Pontificia Universidad Católica de Chile

Tarea 2 Teoría Macroeconómica I

La Vida de un Pescador

Profesor: Alexandre Janiak

Alejo Eyzaguirre y Pedro Fernández

May 19, 2022

Contents

1 Equilibro Parcial

Para responder las siguientes preguntas, considere que no hay fricciones financieras en el mercado y suponga que la tasa de interés r y el salario ω_1 son exógenos:

1.1 Variables de Control y de Estado

En este problema en particular sin incertidumbre tendremos que las variables de estado, es decir las que no son decisión del agente $\forall t \in \{1, T\}$.

- Stock de Activos en t: La variable a_t es una variable de estado porque viene dado por el periodo anterior. No tengo control sobre esta variable en el periodo actual.
- Salario en t: Esta variable ω_t es completamente exógena para materias de este ejercicio. Viene dada por la edad y no corresponde a una variable de decisión del agente o endógena al modelo.

Por otro lado, las variable de control serían:

- Consumo en t: El agente decide en cada periodo cuánto consumirá (c_t) en ese periodo. Para esto contempla el stock de activos que tiene en ese periodo, el salario que recibe, la tasa de interés reinante, así como también las ganancias futuras en este mundo sin incertidumbre. Note que el consumo es lo único que valora el agente en este ejercicio (no se valora el ocio) como se puede ver en los *inputs* de la *felicity function* del agente.
- Stock de Activos en $t+1$: El agente decide cuantos stocks de activo dejar para el siguiente periodo. Dependiendo su decisión, puede tener un flujo negativo (desahorrar o endeudarse) o positivo (ahorra o desendeudarse) en cada periodo. En realidad la variable de control propiamente tal del agente es el flujo o Δ sobre el stock de activos entre t a $t+1$, pero al ser la realización de a_{t+1} en parte fruto de la decisión del flujo se considera esta como variable de control.

Las demás variables del ejercicio son meramente exógenas así como ω_t. Nos referimos a r, β, ρ, T entre otras.

1.2 Ecuación de Euler:

Para obtener la ecuación de Euler de este problema finito usaremos la "técnica de Lagrange" en conjunto al Teorema de la Envolvente.

El problema de optimización viene dado por $\forall t$:

$$
\begin{aligned}
V_t(a_t) = \max_{c_t, a_{t+1}} u(c_t) + \beta V_{t+1}(a_t+1) \ \ s/t \\
a_{t+1} + c_t = \omega_t + (1+r)a_t \\
a_{t+1} \geq -b \\
a_1 = 0, \ \ c_t \geq 0
\end{aligned}
$$

Entonces el *Lagrangeano* asociado al problema vendrá dado por:

$$\mathcal{L} = u(c_t) + \beta V_{t+1}(a_{t+1}) + \lambda_t(\omega_t + Ra_t - a_{t+1} - c_t) + \gamma_t(a_{t+1} + b)$$

Sin embargo, como sabemos que no hay restricciones financieras ($b \to \infty$) sabemos a priori que γ_t será igual a cero $\forall t$. Adicionalmente como $UMgC|_{c_t=0} = \infty$ sabemos que la solución no puede ser esquina. Dicho lo anterior tenemos que las condiciones de primer orden serán (suponiendo solución interior):

$$
\begin{aligned}
[c_t] &: u'(c_t) - \lambda_t = 0 \\
[a_{t+1}] &: \beta V'_{t+1}(a_{t+1}) = 0 \\
[\lambda_t] &: \omega_t + Ra_t - a_{t+1} - c_t
\end{aligned}
$$

Luego usando Teorema de la Envolvente e iterando expresiones un periodo hacia adelante, sabemos que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_t} = \frac{\partial V_t}{\partial a_t} \longrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_t} = \lambda_t \cdot R \longrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{t+1}} = \lambda_{t+1} \cdot R \longrightarrow V'_{t+1}(a_{t+1}) = \lambda_{t+1} \cdot R$$

De la CPO $[c_t]$ sabemos que $u'(c_t) = \lambda_t$, por lo que si iteramos un periodo hacia adelante tenemos que $u'(c_{t+1}) = \lambda_{t+1}$. Entonces juntando $[c_t]$ y $[a_{t+1}]$ tenemos que:

$$u'(c_t) = \beta R u'(c_{t+1}) \tag{1}$$

Que vendría siendo la ecuación de Euler del problema. La interpretación económica de esta viene dada por la siguiente explicación. Si tengo \$1 extra en t tengo dos opciones:

1. Usarlo para consumir hoy.
2. Posponer su uso al siguiente periodo.

Si toma el primer camino el agente recibirá $u'(c_t)$ útiles en ese periodo[1]. En cambio si toma el segundo, tendrá \$R pesos para consumir mañana. Por lo que si compra

[1] Note que implícitamente estamos suponiendo que el precio del bien de consumo es \$1.

el bien en el siguiente periodo recibirá $R \cdot u'(c_{t+1})$ útiles. Sin embargo, los útiles de $t+1$ y t no son directamente comparables. El consumidor valora los del siguiente periodo en una fracción β respecto a los del periodo anterior. Entonces para poder comparar "peras con peras" y no "peras con manzanas" debemos multiplicar los útiles del futuro por el factor de descuento psicológico β. En el óptimo debe ser cierto que ambos caminos deben tener iguales retornos subjetivos netos porque sino el agente querrá trasladar consumo entre un periodo a otro[2].

1.3 Resolución Numérica Problema Pescador

Note que r será igual a $4.1\bar{6}\%$ y tendremos que la Trayectoria del consumo debiera ser plana ya que reemplazando en la Ecuación 1 tendremos que:

$$
\begin{aligned}
u'(c_t) &= u'(c_{t+1}) \\
c_t &= c_{t+1}
\end{aligned}
$$

Para resolver el problema se usó la función *value_matriz.m* presentada en la Ayudantía 5 del curso. Una de las decisiones tomadas para resolver este problema fue suponer que si al agente se le paga un salario negativo este dejará de trabajar. Dicho en otras palabras, el vector de salarios ω no contenerá valores negativos. Por otro lado, cabe destacar que la gráfica para el ingreso del agente será equivalente a la del salario ya que no recibe ingresos fuera de su salario. Dicho todo lo anterior en la Figura 1.1 presentamos nuestros resultados:

Analizando los resultados podemos ver que el ingreso del agente —en este caso el salario— es creciente hasta al rededor de los 25 años y luego comienza a decrecer. Al haber perfecta certidumbre el agente se endeudará en un principio (cuando su ingreso es aún bajo) y luego comenzará a ahorrar en vista de que su salario caerá hasta un valor cercano a cero a sus 65 años.

