a traslaciones si es finito.

Pero como $\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)dx = 0 \implies \int_{\mathbb{R}^d} f * \psi(x)dx = 0.$

Propagador de dispersión

Para obtener coeficientes invariantes por traslaciones.

$$U[\lambda]f = M[\lambda]W[\lambda]$$

El operador más sencillo que garantiza coeficientes invariantes por traslaciones y Lipschitz-continuidad frente a difeomorfismos es:

Definición del operador $U[\lambda]$

$$U[\lambda]f = M[\lambda]W[\lambda]f = |f * \psi_\lambda| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(u)\psi_\lambda(x-u)du \right|$$

Propagador de dispersión

Así, sobre un camino p definimos el **propagador de dispersión** como:

$$U[p]f = U[\lambda_m]\dots U[\lambda_2]U[\lambda_1] = ||f * \psi_{\lambda_1}| * \psi_{\lambda_2}|\dots| * \psi_{\lambda_m}|$$

Además:

$$\int_{\mathbb{R}^d} U[p]f(x)dx < \infty$$

operador de ventana

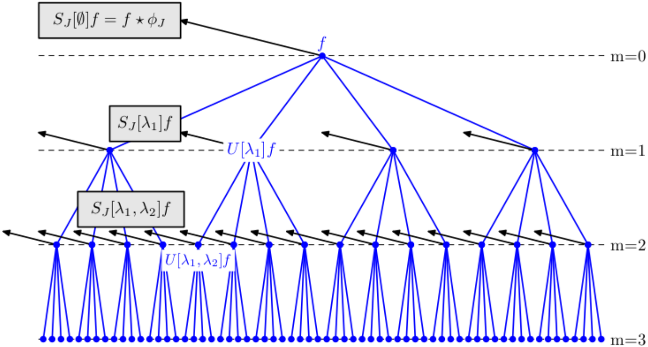
Definición operador de ventana

Sea $J \in \mathbb{Z}$ y $\mathcal{P}_J$ el conjunto de caminos finitos $p = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ con $\lambda_k \in \Lambda_J$ y $|\lambda_k| = 2^k > 2^{-J}$. Una ventana de transformada de dispersión se define para todo $p \in \mathcal{P}_J$ por

$$S_J[p]f(x) = U[p]f * \phi_{2^J}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} U[p]f(u)\phi_{2^J}(x-u)du. \tag{12}$$

$$S_J[p]f(x) = ||f * \psi_{\lambda_1}| * \psi_{\lambda_2}| \ldots | * \psi_{\lambda_m}| * \phi_{2^J}(x). \tag{13}$$

operador de ventana



Diferencias y Similitudes con una Red convolucional

Similitudes:

- Cascada de convoluciones (operador $W[\lambda]$).
- Capas de *pooling* (operador $M[\lambda]$ y ϕ_{2^J}).
- Si p tiene longitud m: $S_J[p]f(x)$ equivale al resultado de la capa m de la red.

Diferencias:

- Los pesos no se aprenden.

Índice Primera Parte

Ondeletas admisibles

ondeletas admisibles

Una ondeleta de dispersión se dice que es admisible si existe $\eta \in \mathbb{R}^d$ y una función $\rho \geq 0$, con $|\widehat{\rho}(\omega)| \leq |\widehat{\phi}(2\omega)|$ y $\widehat{\rho}(0) = 1$, tal que la función:

$$\widehat{\Psi}(\omega) = |\widehat{\rho}(\omega - \eta)|^2 - \sum_{k=1}^{+\infty} k(1 - |\widehat{\rho}(2^{-k}(\omega - \eta))|^2) \tag{14}$$

satisface:

$$\alpha = \inf_{1 \leq |w| \leq 2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{r \in G} \widehat{\Psi}(2^{-j}r^{-1}\omega)|\widehat{\psi}(2^{-j}r^{-1}\omega)|^2 > 0. \tag{15}$$

No-expansividad y conservación de la norma

No-expansividad

Para $f, h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $J \in \mathbb{Z}$ se cumple

$$\|S_{J+1}[\mathcal{P}_{J+1}]f - S_{J+1}[\mathcal{P}_{J+1}]h\| \leq \|S_J[\mathcal{P}_J]f - S_J[\mathcal{P}_J]h\|. \tag{16}$$

