Matemáticas básicas

Con aplicaciones a la Ingeniería

SIL
Sistema de Información en Línea
Actualización permanente

ECOE EDICIONES

Lucio Rojas Cortés
Arturo Ramírez Baracaldo
Luis Enrique Rojas Cárdenas

Matemáticas básicas
Con aplicaciones a la Ingeniería

Lucio Rojas Cortés
Arturo Ramírez Baracaldo
Luis Enrique Rojas Cárdenas

Catalogación en la publicación - Biblioteca Nacional de Colombia

Rojas Cortés, Lucio
Matemáticas básicas: con aplicaciones a la ingeniería / Lucio Rojas Cortés, Arturo Ramírez Baracaldo y Luis Enrique Rojas Cárdenas. -- 1a ed. -- Bogotá: Ecoe Ediciones, 2016.
492 p. - (Colección ciencias básicas. Matemáticas).

Incluye respuestas. Índice temático.
ISBN : 978-958-771-362-6 -- 978-958-771-363-3 (e-book)

1. Matemáticas. 2. Matemáticas para ingenieros. 3. Coordenadas cartesianas. 4. Ecuaciones. 5. Geometría euclidiana. 6. Geometría analítica. 7. Funciones. 8. Trigonometría. I. Ramírez Baracaldo, Arturo. II. Rojas Cárdenas, Luis Enrique. III. Título IV. Serie

CDD: 620.00151 ed. 21 opg

Colección: *Ciencias básicas*
Área: *Matemáticas*

Primera edición: Bogotá, julio de 2016

ISBN: 978-958-771-362-6
e-ISBN: 978-958-771-363-3

Dirección editorial: Andrés Delgado
Coordinación editorial: Angélica García Reyes
Corrección de estilo: Camilo Moreno
Diagramación: Olga Lucía Pedraza R.
Carátula: Wilson Marulanda Muñoz
Impresión: Litoperla
Carrera 25A No. 8 - 81

A nuestras esposas e hijos que,
con su comprensión y apoyo constante,
nos impulsaron a la culminación de este proyecto.

Agradecimientos

Deseamos expresar un agradecimiento especial a las siguientes personas que por su gestión y apoyo hicieron posible esta publicación.

Brigadier General **Hugo Rodríguez Durán**, Rector de la Universidad Militar Nueva Granada.

Ingeniera **Rosa Yanneth Méndez Martín**, Vicerrectora Académica de la Universidad Militar Nueva Granada.

Dr. **Carlos Andrés Coy Barrera**, Decano de la Facultad de Ciencias Básicas y Aplicadas de la Universidad Militar Nueva Granada.

Dr. **Mauricio Restrepo López**, Director del Departamento de Matemáticas de la Universidad Militar Nueva Granada.

Dra. **Edel Serrano Iglesias**, Directora del Departamento de Matemáticas de la Universidad Central.

Dr. **Francisco Soler Fajardo (q.p.d)**, con sentimiento de aprecio. Docente de Matemáticas de la Universidad Javeriana y Universidad Sergio Arboleda, quien con su experiencia y sabiduría nos ayudó a incursionar en el campo de las publicaciones.

Igualmente agradecemos a los docentes de planta del Departamento de Matemáticas: Rocío Buitrago, Luis Mesa, Lucía Gutiérrez, Darío Domínguez y Adrián Gómez quienes con sus valiosas sugerencias a través de las etapas de elaboración de la presente publicación, brindaron críticas constructivas y aportes significativos para la presente publicación.

También queremos agradecer a los docentes de cátedra del Departamento de Matemáticas Juan Jesús Cruz, Ernesto Vargas, Weimar Muñoz, Jorge Morales, Norma Constanza Sarmiento, Aracely Cortés, Claudia Andrea González, Matilde Páez, Carlos Mora, Sandra Bello, Édgar Betancourt, Jenny Carvajal, María Cristina Rodríguez, Alfi Jiménez, Gerardo Tole, Julio Melo, Julio César Nieto, Rómulo Tibaduiza, Alberto Reyes, Milton Perico, Liliana Alvarado, Jorge León, Manuel Díaz y José Nelson Rodríguez, quienes con sus valiosas sugerencias y comentarios pertinentes contribuyeron al mejoramiento del presente texto de **Matemáticas básicas con aplicaciones a la ingeniería**.

Resaltamos también la valiosa colaboración a los demás funcionarios administrativos y docentes de Física, Química, Biología e Ingeniería, que de una u otra forma nos animaron y brindaron apoyo para este trabajo.

A los estudiantes, pues sin ellos sería imposible desarrollar la labor de la enseñanza y con quienes compartimos estos conocimientos.

LOS AUTORES

Contenido

Al final del libro está ubicado el código para que pueda acceder al **Sistema de información en Línea** – SIL, donde encontrará principalmente teoría y ejercicios sobre Fracciones parciales y sumatorias, los cuales ayudan a practicar y profundizar los tema que se desarrollan a lo largo del libro.

Introducción

Esta primera edición el texto tiene como propósito ser —una herramienta—de enseñanza y de aprendizaje, teniendo en cuenta las posibilidades reales y alcanzables, pertinentes al contexto del primer semestre de los programas de Ingeniería, para así cubrir los vacíos conceptuales y proporcionar a los estudiantes las bases para abordar posteriormente las asignaturas de cálculo. No desconocemos la existencia de numerosos textos de Precálculo en el mercado que abarcan gran variedad de temas interesantes y bien elaborados, pero que finalmente por su densidad en temas, no se alcanzan a abordar en un porcentaje significativo por el tiempo programado en un primer semestre.

Los temas abordados en el presente texto de **Matemáticas básicas con aplicaciones a la Ingeniería**, consideramos que son necesarios y básicos para los cursos del cálculo, ya que se describen temas relevantes y pertinentes que proporcionan las bases para afianzar conceptos y procesos, con los cuales se espera corregir las falencias detectadas en los estudiantes en las asignaturas posteriores al precálculo. De esta forma se pretende garantizar el cubrimiento de vacíos conceptuales de prerrequisitos y correquisitos en los estudiantes para enfrentarse a las asignaturas no solo de matemáticas, sino de aquellas que requieran para su desarrollo el apoyo de estos contenidos.

Para lograr lo anterior, en la presente edición se realiza una estructuración de los capítulos teniendo en cuenta una lógica, que consideramos pertinente en el proceso didáctico y pedagógico, para explicitar más el desarrollo de conceptos, ejemplos y ejercicios complementarios. Además se tuvo en cuenta nuestra experiencia en los procesos académicos de articulación de la Media Vocacional con el primer semestre de la Universidad, y las sugerencias constructivas de colegas, que han trabajado la primera edición del presente texto.

A continuación se hace una breve descripción de los seis capítulos desarrollados en el texto.

Capítulo 1: expresiones y ecuaciones algebraicas

Se realiza un resumen de los conjuntos numéricos con sus propiedades y operaciones hasta presentar la estructura de cuerpo ordenado en los números reales. Se hace un desarrollo en los exponentes enteros y racionales; se aborda la potenciación, la radicación y la racionalización, y los números complejos. En la parte algebraica se presentan los temas de expresiones algebraicas con sus operaciones, los métodos básicos de factorización y las fracciones algebraicas. También se realiza un énfasis en las ecuaciones de primer grado o una variable y las formas de solución que llevan a ecuaciones de segundo grado. Finalmente se presentan las desigualdades en números reales y desigualdades con valor absoluto y sus propiedades.

Capítulo 2: el plano cartesiano

Una vez construido el plano cartesiano se presentan las ecuaciones de dos variables, intersección con los ejes y simetrías; se realiza un desarrollo de la circunferencia y la recta con sus respectivas ecuaciones generales. Los temas anteriores se relacionan con la solución de sistemas de ecuaciones lineales y no lineales.

Capítulo 3: Geometría Euclidiana

Se mencionan los términos indefinidos, segmentos de línea, razones y proporciones. Se presentan los tipos de ángulos, el teorema de Thales, de Heron y Pitágoras, y la clasificación de triángulos según sus lados y ángulos. Se presentan las relaciones entre los segmentos y apotemas en polígonos regulares. Para concluir el capítulo, se desarrollan las áreas y volúmenes de prismas, pirámides y cilindros.

Capítulo 4: Geometría analítica

A partir de la definición de las secciones cónicas se desarrollan la parábola, la elipse y la hipérbola en el origen y trasladadas con sus respectivas ecuaciones generales vistas como relaciones.

Capítulo 5: Funciones

En este capítulo se hace énfasis en el concepto de función, gráfica de funciones y clasificación de funciones; se realiza el álgebra de funciones, se presenta la función inversa y las transformaciones de funciones. También se enfatiza en los modelos funcionales que requieren procesos algebraicos y geométricos. Finalmente, se presentan las funciones exponenciales y logarítmicas, con sus respectivas ecuaciones y aplicaciones.

Capítulo 6: Trigonometría

Se presentan los temas de ángulos, coordenadas rectangulares, relaciones trigonométricas e identidades trigonométricas. Se desarrollan aplicaciones a triángulos rectángulos y oblicuángulos, y prueba de identidades trigonométricas. También se presentan las fórmulas de suma, diferencia, ángulo doble, ángulo medio, producto y suma. Para terminar, se presentan las gráficas de las funciones trigonométricas, funciones trigonométricas inversas y solución de ecuaciones trigonométricas.

Capítulo 1

Expresiones y ecuaciones algebraicas

Objetivos

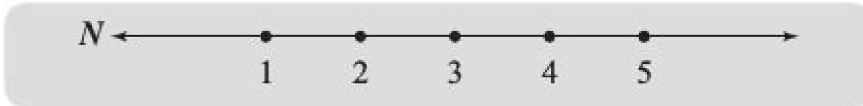
- Identificar los conjuntos numéricos con sus propiedades para efectuar operaciones básicas.
- Utilizar las propiedades y las operaciones en los conjuntos numéricos para la simplificación de expresiones aritméticas.
- Identificar factores y productos especiales de expresiones algebraicas.
- Identificar y emplear los métodos de factorización en la simplificación de expresiones algebraicas.
- Resolver ecuaciones e inecuaciones de primero y segundo grado en una variable.
- Resolver desigualdades de valor absoluto con sus respectivas propiedades.
- Aplicar las ecuaciones e inecuaciones en la resolución de problemas.

1.1. Conjunto de los números reales

Los números reales son los números que se pueden escribir como un decimal, incluyendo aquellos que requieren una expansión decimal infinita, estos números reales se representan mediante símbolos como –3, 5, ½, $\sqrt{2},$ π, 2.002, *e*. El conjunto de los números reales contiene otros subconjuntos que son:

1.1.1. *Conjunto de números naturales* (N)

Históricamente aparece como el primer conjunto de números utilizado para contar o indicar el tamaño de un conjunto finito: N={1,2,3,. . .}.
Su representación gráfica sobre la recta real es,



En los números naturales se definen las operaciones de:

i. *Adición:* Para dos números naturales a y b, la suma $a+b$ es un número natural.

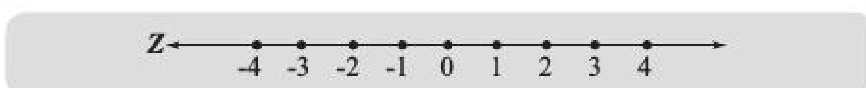
Ejemplo 1 $3,5 \in N \Rightarrow 3+5=8 \in N$

ii. *Multiplicación*: Para dos números naturales a y b, el producto $a \times b$ es un número natural.

Ejemplo 2 $5,11 \in N \Rightarrow 5 \times 11=55 \in N$

1.1.2. Conjunto de números enteros (Z)

Históricamente se plantea la aparición de este conjunto de números por la necesidad de hallar una solución de una ecuación como, por ejemplo, $3x + 2 = 0$, en la cual aparecen los negativos, también llamados ***opuestos aditivos***, de tal manera que este conjunto presenta la forma Z={. . .–4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, . . .}. La representación en la recta real es:



Recordemos que en los números enteros se efectúan operaciones como suma, resta y multiplicación. Es de anotar que, dados dos números enteros, se obtiene un único entero que es la suma o producto de los dos, es decir, si

$a,b, \in Z$, entonces $a+b \in Z$ y $ab \in Z$

Ejemplo
Si $-6,4 \in Z$ entonces *i*) $-6+4=-2 \in Z$, *ii*) $(-6)(4)=-24 \in Z$
Otra de las operaciones en este conjunto es la *división exacta* o *divisibilidad*, la cual nos lleva a la denominada *descomposición en factores primos*.

Algunas propiedades fundamentales de las operaciones definidas en este conjunto son:

Tabla 1a

Propiedad	Ejemplo	Propiedad	Ejemplo
Conmutativa para la suma $a+b=b+a$	$3+5=5+3=8$	Asociativa para el producto $a(bc)=(ab)c$	$2\ (5\ .\ 8)=(2\ .\ 5)\ 8$ $2.\ 40=10\ .\ 8$ $80=80$
Asociativa en la suma $(a+b)+c=a+(b+c)$	$(2+3)+10=$ $2+(3+10)$ $5+10=2+13$ $15=15$	Módulo del producto $(1)\ (a)=(a)\ (1)$	$(1)(5)=(5)(1)$ $5=5$
Módulo de la suma $a+0=0+a$	$8+0=0+8$ $8=8$	Distributiva del producto $a\ (b+c)=ab+ac$	$2(4+5)=$ $(2)(4)+(2)(5)$ $2\ (9)=8+10$ $18=18$
Conmutativa para el producto $ab=ba$	$(3)\ (2)=(2)\ (3)$ $6=6$	Multiplicación por cero $a\cdot 0=0\cdot a=0$	$(8)\ (0)=(0)\ (8)$ $0=0$
Propiedad de los signos $(-a)(-b)=ab$	$(-7)\ (-9)=(7)\ (9)$ $=63$		

Estas propiedades son de mucha utilidad tanto en la agrupación como en la simplificación de operaciones de aritmética, álgebra, trigonometría, cálculo, etc.

1.1.3. Conjunto de números racionales (Q)

Este conjunto se define de la siguiente forma:

$$Q=\left\{\frac{a}{b}/\,a,b\in Z,\,b\neq 0\right\}$$

Ejemplo

$$\frac{4}{5},\ -\frac{7}{12},\ \frac{15}{31},\ \ 45$$

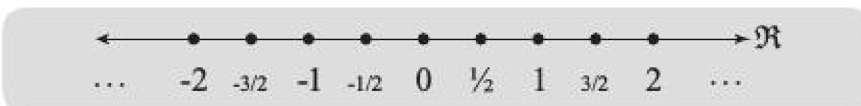
Observe que el número 45 es un *número racional* puesto que puede ser escrito en la forma $\frac{45}{1}$ y de esta manera satisface la condición dada en la definición.

Observe que la ecuación mencionada anteriormente $3x+2=0$ sí tiene solución en este conjunto puesto que si $x=-\frac{2}{3}$ se obtiene $3\left(-\frac{2}{3}\right)+2=0\Rightarrow -2+2=0\Rightarrow 0=0.$

La representación sobre la recta real se hace en forma similar a los enteros, salvo que se debe tener en cuenta que, en el racional $\frac{a}{b}$, al número *b* se le llama *denominador* e indica las partes en que se debe dividir la unidad y al número *a* se le llama *numerador* e indica las partes que deben tomarse de esa división.

Por ejemplo, si se quiere representar o ubicar el número $\frac{1}{2}$ en la recta de los reales, se debe entonces dividir la primera unidad sobre la recta representada por la longitud de cero a uno en dos partes iguales y el número está sobre la primera parte.

De esta misma manera se ubican números como $+\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$, insistiendo que por ejemplo para ubicar $\frac{3}{2}$ se debe dividir tanto la primera como la segunda unidad en dos partes iguales y tomar tres de ellas, por esta razón resulta en la parte media entre 1 y 2.



En los números racionales se definen las siguientes operaciones:

A. Suma

Dados dos números racionales $\frac{a}{b}$ *y* $\frac{c}{d} \in Q$

Se define la *suma* como $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

El denominador de la suma se denomina *común denominador*; sin embargo, puede considerarse como el *mínimo común múltiplo* entre los denominadores; es decir, el número más pequeño que es divisible por todos los denominadores.

Ejemplo 1

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{7} = \frac{(3)+(7)+(1)(5)}{(5)(7)} = \frac{21+5}{35} = \frac{26}{35}$$

En este ejemplo el común denominador se obtiene como producto de los dos denominadores puesto que 35 es el número más pequeño que es divisible por ambos denominadores, es decir es el mínimo común múltiplo entre 5 y 7.

Ejemplo 2

$$\frac{7}{6}+\frac{1}{3}=\frac{7+(1)(2)}{6}=\frac{7+2}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

En el ejemplo anterior el número más pequeño que es divisible por los denominadores es 6 por tanto este es el común denominador o mínimo común múltiplo para los denominadores 6 y 3.

Ejemplo 3

$$\frac{7}{3}+6=\frac{7}{3}+\frac{6}{1}=\frac{7+18}{3}=\frac{25}{3}$$

Es decir, al sumar un entero con una fracción se considera que el entero tiene como denominador uno, de esta manera se aplica la definición en forma inmediata.

B. Resta

La resta en los racionales se realiza análogamente a la de la suma, por tanto,

$$\text{Si } \frac{a}{b} \text{ y } \frac{c}{d} \in Q, \text{ entonces } \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

Ejemplo

De $\frac{1}{7}$ restar $\frac{4}{5}$

Solución

$$\frac{1}{7}-\frac{4}{5}=\frac{5-28}{35}=\frac{-23}{35}$$

C. Multiplicación

Al multiplicar dos racionales se obtiene un racional con numerador (el producto de los numeradores de los factores) y como denominador el producto de los denominadores de los factores, es decir,

$$\text{Si } \frac{a}{b} \text{ y } \frac{c}{d} \in Q, \text{ entonces } \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Ejemplo 1

Multiplicar $\frac{3}{4} \times \frac{6}{20}$

Solución

$$\frac{3}{4} \times \frac{6}{20} = \frac{18}{80} = \frac{9}{40}$$

Observe que este último resultado se obtuvo de simplificar por 2, es decir, dividir tanto numerador como denominador entre 2.

Ejemplo 2

Efectuar $\left(2+\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{3}-4\right)$.

Solución

$$\left(2+\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{3}-4\right) = \left(\frac{13}{5}\right) \times \left(-\frac{11}{3}\right) = -\frac{143}{15}$$

Es claro que antes de hacer el producto es conveniente realizar la suma y resta en cada uno de los paréntesis.

D. División

Dados dos números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, se define $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

Esta manera de definir la división es equivalente a multiplicar $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

Ejemplo 1

Efectuar la operación $\frac{4}{3} \div \frac{5}{9}$

Solución

$$\frac{4}{3}\div\frac{5}{9}=\frac{4\times 9}{3\times 5}=\frac{36}{15}=\frac{12}{5}$$

Observe que en este caso se simplificó el resultado, es decir, se dividió tanto el numerador como el denominador entre 3. También se tiene el proceso de amplificación que consiste en multiplicar tanto el numerador como el denominador por el mismo número.

Ejemplo 2

$$\frac{4+\frac{2}{5}}{2-\frac{1}{3}}$$

Solución

$$\frac{4+\frac{2}{5}}{2-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{22}{5}}{\frac{5}{3}}=\frac{3\times 22}{5\times 5}=\frac{66}{25}$$

Ejemplo 3

$$4+\frac{1}{5+\frac{1}{3}}$$

Solución

$$4+\frac{1}{5+\frac{1}{3}}=4+\frac{1}{\frac{16}{3}}=4+\frac{3}{16}=\frac{67}{16}$$

Nota: La división también se puede escribir así:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\times d}{b\times c}$$

En esta forma se dice que el resultado de dividir los dos racionales es un racional cuyo numerador es el producto de los extremos *a* y *d*, y el denominador es el producto de los medios *b* y *c*. Esta operación es de bastante utilidad en los diferentes procesos que involucran racionales.

1.1. Ejercicios

Realizar la operación indicada y simplificar, si es posible.