La trayectoria del ahorro stock y flujo obedece esa manera por lo mencionado *supra* sobre la trayectoria constante del consumo en el tiempo producto de que $\beta R = 1$. Dicho en otras palabras, al tener el agente una tasa de impaciencia psicológica igual que la tasa de retorno del mercado financiero este querrá mantener una trayectoria de consumo plana en el tiempo. Lo anterior se observa en el *subplot* inferior de la

[2]Note que el cumplimiento de la ecuación de Euler se entiende mejor con *felicity functions* $u()$ cóncavas.

Figure 1.1: Equilibrio Parcial

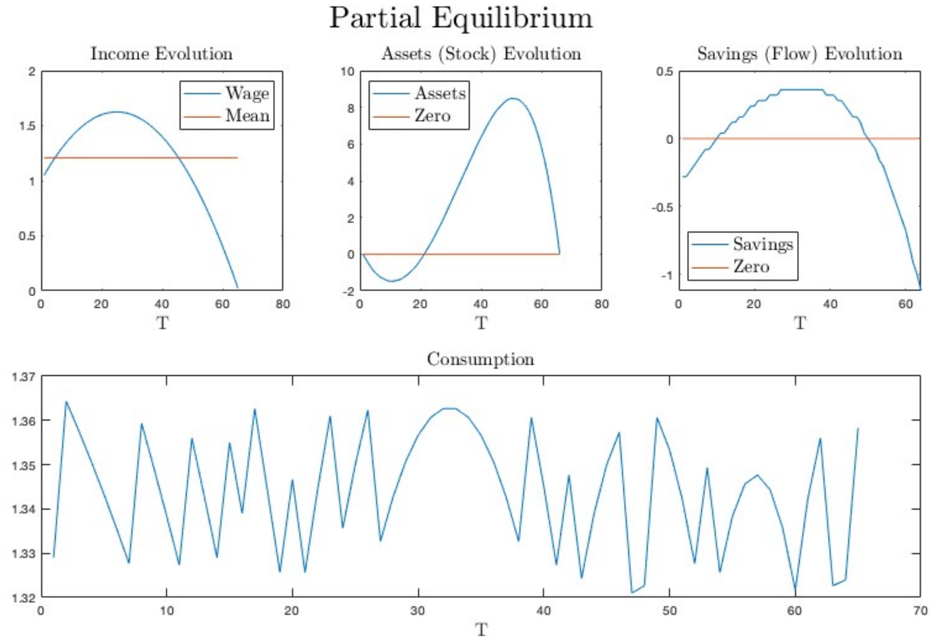


figura con una trayectoria del consumo "*aserruchada*"[3] pero que oscila en torno a 5 centésimas en toda su trayectoria.

Como mencionamos más arriba el modelo analizado no tiene incertidumbre en los pagos futuros. Por lo tanto, el agente no ahorra producto de mayor varianza de los pagos (prudencia) y tampoco es relevante —para materias de este ejercicio— si el agente es averso al riesgo o no. Sin embargo, para poder explicar el ahorro del agente requerimos que este tenga una *felicity function* cóncava, es decir que $u''(c) < 0$. En este ejercicio en particular se cumplirá este requisito con la función de utilidad $CRRA$ utilizada. Al ser esta función cóncava, es fácil ver a partir de la Ecuación de Euler 1, que el agente tendrá deseos de suavizar su trayectoria de consumo a lo largo del tiempo. En este caso en particular, al usar una tasa de interés que satisface $\beta R = 1$, la trayectoria del consumo será literalmente horizontal pero en otros casos (analizados más adelante) podremos ver que la concavidad asegura trayectorias del consumo suaves en el tiempo que no oscilan con *shocks* temporales de ingreso sino que solo con cambios permanentes de este.

[3]Note que la trayectoria se vería menos volátil si aumentáramos el número de valores en la grilla de activos A.

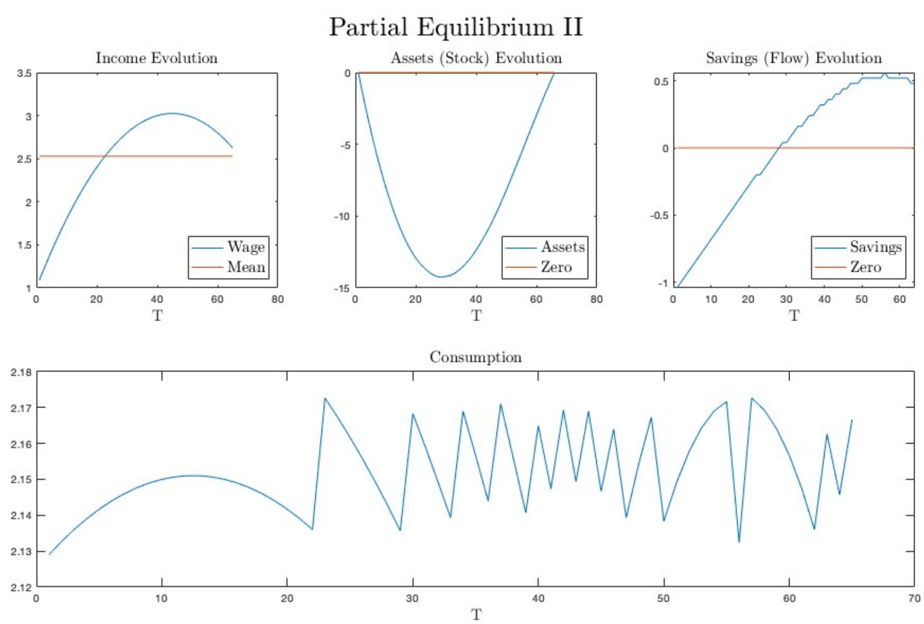
Por último, cabe notar que las restricciones financieras no son activas en este ejercicio. Por lo tanto, tampoco tendremos ahorro precautorio producto del posible incumplimiento de la Ecuación de Euler en periodos futuros o quizás el incumplimiento de esta en el presente.

En conclusión, las trayectorias observadas para este agente pescador pueden ser principalmente entendidas al reconocer que $\beta R = 1$. Esta condición fuerza a que el agente —en este contexto de perfecta certidumbre— haga todo lo posible por seguir una trayectoria constante en el consumo, que ante eventuales *shocks* de ingreso transitorios e inesperados el agente los dosifica durante toda su trayectoria futura.