Conservación de la norma

Si las ondeletas son admisibles, entonces para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ se tiene que

$$\lim_{m\to\infty} \|U[\Lambda_J^m]f\|^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \|S_J[\Lambda_J^n]f\|^2 = 0 \tag{17}$$

y

$$\|S_J[\mathcal{P}_J]f\| = \|f\|. \tag{18}$$

Invarianza por traslaciones

Invarianza por traslaciones

Para ondeletas de dispersión admisibles se tiene que

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d),\ \forall c \in \mathbb{R}^d \quad \lim_{J\to\infty} \|S_J[\mathcal{P}_J]f - S_J[\mathcal{P}_J]L_c f\| = 0.$$

Índice Segunda Parte

Localización de landmarks cefalométricos por medio de técnicas de few-shot learning

Índice Segunda Parte

Índice Segunda Parte

Índice Segunda Parte

Índice Segunda Parte

Índice Segunda Parte

Example frame 1

This is the first frame.
You can set the blue bar vertical using the option `\usetheme[verticalbar=true]{tud}`.
Set the aspect ratio to 4:3 with the documentclass option aspectratio=43. Use aspectratio=169 for wide screen (16:9).

Índice Segunda Parte

Example frame 2

Block

- item 1
- item 2

Example

1. Sugar in a stirred cup of tea gathers in the middle.
2. Rivers often take a detour through flat terrain.

Alert

Rivers and sweet tea do unexpected things.[1]

[1] A. Einstein (Mar. 1926). "Die Ursache der Mäanderbildung der Flußläufe und des sogenannten Baerschen Gesetzes". In: *Die Naturwissenschaften* 14.11, pp. 223–224. DOI: 10.1007/bf01510300

columns

first column

Índice Segunda Parte

animation

Some commands take optional arguments in the form of <x-y>, where `x` is the first 'sub-frame' on which the context is shown, and `y` is the last. `x` or `y` can be replaced by +, referring to 'the next sub-frame'.

1. uncovered...

Using only:1
Using onslide:1
Using pause:

animation

Some commands take optional arguments in the form of <x-y>, where `x` is the first 'sub-frame' on which the context is shown, and `y` is the last. `x` or `y` can be replaced by +, referring to 'the next sub-frame'.

1. uncovered. . .
2. one. . .

Using only:2
Using onslide: 2
Using pause:

animation

Some commands take optional arguments in the form of <x-y>, where `x` is the first 'sub-frame' on which the context is shown, and `y` is the last. `x` or `y` can be replaced by +, referring to 'the next sub-frame'.

1. uncovered...
2. one...
3. by...

Using only:3
Using onslide: 3
Using pause:

animation

Some commands take optional arguments in the form of <x-y>, where x is the first 'sub-frame' on which the context is shown, and y is the last. x or y can be replaced by +, referring to 'the next sub-frame'.

1. uncovered. . .
2. one. . .
3. by. . .
4. one.

Using only:
Using onslide:
Using pause:

animation

Some commands take optional arguments in the form of <x-y>, where x is the first 'sub-frame' on which the context is shown, and y is the last. x or y can be replaced by +, referring to 'the next sub-frame'.

1. uncovered. . .
2. one. . .
3. by. . .
4. one.

Using only:
Using onslide:
Using pause:

animation

Some commands take optional arguments in the form of <x-y>, where `x` is the first 'sub-frame' on which the context is shown, and `y` is the last. `x` or `y` can be replaced by +, referring to 'the next sub-frame'.

1. uncovered. . .
2. one. . .
3. by. . .
4. one.

Using only:
Using onslide:
Using pause:1

animation

Some commands take optional arguments in the form of <x-y>, where x is the first 'sub-frame' on which the context is shown, and y is the last. x or y can be replaced by +, referring to 'the next sub-frame'.

1. uncovered. . .
2. one. . .
3. by. . .
4. one.

Using only:
Using onslide:
Using pause:12

animation

Some commands take optional arguments in the form of `<x-y>`, where `x` is the first 'sub-frame' on which the context is shown, and `y` is the last. `x` or `y` can be replaced by +, referring to 'the next sub-frame'.

1. uncovered...
2. one...
3. by...
4. one.

Using only:
Using onslide:
Using pause:123

For more advanced animations, see §14 of the manual:
`https://www.ctan.org/pkg/beamer`

Thanks for your attention.
A digital version of this presentation can be found here:

`https://gitlab.com/novanext/tudelft-beamer`

Bibliography I

Einstein, A. (Mar. 1926). "Die Ursache der Mäanderbildung der Flußläufe und des sogenannten Baerschen Gesetzes". In: *Die Naturwissenschaften* 14.11, pp. 223–224. DOI: 10.1007/bf01510300.