1.

a. $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+5$

b. $2+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\right)$

c. $5+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{5}\right)$

d. $\frac{5}{3}+\left(2+\frac{1}{7}\right)$

e. $7-\left(1+\frac{3}{5}\right)$

f. $\left(1-\frac{2}{5}\right)-8$

2.

a. $\frac{2}{7}\left(\frac{3}{4}-\frac{7}{3}\right)+9$

b. $\left(2+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{7}-5\right)$

c. $5\left(7\left(\frac{5}{6}+8\right)-3\right)$

3.

a. $\left(5-\frac{1}{5}\right)\div\left(2+\frac{1}{2}\right)$

b. $5-\dfrac{1}{2+\dfrac{5}{3}}$

c. $\dfrac{1-\dfrac{1}{2}}{3-\left(1-\dfrac{2}{3}\right)}\div\left(1-\dfrac{3}{4}\right)$

d. $\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\div\left(2-\dfrac{3}{1-\dfrac{3}{2}}\right)$

e. $-5\left\{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\left[-3-\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{2}{5}-5\right)+2\right]-10\right\}$

f. $\dfrac{3}{5}\left\{-8\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}\right)+6-\dfrac{7}{2}\right\}$

g. $\dfrac{1}{5}-3\left\{-4-\dfrac{4}{5}\left(2-\dfrac{2}{7}\right)-\dfrac{1}{8}\right\}$

4. De una parcela de 3 000 fanegadas se vende $\frac{1}{7}$ y se arrienda $\frac{3}{5}$; de lo que queda, $\frac{1}{9}$ se cultivan y el área restante se deja para jardín. ¿Cuántas fanegadas quedaron para jardín?
5. Una persona es propietaria de los $\frac{7}{3}$ de un terreno y vende $\frac{4}{9}$ de su parte. ¿Qué parte del terreno ha vendido?
6. Si una llave vierte $1\frac{3}{4}$ litros de agua por minuto, ¿cuánto tiempo empleará en llenar un depósito de $45\frac{1}{4}$ litros de capacidad?
7. Si Luis realiza un trabajo en 20 días y Lucio lleva a cabo el mismo trabajo en 25 días, ¿cuántos días gastarán en el mismo trabajo, laborando juntos?
8. Al gastar $\frac{2}{5}$ de un capital y después $\frac{2}{3}$ de lo que queda, se tiene aún US$50.000 dólares. ¿Cuál era el capital inicial?

E. Representación decimal

Consideremos nuevamente el racional $\frac{a}{b}$.

Es importante tener en cuenta que esta escritura también representa una división del número a en el número b.

Así por ejemplo del número $\frac{2}{5}$ al efectuar la división se obtiene el número 0.4 el cual se denomina *número decimal*.

El racional $\frac{2}{5}$ es equivalente al decimal 0.4.

De la misma manera, $\frac{1}{2}$ =0.5, $\frac{1}{3}$ =0.333. . ., etc.

En el primer caso se dice que el racional tiene una expresión decimal finita y en el segundo que tiene una expresión decimal periódica, es decir, la cifra o cifras decimales iguales se repiten en forma consecutiva, en tal caso este decimal se denota de la siguiente forma:

$$\frac{1}{3}=0.\overline{33}$$

Observamos que al conocer el decimal es posible hallar el racional equivalente; por ejemplo, si se quiere hallar el racional equivalente a $0.\overline{25}$, se procede así:

$$0.25=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$$

De la misma manera cuando se tienen decimales periódicos, se puede proceder como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Hallar el racional equivalente al decimal $0.\overline{125}$.

Solución

i. Hacemos n = $0.\overline{125}$ (1)
ii. Multiplicamos por mil en ambosmiembros de la igualdad $1000n$ = $125.\overline{125}$ (2)
iii. Restamos de la segunda igualdad la primera (2)-(1), despejamos y simplificamos, es decir: $999n=125\Rightarrow n=\frac{125}{999}$

1.1.4. Conjunto de números irracionales (I)

Definido este conjunto como aquellos números que no son racionales, es decir no se pueden escribir de la forma $\frac{a}{b}$ con ay b números enteros.

Son representativos de ellos los números π, e, $\sqrt{2}$, ; la representación decimal de estos números no es finita tampoco periódica, es decir;

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730951\ldots$$

$$\pi = 3.141592653589793\ldots$$

$$e = 2.718281828459045\ldots$$

La representación por ejemplo de $\sqrt{2}$ en la recta de los reales se debe hacer con una construcción con regla y compás.

En este orden de ideas la recta de los reales tiene entonces la forma

Es importante entonces recordar que la recta de los reales contiene todos los números, es decir, cada número tiene un punto sobre la recta y viceversa.

1.1.5. Axiomas de cuerpo en los números reales ($\Re$, +, ×)

El conjunto de números reales con las operaciones de suma y producto forman un *cuerpo*, esto quiere decir que cumple con los siguientes axiomas.

Axioma	Nombre ley	Ley
1	Clausurativa en la suma	$a+b=c$ para todo $a,b,$ y c en $\Re$, la suma de números reales es nuevamente un número real.
2	Conmutativa de la suma	$a+b=b+a$ para todo $a,b,$ en $\Re$, la suma de números reales permite intercambiar los sumandos. $3+0.45=0.45+3$ $3.45=3.45$
3	Asociativa en la suma	$(a+b)+c=a+(b+c)$ para todo $a,b,$ y c en $\Re$, la suma en los números reales puede hacerse agrupando sumandos. $(2+\frac{1}{4})+\pi=2+(\frac{1}{4}+\pi)$ $\frac{9}{4}+\pi=2+\frac{1+4\pi}{4}$ $\frac{9+4\pi}{4}=\frac{9+4\pi}{4}$
4	Elemento neutro para la suma	Existe 0 en $\Re$ tal que para todo a en $\Re$, $a+0=0+a$, el número cero es el módulo de la suma, es decir todo número real sumado con el cero da como resultado el mismo número. $\sqrt{5}+0=0+\sqrt{5}\Rightarrow\sqrt{5}=\sqrt{5}$
5	Inverso aditivo	Para todo a en $\Re$, existe $-a$ en $\Re$ tal que $a+(-a)=(-a)+a=0$. Todo número real tiene un opuesto aditivo, es decir, al sumarlos da cero. $17+(-17)=(-17)+17=0$
6	Clausurativa para el producto	Para $a,b,$ y c en $\Re$ $(a)(b)=c$, el producto de números reales es un número real. $(4\sqrt{2})\sqrt{8}=4\sqrt{2.8}=4\sqrt{16}=(4).(4)=16$
7	Conmutativa para el producto	Para todo a y b en $\Re$ $(a)(b)=(b)(a)$, el producto de números reales permite intercambiar factores. $\frac{8}{5}(3)=(3)\frac{8}{5}\Rightarrow\frac{8(3)}{5}=\frac{(3)(8)}{5}\Rightarrow\frac{24}{5}=\frac{24}{5}$
8	Asociativa para el producto	Para a, b y c en $\Re$ $(ab)\cdot c=a.(bc)$, al multiplicar tres o más números se debe proceder asociando de a dos. $((-3)(\sqrt{5}))2=(-3)((\sqrt{5})(2))\Rightarrow-6\sqrt{5}=-6\sqrt{5}$
9	Elemento neutro para el producto	Existe 1 en $\Re$ tal que para todo a en $\Re$. Todo número real multiplicado por el número uno tiene como producto el mismo número real. El número uno se denomina módulo del producto.
10	Inverso multiplicativo	Para todo a en $\Re$, $a\neq 0$ existe $a^{-1}=\frac{1}{a}$ tal que $a^{-1}=1=aa^{-1}$. Todo número real diferente de cero tiene un inverso multiplicativo conocido también como el recíproco de dicho número. Así por ejemplo el opuesto multiplicativo de 8 es $8^{-1}=\frac{1}{8}$
11	Distributiva para el producto	Para todo a,b y c en $\Re$ $a(b+c)=ab+ac$. Al multiplicar un real por la suma de números reales el resultado será la suma de los productos del número por cada uno de los sumandos. $12\left(\sqrt{7}+\sqrt[3]{7}\right)=12\sqrt{7}+12\sqrt[3]{7}$

1.1.6. Demostraciones de las propiedades de las fracciones

P_1: Suma de fracciones homogeneas

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}\ ; c\neq 0$$

Demostración:

$$\begin{aligned}\frac{a}{c}+\frac{a}{c} &= ac^{-1}+bc^{-1}; && \text{Propiedad del inverso multiplicativo}\\ &=(a+b)c^{-1}; && \text{Propiedad distributivo}\\ &=\frac{a+b}{c}; && \text{Propiedad del inverso multiplicativo}\end{aligned}$$

P_2:: Suma de fracciones heterogeneas

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}\ ; bd\neq 0$$

Demostración:

$$\frac{ad+bc}{bd}=(ad+bc)(bd)^{-1};\ \text{Propiedad del inverso multiplicativo}$$

$$=(ad+bc)(b^{-1}\cdot d^{-1});\ \text{Propiedad distributivo, exponentes}$$

$$=(ad)(b^{-1}\cdot d^{-1})+(bc)(b^{-1}\cdot d^{-1});\ \text{Propiedad distributiva}$$

$$=(ab^{-1})(d\cdot d^{-1})+(cd^{-1})(b\cdot d^{-1});\ \text{Propiedad asociativa}$$

$$=(ab^{-1})(1)+(cd^{-1})(1);\ \text{Inverso multiplicativo}$$

$$=ab^{-1}+cd^{-1};\ \text{Propiedad modulativa}$$

$$=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\ ;\ \text{Propiedad inverso multiplicativo}$$

P_3: Producto de fracciones

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}; bd\neq 0$$

Demostración:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=ab^{-1}\cdot cd^{-1};\ \text{Propiedad del inverso multiplicativ o}$$

$$=a\cdot\left(\frac{1}{b}\right)\cdot c\left(\frac{1}{d}\right);\ \text{Propiedad del inverso multiplicativo}$$

$$=ac\cdot\left(\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{d}\right);\ \text{Propiedad conmutativa y asociativa}$$

$$=ac\cdot\left(\frac{1}{bd}\right);\ \text{Propiedad modulativa del producto}$$

$$=\frac{ac}{bd}$$

P_4: División de fracciones

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Demostración:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1};$$

Definición $A \div B = A \cdot B^{-1}$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}; \text{Definición } A^{-1} = \frac{1}{A}$$

> **Nota:** *La importancia de recordar estos axiomas está en la utilización de los mismos en el desarrollo de los diferentes procesos del álgebra, trigonometría, geometría analítica, cálculo, etc. A continuación se dan algunos ejemplos concretos en los cuales son necesarios los anteriores axiomas.*

1.1.7. Cuerpo ordenado

Un conjunto de números que cumpla los axiomas de cuerpo anteriores y además el axioma de orden que se menciona a continuación se denomina un cuerpo ordenado.

Axioma	Ley
12	Si a y b son *números reales*, una y sólo una de las siguientes relaciones se cumple: $a > b$, $a = b$, *o* $a < b$
	Las cuales se leen: *a mayor que b, a igual a b, o a menor que b.* Lo anterior nos confirma que el conjunto de números reales es ordenado. **Observación.** *Si* $a>0$, decimos que *a* es *positivo* o *no negativo*.

Ejemplo 1

Establezca la relación de orden entre los siguientes pares de números**:**

a. -12 y 5

b. 0.25 y $\frac{1}{4}$

c. $\frac{7}{5}$ y $\frac{3}{4}$

Solución

La relación de orden que se tiene es entonces:

a. $-12<5$

b. $0.25 = \frac{1}{4}$

c. $\frac{7}{5} > \frac{3}{4}$

Ejemplo 2

Ordene los siguientes números: $-2.5, -\frac{1}{2}, 5, e^2, \frac{\sqrt{2}}{3}, 0.523, \sqrt[3]{8}$

Solución

Los números dados tienen entonces el siguiente orden: $-2.5 < -\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{3} < 0.523 < \sqrt[3]{8} < 5 < e^2$

Definición: para a y b números realeS:

i. $a > b \Leftrightarrow a - b \in \Re^{+}$, es decir, $a - b > 0$
ii. $a < b \Leftrightarrow a - b \in \Re^{-}$, es decir , $a - b < 0$
iii. $a \leq b \Leftrightarrow a < b$ *o* $a = b$

Ejemplo

Vemos, que $2 > \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \in \Re^{+}$ es decir, $\frac{1}{2} = 0.5$ es positivo. $-12 < 2 \Leftrightarrow -12 - 2 = -14 \in \Re^{-}$ es decir, -14 es negativo.

1.1.8. Desigualdades y valor absoluto

Definición: una *desigualdad* es un enunciado el cual establece que un número es menor que otro.

Así por ejemplo la desigualdad $a<b$ significa que el número a es menor que el número b; en la recta real tiene la representación:

Es fundamental recordar las siguientes propiedades de las desigualdades:

i. *Si* $a < b$ y $c \in \Re$ *entonces* $a \pm c < b \pm c$

   Esta propiedad afirma que en una desigualdad puede sumarse o restarse la misma cantidad en ambos miembros y la desigualdad no cambia, es decir, la relación de orden se mantiene.

ii. *Si* $a < b$ y $c \in \Re$, $ac < bc$ *si* $c > 0$, *y* $ac > bc$ *si* $c < 0$

   La propiedad afirma que en una desigualdad al multiplicar por un número positivo en ambos miembros, la desigualdad no cambia de sentido, es decir se mantiene, mientras que si el número por el que se multiplica es negativo la desigualdad cambia de sentido.

Definición: Si $a \in \Re$ el valor absoluto de este número es:

$$|a| = \begin{cases} a \ \ si \ \ a \geq 0 \\ -a \ \ si \ \ a < 0 \end{cases}$$

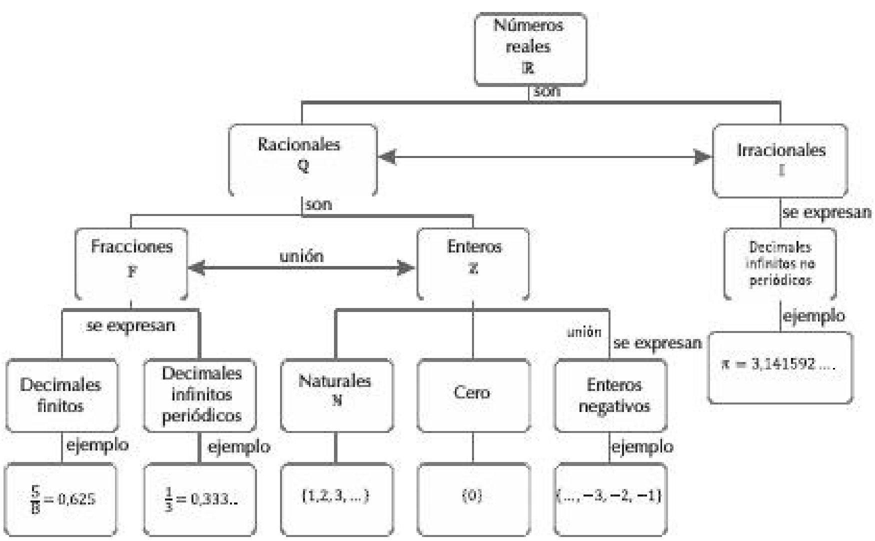
Ejemplos

$|-17| = -(-17) = 17$ ya que $a = -17 < 0$

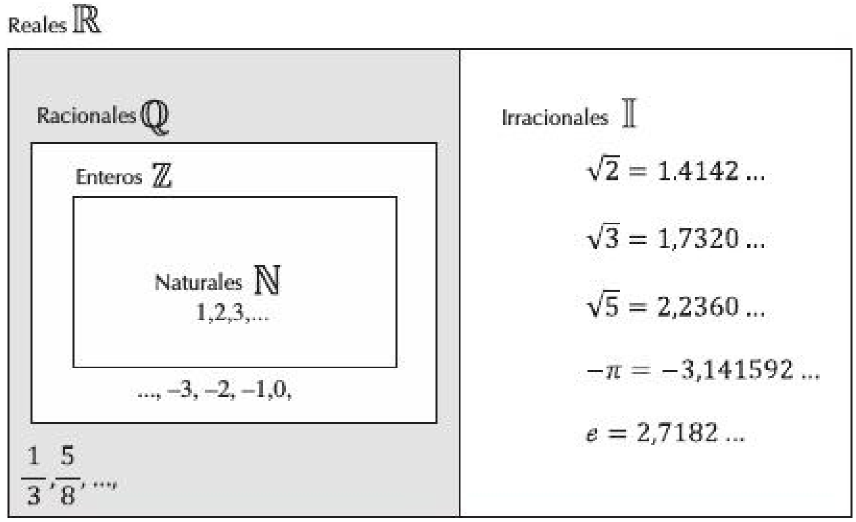
$|5| = 5$ puesto que $a = 5 > 0$

1.1.9. Esquema de la relación

Esquema de la relación entre el conjunto de los números reales y sus subconjuntos.



El esquema anterior se representa en el siguiente diagrama



1.2. Exponentes enteros y racionales

1.2.1. Potenciación

Exponentes enteros positivos

Si n es un número entero positivo y a es cualquier número real, entonces el producto $a.a. . .a$ (n veces) se escribe de la siguiente forma:

$$\boxed{a.\, a.\, a\, .\, .\, .\, a = a^n}$$

Donde n es el exponente, a es la base y a^n es la n-potencia de a.

Ejemplo 1

$(3)(3)(3)(3)(3)=3^5$
$x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot z = x^2 \cdot y^3 \cdot z^1 = x^2 y^3 z$

Entiéndase que x, y, z representan números reales.

Ejemplo 2

Para a y b números reales, $(a+b)^2=(a+b)(a+b)$

Ejemplo 3

$(-\pi)(-\pi)(-\pi)=(-\pi)^3=-\pi^3$
$e \cdot e \cdot e = e^3$
$\ln x \cdot \ln x \cdot \ln x \cdot = (\ln x)^3 = \ln^3 x$

1.2.2. Reglas para los exponentes

Los números reales y sus operaciones tienen propiedades o reglas, las cuales permiten la solución de las diferentes operaciones o situaciones que se presentan, en el caso de los exponentes también se definen algunas propiedades fundamentales que se utilizan para solucionar diferentes situaciones que se presentan a menudo; estas reglas son de obligatorio cumplimiento, por tanto es importante aprenderlas y utilizarlas adecuadamente.

i) Producto de potencias de igual base

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Al multiplicar dos potencias de igual base, se obtiene una nueva potencia con la misma base y con un exponente que corresponde a la suma de los exponentes de los factores del producto.

Ejemplo 1

$\pi^3 \cdot \pi^6 = \pi^{3+6} = \pi^9$

ii) Potencia de una potencia

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Al elevar una potencia a un nuevo exponente o potencia, se obtiene una potencia con la misma base y el exponente es el producto de los exponentes.

Ejemplo 2

$$\left[(-2)^3\right]^4 = (-2)^{3.4} = (-2)^{12} = 4096$$

iii) Distributiva para el producto

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Luego al elevar un producto a una potencia *n*, se obtiene el producto de las potencias de los factores del producto.

Ejemplo 3

$$\left(\frac{2}{3}x\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot x^4 = \frac{2^4}{3^4} \cdot x^4 = \frac{16}{81}x^4$$

iv) Distributiva para el cociente

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad para \quad b \neq 0$$

La potencia de un cociente es igual al cociente de la potencia del dividendo, dividido en la potencia del divisor.