1.4 Cambiando Trayectoria Salarios - Ingresos

Ahora tendremos el mismo problema anterior pero con una trayectoria de salarios distinta que será mayor en toda su trayectoria al salario de la pregunta anterior, por lo tanto, el promedio también será superior. Las trayectorias solicitadas se encuentran en la Figura 1.2.

Figure 1.2: Equilibrio Parcial II



Note que a diferencia del caso anterior el agente preferirá acumular un stock de activos negativo durante toda su vida. Dicho en otras palabras, el agente comenzará endeudándose fuertemente, para así luego ir pagando poco a poco su deuda. El fenómeno anterior se puede entender de mejor manera analizando conjuntamente las trayectorias del ahorro flujo y stock, donde se observa la inclinación por una mayor deuda (el principal) del agente en un principio que va decreciendo gradualmente. Cuando el salario supera su promedio, el agente empieza a pagar su deuda acumulada con flujos de ahorro cada vez mayores que permiten dejar al agente con un stock nulo al final de su vida cumpliendo con la condición de *No Ponzi*. En el acápite anterior, se observaba en cambio como el flujo era negativo, luego positivo para así terminar siendo negativo.

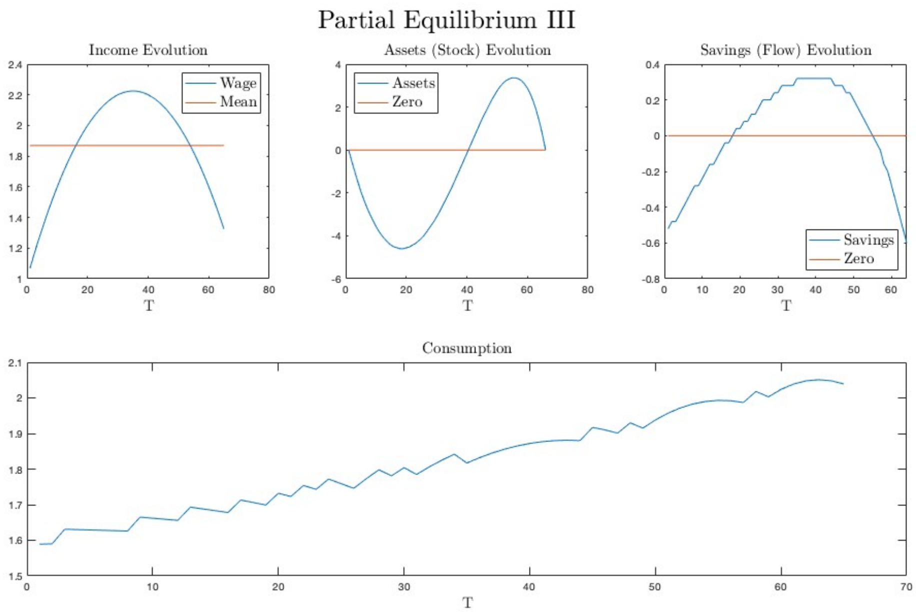
El hecho de que el salario supere su promedio, al rededor de los 22 años del agente y que este nunca vuelva a estar por debajo de este, permite que observemos esta trayectoria con un stock de deuda negativo $\forall t \in T$. Adicionalmente la tasa de interés que cumple con $\beta R = 1$ fuerza a que el consumo siga una trayectoria "plana", como se puede observar en el eje vertical a lo largo del tiempo, pero *aserruchada* al igual que en la pregunta anterior. Es por esta misma razón, porque el agente ahorra en la manera que se describe *supra*. Sus intenciones por suavizar consumo a tal punto de mantener un nivel de consumo constante a lo largo de su vida, lo obligan a ahorrar y endeudarse estratégicamente según el ingreso que recibirá a lo largo de su vida. Por último, note que al ser el salario estrictamente mayor al de la pregunta anterior, la trayectoria "horizontal" del consumo será también estrictamente mayor.

En este contexto de perfecta certidumbre el cambio en el comportamiento de este agente que busca suavizar consumo (por su *felicity function* cóncava) puede ser entendido como un *shock* al ingreso permanente en múltiples periodos de manera no lineal. Este shock, genera que en el óptimo se llegue a una trayectoria de stock de activos permanentemente negativa con un ahorro flujo monotónico creciente y un nivel de consumo plano pero estrictamente mayor al anterior.

1.5 Cambiando Tasa Interés y ρ

Nuevamente tenemos una nueva trayectoria de salarios, pero adicionalmente se nos pide resolver el problema con un r de 5% *ceteris paribus*, y luego resolverlo cambiando solo el parámetro ρ que determina la aversión al riesgo de la función así como también la elasticidad de sustitución intertemporal de la función, entre otros factores relevantes para entender mejor la trayectoria de consumo resultante. Note que la trayectoria de los salarios es ahora estrictamente menor a la del acápite anterior pero mayor a la de la Pregunta (c).

Figure 1.3: Equilibrio Parcial III: $r \uparrow$



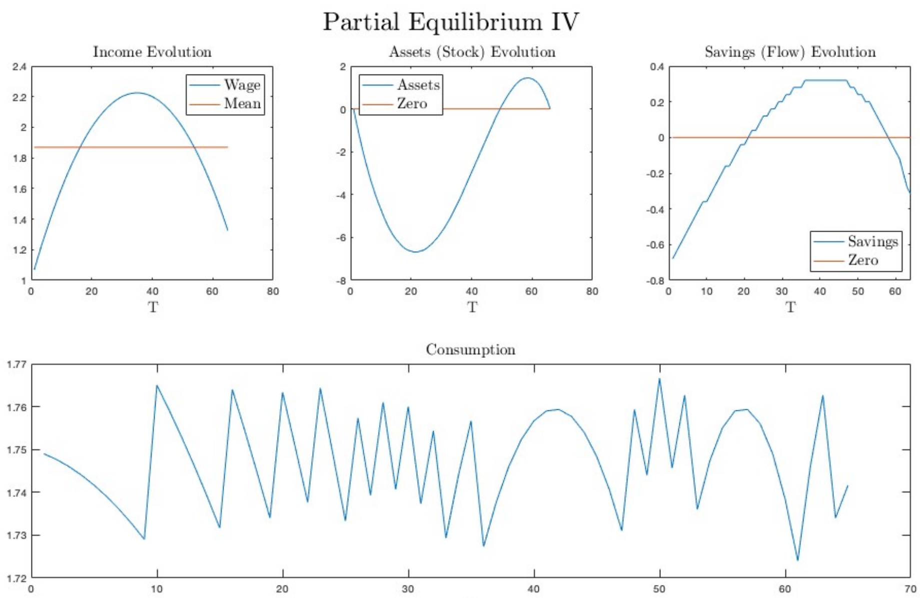
Observando los resultados podemos ver en primer lugar que el ingreso o salario del agente sigue una trayectoria que supera su promedio un poco antes de los 20 años del agente para luego caer bajo el promedio un poco después de los 50 años. Esta trayectoria del salario afecta la acumulación de activos de manera clara. A medida que el salario es menor que su promedio, el agente tendrá un flujo de ahorro negativo y entonces acumula un stock de activos negativo cada vez mayor. Luego aproximadamente cuando el salario supera su promedio, el agente comienza a tener un ahorro flujo creciente y positivo que hace decrecer el ahorro stock gradualmente. Finalmente cuando el nivel de ingresos comienza a ser menor que su promedio, el agente comienza a tener un flujo de ahorro negativo, que le permite desacumular el stock de activos positivo que alcanzó con sus tiempos de ahorro previo para así morir con cero.

