Enrique R. Aznar García
eaznar@ugr.es

LA RAÍZ CUADRADA DE UN ENTERO

Para detectar si un entero positivo, $n \in \mathbb{N}$, es un cuadrado perfecto, normalmente lo que se hace es calcular la parte entera de su raíz cuadrada y comparar su cuadrado con n.

Los algoritmos para el cálculo de la raíz cuadrada de un número real, se basan o bien en su escritura en base 10 o en el método de Newton-Raphson para aproximar raíces de una ecuación $f(x) = 0$. Este último método para aproximar raíces cuadradas, ya era conocido como el método babilónico. Aunque muy efectivo (tiene convergencia cuadrática) el método babilónico necesita en cada iteración una división y una suma.

Cuando n es entero, existe un método iterativo mejor para hallar la parte entera de su raíz cuadrada, $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$.

En efecto, como para cualquier $t \in \mathbb{R}$, se tiene

$$0 \leq (t^2 - n)^2 \Longleftrightarrow 4t^2 n \leq t^4 + 2t^2 n + n^2 \Longleftrightarrow n \leq \frac{(t^2+n)^2}{4t^2} \Longleftrightarrow \sqrt{n} \leq \frac{t^2+n}{2t}$$

Así, para cualquier $a \in \mathbb{N}$, se tiene $\lfloor\sqrt{n}\rfloor \leq \sqrt{n} \leq \frac{a^2+n}{2a}$ y por tanto

$$\lfloor\sqrt{n}\rfloor \leq \lfloor\frac{a^2+n}{2a}\rfloor = b$$

donde b es el cociente entero de dividir $a^2 + n$ entre $2a$. O sea, $a^2 + n = 2ab + r$ con $0 \leq r < 2a$.

Este método consite en elegir un natural, a, mayor que $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ y en seguir actualizandolo por $b = \lfloor\frac{a^2+n}{2a}\rfloor$, siempre que en cada iteración disminuya su valor estrictamente.

DEMOSTRACIÓN DEL ALGORTIMO

Como el valor de la variable a es un entero positivo y en cada paso decrece, no puede continuar decreciendo indefinidamente y el algoritmo termina en un número finito de pasos.

Como en cada paso del algoritmo, tenemos que $\lfloor\sqrt{n}\rfloor \leq a$. Tenemos que demostrar que cuando no se puede disminuir se da la igualdad.

En efecto, si $b < a$, se tiene $\sqrt{n} \leq b < a$ y por tanto $\lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1 \leq a$.

Recíprocamente, si $\lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1 \leq a$, se tiene

$$\sqrt{n} < \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1 \leq a \iff n - a^2 < 0$$

y entonces la diferencia es negativa

$$b - a = \left\lfloor \frac{a^2 + n}{2a} \right\rfloor - a = \left\lfloor \frac{n - a^2}{2a} \right\rfloor < 0$$

O sea, hemos demostrado que

$$b = \left\lfloor \frac{a^2 + n}{2a} \right\rfloor < a \iff \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1 \leq a$$

Por tanto, la condición de terminación equivale a que $a = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ como queríamos.

Dado $n > 4$, para iniciar el algoritmo tomamos $a = n/2$ si n par, o bien $a = (n+1)/2$ si n impar.

EJEMPLO

Para hallar la parte entera de la raíz cuadrada de $n = 15$, inicialmente $a = (15+1)/2 = 8$

i	a_i	$a_i^2 + n$
1	8	$79 = 4 * 16 + 15$
2	4	$31 = 3 * 8 + 7$
3	3	$24 = 4 * 6 + 0$

Como $4 \not< 3$, no se puede continuar y tenemos $\lfloor\sqrt{15}\rfloor = 3$

EJEMPLO

Para hallar la parte entera de la raíz cuadrada de $n = 101$, inicialmente $a = (101+1)/2 = 51$

i	a_i	$a_i^2 + n$
1	51	$2702 = 26 * 102 + 50$
2	26	$777 = 14 * 52 + 49$
3	14	$297 = 10 * 28 + 17$
4	10	$201 = 10 * 20 + 1$

Como $10 \not< 10$, no se puede continuar y tenemos $\lfloor\sqrt{101}\rfloor = 10$

Enrique R. Aznar García
eaznar@ugr.es