Ejemplo 4

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}$$

v) División de potencias de igual base: consideremos las siguientes expresiones:

i. $\frac{a^6}{a^5} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = a$, es decir, $\frac{a^6}{a^5} = a^{6-5} = a^1 = a$

$\frac{a^3}{a^5} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} \cdot \frac{1}{a \cdot a} = 1 \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2}$, es decir,

ii. $\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^{5-3}} = \frac{1}{a^2}$

De los anteriores ejemplos se tiene el siguiente resultado

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & si \quad m > n \\ 1 & si \quad m = n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & si \quad m < n \end{cases}$$

Ejemplos

$$\frac{125x3}{25x2} = \frac{53x3}{52x2} = 5^{3-2}x^{3-2} = 5^1x^1$$

$$\frac{\pi^{100}}{98} = \pi^{100-98} = \pi^2$$

$$\frac{8y5}{32y7} = \frac{23y5}{25y7} = \frac{1}{25-iy7-5} = \frac{1}{22y2} = \frac{1}{4y2}$$

$$\frac{z^5}{z}2 = z^{5-(-2)} = z^7$$

$$\frac{(-6)5}{(-6)2} = (-6)^{5-2} = (-6)^3 = -216$$

1.2.3 Exponente cero y exponentes negativos

Sea la expresión $a^5 \cdot a^0 = a^{5+0} = a^5$ observe que al multiplicar por a^0 la expresión a^5 ***no se altera,*** es decir que a^0 debe ser 1, es decir:

$$a^0=1$$

Recordemos que si $a \neq 0$, entonces $\frac{1}{a}$ es llamado *inverso multiplicativo* de a, es fácil mostrar que:

$$a^{-1}=\frac{1}{a}$$

Consideremos la expresión:

$$a^{-3}=a^{(-1)(3)}=\left(a^{-1}\right)^3=a^{-1}\cdot a^{-1}\cdot a^{-1}=\frac{1}{a}\frac{1}{a}\frac{1}{a}=\frac{1}{a^3},\text{ así }\ a^{-3}=\frac{1}{a^3}$$

Luego, *Si* $a \in \Re$, $a \neq 0$ *y* $n \in Z^+$ *se tiene*: $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

Ejemplo

$$\text{Simplificar: } \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{20}x^3y^4}{\left(\frac{1}{4}\right)^{23}x^3y^2z}$$

Solución

$$\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{20}x^3y^4}{\left(\frac{1}{4}\right)^{23}x^3y^2z}=\frac{x^{3-3}y^{4-2}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{23-20}z}=\frac{x^0y^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^3z}=\frac{1\cdot y^2}{\frac{1}{64}z}=\frac{64y^2}{z}$$

Ejemplos

Simplifique las siguientes expresiones, eliminando paréntesis y exponentes negativos:

a. $\frac{(ax)^3}{x^{-5}}=\frac{a^3x^3}{x^{-5}}=a^3x^{3-(-5)}=a^3x^{3+5}=a^3x^8$

b. $\frac{(x^{-3})^3}{(x^3z^2)^4}=\frac{x^{(-3)(3)}}{(x^3)^4(z^2)^4}=\frac{x^{-9}}{x^{12}z^8}=\frac{1}{x^{21}z^8}$

c. $$\begin{aligned}x^{-5}(3x^7-4x^6+10x^5)&=x^{-5}(3x^7)-x^{-5}(4x^6)+x^{-5}(10x^5)\\&=3x^{-5+7}-4x^{-5+6}+10x^{-5+5}\\&=3x^2-4x+10\end{aligned}$$

d. $(x^{-2}+y^{-2})^{-1}=\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)^{-1}=\left(\frac{y^2+x^2}{x^2y^2}\right)^{-1}=\frac{x^2y^2}{y^2+x^2}$

$$
\begin{aligned}
\frac{x^{-2}+y^{-2}}{(xy)^{-2}} &= (x^{-2}+y^{-2})(xy)^2 \\
&= x^{-2}\cdot(xy)^2 + y^{-2}\cdot(xy)^2 \\
&= x^{-2}\cdot(x^2\cdot y^2) + y^{-2}\cdot(x^2\cdot y^2) \\
&= (x^{-2}\cdot x^2)y^2 + (y^{-2}\cdot y^2)\cdot x^2 \\
&= 1\cdot y^2 + 1\cdot x^2
\end{aligned}
$$

e. $= y^2 + x^2$

1.2. Ejercicios

1. Efectúe las operaciones y simplifique:

a. $\left[\dfrac{2^{-1}+5^{-1}}{(2+5)^{-1}}\right]^{-2}$

b. $\dfrac{1\frac{1}{5}-2\frac{2}{7}-\frac{1}{4}}{-12+\frac{1}{12}}$

c. $\left\{\left[\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2}\right]^{-1}\right\}^{-3/2}$

d. $\left(\dfrac{2}{3}\right)\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-5}$

e. $-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3}\div\left(\dfrac{2}{3}\right)^{5}$

f. $\dfrac{-2}{5-\dfrac{1}{4+\dfrac{2}{3-\dfrac{1}{5}}}}$

g. $\left(\dfrac{z^2y^{-3}}{z^{-1}y^2}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{z^{-2}y^{-1}}{z^{\frac{5}{2}}y^{\frac{2}{3}}}\right)$

h. $\dfrac{([0,1\times 3]+0.5)\div 0.25}{(0.5\div 0.1)\div(0.2-0.02)}$

i. $\left(\dfrac{1}{0.2}+\dfrac{1}{0.02}+\dfrac{1}{0.002}\right)\times 10^2$

2. Escriba cada número en notación decimal:
   a. 2.33×10^{-4}
   b. $1254\times10^{-}5$
   c. 0.000248×10^{6}

3. Escriba el número indicado en cada enunciado en notación científica:
   a. El área de la superficie terrestre total del mundo es aproximadamente 1800000 000 000 000 pies.
   b. La vida media del elemento Uranio 235 es 4 5000 000 000 años aproximadamente.
   c. El diámetro de nuestro satélite natural es aproximadamente 3 476 000 metros.

4. ¿Cuál de los siguientes pares de números está más cerca uno del otro? e y π o e^2 y π^2
5. Simplifique los siguientes expresiones, eliminando paréntesis y exponentes negativos:

   a. $(-y^3)^5$

   b. $a^2\cdot a^{-5}$

   c. $(2x)^3.x^{-5}$

   d. $(a^{-3}b)^{-2}$

   e. $(-x^6)^2$

   f. $(5a)^{-3}a^5$

   g. $(xy^{-4})^{-2}$

h. $(ab^2c^4)^{-1}(abc)^{-4}$

i. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \div 5^{-4}$

j. $\frac{(a^{-3})^4}{(a^4)^{-3}}$

k. $\frac{(-y^3)^4}{(-y)^{-3}}$

l. $\frac{x^{-4}}{x^{-8}}$

m. $a^2(3a-a+5a-1)$

n. $\frac{(xy^{-2})^{-1}}{x^{-2}y^{-1}}$

o. $x^4(x^{-2}-x^{-1})$

p. $[(3x)^{-2}+(3y)^{-2}]^{-2}$

q. $(ab)^{-1}(a^{-1}+b^{-1})^{-1}$

r. $y^{-1}\div(y+y^{-1})^{-1}$

s. $(x^{-2}+y^{-2})^{-1}$

t. $\frac{1}{5x^{-4}} - \frac{1}{4x^{-4}}$

u. $\frac{a^{-4}}{4a^2} - \frac{a^2}{6a^6}$

v. $\left(\frac{3}{x^2} + x^{-2}\right) \div \frac{1}{2x^{-4}}$

1.2.4. Notación científica

La notación científica se utiliza para cálculos de cifras de números muy grandes o decimales muy pequeños; esta notación utiliza potencias de 10 y se aplica en las diferentes ramas de las ciencias.

Ejemplos

1. La distancia media de Júpiter al Sol es aproximadamente 483 900 000 millas.
2. La capacidad de almacenamiento de datos de una computadora de última generación es de 500 000 000 000 000 bytes.
3. La carga eléctrica, de un electrón es aproximadamente –0. 000 000 000 000 000 00016 columbios.

Sin embargo, en los textos científicos o técnicos las cifras no aparecen escritas de forma tan grandes, sino más bien simplificadas, utilizando un procedimiento matemático denominado notación científica. Por tanto, las cifras de los anteriores ejemplos aparecen escritas en textos de ciencia y técnica, de la siguiente forma:
La distancia media de Júpiter al Sol es de 4893 × 105 millas; la capacidad de almacenamiento de datos de una computadora es de 5 × 1014 bytes y la carga eléctrica de un electrón es aproximadamente –1,6 × 10–19 columbios.

4. Los siguientes números están expresados en notación científica.
   a. El número de Avogadro;
      6,020000000000000000000000 = 6,02 × 1023 moléculas / mole.
   b. El Angstrom, 0,000000001 = 0,1 × 10–8

1.3. Radicales y exponentes racionales

¿Cuál es el valor de $\sqrt{49}$? El valor de $\sqrt{49}$ = + 7 y no ±7 lo cual es un error común. Nótese que $\sqrt{49}$ se llama radical y sólo representa la raíz cuadrada positiva de 49; esto es, $\sqrt{49}=7$

Una expresión de la forma $a^{\frac{1}{n}}$, con *a un número real no negativo*, se representa como $\sqrt[n]{a}$; es decir, $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$

1.3.1. Reglas para los radicales

i) Exponente racional:

Sea $a^{\frac{m}{n}}=a^{m\cdot\frac{1}{n}}=(a^m)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, luego para cualquier $n\in Z^+$ se cumple $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$, en particular si $m=n$, entonces $\sqrt[n]{a^n}=a$

Ejemplo

$$\left(\sqrt[5]{16x^4}\right)^2=\left(\sqrt[5]{2^4x^4}\right)^2=\left[(2x)^{\frac{4}{5}}\right]^2=(2x)^{\frac{8}{5}}$$

ii) Producto de raíces de igual índice:

Como:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}=(a\cdot b)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a\cdot b}$$

según la propiedad tres de exponentes y la definición de raíz, la raíz n-ésima de un producto es igual al producto de las raíces n-énsimas de los factores, es decir:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

iii) Cociente de raíces de igual índice:

Como:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

según propiedad cuatro de exponentes y definición de radicales, la raíz n-ésima de un cociente es igual al cociente de las raíces n-ésimas del dividendo y del divisor, es decir:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} .$$

Ejemplo

$$\frac{\sqrt{96x^5y^2}}{5\sqrt{6xy^4}} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{96x^5y^2}{6xy^4}} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{16x^4}{y^2}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{4x^2}{y} = \frac{4x^2}{5y}$$

v) Raíz de una raíz:

Como:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{\frac{1}{m}} = \left[a^{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n}\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n.m}} = \sqrt[nm]{a} .$$

Así para hallar la raíz de una raíz, se escribe el mismo subradicando y se multiplican los índices de los radicales dados, es decir,

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Ejemplo

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = (64)^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = (64)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

1.3.2. Simplificación de radicales

En algunos casos es más ventajoso expresar una cantidad en función de radicales que en función de exponentes fraccionarios. Utilizando las reglas presentadas anteriormente un radical es simplificado completamente cuando:

i. No hay fraccionarios bajo el radical.
ii. Ningún factor que sea potencia *n-ésima* perfecta aparece en radical de índice n.

Ejemplo 1

Simplificar $\sqrt[3]{64x^5y^4}$

Solución

$$\sqrt[3]{64x^5y^4}=\sqrt[3]{4^3x^3y^3x^2y}=\sqrt[3]{(4xy)^3}\ \sqrt[3]{x^2y}=4xy\ \sqrt[3]{x^2y}$$

Ejemplo 2

Simplificar: $\sqrt{\frac{5}{3}}$

Solución

$$\sqrt{\frac{5}{3}}=\sqrt{\frac{5\cdot 3}{3\cdot 3}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$$

Ejemplo 3

Simplificar: $\sqrt[4]{\frac{81x^2y^4}{z^2}}$

Solución

Es más fácil simplificar este ejercicio si se introducen exponentes fraccionarios:

$$\sqrt[4]{\frac{81x^2y^4}{z^2}}=\left(\frac{3^4x^2y^4}{z^2}\right)^{\frac{1}{4}}=\frac{3^{\frac{4}{4}}x^{\frac{2}{4}}y^{\frac{4}{4}}}{z^{\frac{2}{4}}}=\frac{3x^{\frac{1}{2}}\ y}{z^{\frac{1}{2}}}$$

Así para eliminar el denominador del subradical se tiene:

$$\frac{3x^{\frac{1}{2}}\ y}{z^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{z^{\frac{1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}}}=\frac{3y(xz)^{\frac{1}{2}}}{z^{\frac{2}{2}}}=\frac{3y}{z}\sqrt{xz}$$

1.3. Ejercicios

1. Simplifique cada una de las siguientes expresiones, siendo *a*, *b*, *x*, *y* y *z* números reales.

   a. $\sqrt{30}$

   b. $\sqrt{\frac{15}{4}}$

   c. $\sqrt[3]{-125}$

   d. $\sqrt[3]{81a^4b^6z^5}$

   e. $\sqrt{x^2y^2z^2}$

   f. $\sqrt{\frac{2}{9}+\frac{7}{9}}$

   g. $\sqrt{x^{-4}+x^{-4}}$

   h. $\sqrt{z+15+\frac{10}{z}}$

   i. $\sqrt[5]{\frac{243}{32}}$

   j. $\sqrt[3]{\frac{128x^9y^4}{z^6}}$

2. Encuentre *n* tal que las siguientes proposiciones sean verdaderas:

   a. $9\sqrt{3} = 3^n$

   b. $\frac{\sqrt{3}}{27} = 3^n$

   c. $\sqrt[4]{\frac{2}{16}} = 2^n$

   d. $\sqrt{\sqrt{3}} = 3^n$

3. Evalúe las siguientes expresiones:

   a. $\sqrt{125}$

b. $\sqrt[3]{64}$

c. $\sqrt[3]{-27}$

d. $(625)^{-2/5}$

e. $\left(\frac{16}{27}\right)^{-2/3}$

f. $(0.64)^{-1/2}$

g. $(0.81)^{-3/4}$

h. $(9)^{-1/2} \div (125)^{-1/3}$

i. $(0.001)^{-2/3}$

4. Simplificar las siguientes expresiones:

a. $\left(\frac{125x^3}{27}\right)^{2/3}$

b. $(243x^5y^{-10})^{1/5}$

c. $\sqrt[3]{\frac{27x^3}{8y^3}}$

d. $\left(\frac{x^{-1/5} \cdot y^{3/5}}{x^{-2/5} \cdot y^{-4/5}}\right)^{10}$

e. $\frac{(x^2y)^{-1/4} \cdot (xy)^{1/4}}{(xy^{-2})^{1/6}}$

f. $\frac{2^{4n} \cdot 3^{2n} \cdot 6^n}{8^n \cdot 9^{2n} \cdot 3^n}$

5. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas

a. $\sqrt{-16} = -4$

b. $\sqrt{12} = \sqrt{4} + \sqrt{3}$

c. $\sqrt{100} = 50$

d. $\sqrt{27} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{9}$

e. $\sqrt{(a+b)^2} = a + b$

f. $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$

1.3.3. Adición y sustracción de radicales

Al sumar o restar radicales, todos los radicales deben ser semejantes, es decir, deben tener el mismo índice y la misma cantidad en el subradical.

Ejemplo 1

Simplificar, reduciendo a términos semejantes: $5\sqrt{3} - 5\sqrt{12} + 2\sqrt{75}$

Solución

$$\begin{aligned} 5\sqrt{3} - 5\sqrt{12} + 2\sqrt{75} &= 5\sqrt{3} - 5\sqrt{4\cdot 3} + 2\sqrt{25\cdot 3} \\ &= 5\sqrt{3} - 5\cdot 2\sqrt{3} + 2\cdot 5\sqrt{3} \\ &= 5\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Simplificar, reduciendo a términos semejantes $\sqrt{150} + \sqrt{50} - 10\sqrt{2}$

Solución

$$\begin{aligned} \sqrt{150} + \sqrt{50} - 10\sqrt{2} &= \sqrt{25\cdot 6} + \sqrt{25\cdot 2} - 10\sqrt{2} \\ &= 5\sqrt{6} + 5\sqrt{2} - 10\sqrt{2} \\ &= 5\sqrt{6} - 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

Ejemplo 3

Simplificar, reduciendo a términos semejantes:

$$\sqrt[3]{a^4 b} + \frac{1}{\sqrt[3]{a^2 b^2}} + 3\sqrt[3]{ab^4}$$

Solución

$$\sqrt[3]{a^4b}+\frac{1}{\sqrt[3]{a^2b^2}}+3\sqrt[3]{ab^4}=\sqrt[3]{a^3\cdot ab}+\frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a^2b^2}\cdot\sqrt[3]{ab}}+3\sqrt[3]{ab\cdot b^3}$$

$$=\sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{ab}+\frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a^3b^3}}+3\sqrt[3]{ab}\cdot\sqrt[3]{b^3}$$

$$=a\cdot\sqrt[3]{ab}+\frac{\sqrt[3]{ab}}{ab}+3\sqrt[3]{ab}\cdot b$$

Ejemplo 4

Simplificar, reduciendo a términos semejantes:

$$8\sqrt{\frac{1}{3}}+\frac{3}{2}\sqrt{108}-9\sqrt{3}$$

Solución

$$8\sqrt{\frac{1}{3}}+\frac{3}{2}\sqrt{108}-9\sqrt{3} = 8\sqrt{\frac{1\cdot 3}{3\cdot 3}}+\frac{3}{2}\sqrt{108}-9\sqrt{3}$$

$$= 8\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{3}{2}\sqrt{9\cdot 4\cdot 3}-9\sqrt{3}$$

$$= 8\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{3}{2}(3\cdot 2)\sqrt{3}-9\sqrt{3}$$

$$= 8\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{18}{2}\sqrt{3}-9\sqrt{3}$$

$$= 8\frac{\sqrt{3}}{3}+9\sqrt{3}-9\sqrt{3}$$

$$= \frac{8}{3}\sqrt{3}$$

1.4. Ejercicios

1. Simplificar, reduciendo términos semejantes:
   a. $8\sqrt{3}-\sqrt[4]{128}+5\sqrt{64}$
   b. $\frac{1}{\sqrt{5}}-5$
   c. $2\sqrt{5}+5\sqrt{125}-\sqrt{625}$
   d. $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{54}$
   e. $3\sqrt{6}+\sqrt{216}$

f. $\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{5}{\sqrt{64}}-2\sqrt{4}$

g. $\sqrt[3]{81x^{10}}+\sqrt[3]{-27x^{7}}+5\sqrt[3]{x}$

h. $\sqrt{a^5b^6c^9}+abc^3\sqrt{ac}$

i. $\frac{9\pm\sqrt{100-36}}{3}$

j. $\frac{-18\pm\sqrt{169-69}}{5}$

k. $\frac{1}{4}\sqrt{64}+21\sqrt{\frac{1}{8}}-\frac{4\sqrt{64}}{\sqrt{8}}$

l. $\sqrt{5\sqrt{96}}-\sqrt{40\sqrt{24}}+\sqrt{15\sqrt{54}}$

m. $\left[\sqrt[6]{\frac{1}{64}}-\sqrt[6]{\frac{512}{729}}\right]$

n. $\sqrt[4]{\sqrt{256x^8}}$

o. $\left(6\sqrt{\frac{4}{5}}-7\sqrt{\frac{5}{4}}\right)^2$

1.3.4. Multiplicación y división de radicales

Para multiplicar radicales se aplica la regla mencionada anteriormente, $\sqrt[n]{ab}=(ab)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}.$

Si los radicales tienen distinto índice, deben convertirse en radicales con igual índice, por medio de expresiones algebraicas equivalentes que tengan exponentes fraccionarios.

Ejemplo 1

Determinar el producto de $\sqrt{8ab^3}$ y $\sqrt{20a^2b}$ y simplificar.

Solución

$$\begin{aligned}\sqrt{8ab^3}\cdot\sqrt{20a^2b} &= \sqrt{2^3ab^3 4\cdot 5a^2b} = \sqrt{2^3\cdot 2^2\cdot 5a^3b^4}\\ &= \sqrt{2^2\cdot 2^2\cdot 2\cdot 5a^2ab^2b^2} = 2\cdot 2abb\sqrt{2\cdot 5a}\\ &= 4ab^2\sqrt{10a}\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Determinar el producto de $\sqrt{6a^3}$ y $\sqrt[3]{4a^4b^2}$ y simplificar.

Solución

$\sqrt{6a^3}\cdot\sqrt[3]{4a^4b^2}=(6a^3)^{\frac{1}{2}}\cdot(4a^4b^2)^{\frac{1}{3}}$ se expresan como potencias de exponentes fraccionarios. Luego se determina el mínimo común múltiplo de los índices de cada radical, es decir, *m.c.m.*(2,3)=6, y se divide este número entre los índices de cada radical, es decir, $\frac{6}{2}=3$ y $\frac{6}{2}=2$, el resultado corresponde al exponente de cada subradicando.

$$\begin{aligned}(6a^3)^{\frac{1}{2}}\cdot(4a^4b^2)^{\frac{1}{3}} &= (6a^3)^{\frac{3}{6}}\cdot(4a^4b^2)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{6^3a^9}\cdot\sqrt[6]{4^2a^8b^4} = \sqrt[6]{6^3a^9\,4^2\,a^8\,b^4}\\ &= \sqrt[6]{2^6\cdot 2(a^2)^6a^5 3^3b^4} = 2a^2\cdot\sqrt[6]{54a^5b^4}\end{aligned}$$

La división de radicales se realiza en forma similar al producto.