La gran diferencia con respecto a las preguntas anteriores es el hecho de que ahora $\beta R \neq 0$. Más específicamente, tendremos que la tasa retorno del mercado financiero será mayor que la tasa de impaciencia del agente, por lo que el agente intentará tener en el óptimo una trayectoria de consumo creciente. Esto es consistente con lo que se observa en la Figura 1.3 donde la trayectoria del consumo es creciente aunque "aserruchada" como antes. La trayectoria de consumo sigue siendo consistente con un agente que busca *suavizar consumo* a lo largo de su vida, lo cual es de esperar ya que seguimos usando la función de utilidad cóncava $CRRA$.

En lo que sigue, procedemos a analizar el caso en que ρ sube de 2 a 8. Los resultados obtenidos se encuentran resumidos en la Figura 1.4. En esta figura se pueden observar trayectorias ligeramente similares a las de la Figura 1.1, pero con diferencias significativas en los niveles e intersecciones producto del mayor salario relativo a esa pregunta.

La implicancia de $r = \frac{1-\beta}{\beta}$ sobre el consumo ya fue discutida. Tendremos una trayectoria de consumo horizontal en el tiempo. La implicancia de este valor de r sobre el ahorro será que en cierto sentido este será *procíclico*. Decimos lo anterior, porque al querer el agente tener una trayectoria de consumo plana en el tiempo (por la igualdad entre tasa de impaciencia y de retorno financiero) este se verá forzado a ahorrar cuando el ingreso es alto con respecto a su media y desahorrar cuando es bajo. Note que en el ejemplo, como $\beta R > 1$ el agente tendrá aún una mayor propensión hacia el ahorro temprano o una menor propensión a la deuda (como en este caso con ingreso creciente) ya que quiere en el óptimo sostener una trayectoria suave pero creciente en el tiempo de consumo.

Figure 1.4: Equilibrio Parcial IV: $\rho \uparrow$



El aumento en *rho* en este ejercicio no implica muchos cambios. En particular, podemos observar un aumento en este parámetro, si bien implicará una menor elasticidad de sustitución intertemporal del consumo, no afectará en las trayectorias de este caso en particular, por el hecho de que $\beta R = 1$. Recordemos que para esta función $CRRA$ se cumplía la siguiente condición:

$$\frac{c_2}{c_1} = [\beta(1+r)]^{1/\rho}$$

Ergo, la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo será:

$$ESIC = \frac{\partial\big(c_2/c_1\big)}{\partial(1+r)} = \frac{1}{\rho}$$

En este caso en particular la $ESIC$ no nos es relevante ya que no estamos estudiando shocks en la tasa de interés r ni tampoco el grado de aversión al riesgo (que también dependerá de ρ) porque no estamos en un contexto con incertidumbre. Sin embargo la expresión de más arriba de cambios en el consumo relativo c_2/c_1 o mejor dicho c_{t+1}/c_t sí nos es relevante. Podemos ver como un mayor ρ implicará una mayor "penalización" por cambios en la trayectoria de consumo. Es decir una preferencia por trayectorias menos volátiles. Sin embargo, al tener un valor de r tal que $\beta R = 1$ el valor de ρ no afectaría nuestras trayectorias de consumo.

Por último la derivación algebraica de $r = \frac{1-\beta}{\beta}$ al insertarla en la Ecuación de Euler 1 es la siguiente:

$$\begin{aligned}
u'(c_t) &= \beta(1+r)u'(c_{t+1}) \\
&= \beta(1+\frac{1-\beta}{\beta})u'(c_{t+1}) \\
&= (\beta+1-\beta)u'(c_{t+1}) \\
&= u'(c_{t+1})
\end{aligned}$$

Y como sabemos que la *felicity function* es la misma para t y $t+1$ entonces podemos concluir que $c_t = c_{t+1}$ $\forall t \in \{1, T-1\}$.

2 Equilibrio General

Ahora, resolverá el problema del pescador endogeneizando los precios de la economía. Para ello, asuma que la productividad marginal del trabajador está dada por:

$$\omega = \frac{\partial F(L,K)}{\partial L} = (1-\alpha)\left[\frac{K}{\bar{L}}\right]^{\alpha} \tag{2}$$

2.1 Demostración Demanda por Capital

Primero partimos por demostrar que la demanda por capital K viene dada por la expresión (8) del enunciado. Para ello partimos de la clásica condición de optimalidad del capital en los modelos de agente representativo, es decir que: $PMg_k - \delta = r$. La interpretación económica de esta expresión es que las dos maneras de traspasar consumo de hoy a mañana —invirtiendo en capital o ahorrando en el mercado financiero— deben tener en el óptimo iguales retornos porque sino habrá un flujo de capitales hacia la alternativa con mayor retorno tal que corregirá el desequilibrio.

$$\begin{aligned} r+\delta &= \frac{\partial F(L,K)}{\partial K} \\ &= \frac{\partial (L^{1-\alpha}K^{\alpha})}{\partial K} \\ &= \alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha} \end{aligned}$$

Y despejando K tendremos que:

$$\begin{aligned} r+\delta &= \alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha} \\ \frac{1}{\alpha}(r+\delta) &= K^{\alpha-1}L^{1-\alpha} \\ K^{-(1-\alpha)} &= \frac{1}{\alpha}(r+\delta)L^{\alpha-1} \\ K^{(1-\alpha)} &= \left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)L^{1-\alpha} \\ K &= \left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\bar{L} \end{aligned}$$

Donde $\bar{L}$ corresponde a la oferta laboral agregada de la economía en este ejercicio, que se considera exógena. Ahora reemplazando en la Ecuación 2 con la demanda de

Capital encontrada tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\omega &= (1-\alpha)\frac{1}{\bar{L}^{\alpha}}\left[\left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\bar{L}\right]^{\alpha} \\
&= (1-\alpha)\left[\left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right]^{\alpha} \\
&= (1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

De esta manera queda entonces demostrado que la demanda de K esta representada por al Ecuación (8) del enunciado y que el salario, o más bien la productividad marginal del trabajo esta dada por la expresión (9) de este mismo.

