Ayudantía 6: Máxima Verosimilitud

Tatiana Rosá   Alejo Eyzaguirre

PUC

3rd November 2021

Outline

Pregunta 1: Variable Aleatoria Discreta

Sea X una variable aleatoria discreta con la siguiente PMF:

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{2\theta}{3}$	$\frac{\theta}{3}$	$\frac{2(1-\theta)}{3}$	$\frac{1-\theta}{3}$

Las siguientes 10 observaciones fueron tomadas de esa distribución: (3, 0, 2, 1, 3, 2, 1, 0, 2, 1). ¿Cuál es la estimación de máxima verosimilitud de θ?.

Solución: Dada la muestra, la función de verosimilitud corresponde a:

$$L(\theta) = P(X=3)P(X=0)P(X=2)P(X=1)P(X=3)\ \ldots\ P(X=1)$$

Pero como tenemos la PMF para cada uno de los valores de $X \in \{0,3\}$ tenemos que la función de verosimilitud es equivalente a:

$$L(\theta) = \prod_{i=n}^{n} P(X_i|\theta) = \left(\frac{2\theta}{3}\right)^2 \left(\frac{\theta}{3}\right)^3 \left(\frac{2(1-\theta)}{3}\right)^3 \left(\frac{1-\theta}{3}\right)^2$$

Pregunta 1: Variable Aleatoria Discreta

Claramente la función de verosimilitud no es fácil de maximizar, aplicamos entonces transformación monótona – logaritmo natural– y obtenemos la función de Log-Verosimilitud: $l(\theta)$.

$$\begin{aligned} l(\theta) &= \log\ L(\theta) \\ &= 2\left(\log\frac{2}{3} + \log(\theta)\right) + 3\left(\log\frac{1}{3} + \log(\theta)\right) + ... + 2\left(\log\frac{1}{3} + \log(\theta)\right) \\ &= C + 5\log\theta + 5\log(1-\theta) \end{aligned}$$

Donde C es una constante que no depende de θ. Se puede ver que la función de log verosimilitud ($l(\theta)$) es mucho más fácil de maximizar que la función de verosimilitud ($L(\theta)$). Procedemos entonces a derivar e igualar a cero $l(\theta)$.

$$\frac{dl(\theta)}{d\theta} = \frac{5}{\theta} - \frac{5}{1-\theta} = 0$$

Despejando obtenemos que $\hat{\theta}_{MLE} = 0.5$.

Pregunta 2: Variable Aleatoria Continua

Sean X_1, X_2,...,X_n variables i.i.d con función de densidad $f(x|\theta) = \frac{1}{2\sigma} exp(\frac{-|x|}{\sigma})$. Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de σ.

Solución: La función de log-verosimilitud corresponde a:

$$l(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \left[-\log 2 - \log \sigma - \frac{|X_i|}{\sigma} \right]$$

Derivamos con respecto al parámetro de estudio e igualamos a cero:

$$\frac{dl(\sigma)}{d\sigma} = \sum_{i=1}^{n} \left[-\frac{1}{\sigma} + \frac{|X_i|}{\sigma^2} \right] = -\frac{n}{\sigma} + \frac{\sum_{i=1}^{n} |X_i|}{\sigma^2} = 0$$

Luego despejando σ, obtenemos el estimador de $\hat{\sigma}_{MLE}$:

$$\hat{\sigma}_{MLE} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |X_i|}{n}$$

Pregunta 3: Estimador MV Distribución Normal

Estime por Máxima Verosimilitud los parámetros de μ y σ para la densidad de una distribución normal.

Solución: A partir de la clásica distribución normal, obtenemos la función de log-verosimilitud:

$$\begin{aligned} l(\mu, \sigma) &= \sum_{i=1}^{n} \left[-\log \sigma - \frac{1}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2\sigma^2} (X_i - \mu)^2 \right] \\ &= -n \log \sigma - \frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \end{aligned}$$

Procedemos entonces a derivar la expresión de $l(\mu, \sigma)$ con respecto a cada uno de los parámetros, partimos por μ:

$$\frac{\partial l(\mu, \sigma)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \tag{1}$$

Pregunta 3: Estimador MV Distribución Normal

Procedemos con la derivada parcial con respecto a σ:

$$\frac{\partial l(\mu, \sigma)}{\partial \sigma} = \frac{n}{\sigma} + \sigma^{-3} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \tag{2}$$

Luego, despejando en (1) el parámetro μ, obtenemos $\hat{\mu}_{MLE}$:

$$\hat{\mu}_{MLE} = \bar{X}$$

Haciendo lo mismo para σ en (2):

$$\hat{\sigma}_{MLE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}$$

Pregunta 4: Estimador MV Distribución Pareto

A partir de la Distribución de Pareto, encuentre $\hat{\theta}_{MLE}$:

$$f(x|x_0, \theta) = \theta x_0^{\theta} x^{-\theta-1} \ , x \geq x_0 \ , \theta \geq 1$$

Asuma que $x_0 > 0$ está dado y que $X_1, X_2, ..., X_n$ es una muestra aleatoria.

Solución: La función de log-verosimilitud corresponde a:

$$\begin{aligned} l(\theta) &= \sum_{i=1}^{n} \big(\log \theta + \theta \log x_0 - (\theta + 1) \log X_i \big) \\ &= n \log \theta + n\theta \log x_0 - (\theta + 1) \sum_{i=1}^{n} \log X_i \end{aligned}$$

Luego encontramos el óptimo de $l(\theta)$:

$$\frac{dl(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta} + n \log x_0 - \sum_{i=1}^{n} \log X_i = 0 \text{ Despejando, } \hat{\theta}_{MLE} = \frac{1}{\log \bar{X} - \log x_0}$$

Pregunta 5: Estimador MV Distribución Uniforme

Suponga que X_1, X_2,...,X_n forman parte de una muestra aleatoria extraídas de una distribución uniforme en el intervalo $[0, \theta]$, donde el parámetro $\theta > 0$ es desconocido. Encuentre la estimación de $\hat{\theta}_{MLE}$.

Solución: Note que la PDF para cada observación tiene la siguiente forma.

$$f(x|\theta) = \begin{cases} 1/\theta \text{ , para } 0 \leq x \leq \theta \\ 0 \text{ , en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Entonces tenemos que la función de verosimilitud tiene la siguiente forma:

$$L(\theta) = \begin{cases} 1/\theta^n \text{ , para } 0 \leq x_i \leq \theta \text{ e } i \in \{1, ..., n\} \\ 0 \text{ , en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Se puede observar que $\hat{\theta}_{MLE}$ tiene que ser un valor de θ para el cual $\theta \geq x_i$ con $i \in \{1, ..., n\}$ y el cual maximiza $1/\theta^n$ entre todos esos valores. Como $1/\theta^n$ es una función decreciente de θ, el estimador será el más pequeño valor de θ tal que $\theta \geq x_i$ $\forall i \in \{1, ..., n\}$. Este valor es entonces $\theta = \text{máx}(x_1, ..., x_n)$, por lo que $\hat{\theta}_{MLE}$ es igual a $\text{máx}(X_1, ..., X_n)$.

Gracias!

jeeyzaguirre@uc.cl