Ejemplo 3

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{3}{5}}=\sqrt{\frac{3\cdot 5}{5\cdot 5}}=\sqrt{\frac{15}{5^2}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$$

Ejemplo 4

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt[6]{5^2}}{\sqrt[6]{3^3}}=\sqrt[6]{\frac{25}{27}}=\sqrt[6]{\frac{25\cdot 27}{27\cdot 27}}=\sqrt[6]{\frac{675}{3^3\cdot 3^3}}=\sqrt[6]{\frac{675}{3^6}}=\frac{\sqrt[6]{675}}{3}$$

1.3.5. Racionalización

Racionalice el denominador de: $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

$$\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3}{5^{\frac{1}{2}}}=\frac{3\cdot 5^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}}=\frac{3\cdot 5^{\frac{1}{2}}}{5^{1}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

Como puede verse el ejercicio trata de eliminar el radical del denominador, lo cual se logra amplificando el numerador y el denominador por $\sqrt{5}$ en este caso.

Ejemplo

Racionalice el denominador de la expresión.

Solución

$$\frac{3}{\sqrt[5]{2x^3}}=\frac{3}{\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[5]{x^3}}=\frac{3}{2^{\frac{1}{5}}\cdot x^{\frac{3}{5}}}=\frac{3\cdot 2^{\frac{4}{5}}x^{\frac{2}{5}}}{2^{\frac{1}{5}}x^{\frac{3}{5}}\cdot 2^{\frac{4}{5}}x^{\frac{2}{5}}}=\frac{3\cdot\left(2^4x^2\right)^{\frac{1}{5}}}{2x}=\frac{3\cdot\sqrt[5]{2^4x^2}}{2x}$$

Ejemplo

Racionalice el numerador de las expresiones.

Solución

a. $\sqrt{5}=\frac{\sqrt{5}}{1}=\frac{\sqrt{5}\sqrt{5}}{1\cdot\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5^2}}{\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}$

b. $\frac{\sqrt{7}}{5}=\frac{\sqrt{7}\sqrt{7}}{5\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7^2}}{5\sqrt{7}}=\frac{7}{5\sqrt{7}}$

c. $\frac{\sqrt[3]{5x^2}}{2}=\frac{5^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3}}}{2}=\frac{5^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}}{2\cdot 5^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}}=\frac{5x}{2\sqrt[3]{5^2x}}$

El proceso de eliminar radicales del denominador, se denomina *racionalizar el denominador*; si existe un solo radical en el denominador el proceso de eliminarlo es fácil, según los ejemplos anteriores; también es similar si se desea eliminar radicales del numerador, pero si en el denominador o numerador existen más de un radical se debe encontrar una expresión llamada *factor racionalizador* de forma que, multiplicada por el radical del denominador o numerador, el resultado quede sin radicales.

Ejemplos

Racionalizar al denominador $\frac{5+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

Como $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=2\cdot 2-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=4-3=1$

Eliminamos el radical del numerador multiplicando o amplificando en el numerador y denominador por el factor $2-\sqrt{3}$

$$\frac{5+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{(5+\sqrt{3})\,(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})\,(2-\sqrt{3})}=\frac{10-5\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3}{4-3}=\frac{7-3\sqrt{3}}{1}=7-3\sqrt{3}$$

Si la racionalización es del numerador se multiplica el numerador y el denominador por $5-\sqrt{3}$, resultando:

$$\frac{5+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{\left(5+\sqrt{3}\right)\left(5-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(5-\sqrt{3}\right)}=\frac{25-5\sqrt{3}+5\sqrt{3}-\sqrt{3}\sqrt{3}}{10-2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-\sqrt{3}\sqrt{3}}$$
$$=\frac{25-3}{10+3\sqrt{3}-3}=\frac{22}{7+3\sqrt{3}}$$

Este factor racionalizador se llama *conjugada* es decir; si $a,b>0$ se tiene:

i. $a+\sqrt{b}$ su conjugada es $a-\sqrt{b}$
ii. $a-\sqrt{b}$ su conjugada es $a+\sqrt{b}$
iii. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ su conjugada es $\sqrt{a}-\sqrt{b}$
iv. $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ su conjugada es $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

Nótese que al multiplicar cada denominador o numerador por su conjugada se elimina el radical; más adelante esta racionalización se realiza por medio de *factorización*.

Ejemplo

Racionalizar al denominador: $\frac{1}{1-\sqrt[3]{8}}$

Solución

Como $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ se tiene:

$$\frac{1}{1-\sqrt[3]{8}}=\frac{1^2+1\cdot\sqrt[3]{8}+\left(\sqrt[3]{8}\right)^2}{\left(1-\sqrt[3]{8}\right)\left(1^2+1\cdot\sqrt[3]{8}+\left(\sqrt[3]{8}\right)^2\right)}=\frac{1+\sqrt[3]{8}+2^2}{1-8}=\frac{5+\sqrt[3]{8}}{-7}$$

1.5. Ejercicios

1. Efectúese las siguientes multiplicaciones y expresar el resultado en la forma más simple:

    a. $\sqrt{7}\cdot\sqrt{10}$

    b. $\left(3+\sqrt{6}\right).\left(3-\sqrt{6}\right)$

    c. $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{32}$

d. $\sqrt{b}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[5]{b}$

e. $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{4}$

f. $(2\sqrt{5}+3\sqrt{6}\ )^2$

g. $\sqrt{2}\cdot(\sqrt{7})+\sqrt{8}$

h. $\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}\right)^2$

i. $(\sqrt{3}+5)\cdot(\sqrt{3}-5)$

j. $\sqrt{5}+3\sqrt{5}\cdot\sqrt{5-3}\cdot\sqrt{3}$

2. Efectúese las siguientes divisiones y expresar el resultado en la forma más simple:

a. $\sqrt{42}\div\sqrt{7}$

b. $\sqrt[4]{5}\div\sqrt[3]{4}$

c. $3\sqrt{108}\div 2\sqrt{14}$

d. $\sqrt{\frac{14}{5}}\div\sqrt{\frac{5}{13}}$

e. $\sqrt[3]{20}\div\sqrt[3]{4}$

f. $\sqrt[4]{18a^3b}\div\sqrt[4]{12ab^3}$

g. $\sqrt[3]{\frac{3}{5}}\div\sqrt[3]{\frac{2}{15}}$

h. $(5\sqrt{7}-3\sqrt{5})\div\sqrt{2}$

i. $\sqrt[3]{y^5x^2}\div\sqrt{x^3y^2}$

j. $(4\sqrt{3}+2\sqrt{5})\div\sqrt{2}$

3. Racionalice el denominador de cada una de las siguientes expresiones:

a. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

b. $\dfrac{3}{\sqrt{x-5}}$

c. $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$

d. $\dfrac{z}{\sqrt{z}-\sqrt{x}}$

e. $\dfrac{12\sqrt[3]{4}}{26\sqrt[3]{5}}$

f. $\dfrac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

g. $\dfrac{5}{\sqrt[3]{5}}$

h. $\dfrac{y-\sqrt{y^2-16}}{y+\sqrt{y^2-16}}$

i. $\dfrac{5}{1-\sqrt{3}}$

j. $\dfrac{x+y}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$

k. $\dfrac{3}{\sqrt[5]{9}}$

l. $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}+\sqrt{3}}$

m. $\dfrac{15}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

n. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{(3-\sqrt{5})^2}}$

1.4. NÚMEROS COMPLEJOS

Un número complejo se expresa de la forma $z= a +bi$, donde a y b son números reales, a los que se les llaman parte real y parte imaginaria respectivamente, los cuales se denotan por:

$\Re e(z)=a$ (Parte real de z)

$Im(z)=b$ (Parte imaginaria de z)

Ejemplo:

Si el número complejo es $\frac{1}{2}+\frac{4}{5}i$ entonces $\Re e(z)=\frac{1}{2}$ y $Im(z)=\frac{4}{5}$

Definición: Dos números complejos son iguales:

$$a+bi=c+di$$

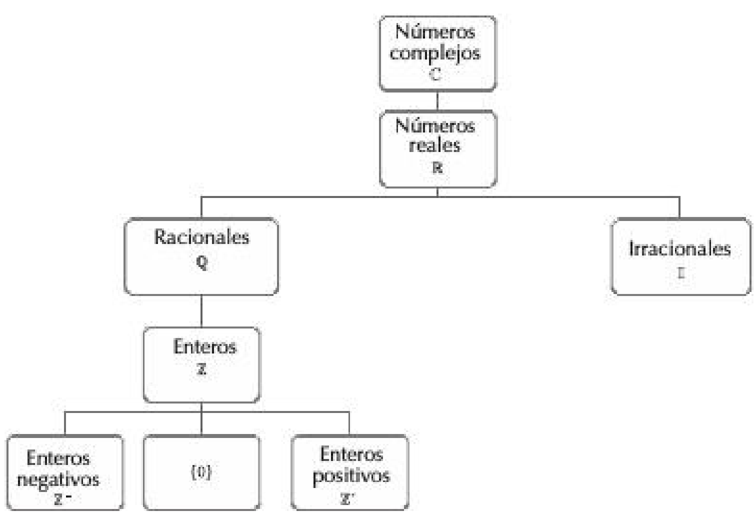
$z_1=z_2$ si y sólo si $a=c$ y $b = d$.

También se puede escribir $\Re e(z_1)=\Re e(z_2)$ y $Im(z_1)=Im(z_2)$.

Nota:

En los números complejos no se puede establecer cuando un número es más pequeño que otro y viceversa, es decir, no tiene sentido afirmar que:

$$1 +2i<8+8i$$
$$3+2i >1+i$$



1.4.1. Operaciones entre números complejos

i. Suma

Para sumar y restar números Complejos, sólo basta con sumar o restar partes reales y partes imaginarias respectivamente de $z_1=a+bi$ y $z_2=c+di$. Es decir:

$$z_1+z_2=(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$$

Ejemplo 1

Al sumar $z_1=3+2i$ y $z_2=4+3i$ se tiene

$z_1+z_2=(3+2i)+(4+3i)=(3+4)+(2+3)i=7+5i$

Ejemplo 2

Al restar z_1+z_2 se tiene:

$z_1+z_2=(3+2i)-(4+3i)=(3-4)+(2-3)i=-1-i$

El conjunto de los números complejos tiene cantidades equivalentes a cero y a la unidad como en los números reales.

Por ejemplo, $0+0i=0$ es el cero en los complejos y $1+0i=1$ funciona como la unidad.

Si tomamos la ecuacion $z^2+1=0$, es decir $z^2=-1$, no existe un número real z que satisfaga la ecuacion mencionada, pero se puede pensar en $z=\sqrt{-1}$, de tal manera que al sustituirla en dicha ecuacion se tiene la identidad:

$$z^2=\left(\sqrt{-1}\right)^2=-1$$

Se puede observar que $\sqrt{-1}$ no es un número real y se puede definir como el imaginario $i=\sqrt{-1}$, que equivale a $i^2=-1$. De esta manera se define el producto de números complejos.

ii. Producto

$$\begin{aligned} z_1.z_2. &= (a+bi)\cdot(c+di) \\ &= ac+adi+bci+bdi^2 \\ &= ac+adi+bci-bd \text{ por ser } i^2=-1 \\ &= (ac+bd)+(ad+bc)i \end{aligned}$$

Ejemplo 1

Multiplique $z_1=3+2i$ con $z_2=4+3i$

Solución

$$z_1.z_2. = (3+2i)\cdot(4+3i) = 12+9i+8i+6i^2$$
$$= 12+17i-6 = 6+17i$$

iii Conjugado de un número complejo

Decimos que dos números complejos son conjugados uno del otro, si sus partes reales e imaginarias son iguales pero con signos opuestos, Se denota por $-bi$, es decir si $z=a+bi$ su conjugado es $\overline{z}=a-bi$

Ejemplo 1

Si $z=\frac{1}{2}+2i$ el conjugado es $\overline{z}=\frac{1}{2}-2i$

Ejemplo 2

Si $z=\frac{7}{8}-3i$ el conjugado es $\overline{z}=\frac{7}{8}+3i$

1.4.2. Propiedades del conjugado

i. Si tomamos $z=a+bi$ y $\overline{z}=a-bi$ sumamos el complejo z con $\overline{z}$; se tiene la siguiente identidad:

$$z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=2\Re ec(z)$$

Por lo tanto $\frac{z+z}{2}=\Re e(z)$

ii. Si restamos:

$$z-\overline{z}=(a+bi)-(a-bi)=a-a+bi+bi=2bi$$

es decir $2bi=2Im(z)i$
Por lo tanto

$$\frac{z-\overline{z}}{2i}=\mathrm{Im}(z)$$

iii. Si se multiplican los conjugados entre sí, se tiene:

$$z\cdot\overline{z}=(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2-abi+abi-b^2i^2=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$$

es decir:

Así $z\cdot \overline{z}=a^2+b^2$.

Similarmente se presenta otras propiedades de conjugados sin demostrar:

iv. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

v. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

vi. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$ si $z_2 \neq 0$

vii. $\overline{\overline{z}} = z$

1.4.3. Cociente entre números complejos

Como ya se definió el conjugado de un número complejo con sus respectivas propiedades, ahora se puede definir el cociente entre complejos. Es decir; si

$z_1=a+bi$ y $z_2=c+di$ se puede hallar $\frac{z_1}{z_2}$

Para hallar el cociente entre z_1 y z_2 primero se multiplica el cociente $\frac{z_1}{z_2}$ por el por el conjugado del denominador, es decir:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)}$$

$$= \frac{ac - adi + bci + bdi}{c^2+d^2} \text{ por ser } z_2 \cdot \overline{z_2} = c^2 + d^2$$

$$= \frac{(ac+bd)+(bc+ad)i}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right) i$$

Ejemplo

$$\frac{3+2i}{2+3i}$$

Solución

$$\frac{3+2i}{2+3i} = \frac{(3+2i)\cdot(2-3i)}{(2+3i)\cdot(2-3i)}$$

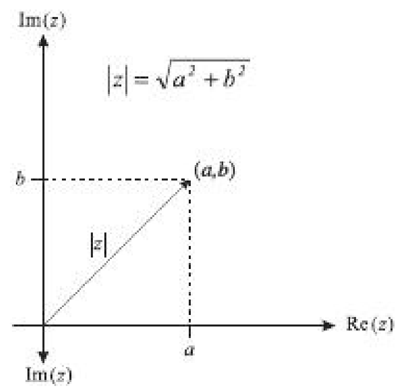
$$= \frac{6-9i+4i-6i^2}{2^2+3^2}$$

$$= \frac{6-5i+6}{13} = \frac{12-5i}{13} = \frac{12}{13} - \frac{5}{13}i$$

1.4.4. Módulo de un número complejo

El módulo o valor absoluto de un número complejo $z=a+bi$ se define como el número real no negativo $\sqrt{a^2+b^2}$ y se nota |z|, Esto quiere decir: $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

La interpretación geométrica del modulo



$z(|z|)$ es la distancia del punto (a, b) y el origen (0, 0) como se muestra en la siguiente figura.

Nótese que el eje horizontal y vertical representa la parte real e imaginaria respectivamente de un número complejo.

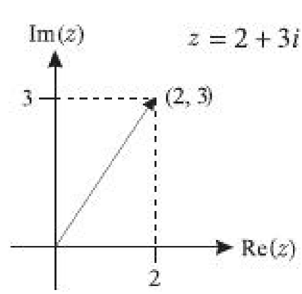
Este sistema se llama *plano complejo.*

Ejemplo 1

Represente el número $z=2+3i$ en el plano complejo:

Solución

La parte real e imaginaria de z es 2 y 3 respectivamente, su representación geometrica es:

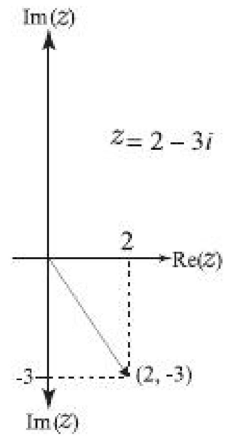


Ejemplo 2

Representar el conjugado de z=2+3i:

Solución

El conjugado es $\overline{z} = 2 - 3i$ y su representación gráfica es:



Ejemplo 3

Halle el módulo de z=2+3i:

Solución

Según la fórmula $z = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$, luego el módulo es: $|z| = \sqrt{13}$

1.4.5. Propiedades del módulo

i. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

ii. $z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

iii. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ si $|z_2| \neq 0$

1.6. Ejercicios

Dados los números complejos z_1=3+2i, z_2=–4–2i, y z_3=–8+4i

1. Halle:
   a. z_1+z_2
   b. $z_1–z_2$
   c. $z_1 \cdot z_2$
   d. $z_2 \cdot z_3$

e. $\frac{z_1}{z_2}$

f. $(z_1+z_2)\cdot z_3$

g. $\frac{z_3}{z_2}$

2. Represente geométricamente en el plano complejo:
   a. z_1
   b. z_2
   c. z_3
   d. z_1+z_2
   e. z_1-z_2
   f. $z_1\cdot z_2$
   g. $\frac{z_1}{z_2}$

3. Halle:
   a. $\overline{z}_1-\overline{z}_2$
   b. $\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$
   c. $\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$
   d. $\overline{z}_1-\overline{z}_2$

4. Halle:
   a. $|z_1|$
   b. $|z_2|$
   c. $|z_3|$
   d. $|z_1+z_2|$
   e. $|z_1-z_2|$
   f. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

5. Con los mismos números complejos, verifique las siguientes propiedades del módulo:

a. $z_1 \cdot \overline{z}_2 = |z|$

b. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

c. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ si $z_2 \neq 0$

1.5. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1.5.1. Introducción

En el trabajo en matemáticas y en general en muchos aspectos del conocimiento humano aparecen expresiones con letras o variables que representan números desconocidos, estas variables reciben también el nombre de incógnitas. Estas incógnitas se representan generalmente con letras como *a, b, c* o *x, y, z*. El uso de estas variables permite efectuar operaciones en las expresiones sin necesidad de conocer un valor particular para las mismas. También es de gran importancia llevar al lenguaje algebraico o de variables sucesos que están en un lenguaje común y viceversa.

Por ejemplo, recordamos que en la geometría se nos habla de área del triángulo y se nos dice que es el semiproducto de la base por la altura. Este enunciado se simplifica en forma muy significativa si escribimos:

$$A = \frac{b.h}{2}$$

Donde, se entiende que b = base , h= altura y A= área.

El trabajo continuo con expresiones algebraicas exige definiciones de conceptos básicos, así como el desarrollo de habilidades y destrezas con las operaciones básicas como la suma, resta, producto, cociente, potencias y radicales, potenciando su uso con algunos elementos de geometría, como área, perímetro y volumen, ya que el trabajo en el cálculo involucra dichas operaciones algebraicas.

Aunque el estudiante esté familiarizado con estos conceptos se recomienda un trabajo juicioso y continuo para lograr que estos conceptos sean claros y precisos. Esto garantizará un desempeño posterior seguro y con óptimos resultados.

Generalmente en Matemáticas se usan letras como *x, y, z, u, w,* etc., para representar variables, mientras que para representar constantes empleamos letras como *a*, *b*, *c*, *d*, etc. Sin embargo, es de vital importancia estar atento al modelo del cual se hace referencia para poder identificar claramente el papel desempeñado por cada una de las letras involucradas en él.

La combinación de letras o variables mediante las operaciones aritméticas, suma, resta, producto, cociente, potencias y radicales da origen a una *expresión algebraica.*

Ejemplo 1

Las expresiones:

$$-75,\ 3x^2y,\ -13x^2-5x+17,\ 4\sqrt{2x+21}-7,\ \frac{2x+3}{\sqrt{x+1}+21}$$

Representan expresiones algebraicas. Recordemos que el número que acompaña a cada una de estas variables o letras se denomina coeficiente numérico o simplemente coeficiente.

Si a estas variables se les asigna un valor numérico particular la expresión tendrá también su valor real.

Ejemplo 2

Si $x=-2$, $y=3$, hallar el valor de la expresión $-3xy^2+12y$

Solución

Sustituyendo x e y en la expresión se obtiene: $-3(-2)(3)^2+12(3)=90$

La expresión algebraica más frecuente en el trabajo del álgebra y el cálculo es el polinomio el cual tiene la representación general:

$$\boxed{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1x + a_0}$$

Donde a_n, a_{n-1}, . . . a_1, a_0 son números reales denominados *coeficientes*, n es un número entero no negativo, cuando $a_n \neq 0$ se dice que el polinomio es de grado n, cada uno de los sumandos en el polinomio se denomina *término o monomio*. Si se tienen *dos términos* hablamos de *binomio, tres términos trinomio* y, en general, *polinomio*.