2.2 Función *Fisher*

Desarrollada en Matlab.

2.3 Sensibilizando la Tasa de Interés

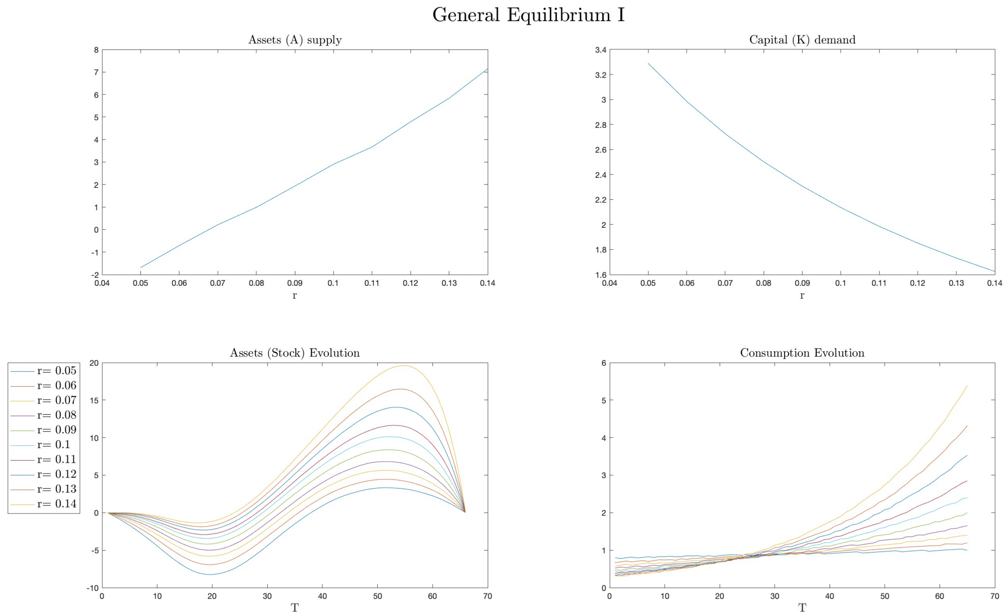
Tal como se observa en el Gráfico 2.1, vemos que la demanda por capital disminuye a medida que aumenta la tasa de interés, mientras que la oferta de activos, por el contrario, aumenta. Lo anterior tiene lógica ya que corresponde a un aumento en el precio del ahorro, es decir, hay un efecto sustitución positivo hacia ahorrar más y un desincentivo a invertir, pues su costo de oportunidad aumentó.

En equilibrio, la oferta de activos y la demanda por capital deberá coincidir ya que el mercado debe vaciarse, de lo contrario habrían incentivos para subir o bajar la tasa de interés y no estaríamos en un punto de equilibrio. Esta relación puede verse en el Gráfico 2.2[4].

En cuanto a la trayectoria de activos, se observa un endeudamiento durante la juventud de los individuos, para después aumentar fuertemente el ahorro. Este patrón es mucho más marcado cuando la tasa de interés es más baja, lo cual tiene sentido ya que los agentes, al endeudarse al comienzo de su vida, pueden hacerlo mucho más barato y por lo tanto, tienen incentivos a endeudarse más. Sin embargo, si bien estos

[4]En Matlab se desarrolló con la grilla de r propuesta entre 0 y 0.09, sin embargo, para mostrar resultados relevantes e interpretables se cambió la grilla por una que incluyera el r de equilibrio.

Figure 2.1: Equilibrio General I

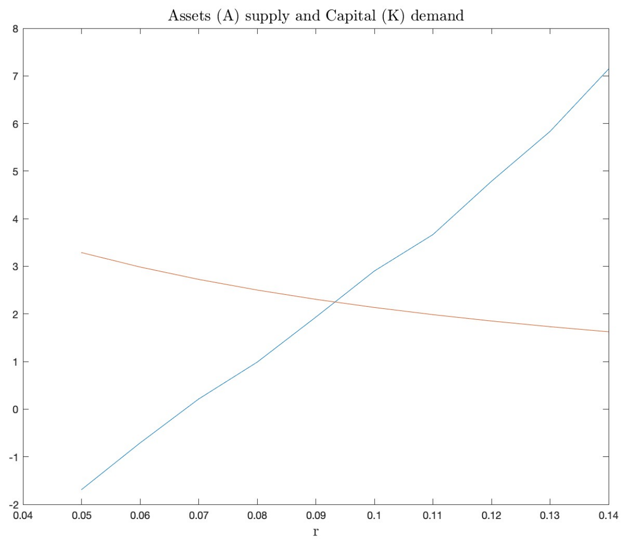


individuos con tasa más baja se endeudan más, después enfrentan la misma tasa baja para ahorrar durante su época adulta, por lo que el ahorro es mucho más bajo en relación a r's más altos, ya que el retorno que reciben es menor.

Finalmente, el gráfico de la evolución de consumo tiene varias particularidades. Por un lado, se observa un comportamiento heterogéneo según la tasa de interés existente, sobre todo durante la segunda mitad de vida de los individuos. Cuando la tasa de interés es baja, el consumo comienza un poco más alto en relación a las otras tasas, ya que el agente tiene incentivos a endeudarse, sin embargo, el consumo es plano durante toda la trayectoria de vida. Por el contrario, cuando la tasa de interés es alta, el endeudamiento es mucho menor durante los primeros años de vida (relativo a tasas más bajas), y por lo tanto el consumo es creciente, partiendo desde un nivel bien bajo, con pendiente positiva, a lo largo de la vida del individuo.

