Metodos Multipaso

Alejandro Aponte Ramirez

Marzo 6, 2020

1 Introduction

En los múltiples problemas de aproximaciones matemáticas, han surgido métodos matemáticos para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias, siendo el más clásico de todos los métodos de Euler, sin embargo, a falta de precisión, han surgido otras alternativas como el método de Euler mejorado y de Range Kutta en todos sus órdenes para hacer las aproximaciones numéricas más exactas. En todos estos casos se evidencia que siempre dependen de un valor anterior, y desecha los ya usados y por esto se conocen como métodos de un paso. A esto surge otros métodos conocidos como lineales multipasos, que obtienen toda su eficacia utilizando toda la información de los pasos anteriores, es decir recurre a una combinación lineal de los puntos anteriores y sus derivadas. Por lo tanto, un método lineal multipasos adopta la forma.[3]

$$y_{n+s}+a_{s-1}*y_{n+s-1}+......a_0*y_n = h*(b_s f(t_{n+s}, y_{n+s})+b_{s-1}f(t_{n+s-1}, y_{n+s-1})+b_0 f(t_n, y_n)) \quad (1)$$

Los coeficientes de a_n y b_n determinan el método y estos son los que equilibran efectividad del algoritmo, a menudo varios de estos coeficientes son ceros para facilitar su implementación.

Aquí, al menos se pueden distinguir entre métodos implícitos y explícitos si $b_s = 0$ entonces el método es explicito ya que la formula se puede calcular directamente, si no lo es entonces el método es implícito, y a que el valor de y_{n+s} depende del valor de $f(t_{n+s}, y_{n+s})$

Estos métodos se pueden agrupar en dos grandes familias el de Adams-Bashforth y Adams-Moulton[2]

Una primera observación es que para aplicar un método lineal multipaso se necesitan conocer previamente valores de arranque. Como el valor inicial soló proporciona el primero de ellos, los valores restantes se pueden obtener aplicando alguna formula de un paso.

La segunda observación es que los métodos actuales combinan formulas de diferentes números de pasos, y también aumentan o disminuyen el tamaño del paso,h, en la medida que lo permite el control del error que se va cometiendo al aplicar las formulas

2 Adams-Bashforh

Se construye partiendo de la idea de aproximar una ecuacion diferencial mediante la formula que se obtiene integrando la ecuacion diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$en el intervalo $[x_n, x_{n+1}]$

$$\int_{x_n}^{x_n+h} y' dx = \int_{x_n}^{x_n+h} f(x, y(x))dx \tag{2}$$

Y se puede expresar entonces.

$$y(x_n + h) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_n+h} f(x, y(x))dx \tag{3}$$

La solucion de este problema es complicado, ya que la se tiene que solucionar una ecuacion implicita, una solucion a esto llega utilizando los polinomios interpoladores por el metodo de Lagrange, o del mismo modo por el metodo de Newton, generando esto la expresión general de un método de Adams-Bashforh de k pasos es.[1]

$$z_{n+1} = z_n + h(\Upsilon_0 \nabla^0 + \Upsilon_1 \nabla^1 + ... + \Upsilon_{k-1} \nabla^{k-1}) f_n \tag{4}$$

Donde:

$$\Upsilon_i = \frac{1}{h^{i+1}} \int_{x_{n+1}}^{x_n} (x - x_n).....(x - x_{n-i+1})dx \tag{5}$$

3 Adams Moulton

La diferencia esencial entre los métodos de Adams-Bashford y los métodos de Adams Moulton es que mientras los primeros son explícitos, los segundos son implícitos, en este caso es similar y se usa el polinomio interpolador que pasa por los puntos.[1]

$$z_{n+1} = z_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_0 dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f_{n+1} dx = z_n + f_{n+1} * h \tag{6}$$

La expresión general para un método de Adams Moulton de k pasos es:

$$z_{n+1} = z_n + h(\Upsilon_0 \nabla^0 + \Upsilon_1 \nabla^1 + ... + \Upsilon_{k-1} \nabla^k) f_{n+1} \tag{7}$$

Para los primeros cuatro pasos se encuentra.

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n) \tag{8}$$

$$z_{n+2} = z_{n+1} + \frac{h}{12}(5f_{n+2} + 8f_n - f_n) \tag{9}$$

$$z_{n+3} = z_{n+2} + \frac{h}{24}(9f_{n+3} + 19f_{n+2} - 5f_{n+1} + f_n) \tag{10}$$

$$z_{n+4} = z_{n+3} + \frac{h}{720}(251f_{n+4} + 646f_{n+3} - 264f_{n+2} + 106f_{n+1} - 19f_n) \tag{11}$$

4 Comparación de los métodos

Al evaluar el error de el método explicito de Adams-Bashforth de k pasos, y el método implícito de Adams-Moulton de k-1 pasos, pues ambos requieren k evaluaciones de la función f, por paso con un error de truncamiento de $O(h^k)$ se puede apreciar que los métodos de Adams Moulton tienen mejores resultados, son mas estables, aun así siguen siendo significativamente mas complicados de trabajar[1]

Otro dato importante a resaltar,es que el error es controlado y manipulado con estos metodos, a diferencia de Range Kutta que a pesar de la precision, no se puede proporcionar una estimacion del error

References

[1] A Salvador M Molelo. *Analisis matematico para ingenieria.*

[2] *Metodos multipasos.* URL: `https://tarwi.lamolina.edu.pe/~duenas/claseSN_2011I_parte3`.

[3] Wikipedia. *Metodo lineal multipaso.* URL: `https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_multistep_method`.