Ejemplos

$$\begin{array}{rl} -70 & \text{monomio grado 0} \\ 13x+25 & \text{binomio grado 1} \\ -15x^2+8x-\frac{21}{13} & \text{trinomio grado 2} \\ -7x^4-x^3+\frac{1}{12}\,x-9 & \text{polinomio grado 4} \end{array}$$

1.5.2. Adición y sustracción de expresiones algebraicas

En la adición o suma de polinomios o expresiones algebraicas se debe tener en cuenta:

i. Pueden sumarse términos semejantes, es decir, aquellos que tienen la(s) misma(s) variable(s), estas deben tener los mismos exponentes si tienen.
ii. Se suman los coeficientes numéricos de estos términos semejantes y las variables conservan el estado en que aparecen antes de sumar.
iii. Se debe tener en cuenta los signos de los coeficientes en el momento de sumar de tal manera que debe ser claro si el resultado de la suma es un número negativo o no negativo.

Ejemplo 1

Efectuar las operaciones indicadas:

$$(-5x^3+6x^2-x+7)+\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-7\right)$$

Solución

Primero eliminamos los paréntesis:

$$-5x^3+6x^2-x+7+\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-7$$

Seguidamente se agrupan los términos semejantes y se suman

$$\left(-5x^3+\frac{1}{3}x^3\right)+(6x^2-2x^2)+(-x+3x)(7-7)=-\frac{14}{3}x^3+4x^2+2x$$

Esta suma también puede hacerse utilizando la propiedad distributiva $(a+b)c=ac+bc$ ya que puede escribirse así,

$$\left(-5+\frac{1}{3}\right)x^3+(6-2)x^2+(-1+3)x+(7-7)=-\frac{14}{3}x^3+4x^2+2x$$

Ejemplo 2

Efectuar las operaciones indicadas:

$$\left(2x^2-\frac{3}{2}xy+3y^3+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}x^2 4xy-3y^3+4\right)$$

Solución

Al igual que en el ejemplo anterior se eliminan los paréntesis

$$2x^2-\frac{3}{2}xy+3y^3+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}x^2-4xy-3y^3+4$$

Seguidamente se suman términos semejantes

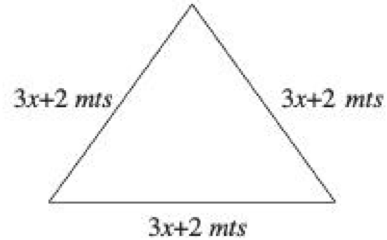
$$\left(2+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(-\frac{3}{2}-4\right)xy+(3-3)y^3+\left(\frac{1}{3}+4\right)=\frac{5}{2}x^2-\frac{11}{2}xy+\frac{13}{3}$$

Ejemplo 3

En un triángulo equilátero uno de sus lados mide $3x+2$ *mts*, hallar el perímetro**.**

Solución

En este tipo de problemas una gráfica puede ser de gran ayuda para lograr una mejor visión del problema y su solución.



> **Nota:** *En un triángulo equilátero todos sus lados son iguales en longitud.*

El primer paso a tener en cuenta es que $x>0$ puesto que se está hablando de longitudes y no tiene sentido una longitud negativa.

El segundo paso es recordar el concepto de *perímetro* el cual se define como *la suma de las longitudes de los lados*, por tanto:

$$P=(3x+2)+(3x+2)+(3x+2)$$
$$P=3x+2+3x+2+3x+2$$
$$P=(3+3+3)x+2+2+2$$
$$P=9x+6\ mts.$$

Como caso particular si $x = 1\ mts$ el perímetro de este triángulo tiene un valor de $P=9(1)+6=15\ mts$.

La ***resta*** o ***sustracción*** tiene un proceso similar al de la suma salvo que, al eliminar los paréntesis, se deben cambiar los signos de los términos del sustraendo.

Ejemplo 4

$$\left(7x^3-2x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)-(3x^3+x^2-2x+7)$$

Solución

Procedemos a eliminar los paréntesis

$$7x^3-2x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}-3x^3+x^2-2x+7$$

Enseguida se procede a sumar:

$$(7-3)x^3+(-2-1)x^2+\left(\frac{1}{2}+2\right)x+\left(-\frac{1}{3}-7\right)$$
$$4x^3-3x^2+\frac{5}{2}x-\frac{22}{3}$$

Ejemplo 5

$$\left(-3x^{2n+1}m+2x^{2n}m^2-x^{2n-1}m^{3n}+\frac{1}{3}\right)-\left(3x^{2n+1}m-4x^{2n}m^2+\frac{1}{2}x^{2n-1}m^{3n}-2\right)$$

Solución

Se eliminan los paréntesis:

$$-3x^{2n+1}m+2x^{2n}m^{2}-x^{2n-1}m^{3n}+\frac{1}{3}-3x^{2n+1}m+4x^{2n}m^{2}-\frac{1}{2}x^{2n-1}m^{3n}+2$$

Procedemos a sumar:

$$(-3-3)x^{2n+1}m+(2+4)x^{2n}m^{2}+\left(-1-\frac{1}{2}\right)x^{2n-1}m^{3n}+\left(\frac{1}{3}+2\right)$$

$$-6x^{2n+1}m+6x^{2n}m^{2}-\frac{3}{2}x^{2n-1}m^{3n}+\frac{7}{3}$$

1.5.3. Multiplicación de expresiones algebraicas

Al multiplicar dos o más polinomios o expresiones algebraicas se deben tener en cuenta:

i. En el producto de dos monomios o términos se multiplican los coeficientes entre sí y las variables entre sí, teniendo en cuenta que del producto de cantidades no negativas o positivas se obtiene una cantidad no negativa, y al multiplicar cantidades de signo contrario se obtienen cantidades negativas.
ii. Utilizar la propiedad de potencias $a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m}$.
iii. Hacer uso de las propiedades distributivas.
iv. Utilizar propiedades conmutativas y asociativas de la multiplicación.
$a(b+c)=ab+ac$ o $(a+b)c=ac+bc$ y
$(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)=ac+ad+bc+bd$

Ejemplo 1

$$\left(-5x^{2}z^{\frac{1}{2}}y^{2}\right)\left(\frac{1}{4}x^{2}z^{3}y^{n}\right)=(-5)\left(\frac{1}{4}\right)x^{2+2}z^{\frac{1}{2}+3}y^{2+n}=-\frac{5}{4}x^{4}z^{\frac{7}{2}}y^{2+n}$$

Ejemplo 2

$$-m^{2}y(2m^{3}-3m^{2}y+3my^{2})$$

$$=(-m^{2}y)(2m^{3})+(m^{2}y)(-3m^{2}y)+(-m^{2}y)(3my^{2})$$

$$=-2m^{5}y+3m^{4}y^{2}-3m^{3}y^{3}$$

Ejemplo 3

$(3x^{2}–2)(2x+5)=3x^{2}(2x+5)–2(2x+5)=6x^{3}+15x^{2}–4x–10$

Ejemplo 4

$2y[5–y(y–3)]+3y(y–2)^{2}–(3y+1)(y–1)$

Solución

En este ejercicio aparece el factor $(y–2)^{2}$; en el desarrollo del mismo puede utilizarse la propiedad de los exponentes

$a^{2}=a\cdot a$, procedemos a simplificar así:

$2y[5-y^2+3y]+3(y-2)(y-2)-(3y^2-3y+y-1)$

$10y-2y^3+6y^2+3y(y^2-2y-2y+4)-3y^2+2y+1$

$10y-2y^3+6y^2+3y-12y^2+12y-2y-3y^2+2y+1$

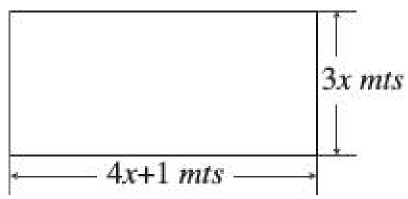
$y^3+9y^2+24y+1$

Ejemplo 5

Un rectángulo tiene longitud $4x+1$ *mts* y de ancho $3x$ *mts* hallar el área. ¿Cuál es el área si $z=3$ *mts*?

Solución

Nuevamente se sugiere que en problemas como este se elabore una gráfica puesto que nos orienta en el proceso a seguir en la solución.



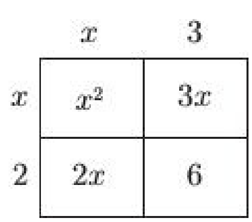
Recordamos que *el área del rectángulo está dada por el producto del largo por el ancho*, por tanto:

$A=(3x\ mts)(4x+1\ mts)=12x^2+3x\ mts^2$

Se debe considerar $x>0$ cuando $x=3$ *mts* el área es $A=12(3)^2+3(3)=117mts^2$

Ejemplo 6

El producto $(x+2)(x+3)$ puede tener una representación geométrica como lo muestra la figura. La longitud del rectángulo es $(x+3)$ mientras el ancho es $(x+2)$. El área de cada uno de los rectángulos formados al multiplicar el largo por ancho, es el que se observa en la figura. Se puede entonces ver que el área es igual a $x^2 + 5x + 6$.



Solución

Cuando se efectúa el producto algebraico entre los dos factores vemos que se **algebraica** obtiene el mismo resultado geométrico, en efecto:

$$(x+2)(x+3)=x^2+2x+3x+6=x^2+5x+6$$

Sin embargo no sobra aclarar que no todos los productos algebraicos de polinomios **pueden ser representados geométricamente.**

1.5.4. División de polínomios

La división del polinomio $P(x)$ entre $Q(x)$ se escribe de una de las siguientes formas:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad P(x) \div Q(x), \text{ o } \begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \hline & \end{array}$$

En el proceso de la división debe tenerse en cuenta:

i. ***P(x)*** *se denomina el* ***dividendo*** *y* ***Q(x) el divisor****, el grado del dividendo debe ser mayor o igual al grado del divisor.*

ii. *Utilizar la propiedad de las potencias* $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

iii. *La división de cantidades de signos iguales es positiva o no negativa y la división de cantidades de signos contrarios es negativa.*

Proceso para divir polínomios

Al efectuar una división se procede de la siguiente forma:

i. Ordenar tanto el dividendo como el divisor respecto a una variable en forma decreciente, es decir, de exponente mayor a exponente menor.
ii. Se divide el primer término del dividendo en el primer término del divisor, con lo cual se empieza a obtener el llamado cociente.
iii. El cociente obtenido en el anterior numeral se multiplica por el divisor y su resultado se resta al dividiendo.
iv. El proceso se repite hasta obtener un residuo de menor grado que el divisor lo cual indicará que la división está terminada.

Ejemplo

Dividir el polinomio $2x–6–x^2+2x^3$ en el polinomio $1+x$

Solución

Como se anotó anteriorme te se tiene que el dividendo es el polinomio $2x–6–x^2+2x^3$ el cual al ser ordenado en forma decreciente es $2x^3–x^2+2x–6$, de la misma manera el divisor es el polinomio $1+x$ el cual al ordenarlo es $x+1$. Se procede entonces a efectuar la división con el proceso que conocemos.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3-x^2+2x-6 & x+1 \\
\cline{2-2}
-2x^3-2x^2 \quad & 2x^2-3x+5 \\
\cline{1-1}
-3x^2+2x-6 & \\
+3x^2+3x \quad & \\
\cline{1-1}
+5x-6 & \\
-5x-5 & \\
\cline{1-1}
-11 &
\end{array}
$$

El polinomio $2x^2-3x+5$ corresponde al cociente y el monomio -11 es el residuo.

El proceso es fácil de verificar pues al multiplicar el cociente por el divisor y sumarle el residuo debe obtener nuevamente el dividendo, se tiene,

$$
\begin{aligned}
(x+1)(2xh-3x+5)-11 &= (2xh-3x+5)+(2xh-3x+5)-11 \\
&= 2xi-3xh+5x+2xh-3x+5-11 \\
&= 2xi-xh+2x-6
\end{aligned}
$$

Es importante recordar que esta división también se escribe en la siguiente forma:

$$\frac{2x^3-x^2+2x-6}{x+1}=2x^2-3x+5-\frac{11}{x+1}$$

Este último resultado será de mucha utilidad en el trabajo del cálculo. Esta división se procesa en Estados Unidos de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{r|r}
& 2x^2-3x+5 \\
\cline{2-2}
x+1 & 2x^3-x^2+2x-6 \\
& -2x^3-2x^2 \quad\quad\quad \\
\cline{2-2}
& -3x^2+2x-6 \\
& +3x^2+3x \quad \\
\cline{2-2}
& +5x-6 \\
& -5x-5 \\
\cline{2-2}
& -11 \quad
\end{array}
$$

1.5.5. Productos y cocientes notables

Reciben este nombre debido a que su resultado siempre se comporta o tiene la misma característica de tal manera que al observar que los factores del producto tienen una forma determinada el resultado puede escribirse inmediatamente, a continuación se presentan algunos de ellos.

Producto	**Cociente**
Diferencia de cuadrados	**Diferencia de cuadrados**
$(x-y)(x+y)=x^2-y^2$	

Al multiplicar la suma por la diferencia de los mismos factores el resultado es simplemente el cuadrado del primer sumando menos el cuadrado del segundo sumando. **Ejemplos** $(3m+n)(3m-n)=9m^2-n^2$ $\left(2y-\sqrt{3}\right)\left(2y+\sqrt{3}\right)=4y^2-3$	$\dfrac{x^2-y^2}{x-y}=x+y\ ,\quad \dfrac{x^2-y^2}{x+y}=x-y$ **Ejemplos** $\dfrac{9x^2-16}{3x-4}=3x+4,\quad \dfrac{9x^2-16}{3x+4}=3x-4$
Producto	**Cociente**
Trinomio cuadrado perfecto	**Trinomio cuadrado perfecto**
$(x\pm y)^2=(x\pm y)(x\pm y)=x^2\pm 2xy+y^2$ Al multiplicar dos sumas (restas) que tienen los mismos sumandos, el resultado es el primer sumando al cuadrado más (menos) dos veces el producto de los dos, más el segundo sumando al cuadrado. **Ejemplo** $(3m+2)(3m+2)=9m^2+12m+4$ $\left(3x-\dfrac{1}{2}\right)\left(3x-\dfrac{1}{2}\right)=9x^2-3x+\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x+y}=x+y$ $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x-y}=x-y$ **Ejemplos** $\dfrac{9x^2+24x+16}{3x+4}=3x+4$ $\dfrac{m^2-4mn+4n^2}{m-2n}=m-2n$
Diferencia y suma de cubos	**Diferencia y suma de cubos**
$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a3-b3$ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a3+b3$ Al multiplicar una diferencia (suma) por un trinomio dado por el cuadrado del primer término de la diferencia más (menos) el producto de los dos factores más el cuadrado del segundo factor obtiene el cubo del primer factor menos (más) el cubo del segundo factor. **Ejemplos** $(2x-3)(4x^2+6x+9)=8x3-27$ $(3y+1)(9y^2-3y+1)=27y3+1$	$\dfrac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2$ $\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}=a-b$ $\dfrac{a^3+b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2$ $\dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}=a+b$ **Ejemplo** $\dfrac{64y^3-27}{4y-3}=16y^2+12y+9$

1.7. ejercicios

Efectuar las operaciones indicadas y simplificar:

1. $\left(3x^3y+2x^{\frac{1}{2}}y^2-7xy^3+4\right)+\left(6x^3y-\dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}y^2+3xy^3-\dfrac{2}{5}\right)$

2. $\left(-5x^3-12x^2+\dfrac{1}{3}x-3\right)-\left(3x^3+2x^2+\dfrac{1}{4}x-3\right)+2x^3$

3. $\left(-3z^3n+\dfrac{1}{3}z^2n^2-3zn^3+4\right)+\left(\dfrac{1}{3}z^3n-z^2n^2+2zn^3-\dfrac{1}{4}\right)-\left(\dfrac{1}{2}z^2n^2+3zn^3+2\right)$

4. $\left(\sqrt{m}\,y^3 - 2xy + \frac{1}{2}m^2\sqrt[3]{y} - 2\right) - \left(3\sqrt{m}\,y^3 + 5my - 5m^2\sqrt[3]{y}\right) + \left(-2\sqrt{m}\,y^3 - m^2\sqrt[3]{y} - 2\right)$

5. $-2x^3 - \frac{1}{2}x^2m + 3xm^2 - 2m^3 + 1 - 2xm^2 + 4x^3 - \frac{3}{2}x^2m + 3$

6. $-\left[2\left(-x^2 + 2x - \frac{1}{2}\right) - \left(2x^2 - 3x + 1\right)\right] + 2\left(2x^2 - x + 2\right)$

7. $2p^3 - 2q^2 + 2q - 1 - 2\left(2p^3 - 3q^2 + 2\right) + 3\left(2q^2 - \frac{1}{2}q^2 + 3\right)$

8. $-2\left(2q^3 + q^2 - \frac{1}{3}q + \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(4q^3 - 2q^2 + \frac{1}{2}q - 1\right)$

9. $\left(3\sqrt{p} - 3p + 2\right) - 3\left(2\sqrt{p} - 3p + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}\left(3p - \sqrt{p} - 2\right)$

10. $-2\left[2y^2 - y\left(\frac{1}{3}y + 2\right) + 2\right] + \frac{1}{2}\left(4y^2 - 3y + 2\right)$

11. $(3x - 1)(-2x^2 + 3x + 1)$

12. $-3x\left(5x^3 - 5x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right)$

13. $(x - 3)(2x + 5) - 2x\left(3x^2 - \frac{1}{2}x + 2\right) - 2x(x + 1)$

14. $(x + 1)^2 - (2x + 1)(x - 2) - \left[3x^2 + x\left(x - \frac{3}{2}\right)\right] - 2x^2 + 1$

15. $(y + 1)\left(-y + \frac{1}{3}xy + 2\right) - \frac{3}{2}y^2 + 3xy^2 + 2$

16. $\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)(-2x + 3)$

17. $(2x + 1)(x^2 - 2x + 1)$

18. $-x\left(x-\frac{1}{2}x+2 \right)+(x-1)\left(\frac{1}{2}x+2 \right)-3(2x+1)^2$

19. $(2x-1)(2x+1)-2(x-1)^2+x(-2x+2)$

20. $(\sqrt{x}+1)\left(x^{\frac{3}{2}}-2x+\frac{1}{3} \right)+3(x+1)$

21. Hallar el área de un cuadrado de lado $3x+1$*mts* $x>0$ ¿Cuál es el valor del área cuando $x = 4$ mts?

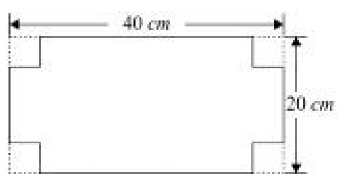
22. Hallar el área para un rectángulo con longitudes $2x+1$*mts* y $4x+1$*mts*, $x>0$ ¿cuál es el área cuando $x = 6$ *mts*?

23. Hallar el área de un trapecio con bases $B = 3x+1$mts b $=x+2$ *mts* $x>0$ y altura $h = 3x$ *mts*, $x>0$. ¿Cuál es el área cuando $x = 10$ *mts*?

24. Hallar el área de un círculo con radio $x+2$ *mts* $x>0$. ¿Cuál es el área cuando $x=6$ *mts*?

25. En un triángulo rectángulo la base tiene una longitud de $2x+3$ *mts*, $x>0$. y una altura de $x+3$ *mts*, $x>0$. ¿Cuál es el área cuando $x= 5$ *mts*?

26. Una pieza rectangular de cartón de 40 *cm* de largo y 20 *cm* de ancho, se cortan cuadrados iguales en cada una de sus esquinas para construir una caja sin tapa, doblando los lados. ¿Cuál es el volumen de la caja en función de x, siendo x la medida de los cuadrados recortados?