Así como durante la juventud los individuos tienden a endeudarse, durante la adultez, se observa que hay una tendencia al ahorro, la cual es mucho más marcada y fuerte cuando la tasa de interés es alta, lo que implica que el pago por unidad no

Figure 2.2: Equilibrio General I



consumida hoy es más alto mañana. Esto último lleva a que cuando la tasa es baja, el consumo se mantenga constante durante los últimos años de vida, no hay incentivos a ahorrar y tampoco hay suficientes ingresos como para mantener una trayectoria de consumo creciente.

2.4 Tasa de Interés Endógena

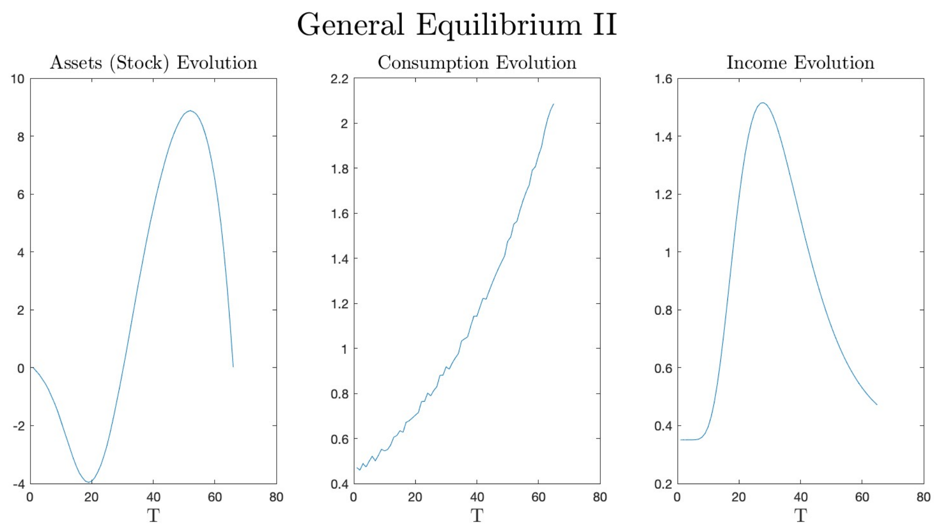
La tasa de interés de equilibrio encontrada es de **0.09287**. Esta tasa permite vaciar el mercado de activos igualando la oferta de activos y la demanda por capital. Tal como se observa en el Gráfico 2.2 de forma más explícita, el punto en donde se intersectan ambas trayectorias coincide con una tasa de interés entre 9 y 10%.

Tal como se mencionó en el acápite anterior, el equilibrio en el mercado permite que no hayan incentivos a ahorrar más o menos y por lo tanto, que ningún agente quiera desviarse de su decisión.

En cuanto al Gráfico 2.3 de evolución de consumo y activos, se observa que el consumo es creciente, lo cual fue explicado en el ítem anterior cuando hablábamos de tasas de interés relativamente altas, mientras que también se observa un endeudamiento durante los primeros años de vida, para luego presentar un fuerte ahorro, sin afectar la trayectoria creciente del consumo.

Finalmente, vemos una relación inversamente proporcional entre la trayectoria de los activos y el ingreso, lo cual tiene sentido pues el agente buscará ahorrar en momentos de alto ingreso y endeudarse a comienzos de su vida, cuando el ingreso el particularmente bajo.

Figure 2.3: Equilibrio General II



2.5 Sensibilizando Restricciones de Liquidez

En el Gráfico 2.4 se presentan nuestros resultados. Al haber restricciones al acceso al crédito, los individuos no pueden suavizar consumo y por lo tanto, endeudarse durante los primeros años de vida. Cuando la restricción es igual a 0 (nunca puede tener deuda), se puede observar que el consumo es particularmente bajo ya que está obligado a consumir solamente su salario. Cuando el individuo ya aumenta su ingreso, su consumo aumenta fuertemente, así como también alcanza niveles de ahorro positivos, para finalmente tener una trayectoria de consumo estable en el tiempo. Este comportamiento es factible verlo en todos los casos en donde la restricción de crédito está activa y puede verse un sector plano en la curva de trayectoria de activos. Luego, cuando la restricción de crédito es lo suficientemente holgada (liq$\geq$ 4) o línea morada[5], es posible iniciar la vida con un consumo mucho más alto y con trayectoria creciente.

En cuanto a la tasa de interés de equilibrio, es inversamente proporcional a las restricciones de liquidez, es decir, a mayor posibilidad de endeudarse, mayor es la tasa de equilibrio. Lo anterior tiene sentido ya que al no poder endeudarse, el único uso alternativo de los activos es invertir en capital, lo que disminuye la demanda por estos activos y el precio "baja". Sin embargo, cuando los individuos sí tienen la posibilidad de endeudarse (liq>0), entonces aumenta la demanda por los activos y por lo tanto el precio aumenta.

Finalmente, se observa una relación positiva entre las restricciones de liquidez y la correlación ingreso-consumo, es decir, a medida que aumentan las restricciones de crédito, la correlación ingreso-consumo aumenta. Esto debido a que los agentes están restringidos a consumir durante gran parte de su vida, la juventud, estrictamente el ingreso, no pudiendo endeudarse o trasladar consumo futuro a consumo presente. La correlación nunca llega a ser 1 ya que los individuos aún pueden ahorrar a lo largo de su vida, lo cual hacen durante la adultez.