27. $(8 - x + 2x^3 - x^2) \div (-2 + x)$

28. $(3x^4 - 2x + x^3 - 1 + 2x^2) \div (x + x^2)$

29. $(x - 2 + x^5 - 3x^3 + 3x^4 - x^2) \div (1 - x^2 + x)$

30. Dividir $\frac{1}{3}x^2+2x^4-x+\frac{1}{2}x^3+1$ en $1-2x^2+x$ comprobar su resultado

31. Efectuar la división y comprobar su resultado. $(m^6-125)\div(m^2-5)$

32. Halle el valor de la expresión algebraica en cada caso para los valores dados.

    a. $-3xy^2 + 2$, $x = -3$, $y = \frac{1}{3}$

    b. $\frac{x^{2n}z+3n}{2x^2+z}$, $x = 3$, $n = -1$, $z = 4$

c. $3+\sqrt{x^2+2n}$, $x = 2, n = 5$

d. $x^3 + x^2 - 4x + 1$, $x = -3$

33. Realizar las siguientes divisiones.

a. $4xh-yh$ entre $2x-y$
b. $36mh-9$ entre $6m+3$
c. $xi-64$ entre $x-4$
d. $125+yi$ entre $5+y$
e. $xj+16$ entre $x+2$
f. $32-yk$ entre $2-y$

34. El trabajo W realizado por una turbina de vapor en cierto tiempo está definido por la fórmula:

$$W=\frac{1}{2}m(v_1-v_2)(v_1+v_2)$$

Donde m es la masa del vapor que se pasa por la turbina durante ese tiempo, $v2$ la velocidad del vapor que entra y $v1$ la velocidad del vapor que sale de la turbina. Efectúe el producto de los factores para simplificar esta fórmula.

35. El teorema de Millman proporciona un atajo para encontrar el voltaje común V, que pasa por cualquier número de bifurcaciones en paralelo con distintas fuentes de tensión. Si hay tres bifurcaciones, entonces el voltaje común es:

$$V=\frac{\frac{V_1}{R_1}+\frac{V_2}{R_2}+\frac{V_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}}$$, simplificar esta expresión.

36. Resolver las operaciones indicadas y simplificar:

a. $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{y}\right)\left(\sqrt{x}+\frac{1}{y}\right)$

b. $\left(a^{1/2}+b^{1/2}\right)\left(a^{1/2}-b^{1/2}\right)$

c. $\left(m+\frac{1}{m}\right)^2$

d. $\left(\sqrt{h^2+1}+1\right)\left(\sqrt{h^2+1}-1\right)$

e. $\left(1+m^{4/3}\right)\left(1-m^{2/3}\right)$

f. $(2-x)(4+2x+x^2)$

37. Pruebe que: $\left(\frac{1}{2}\right)\left[(a+b)^2-(a^2+b^2)\right]=ab$

38. Racionalizar y simplificar las siguientes expresiones:

a. $\dfrac{1}{\sqrt{y+h}-\sqrt{y}}$

b. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}.\sqrt{3-\sqrt{3}}}$

c. $\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}$

d. $\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{z}}$

e. $\left(\dfrac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+y}\right)^{-1}.\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x}\right)^{-1}$

1.6. FACTORIZACIÓN

Al factorizar un polinomio o una expresión algebraica se busca expresarlos como producto de dos o más expresiones algebraicas irreducibles o sea que solo son divisibles por uno y por sí mismos, de tal manera que la multiplicación de los mismos dan como resultado el polinomio original.

Como en muchos resultados algebraicos se tienen algunos procesos ya estandarizados que permiten el logro de la factorización de un polinomio, a continuación recordamos algunos de ellos sin olvidar que hay otros procesos y que, en muchos casos, la metodología para lograr la factorización no es única; por el contrario, se debe hacer uso de los conocimientos ya adquiridos y, además, muchas veces ser un poco ingeniosos.

1.6.1. Factor común

La propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma afirma $a(b+c)=ab+ac$. Lo anterior muestra que si se tiene una expresión como $ab+ac$ esta puede ser expresada como el producto $a(b+c)$. Al número o factor a se denomina ***factor común*** en la expresión $ab+ac$ y la escritura $a(b+c)$ indica que este factor común multiplica a la suma de factores libres del factor común.

Como regla general se dice que ***factorizar una expresión que tenga factores comunes*** es escribir dicha expresión como producto del factor común por la suma de los factores libres de dicho factor, además estos factores comunes deben tomarse con el exponente menor.

Ejemplo 1

$$x^3+x^2=x^2x+x^2$$

Solución

Claramente en este caso el factor común es x^2 por lo tanto:

$$x^3+x^2= x^2(x+1)$$

Ejemplo 2

$$2x^2\mathrm{y}–4xy^2=2xxy–2.2xyy$$

Solución

Se observa como factor común $2xy$ pues es el factor que aparece en ambos sumandos de la expresión y con el menor exponente, así:

$$2x^2\mathrm{y}–4xy^2=2xxy–2.2xyy=2xy(x–2y)$$

Es claro que para comprobar que la factorización es correcta, se realiza la multiplicación de la última expresión y el resultado debe ser la expresión original; del ejercicio anterior se tiene: $2xy(x–2y)=2x^2y–4xy^2$

Ejemplo 3

$m^3 + 2m^2 + m = mm^2 + 2mm + m = m\,(m^2 + 2m + 1)$

Ejemplo 4

$2x^2\sqrt{x+1}-3\sqrt{x+1}=\sqrt{x+1}\,(2x^2-3)$

Este ejemplo muestra que el factor común en una expresión se puede manifestar como *un monomio*, *un polinomio*, *un radical*, entre otros.

1.6.2. Agrupación de términos

Ejemplo 1

Factorizar la expresión $x^3+x^2–x–1$

Solución

Agrupando los dos primeros términos, el tercero y cuarto se obtiene:

$$x^3+x^2–x–1=(x^3+x^2)–(x+1)= x^2(x+1)–(x+1)=(x+1)(x^2–1)$$

En este ejemplo se muestra el caso en el cual se agrupan los términos (primero y segundo) y (tercero y cuarto) apareciendo luego el factor común $(x+1)$.

En general la ***agrupación de términos*** surge de la *propiedad distributiva*:

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd.$$

Se observa entonces que se pueden agrupar el primer y segundo término, en los cuales se tiene el factor común a, o el primero y tercero, cuyo factor común es c. De la misma manera agrupar el segundo y el cuarto, cuyo factor común es d, o el tercero y el cuarto, con factor común b es decir;

$$\begin{aligned} ac+ad+bc+bd &= (ac+ad)+(bc+bd) \\ &= a(c+d)+b(c+d)=(c+d)(a+b) \end{aligned}$$

o también

$$\begin{aligned} ac+ad+bc+bd &= (ac+bc)+(ad+bd) \\ &= c(a+b)+d(a+b)=(a+b)(c+d) \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Factorizar la expresión: $2a^2+6a–a–3$

Solución

Agrupamos el primero y segundo término y el tercero y cuarto término para obtener:

$$2a^2+6a–a–3=(2a^2+6a)–(a+3)=2a(a+3)–(a+3)=(a+3)(2a+1)$$

Otra forma es agrupar el primero con el tercero, cuyo factor común es a, y el segundo y el cuarto con factor común 3:

$$2a^2+6a–a–3=(2a^2–a)+(6a–3)=a(2a–1)+3(2a–1)=(2a–1)(a+3)$$

1.6.3. Diferencia de cuadrados

Al realizar el producto $(a - b)(a + b)$ utilizando la distributiva se obtiene:

$$2\ (a – b)\ (a + b) = a^2 + ab – ba – b^2 = a – b^2$$

El anterior resultado indica que la expresión de la derecha puede ser escrita como *el producto de la suma de la raíz cuadrada de los sumandos, por la diferencia de las raíces cuadradas de los sumandos*, es decir:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

En realidad ya se había hablado de este caso en productos notables.

Ejemplo 1

$$x^2-9=\left(\sqrt{x^2}+\sqrt{9}\right)\left(\sqrt{x^2}-\sqrt{9}\right)=(x+3)(x-3)$$

Ejemplo 2

$$x^2-2=\left(\sqrt{x^2}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x^2}-\sqrt{2}\right)=\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$$

Ejemplo 3

$$\left(y^2-\frac{9}{4}\right)=\left(\sqrt{y^2}-\sqrt{\frac{9}{4}}\right)\left(\sqrt{y^2}+\sqrt{\frac{9}{4}}\right)$$
$$=\left(y-\frac{3}{2}\right)\left(y+\frac{3}{2}\right)$$

Ejemplo 4

$(2x+1)^2-\dfrac{1}{3}$

Al ser una diferencia y el minuendo tener raíz cuadrada exacta, entonces se tiene:

> **Nota:** *El ejemplo 2 muestra que la diferencia de cuadrados es válida en cualquier conjunto numérico, en este caso en los irracionales; en general, es válida en los reales y no siempre en los enteros, como se muestra en la mayoría de los textos.*

$$(2x+1)^2-\frac{1}{3}=\left(\sqrt{(2x+1)^2}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\left(\sqrt{(2x+1)^2}+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$
$$=\left(\sqrt{(2x+1)}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\left(\sqrt{(2x+1)}+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$

1.6.4. Trinomio cuadrado perfecto

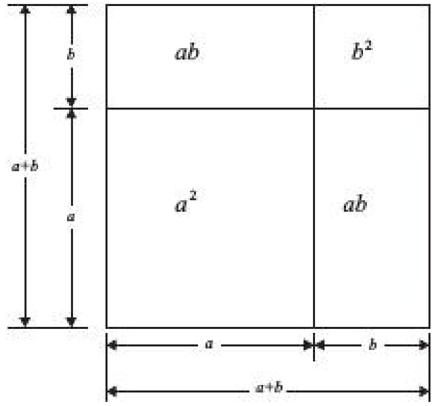
Es importante recordar nuevamente que el desarrollo de la potencia $(a+b)^2$ está dada por:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$$

Este resultado se observa en el siguiente gráfico, el cual verbalmente afirma que $(a+b)^2$ da como resultado *el primer sumando al cuadrado, más el doble producto de los dos sumandos (factores), más el cuadrado del segundo sumando.*

Lo anterior indica que si encontramos un trinomio con estas características $a^2+2ab+b^2$ este puede escribirse en la forma de la potencia inicial es decir $(a+b)^2$.

Es de anotar que si el doble producto aparece negativo es decir, $a^2-2ab+b^2$ su factorización es $(a-b)^2$>



Ejemplo 1 x^2+2x+1

Solución

a. Se observa que se trata de un trinomio.
b. Dos de los sumandos son cuadrados perfectos, es decir $x^2=(x)^2$ +1 y $1=1^2$
c. El tercer sumando tiene la forma $2\sqrt{x^2}\sqrt{1}=2x$

Las características anteriores nos muestran que el trinomio es un *trinomio cuadrado perfecto* por lo tanto $x^2+2x+1=(x+1)^2$.

Ejemplo 2

Factorizar y^2+6y+9

Solución

a. Es un trinomio
b. Dos de los sumandos son cuadrados perfectos,
   $y^2=(y)^2$ y $9=(3)^2$
c. El tercer sumando se obtiene de $2\sqrt{y^2}\sqrt{9}=2y3=6y$

Del anterior análisis, resulta un trinomio cuadrado perfecto por lo tanto $y^2–6y+9=(y+3)^2$**.**

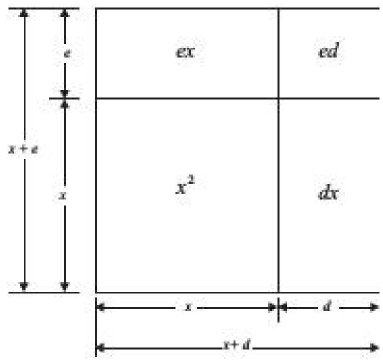
Ejemplo 3

$$16y^2+(3x-2)^2-8y(3x-2)$$
$$=[4y-(3x-2)]^2$$

> Nota: *El signo de la base de la potencia, se toma de acuerdo al signo del factor que resulta del doble producto.*
>
> *Resulta entonces importante recordar que:*
>
> $$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$
> $$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

1.6.5. Trinomio de la forma x^2+bx+c

En este trinomio generalmente b y c son números enteros. Consideremos d y e *números enteros* observemos el diagrama y realizamos el producto algebraico:



$$(x+d)(x+e)=x^2+ex+dx+de=x^2+(e+d)x+de$$

La expresión de la derecha $x^2+(e+d)x+de$ muestra que si existen números d y e tales que su suma sea b; es decir, $e+d=b$ y cuyo producto sea c, es decir, $ed=c$, entonces el polinomio puede ser expresado como $x^2+bx+c=(x+d)(x+e)$.

Ejemplo 1

$z^2+10z+21$

Solución

a. Se trata entonces de un polinomio de la forma x^2+bx+c**.**
b. Se comprueba si existen dos números enteros tales que su suma sea 10 y su producto 21, lo más aconsejable es descomponer c =21 en factores primos, por tanto, 21=(3)(7) 21=(1)(21)**.**

La primera descomposición es la que sirve, puesto que 3+7=10 y (3)(7)=21 de tal manera que la factorización del trinomio es la siguiente: $z^2+10z+21=(z+3)(z+7)$

Ejemplo 2

Factorizar n^4+11n^2+24

Solución

a. El trinomio tiene igual forma a x^2+bx+c ya que si hacemos $x=n^2$ se obtiene, $(n^2)^2+11n^2+24=x^2+11x+24$
b. La descomposición de 24 es:
   24 = (3)(8)
   24 = (4)(6)
   24 = (2)(12)
   24 = (1)(24)

Nota: *Es de tener en cuenta que aunque se trabaja la descomposición en factores primos se trata de hallar dos factores pues es la exigencia para la factorización del trinomio, buscar dos factores que cumplan lo dicho, si se tratara de hacer la descomposición total de 24 se tiene:*

$$24=2\cdot2\cdot2\cdot3=2^3\cdot3$$

esta es una descomposición única.

De estas posibilidades se verifica cual cumple con la suma igual a 11 y producto igual a 24. El producto lo cumplen todas las descomposiciones, sin embargo la suma solo la satisfacen la descomposición primera; por tanto:

$$n^4+11n+24=(n^2+3)(n^2+8)$$

Ejemplo 3

Factorizar:$(3x+1)^2-3(3x+1)-10$

Solución

a. Se tiene un trinomio de la forma x^2+bx+c puesto que si $y=3x+1$ se obtiene $y^2-3y-10$
b. La descomposición para 10 en dos números es: $10=(2)(5)$ $10=(1)(10)$

Por lo tanto $(3x+1)^2-3(3x+1)10=[(3x+1)-5][(3x+1)+2]$ puesto que se cumple $-5+2=-3$ y $(-5)(2)=-10$

1.6.6. Trinomio de la forma ax^2+bx+c

Uno de los procesos de factorización de este trinomio, es el siguiente:

i. Multiplicar el coeficiente independiente c por el coeficiente de x^2, el cual es a, obteniéndose el número ac.
ii. Hallar si es posible números m y n tales que $m+n=b$ y $mn=ac$.
iii. Si se encontraron los números en ii), escribir $ax^2+bx+c=ax^2+mx+nx+c$, luego, mediante agrupación de términos, realizar la factorización de este último.

Ejemplo 1

Factorizar $2y^2+10y+8$

Solución

Siguiendo el proceso indicado se obtiene:

a. En este trinomio $c=8$ y $a=2$ por lo tanto $ac=(2)(8)=16$

b. La descomposición de 16 en dos factores es:
   16=(1)(16)
   16=(4)(4)
   16=(2)(8)
c. De estas descomposiciones b=10=2+8 por tanto:

$$\begin{aligned} 2y^2+10y+8=2y^2+2y+8 &=(2y^2+2y)+(8y+8)\\ &=2y(y+1)+8(y+1)\\ &=(y+1)(2y+8) \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Factorizar $3m^2 + 13m + 10$

Solución 1

Procedemos con la misma metodología:

a. En este caso $a = 3$ y $c = 10$ de tal manera que $ac = (3) (10) = 30$
b. 30 puede ser escrito como los siguientes productos:
   30 = (1) (30)
   30 = (2) (15)
   30 = (5) (6)
   30 = (3) (10)

Como se buscan dos números cuya suma sea 13 entonces estos son 3 y 10 pues 3+10=13=b

c. La factorización es:

$$\begin{aligned} 3m^2+13m+10 &=3m^2+3m+10m+10=(3m^2+3m)+(10m-10)\\ &=3m(m+1)+10(m+1)=(m+1)(3m+10) \end{aligned}$$

Solución 2

a. Se multiplica y divide todo el trinomio por el coeficiente de x^2, es decir:

$$\frac{a\left(ax^2+bx+c\right)}{a}=\frac{a^2x^2+b\left(ax\right)+ac}{a}$$

Observe que no se realiza el producto de a por b.

b. Se hallan, si es posible, números n y m tales que $n + m = b$ y $n \,.\, m = ac$; si esto es posible, entonces:

$$ax^2+bx+c=\frac{(ax+n)(ax+m)}{a}$$

Ejemplo 3

Retomando el primero de los ejercicios anteriores se procede así,

$$2y^2+10y+8=\frac{2(2y^2+10y+8)}{2}=\frac{4y^2+10y(2)+16}{2}$$
$$=\frac{(2y+8)(2y+2)}{2}=(2y+8)(y+1)$$

1.6.7. Diferencia de cubos

Del producto notable $(a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$ se obtiene:

$$(a - b)\,(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$$

En la expresión anterior el resultado de multiplicar los factores en el miembro izquierdo nos da como resultado una diferencia de cubos perfectos, miembro derecho, por tanto, si aparece esta diferencia su factorización se obtiene como la diferencia de las raíces cúbicas del minuendo y sustraendo, multiplicadas por el cuadrado de la raíz cúbica del minuendo, más el producto de las raíces cúbicas del minuendo y sustraendo, más el cuadrado de la raíz cúbica del sustraendo, miembro izquierdo, es decir:

$$a^3-b^3=\left(\sqrt[3]{a^3}-\sqrt[3]{b^3}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a^3}\right)^2+\left(\sqrt[3]{a^3}\right)\left(\sqrt[3]{b^3}\right)+\left(\sqrt[3]{b^3}\right)^2\right.$$

Ejemplo 1

$$y^3-27=\left[\sqrt[3]{y^3}-\sqrt[3]{27}\right]\left[\left(\sqrt[3]{y^3}\right)^2+\left(\sqrt[3]{y^3}\right)\left(\sqrt[3]{27}\right)+\left(\sqrt[3]{27}\right)^2\right]$$
$$=(y-3)(y^2+3y+9)$$

Recuerde que al efectuar el producto del miembro derecho se debe regresar al polinomio original, es decir:

$$(y-3)(y^2+3y+9)=y^3+3y^2+9y-3y^2-9y-27=y^3-27$$

Ejemplo 2

$$8p^6-\frac{1}{64}$$
$$=\left(\sqrt[3]{8p^6}-\sqrt[3]{\frac{1}{64}}\right)\left[\left(\sqrt[3]{8p^6}\right)^2+\left(\sqrt[3]{8p^6}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{1}{64}}\right)+\left(\sqrt[3]{\frac{1}{64}}\right)^2\right]$$
$$=\left(2p^2-\frac{1}{4}\right)\left[\left(2p^2\right)^2+\left(2p^2\right)\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]$$
$$=\left(2p^2-\frac{1}{4}\right)\left(4p^4+\frac{p^2}{2}+\frac{1}{16}\right)$$

Se comprueba nuevamente si la factorización es correcta:

$$\left(2p^2-\frac{1}{4}\right)\left(4p^4+\frac{p^2}{2}+\frac{1}{16}\right)=8p^6+p^4+\frac{p^2}{8}-p^4-\frac{p^2}{8}-\frac{1}{64}=8p^6-\frac{1}{64}$$

1.6.8. Suma de cubos

Del producto notable $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ se obtiene:

$$\boxed{(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+ba^2-ab^2+b^3=a^3+b^3}$$

El resultado muestra que *la suma de dos cubos perfectos, miembro derecho* puede escribirse como *el producto de la suma de las raíces cúbicas de los dos sumandos, por la suma de la raíz cúbica del primer sumando elevada al cuadrado, menos el producto de las raíces cúbicas de los dos sumandos, más el cuadrado de la raíz cúbica del segundo sumando al cuadrado, miembro izquierdo*, es decir:

$$\begin{aligned} a^3+b^3 &= \left(\sqrt[3]{a^3}+\sqrt[3]{b^3}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a^3}\right)^2-\left(\sqrt[3]{a^3}\right)\left(\sqrt[3]{b^3}\right)+\left(\sqrt[3]{b^3}\right)^2\right] \\ &= (a+b)(a^2-ab+b^2) \end{aligned}$$

Ejemplo 1

$q^3 + 8$

Solución

$$\begin{aligned} q^3+8 &= \left(\sqrt[3]{q^3}+\sqrt[3]{8}\right)\left[\left(\sqrt[3]{q^3}\right)^2-\left(\sqrt[3]{q^3}\right)\left(\sqrt[3]{8}\right)+\left(\sqrt[3]{8}\right)^2\right] \\ &= (q+2)(q^2-2q+4) \end{aligned}$$

Se efectúa el producto del último resultado de tal manera que se vea si se obtiene el polinomio de partida.

$(q + 2)(q^2 - 2q + 4) = q^3 - 2q^2 + 4q + 2q^2 - 4q + 8 = q^3 + 8$

Ejemplo 2

$27p^3+q^6$

Solución

$$\begin{aligned} 27p^3+q^6 &= \left(\sqrt[3]{27p^3}+\sqrt[3]{q^6}\right)\left[\left(\sqrt[3]{27p^3}\right)^2-\left(\sqrt[3]{27p^3}\right)\left(\sqrt[3]{q^6}\right)+\left(\sqrt[3]{q^6}\right)^2\right] \\ &= \left(3p+q^2\right)\left[(3p)^2-(3p)\left(q^2\right)+\left(q^2\right)^2\right] \\ &= \left(3p+q^2\right)\left(9p^2-3pq^2+q^4\right) \end{aligned}$$

Al realizar el producto se obtiene:

$$\begin{aligned} (3q+q^2)(9p^2-3pq^2+q^4) &= 27p^3-9p^2q^2+3pq^4+9p^2q^2-3pq^4+q^6 \\ &= 27p^3+q^6 \end{aligned}$$

Existen otros métodos más generales en la suma y resta los cuales pueden ser consultados y con ello ampliar las aplicaciones; sin embargo, el manejo de los métodos tratados aquí facilitan posteriormente el trabajo del cálculo.

1.8. Ejercicios Varios

Factorizar completamente las siguientes expresiones.

1. $9m^2+25n^2-30mn-36$
2. $e^2 senx+cosx\ln x+e^x cosx+senx\ln x$
3. $\frac{x^3}{8}-\frac{64}{m^3}$
4. $\left(3z+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{z^2}$
5. y^4+13y^2+36
6. $\left(\frac{1}{2}a-1\right)^2+25-10\left(\frac{1}{2}a-1\right)$
7. $\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2+13\left(\frac{1}{2}x-1\right)+36$
8. $\left(2-3\sqrt{x}\,\right)^3+1$
9. $3(x+1)^2+7(x+1)-10$
10. $z^4-\frac{1}{2}$
11. $2y(y+1)^{5/2}-3(y+1)^{3/2}$
12. $r^2+10r+16$
13. $3x^3+15x^2+18x$
14. $y^2+\frac{9}{25}-\frac{6}{5}y-49$
15. $3x(x+1)^2-2(x+1)^2-3x+2$
16. x^3-5x
17. $\frac{27}{y^3}-x^6$
18. $\frac{x^3}{8}+125$
19. $2sen^2 x+6senx\ 4$
20. $5y^2\sqrt{x+1}+10y\sqrt{x+1}+y\sqrt{x}+2\sqrt{x}$
21. $z^4+6z^3+9z^2$
22. $\left(y-\frac{1}{2}\right)^3+8m^3$

23. $\left(\frac{1}{3}x-1\right)^2-\frac{9}{25}y^2$

24. $y^2(2x-1)+12y(2x-1)+32(2x-1)$

25. $\frac{x^3}{8}-1000$

26. $4y^3x+13y^2x+9yx$

27. $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{3}\right)^2+9\left(\sqrt{x}+\frac{1}{3}\right)+20$

28. $\frac{9}{16}m^2-(3x+1)^2$

29. $\frac{1}{n^3}-\left(\frac{3}{2x}\right)^6$

30. $y^3+100y^2+2500y$

31. $4(y+3)^{\frac{3}{2}}-12(y+3)^{\frac{1}{2}}$

32. $5ze^{2x}-15ze^x$

33. $2ylnx-5lnx$

34. $e^{2x}+7e^x+10$

35. $y5^{2x}+z5^{2x}$

36. $sen^3\theta-cos^3\theta$

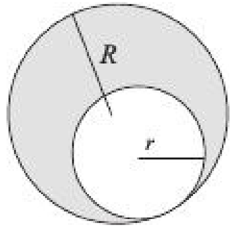
37. $sen^3\omega-cos^3\omega$

38. $e^{x^2}\ln^2 x-9e^{x^2}$

39. $y^2+9+6y-e^{2x}-2e^x-1$

40. $(senx+cosx)^2-sen^2x$

41. Para dos círculos de radio r y R, con $r<R$ la diferencia entre las áreas es $A=\pi R^2-\pi r^2$.
   a. Factorizar este resultado utilizando un factor común y luego una diferencia de cuadrados.
   b. Hallar el área resultante cuando $R=6$ *cms*. y $r=2$ *cms*.



42. Dados los cubos con aristas x, y con $x>y$ al quitar el volumen del menor al mayor se obtiene: $V=x^3-y^3$
    a. Factorizar esta expresión.
    b. Calcular el volumen resultante, si $x=6$ cms. y $y=2cms$. si se suman los volúmenes de los dos cubos resulta $V=x^3+y^3$
    c. Factorizar esta expresión.
    d. Calcular el volumen resultante cuando $x=8$, $y=3$

43. Comprobar que:

$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$

$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$x^4-y^4=(x-y)(x^3+x^2y+xy+y^2)$

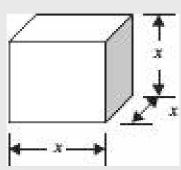
$x^5-y^5=(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$

Según lo observado anteriormente escribir la factorización de:

x^7-y^7

x^n-y^n con entero n positivo

Nota: *Recuerde que un cubo es un sólido (caja) el cual tiene todas sus aristas iguales, es decir el ancho, el largo y la altura son iguales.*



1.7. Fracciones algebraicas

El cociente de dos expresiones algebraicas, en el cual el numerador y el denominador contienen polinomios, radicales, constantes, fracciones, etc. Se denomina *fracción algebraica.*

Ejemplos

$$\frac{x^2+2}{5x-3}, \qquad \frac{\sqrt{3x-1}-2}{x+7}, \qquad \frac{1+\frac{1}{y}}{\frac{2}{y-1}-2}$$

Fracciones algebraicas de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios como los siguientes:

$$\frac{2y+5}{y+1}, \quad \frac{z^2-9}{2z+3}, \quad \frac{x^2+2x-5}{x^2-1} \quad y \quad \frac{m^3-2m^2+3}{m+2}$$

Se expresan estas fracciones en diferentes variables puesto que no necesariamente los polinomios deben estar definidos en la variable x. Por otra parte no sobra recordar que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ pueden ser de cualquier orden ya que no se exige que tengan el mismo, es más, si $P(x)$ y $Q(x)$ son de orden cero se tiene una fracción de la forma $\frac{a}{b}$ con $a, b \in \Re$, caso ya tratado en los números racionales.

1.7.1. Simplificación

La fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ puede simplificarse si puede factorizarse tanto numerador como denominador simplificando luego los factores comunes.

Ejemplo

Simplificar la fracción en cada caso: $\frac{5x}{x^2+7x}$

Solución

a) $\frac{5x}{x^2+7x} = \frac{5x}{x(x+7)} = \frac{5}{x+7}$

Se factorizó el denominador (factor común) y luego se simplificó o dividió por x en el numerador y denominador.

b) $\frac{2y+6}{y^2-9} = \frac{2(y+3)}{(y-3)(y+3)} = \frac{2}{y-3}$

Se utilizó factor común en el numerador y diferencia de cuadrados en el denominador y luego se simplificó por y+3 en el numerador y denominador.

c) $\dfrac{x^2+10x+25}{4x^2+20x}=\dfrac{(x+5)^2}{4x(x+5)}=\dfrac{x+5}{4x}$

En el numerador aparece el trinomio cuadrado perfecto y en el denominador el factor común se simplifica entonces por $x+5$.

1.7.2. Multiplicación y división de fracciones algebraicas

A. Multiplicación

Estas operaciones se efectúan con las mismas reglas de los números racionales.

> El producto de dos o más fracciones se efectúa multiplicando numeradores entre sí y denominadores entre sí.
>
> $$\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{P(x)\,R(x)}{Q(x)\,S(x)}$$

Antes de efectuar el producto, se debe factorizar al máximo y simplificar adecuadamente hasta donde sea posible. Posteriormente se efectúa el producto, si es necesario.

Ejemplo

Efectuar las operaciones indicadas: $\dfrac{3x^2}{x-1}\cdot\dfrac{x^2-16}{3x^2+12x}$

Solución

$$\frac{3x^2}{x-1}\cdot\frac{x^2-16}{3x^2+12x}=\frac{3x^2}{x-1}\cdot\frac{(x-4)(x+4)}{3x(x+4)}=\frac{\cancel{3x}x(x-4)\cancel{(x+4)}}{(x-1)\cancel{3x}\cancel{(x+4)}}=\frac{x(x-4)}{x-1}$$

Como puede verse el ejercicio plantea una multiplicación, se factoriza y se multiplican numeradores entre sí y denominadores entre sí procediéndose luego a simplificar, de esta forma se obtiene una respuesta reducida al mínimo.

El resultado final puede darse factorizando o no, depende de las necesidades del momento; para el ejemplo anterior:

$$\frac{x(x-4)}{x-1}=\frac{x^2-4x}{x-1}$$

B. División

> Se define en forma similar a la división de números racionales, es decir:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \div \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x)\,S(x)}{Q(x)\,R(x)}$$

Recordemos además que:

$$\frac{\frac{P(x)}{Q(x)}}{\frac{R(x)}{S(x)}} = \frac{P(x)\,S(x)}{Q(x)\,R(x)}$$

Como en la multiplicación debe factorizarse completamente y simplificar.

Ejemplo

Efectuar la división: $\dfrac{y^3-1}{5y^2-5y} \div \dfrac{y^3+y^2+y}{y^2-3y+2}$

Solución

$$\frac{y^3-1}{5y^2-5y} \div \frac{y^3+y^2+y}{y^2-3y+2} = \frac{(y-1)(y^2+y+1)}{5y(y-1)} \cdot \frac{y^2-3y+2}{y(y^2+y+1)}$$

$$= \frac{\cancel{(y-1)}\cancel{(y^2+y+1)}(y-2)(y-1)}{5y^2\cancel{(y-1)}\cancel{(y^2+y+1)}} = \frac{(y-1)(y-2)}{5y^2}$$

El ejercicio nos recuerda que al efectuar una división el dividendo se multiplica por el divisor invertido, de tal manera que se transforma la división en una multiplicación y por tanto procedemos como en el ejemplo anterior.

1.7.3. Suma y resta de fracciones algebraicas

Estas operaciones se realizan bajo los mismos parámetros de la suma y resta de números racionales, sin embargo, el común denominador debe tomarse como el mínimo común denominador, el cual se obtiene de la siguiente forma:

i. Factorizar todos los denominadores completamente.
ii. El mínimo común denominador será el producto de los factores comunes y no comunes de esta factorización con el mayor exponente.
iii. Se procede a sumar o restar como en el caso de los números racionales.

Ejemplo 1

$$\frac{m-1}{2m}+\frac{m+1}{m-1}$$

Solución

En este caso los denominadores ya están expresados como productos de factores simples, luego el mínimo común denominador es el producto $2m(m–1)$ ya que como se dijo antes en este denominador deben aparecer tanto factores comunes como no comunes con el mayor exponente. Se procede entonces con la suma:

$$\begin{aligned}\frac{m-1}{2m}+\frac{m+1}{m-1}&=\frac{(m-1)(m-1)+2m(m+1)}{2m(m-1)}\\&=\frac{m^2-2m+1+2m^2+2m}{2m(m-1)}=\frac{3m^2+1}{2m(m-1)}\end{aligned}$$

Ejemplo 2

$$\frac{3}{y^2+y}+\frac{2y}{y^2+2y+1}$$

Solución

La factorización de los denominadores es la siguiente:

$$\begin{aligned}y^2+y&=y(y+1)\\y^2+2y+1&=y(y+1)^2\end{aligned}$$

El denominador común es $y(y+1)^2$ y siguiendo con la suma,

$$\frac{3}{y(y+1)}+\frac{2y}{(y+1)^2}=\frac{3(y+1)+(2y)y}{y(y+1)^2}=\frac{3y+3+2y^2}{y(y+1)^2}=\frac{2y^2+3y+3}{y(y+1)^2}$$

Ejemplo 3

$$\frac{x-3}{x^2+8x+7}-\frac{x}{x^2+3x+2}$$

Solución

La factorización de los denominadores es:

$$\begin{aligned}x^2+8x+7&=(x+7)(x+1)\\x^2+3x+2&=(x+1)(x+2)\end{aligned}$$

Por lo tanto, el mínimo común denominador es: $(x+7)(x+1)(x+2)$ y procediendo con la resta se tiene:

$$\frac{x-3}{(x+7)(x+1)}-\frac{x}{(x+1)(x+2)}=\frac{(x-3)(x+2)-x(x+7)}{(x+7)(x+1)(x+2)}=\frac{-2(4x+3)}{(x+7)(x+1)(x+2)}$$

A continuación damos algunos ejemplos de simplificación de fracciones en las cuales tanto el numerador como el denominador no son polinomio.

Ejemplo 1

Efectuar las operaciones indicadas y simplificar:

$$\frac{\frac{1}{x+1}-2}{3+\frac{1}{x+1}}.$$

Solución

Recuerde que en este tipo de fracciones se procede primero a efectuar las operaciones en el numerador y el denominador así:

$$\frac{\frac{1}{x+1}-2}{3+\frac{1}{x+1}}=\frac{\frac{1-2(x+1)}{x+1}}{\frac{3(x+1)+1}{x+1}}=\frac{\frac{1-2x-2}{x+1}}{\frac{3x+3+1}{x+1}}=\frac{\frac{-1-2x}{x+1}}{\frac{3x+4}{x+1}}=\frac{(-1-2x)(x+1)}{(3x+4)(x+1)}$$

$$=\frac{-1-2x}{3x+4}=\frac{-(1+2x)}{3x+4}$$

Ejemplo 2

Simplificar la fracción: $\dfrac{1+x\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}}{x+\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}$

Solución

Se procede a expresar la fracción con exponentes positivos para luego tratar de simplificar, en este orden de ideas se tiene:

$$\frac{1+x\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}}{x+\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Ejemplo 3

Simplificar la fracción: $\dfrac{\left(y^2+1\right)^{\frac{1}{2}}-y^2\left(y^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}}{y^2+1}$

Solución

Se factoriza el numerador y se simplifica.

$$\frac{\left(y^2+1\right)^{\frac{1}{2}}-y^2\left(y^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}}{y^2+1}=\frac{\left(y^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\left(y^2+1-y^2\right)}{y^2+1}=\frac{\left(y^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}}{y^2+1}$$

$$=\frac{1}{\left(y^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Ejemplo 4

Simplificar: $\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

Solución

En este caso para simplificar la fracción se debe racionalizar el numerador, es decir, amplificamos la fracción por $\sqrt{x+1}+2$, podemos también decir que como se tienen raíces cuadradas se trata de completar la diferencia de cuadrados en el numerador:

$$\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$$

$$=\frac{x+1-4}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$$

$$=\frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}$$

Ejemplo 5

Simplificar: $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x+h}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{h}$

Solución

Lo primero que se debe hacer es efectuar la operación del numerador:

$$\frac{\dfrac{1}{\sqrt{x+h}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{h}=\frac{\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}\,\sqrt{x+h}}}{h}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\,\sqrt{x+h}}$$

Seguidamente se racionaliza el numerador

$$= \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{x+h}\,\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+h}\,\right)}{h\sqrt{x}\,\sqrt{x+h}\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+h}\,\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\sqrt{x+h}\,\right)^2}{h\sqrt{x}\,\sqrt{x+h}\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+h}\right)}$$

$$= \frac{x - x - h}{h\sqrt{x}\,\sqrt{x+h}\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+h}\right)}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{x}\,\sqrt{x+h}\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+h}\right)}$$

Nota: *Cuando se tiene en el denominador radicales el proceso de racionalización se efectúa de la misma manera como se mostró en los ejemplos anteriores.*

1.9. Ejercicios adicionales

En los ejercicios del 1 al 12, simplificar cada una de las fracciones.

1. $\dfrac{a^2 + 2ab - a - 2b}{ax^2y - x^2y}$
2. $\dfrac{x^3 - 27}{x^3 + 3x^2 + 9x}$
3. **3.**
4. $\dfrac{2x^2 + 9x + 10}{x^3 - 4x}$
5. $\dfrac{3x^2 + 8x + 5}{5x^2 + 5x}$
6. $\dfrac{a^2 + ab}{a^2 - b^2}$
7. $\dfrac{x^2 + 6x + 8}{x^2 + 2x}$
8. $\dfrac{y^2 - 6y + 9}{y^2 - 9}$

9. $\dfrac{3x+15}{5x^2+25x}$

10. $\dfrac{yx^2-x^2}{y^2x-x}$

11. $\dfrac{x^3+8}{x^3-2x^2+4x}$

12. $\dfrac{x^3-2x^2+4x}{x^3+8}$

En los ejercicios del 13 al 22 efectuar las operaciones indicadas.

13. $\dfrac{x^2-4}{x^2+3x}\cdot\dfrac{2x^2+6x}{x^2-4x+4}$

14. $\dfrac{y^3-7y+12}{y^3+2y^2+4y}\cdot\dfrac{y^3-8}{y^2-6y+8}$

15. $\dfrac{m^2+2m}{m^3+5m^2+25m}\cdot\dfrac{m^3-125}{m^2-4}$

16. $\dfrac{2x^2-5x-7}{x+2}\cdot\dfrac{x^3+8}{4x^2-14x}\div\dfrac{x^3+2x^2+4x}{x^2+3x}$

17. $\dfrac{3x^2+8x+5}{2x^2-4x-6}\cdot\dfrac{x^2-3x}{x^2-1}$

18. $\dfrac{2x^2-5x-7}{x+2}\cdot\dfrac{x^3+8}{4x^2-14x}\div\dfrac{x^3+2x^2+4x}{x^2+3x}$

19. $\dfrac{z^2-16}{z^2+6z+8}\cdot\dfrac{z^2+4z}{z^3-64}\div\dfrac{z^2-2z-8}{z^3+4z^2+16z}$

20. $\dfrac{2m^2+3mn-2m-3n}{m^2-m}\cdot\dfrac{6m^2}{4m+6n}$

21. $\dfrac{2x^2-3x-2}{3x^2+10x-8}\div\dfrac{2x^2+7x+3}{2x^2+9x+4}$

22. $\dfrac{5x^2+2x-3}{3x^2-x-2} \div \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$

En los ejercicios del 23 al 44 efectuar las sumas indicadas simplificando hasta donde sea posible:

23. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{2x^2}+\dfrac{1}{3}$

24. $\dfrac{x}{5}+\dfrac{2x^2}{3}$

25. $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{x}$

26. $\dfrac{3}{y+1}+\dfrac{y}{y-2}+\dfrac{1}{y^2-y-2}$

27. $\dfrac{x+2}{x^2+6x+9}-\dfrac{1}{x^2+3x}$

28. $\dfrac{5}{3}+\dfrac{2x-1}{x+3}-\dfrac{1}{6x}$

29. $\dfrac{x}{2x-1}+\dfrac{3}{x+1}$

30. $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x-1}$

31. $\dfrac{x+1}{x-1}-1+\dfrac{1}{x}$

32. $\dfrac{3}{2+\dfrac{x-2}{x+1}}-1$

33. $\dfrac{\dfrac{x-1}{x+1}+2}{\dfrac{2x-1}{x+1}-1}$

34. $y+1+\dfrac{3}{1-\dfrac{1}{y}}$

35. $\dfrac{\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{n}}{\dfrac{n}{m}-\dfrac{m}{n}}$

36. $\dfrac{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}{\dfrac{xy-y^2}{y}}$

37. $\dfrac{x-\dfrac{2}{x}}{x+2+\dfrac{1}{x}}$

38. $\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}}$

39. **39.**

40. $\dfrac{1-\dfrac{x-3}{x+1}}{2\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)-3}$

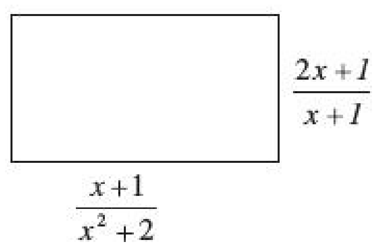
41. $\dfrac{\dfrac{x}{x+1}-1}{1-2\left(\dfrac{x}{x+1}\right)}$

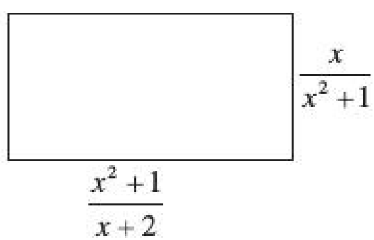
42. $\dfrac{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{2}{x+2}}$

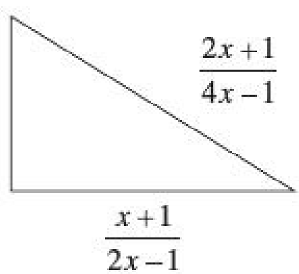
43. $$x-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}}$$

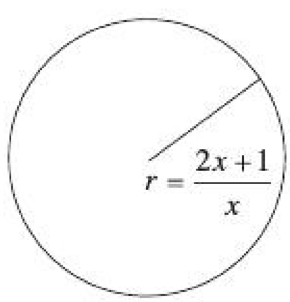
44. $$2-\cfrac{x}{x-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x+1}}}$$

45. Hallar el perímetro y el área en cada caso, consideramos $x>0$*:*

a. 

b. 

c. 



d.