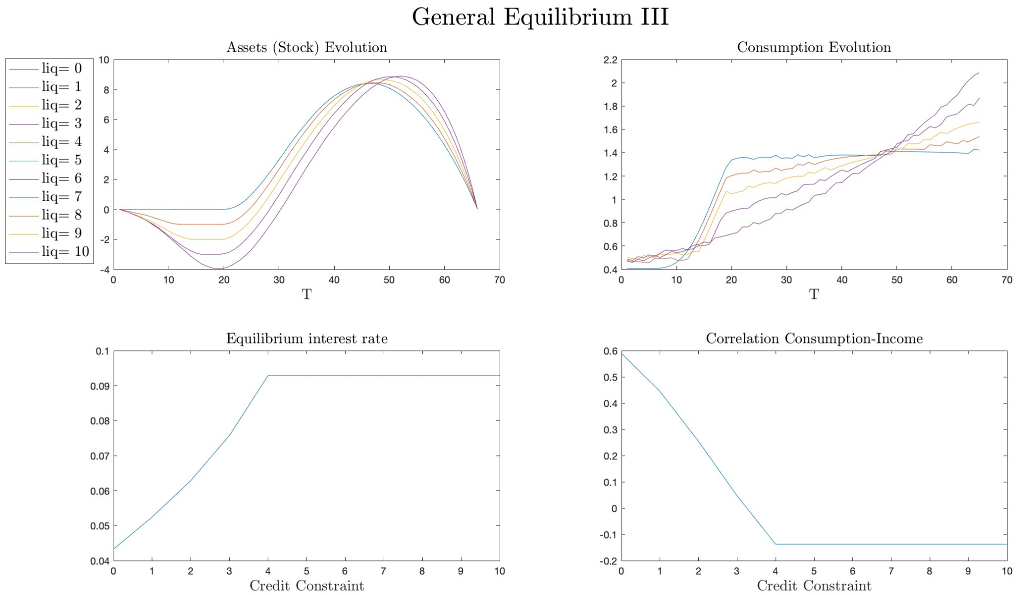
Es importante notar que tanto la tasa de interés de equilibrio como la correlación consumo-ingreso alcanzan la estabilidad para restricciones de liquidez inactivas. Esto se relaciona con lo que mencionamos antes, al alcanzar cierto nivel en donde no hay restricciones activas, entonces la senda de ahorro y consumo no cambia, ya que es óptima, por lo tanto, el nivel de ahorro/deuda o consumo no cambia aún cuando tengamos la posibilidad de endeudarnos un poco más.

2.6 Correlación Ingreso-Consumo

Como se adelantó en la pregunta anterior y Gráfico 2.4, la correlación ingreso-consumo es alta cuando el acceso al crédito es limitado ya que los individuos durante gran parte de su vida están limitados a consumir su ingreso o a ahorrarlo, dado que el ingreso es particularmente bajo durante la etapa joven, los agentes consumirán prácticamente a razón 1 a 1 su ingreso (no llega a ser 1 a 1 ya que también hay inversiones en capital, pero es cercano).

[5] Cuando la restricción de liquidez es holgada, no activa, la trayectoria de consumo es la misma, por lo que en el gráfico las líneas para liq$\geq$ 4 se superponen.

Figure 2.4: Equilibrio General III



Luego, si las tasas que equilibran el mercado fuesen cada vez menores a lo largo de la vida de los agentes, entonces la correlación ingreso-consumo sería aún más alta. Esto debido a que los agentes no pudieron endeudarse durante su juventud, y durante la etapa adulta, cuando tengan incentivos a desviar el consumo de su trayectoria de ingresos, el retorno esperado del ahorro les va a bajar, por lo que caen los incentivos a ahorrar cuando quieren y pueden hacerlo. Esto llevará a que la trayectoria de activos sea mucho más plana, sin deuda y con menos ahorro, y por lo tanto, la correlación entre lo que consumen y reciben de ingresos ser mucho más alta (≈ 1).

3 Crecimiento Poblacional

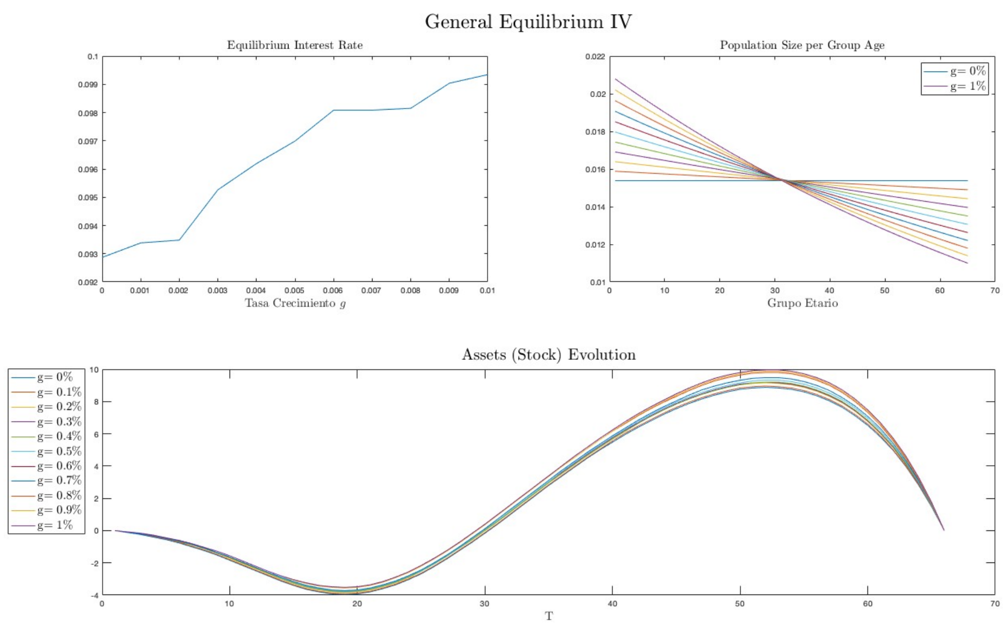
Los resultados obtenidos en esta pregunta en que se varía la composición demográfica de los pescadores que habitan nuestra economía suponiendo que $h \to \infty$. Se puede notar fácilmente que un mayor g implica un mayor número de jóvenes pero menor número de adultos mayores a partir de la siguiente forma de expresar la ecuación (12) del enunciado.

$$
\begin{aligned}
m_t &= \frac{(1+g)^{T-t}}{\sum_{t=1}^{T}(1+g)^{T-t}} \\
&= \frac{(1+g)^{T}/(1+g)^{t}}{(1+g)^{T}\sum_{t=1}^{T}(1+g)^{-t}} \\
&= \frac{\sum_{t=1}^{T}(1+g)^{-t}}{(1+g)^{t}}
\end{aligned}
$$

Como el numerador es constante para todo grupo etario t, es claro que con un $g > 0$ tendremos más jóvenes que adultos mayores en la población. Adicionalmente si calculamos m_{65} y m_0 podemos ver que a medida que aumenta g tenemos cada vez más jóvenes relativo a adultos mayores.

En la Figura 3.1 podemos observar los resultados solicitados en conjunto con una gráfica que ilustra las distintas distribuciones demográficas (en forma continua) para cada valor de tasa de crecimiento poblacional g.

Figure 3.1: Equilibrio General IV



En primer lugar el panel de arriba a la derecha de la Figura 3.1 refleja lo descrito más arriba sobre los cambios demográficos que implica la mayor tasa de crecimiento g.

A partir de esto último y de todos los resultados anteriores, podemos extrapolar que a mayor g al haber más jóvenes en esta economía tendremos más agentes que demandan deuda y menos que demandan ahorro en esta economía (en términos relativos). Por esta razón la tasa de interés resultante en equilibrio (general) debiera ser creciente en g. El *subplot* de arriba a la izquierda de la Figura 3.1 es evidencia de que nuestras predicciones basadas en intuición económica eran correctas.

Por último, el panel inferior que ilustra las trayectorias del stock de activos para los agentes a lo largo de su vida es también interesante analizar. La diferencia entre las trayectorias no parece ser muy importante, pero de todos modos al hacer *zoom* a estas, se puede observar claramente como la trayectoria con mayor g siempre esta sobre a la del menor valor[6]. Esto quiere decir que los agentes cuando $g = 1\%$ pueden endeudarse menos cuando son jóvenes que con $g = 0$, pero al mismo tiempo, pueden ahorrar relativamente más cuando son adultos en equilibrio. La explicación para este resultado es la misma que para explicar la tasa de interés creciente, existe una demanda mayor por deuda que por ahorro, *ergo* la deuda es relativamente más cara como indica la mayor tasa de interés de equilibrio. En equilibrio entonces cuando g alto, los agentes pueden acceder a menos deuda cuando jóvenes pero a más ahorro cuando viejos.

4 Oferta Laboral

En la Figura 4.1 se presentan los resultados. Esta pregunta cambia la función de utilidad por una que "endogeniza" la oferta laboral y permite modelar a un agente que recibe utilidad tanto por el consumo (c) como por el ocio (1-n). De esta forma, al tener una oferta laboral elástica, se observa que la correlación consumo-ingreso disminuye en comparación a los ítems anteriores, esto, debido a que ahora el agente no necesariamente trabajará todo el día (n=1), sino que lo hará dependiendo de su nivel de consumo, su retorno por trabajo (salario) y trasladará aún más consumo entre periodos. Esta baja correlación, e incluso negativa, se nota en particular, cuando no hay restricciones crediticias, de lo contrario estaría obligado a consumir su ingreso con una correlación cercana a 1.

Ahora, el salario también varía con la edad según el parámetro g de producción, por lo que esperamos, y demostramos en el siguiente gráfico, que el agente trabajará más durante los años que es más productivo. Como la productividad g, está definida

[6]Note que las trayectorias de valores intermedios a veces se confunden a lo largo de la trayectoria. De todos modos la jerarquía —mayor g trayectoria más arriba— es más o menos clara también para aquellos valores.

como una distribución similar[7] a una normal alrededor de media 32.5, la evolución de la oferta laboral durante la vida deberá ser parecida. En la oferta laboral agregada de la economía, se observa que aumenta a mayor flexibilidad crediticia (0 a 4), sin embargo después disminuye cuando las restricciones crediticias no son activas ($\geq$4), Lo anterior se debe a 2 factores: En primer lugar recordemos que la economía si bien está en equilibrio, puede gastar sus ahorros en consumo o en inversión de capital, de este modo, frente a un aumento de la tasa de interés producto de la suavización de la restricción al crédito, se da un efecto sustitución y un efecto ingreso que se contraponen, predominando el efecto sustitución en el tramo de 0 a 4 y predominando el efecto ingreso en el segundo ($\geq$4). Así, la oferta puede tener una pendiente positiva y negativa. Recordar también la escala del gráfico, son cambios muy menores y dado el zoom que tiene el gráfico pareciera ser un efecto más grande.[8]

En cuanto a la tasa de interés de equilibrio, observamos un patrón similar a las preguntas anteriores, a mayor restricción, menor tasa de interés de equilibrio ya que los agentes consumen lo que ganan, con una correlación muy alta, y por lo tanto, la demanda por ahorro es muy baja y por lo tanto, el costo de oportunidad del capital (definido por la tasa de interés y tasa de depreciación), será lo suficientemente bajo. Al mismo tiempo, cuando las restricciones de liquidez se liberan, la demanda por activos aumenta, tanto por capital como por deuda, lo que presiona al precio del activo al alza, subiendo la tasa de interés de equilibrio. Llega un minuto en que las restricciones de liquidez no son activas, por lo que independiente de su valor, la tasa de equilibrio no cambia. Esto último lleva a que la tasa de equilibrio, la correlación consumo-ingreso y la oferta laboral sobre cierto punto (liq$\approx$4) sean rectas, pues no es una restricción.

Con respecto a la evolución del stock de activos, para las restricciones de liquidez más fuertes, de 0 a 3, se observa el mismo patrón que hemos visto en las preguntas anteriores, durante la juventud la deuda se ve limitada mientras que después hay un fuerte aumento en el ahorro. Sin embargo, para cuando la restricción de liquidez ya no está activa, es decir, 4 o más, observamos que hay una caída en el endeudamiento, incluso menor a los casos anteriores, y eso se debe a el trade-off existente entre endeudarse y la tasa de interés. Llegamos a un punto en que los individuos no tienen

[7] Similar aunque no igual, pues hay parámetros que cambian.

[8] Estos efectos contrapuestos se dan en el caso de un aumento en la tasa de interés cuando el individuo (o la economía, en este caso) es ahorrador. Si bien estamos en equilibrio, sucede que en la oferta laboral quienes mayor ponderación tienen son los individuos ahorradores (ver gráfico 3) y al mismo tiempo, al poder gastar en capital o consumo, podemos asumir que la economía es ahorradora, en bienes de capital.

restricción activa para endeudarse y por ende, para invertir en capital o consumir, por lo tanto la demanda aumenta y la tasa de interés de equilibrio también, lo que produce un aumento en el costo de oportunidad de la deuda y por ende, los individuos disminuyen su nivel de endeudamiento.

Finalmente, en cuanto a la evolución de consumo, como es de esperar, el consumo más bajo en un inicio corresponde a quienes no pueden acceder al crédito (liq=0), para luego subir fuertemente durante la época de mayor trabajo y productividad laboral. Quienes no tienen restricciones financieras presentan un patrón de consumo creciente a través del tiempo. Es importante notar, que tal como se observó en las preguntas anteriores, cuando hay restricciones de liquidez, existe un corte en la trayectoria del consumo, donde la pendiente cambia de positiva a negativa, esto, debido a que los agentes no pudieron endeudarse en un principio, por lo que parten con un consumo muy bajo y luego la tasa de interés de equilibrio no es lo suficientemente atractiva para incentivar un alto nivel de ahorro que permita mantener una senda de consumo alta.

Figure 4.1: Equilibrio General con oferta laboral elástica