En los ejercicios del 46 al 53 racionalizar y simplificar:

46. $\dfrac{3}{\sqrt{5}-1}$

47. $\sqrt{x}-\sqrt{y}$

48. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$

49. $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

50. $\dfrac{3-\sqrt{x+4}}{x}$

51. $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{4}$

52. $\dfrac{\sqrt{x+6}-x}{2+x}$

53. $\dfrac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

En los ejercicios del 54 al 59 factorizar y simplificar.

54. $\dfrac{(y^2+1)^{\frac{1}{3}}-\dfrac{2y^2}{3}(y^2+1)^{-\frac{2}{3}}}{(y^2+1)^{\frac{2}{3}}}$

55. $\dfrac{m\ (m+1)^{-\frac{1}{2}}-(m+1)^{\frac{1}{2}}}{m^2}$

56. $\dfrac{(x^2+2)(x-1)^3-(x^2+2)^2(x-1)^2}{(x-1)^6}$

57. $\dfrac{2y^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}$

58. $\dfrac{x^2\ (x-1)^{-\frac{1}{2}}-(x-1)^{\frac{1}{2}}}{x^2}$

59. $\dfrac{-\sqrt{y^2-1}+y^2\,(y^2-1)^{-\frac{1}{2}}}{\left(y-\sqrt{y^2-1}\right)^2}$

1.8. Ecuación de primer grado o lineal

Antes de definir y dar solución a la ecuación lineal es importante recordar qué es una ecuación, qué es una variable, entre otras cosas:

Ecuación: *afirmación en la que se establece que dos expresiones algebraicas son iguales.*

Ejemplo 1

3+2=5 es una ecuación en la cual 3+2 y 5 se denominan miembros de la ecuación.

Ejemplo 2

$3x+2=5$ es una ecuación en la que x se le denomina *variable* o *incógnita*, la igualdad será verdadera cuando x tome un valor real con el cual se satisfaga es decir, para este caso si $x=1$ se tiene que la afirmación es verdadera puesto que $3(1)+2=5, \Rightarrow 3+2=5$.

Al valor real que se le da a la variable con el cual la ecuación es verdadera se denomina **solución de la ecuación,** en nuestro ejemplo la solución de la ecuación es $x=1$, esta solución también se denomina **raíz o cero para la ecuación.**

1.8.1. Solución de ecuaciones lineales

La solución de una ecuación consiste en hallar todos los valores de las variables que satisfacen la ecuación. En el proceso de esta solución se tienen en cuenta las propiedades de las igualdades como son:

i) Si $A = B$ entonces $c\,A = c\,B$, cualesquiera sea el número real c.

La propiedad nos dice que en una igualdad se puede multiplicar en ambos miembros por el mismo número y la igualdad se mantiene:

ii) Si $A = B$ entonces $A \pm c = B \pm c$, cualquiera que sea el número real c.

Vemos según esta propiedad que en una igualdad puede sumarse o restarse el mismo número y la igualdad no cambia.

Aplicamos esta propiedad y los axiomas de los números reales para resolver la ecuación:

$$3x+2=5$$
$$3x+2+(-2)=5+(-2)$$
$$3x+0=3$$
$$3x=3$$

Utilizando la propiedad (i) y multiplicando por $c=\frac{1}{3}$ se obtiene:

$$\frac{1}{3}(3x)=\frac{1}{3}(3)$$
$$(\frac{3}{3})x=\frac{3}{3}$$
$$1.x=1$$
$$x=1$$

Ecuaciones equivalentes *si dos o más ecuaciones tienen la misma solución se dice que son equivalentes.*

Ejemplo 1

Las siguientes ecuaciones son equivalentes:

a. $2x-3=5$

b. $2\left(x-\frac{3}{2}\right)=5$

c. $x-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

Si se observan las tres ecuaciones anteriores se ve claramente que la segunda se obtiene de la primera factorizando 2 y la tercera se obtiene de la segunda dividiendo por 2.

Ecuación lineal *si la ecuación puede ser llevada a la forma* $ax+b=0$ con $a\neq 0$ *se dice que la ecuación es* ***lineal.***
La **solución** de la ecuación lineal se obtiene utilizando las propiedades de las igualdades y los axiomas de los números reales.

$$ax+b=0$$

$$ax+b+(-b)=0+(-b) \quad \text{sumando el opuesto aditivo de } b$$

$$ax+(b-b)=0-b \quad \text{por propiedad asociativa}$$

$$ax+0=0-b \quad \text{por inverso aditivo}$$

$$ax=-b \quad \text{por el módulo de la suma}$$

$$\frac{1}{a}(ax)=\frac{1}{a}\ -b \quad \text{multiplicamos por el inverso multiplicativo de } a$$

$$\left(\frac{1}{a}a\right)x=\frac{-b}{a} \quad \text{por propiedad asociativa}$$

$$1x=\frac{-b}{a} \quad \text{por el módulo del producto}$$

$$x=\frac{-b}{a}$$

Este proceso puede ser seguido en cada uno de los casos particulares una vez se transforme la ecuación a la forma lineal.

Ejemplo 1

Hallar la solución de la ecuación: $3x+\frac{1}{3}=4$

Solución

$$3x+\frac{1}{3}=4$$

$$3x+\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)=4+\left(-\frac{1}{3}\right) \quad \text{sumando el opuesto aditivo de } \frac{1}{3}$$

$$3x+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)=4-\frac{1}{3} \quad \text{por propiedad asociativa}$$

$$3x+0=\frac{11}{3} \quad \text{por inverso aditivo}$$

$$3x=\frac{11}{3} \quad \text{por propiedad modulativa}$$

$$\frac{1}{3}(3x)=\frac{1}{3}\left(\frac{11}{3}\right) \quad \text{por inverso multiplicativo de 3}$$

$$\left(\frac{1}{3}3\right)x=\frac{11}{9} \quad \text{por propiedad asociativa}$$

$$1x=\frac{11}{9}$$

$$x=\frac{11}{9} \quad \text{por la propiedad modulativa del producto.}$$

Verificación: Si sustituimos el valor obtenido en la ecuación original se debe obtener una identidad o igualdad.

$$3\left(\frac{11}{9}\right)+\frac{1}{3}=4$$
$$\frac{11}{3}+\frac{1}{3}=4$$
$$\frac{12}{3}=4$$
$$4=4$$

Ejemplo 2

Hallar la solución de $3(x+4)-2=2(x-1)-5$

Solución

$3(x+4)-2=2(x-1)-5$

$3x+12-2=2x-2-5$	por propiedad distributiva
$3x+10=2x-7$	sumando términos semejantes
$3x-2x+10=2x-2x-7$	sumando opuesto aditivo de $2x$
$x+10=0-7$	
$x+10-10=-7-10$	sumando opuesto aditivo de 10
$x+0=-17$	
$x=-17$	

Verificación: Sustituyendo este valor en la ecuación se obtiene:

$3(-17+4)-2=2(-17-1)-5$
$3(-13)-2=2(-18)-5$
$-41=-41$

Ejemplo 3

Resolver $\dfrac{3}{x+3}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{8}{x-1}$

Solución

Es claro que aquí se debe partir del hecho de que x debe ser diferente de -3 y 1 puesto que en estos valores la expresión no existe ya que los denominadores serían cero y la división por cero no existe, el proceso de solución puede ser el siguiente:

i) Efectuar la suma de las fracciones que se indican:

$$\frac{3}{x+3}+\frac{1}{x-1}=\frac{8}{x-1}$$

$$\frac{3(x-1)+x+3}{(x+3)(x-1)}=\frac{8}{x-1}$$

$$\frac{3x-3+x+3}{(x+3)(x-1)}=\frac{8}{x-1}$$

$$\frac{x}{x+3}=2$$

ii) Aplicando la propiedad de las proporciones $\frac{A}{B}=\frac{C}{D} \Leftrightarrow AD=CB$

$$\begin{aligned}
&x=2(x+3)\\
&x=2x+6\\
&x-2x=2x-2x+6\\
&-x=6\\
&x=-6
\end{aligned}$$

Verificación: Este resultado debe satisfacer la ecuación, es decir:

$$\begin{aligned}
&\frac{-6}{-6+3}=2\\
&\frac{-6}{-3}=2\\
&2=2
\end{aligned}$$

Ejemplo 4

Halle la solución de la ecuación, $\sqrt{4x+1}-3=0$

Solución

En este caso aparece un radical por tanto se debe proceder a eliminarlo para poder despejar la variable *x*.

$\sqrt{4x+1}-3=0$

$\sqrt{4x+1}=3$ Elevamos al cuadrado en ambos miembros

$\left(\sqrt{4x+1}\right)^2=3^2$

$4x+1=9$ de esta última igualdad se obtiene

$x=2$

Verificación: Es importante verificar nuestro resultado final, es decir, este valor para la variable debe satisfacer la ecuación.

$$\sqrt{4(2)+1}=3$$
$$\sqrt{9}=3$$
$$3=3$$

Los procesos utilizados en la solución de ecuaciones son muy útiles en el trabajo del cálculo, la física, la química, la geometría, etcétera.

1.8.2. Problemas de aplicación de ecuaciones lineales

A. Temperaturas

Dado que la relación entre la temperatura en grados Celsius y grados Fahrenheit está dada por $C=\frac{5}{9}(F-32)$, la cual nos muestra que conocida una temperatura en grados Fahrenheit se halla su valor equivalente en grados Celsius. Podemos a partir de esta relación expresar F en términos de C, a este proceso se le llama despejar F, seguimos el proceso siguiente:

$$C=\frac{5}{9}(F-32)$$
$$\frac{9}{5}C=\frac{9}{5}\left(\frac{5}{9}\right)(F-32)$$
$$\frac{9}{5}C=F-32$$
$$\frac{9}{5}C+32=F-32+32$$
$$\frac{9}{5}C+32=F+0$$
$$\frac{9}{5}C+32=F$$

B. Geometría

Para un **triángulo el área**, se expresa mediante la relación:

$$A=\frac{b.h}{2}\ donde,\ b=base,\ \ h=altura$$

Conocidos el valor del área y la medida de la base, hallar el valor de la altura, es decir despejar *h*, procedemos así:

$$A=\frac{b.h}{2}\ multiplicando\ \ por\ \ 2$$

$$2A=b.h\ \text{ multiplicando por el recíproco de } b$$

$$\frac{2.A}{b}=\frac{1}{b}(b.h)$$

$$\frac{2.A}{b}=h$$

C. Física

El espacio recorrido por un objeto que cae está dado por la ecuación $S=\frac{1}{2}gt^2+V_0t$ donde S es el espacio recorrido, g es la gravedad, t el tiempo y V_0 velocidad inicial.

Si se conoce el espacio recorrido S y el tiempo en el cual lo hace, la velocidad inicial es:

$$S=\frac{1}{2}gt^2-V_0t$$

$$S-\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}gt^2+V_0t \quad \textit{opuesto aditivo}$$

$$S-\frac{1}{2}gt^2=V_0t$$

$$\frac{S-\frac{1}{2}gt^2}{t}=V_0$$

$$\frac{S}{t}-\frac{gt^2}{2}=V_0$$

En la práctica se encuentran muchos problemas que pueden ser solucionados mediante el planteamiento o reducción del mismo a una ecuación lineal.

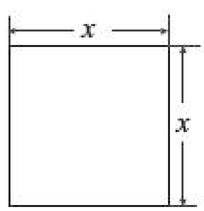
Ejemplo 1

Un ingeniero civil presenta un proyecto de construcción de vivienda de interés social, en el cual afirma que el terreno es cuadrado y el perímetro del mismo es de 800 mts. ¿Cuál es la medida del lado del terreno?

Solución

Es conveniente en este tipo de problemas apoyarnos en una figura si es posible, para nuestro caso un cuadrado y con base en ella plantear el modelo matemático que relacione el lado del cuadrado con el perímetro del mismo.

Perímetro: suma de las longitudes de los lados, por tanto



$$P=4x$$

$$800=4x \quad \textit{por hipótesis}$$

$$\frac{1}{4}(800)=\frac{1}{4}(4x)$$

$$x=200\ mts$$

Esto significa que el terreno tiene 200 *mts* de longitud por lado.

Ejemplo 2

Dos automóviles se encuentran a una distancia el uno del otro de 420 *km*. Si parten a la misma hora en dirección uno hacia el otro con velocidades de 60 *km/h* y 80 *km/h*.

a. ¿En cuánto tiempo se encuentran?
b. ¿Cuál es la distancia recorrida por cada uno?

Solución

a) Sea t el tiempo en horas gastado por cada uno hasta el encuentro.

$$(60\,km\ /h)(t\,h)+(80\,km\ /h)(t\,h)=420\,km$$
$$60t+80t=420$$
$$140t=420$$
$$t=\frac{420}{140}=3 \text{ horas}$$

Por tanto, el tiempo necesario para que se encuentren es de 3 horas.

b) Los kilómetros recorridos por cada uno de ellos son:
60 km / h × 3h = 180 km
80 km / h × 3h = 240 km

Ejemplo 3

Un ahorrador invierte $30 000 000; una parte en títulos que le pagan el 7% anual y, por considerarlo de menor riesgo, coloca el resto en acciones que le rentan el 6% anual. Si el total de interés al año es de $1 900 000, ¿cuál es el valor colocado al 7% y cuál el valor del 6%?

Solución

Sea,

x = *cantidad al* 7%
30 000 000– x = *cantidad al* 6%

Por tanto,

$$0.07x+0.06(30\,000\,000-x)=1\,900\,000$$

$$0.07x+1\,800\,000-0.06x=1\,900\,000$$

$$0.01x=100\,000$$

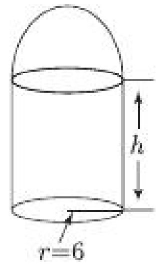
$$x=\frac{100\,000}{0.01}=10\,000\,000$$

Esto quiere decir que las inversiones fueron

Inversión al 7% 10 000 000
Inversión al 6% 30 000 000 -10 000 000 = 20 000 000

Ejemplo 4

Una firma de ingenieros se compromete a construir un silo para almacenar granos, en forma de cilindro circular recto con tapa de hemisferio. El diámetro debe ser de 12 *mts* y el volumen debe ser de 504 π mts^3. ¿Cuál debe ser la altura del silo?



Solución

El volumen de la parte cilíndrica está dado por $\pi r^2 h = \pi(6)^2 h$

El volumen de la semiesfera es $\dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} = \dfrac{4}{6}\pi(6)^3$, por tanto:

$$504\pi = \pi(6)^2 h + \frac{4}{6}\pi(6)^3$$

$$504 = 36h + 144$$

$$504 - 144 = 36h$$

$$h = \frac{360}{36} = 10\ mts.$$

Lo anterior quiere decir que el silo debe tener una altura de 10 *mts*.

Ejemplo 5

El director de una industria electrónica Ingeniero Industrial, observa que, en el armado de un dispositivo electrónico, un técnico gasta 90 minutos y otro gasta 60 minutos ¿en qué tiempo hacen el mismo trabajo juntos?

Solución

Sea t el tiempo gastado por los dos, se tiene entonces que:

$$\frac{1}{90} + \frac{1}{60} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{60+90}{60.90} = \frac{1}{t}$$

$$150t = 90.60$$

$$t = 36 \text{ minutos}$$

Debe entenderse que $\frac{1}{90}$ es la parte del dispositivo armado por A en un minuto, $\frac{1}{60}$ parte del dispositivo armado por B en un minuto y $\frac{1}{t}$ parte del dispositivo armado por los dos en t minutos.

1.10. Ejercicios

En cada caso halle la solución de la ecuación.

1. $x+3=1$
2. $3x-1=4$
3. $2(x-3)=5x+1$
4. $(x-1)(2x+3)=2x^2-7x+1$
5. $\frac{4}{3}=\frac{1}{x}$
6. $\frac{x}{2}=\frac{3}{5}$
7. $\frac{3}{x-2}=\frac{1}{x+2}$
8. $\frac{2x-1}{4}=\frac{x+1}{3}$
9. $\frac{x}{x-1}+\frac{3}{x+2}=1$
10. $(3x-1)^2=(3x+2)(3x-1)$
11. $\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}(5x+2)=\frac{3}{2}x+4$
12. $\frac{3}{x}+\frac{4}{x}-\frac{1}{x}=4$
13. $\frac{2}{2x+1}-\frac{3}{2x-1}=\frac{6x+3}{4x^2-1}$
14. $\frac{6}{3x+1}+\frac{1}{2x-3}=0$
15. $\frac{36x^2-9}{6x+2}=6x-1$
16. $3x-4\left\{x-2\ (3x-1)-\frac{4}{3}\right\}=0$
17. $(3x-9)(4x+2)=12x^2-8$
18. $(2x+1)^2-3x+1=4x^2-9x+3$

19. $3(2x-1)+2(x-1)(4x+2)=8x^2+\frac{1}{3}$

20. $\frac{2}{3x-1}+\frac{5}{3x+1}=\frac{6x-1}{9x^2-1}$

21. Si la solución de la ecuación $ax+4=0$, $a\neq 0$ es $x=7$ ¿cuál debe ser el valor de a?

22. Si la solución de la ecuación $3x+b=\frac{1}{2}$ es $x=\frac{-3}{5}$, ¿cuál es el valor de b?

23. ¿Para qué valores de b la solución de la ecuación $\frac{3}{2}x + b - 5 = 4b - 8 + 3x$ es $x=-2$?

24. En la fórmula de interés simple I=Prt despeje r.

25. En la fórmula del volumen del cono $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ despejar h.

26. El volumen de la esfera está dado por la fórmula $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ despeje r.

27. En el trapecio con bases b_1 y b_2 la fórmula del área es $A=\frac{1}{2}(b_1+b_2)h$ despeje b_2.

28. En el interés compuesto se tiene $F=P(1+i)n$ donde, F es el capital futuro, P capital presente, i tasa de interés por periodo y n número de periodos de capitalización, despejar i .

29. En un circuito con tres resistencias R_1, R_2, R_3 conectadas en paralelo se tiene $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$ donde R es la resistencia total, despejar R_3.

30. Se invierten \$ 15 000 000, una parte en títulos al 8% anual y otra al 10% anual. Si el total de rentabilidad al año es de \$ 1'400.000. ¿Cuál es el valor invertido en cada una de las tasas?

31. Para un terreno rectangular con longitud el doble del ancho se estima su perímetro en 1200 *mts*. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

32. Un recipiente cilíndrico debe contener un volumen de 340π *mts3*, el diámetro es de 8 *mts*., ¿Cuál es el valor de la altura?

33. Un docente observa que para responder una evaluación un estudiante gasta 40 minutos, mientras que otro gasta 50 minutos. ¿Cuánto tiempo necesitan si trabajan ambos en la solución del mismo?

Halle la solución para los ejercicios del 34 al 39.

34. $\sqrt{3x-1}=2$

35. $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x-1}=0$

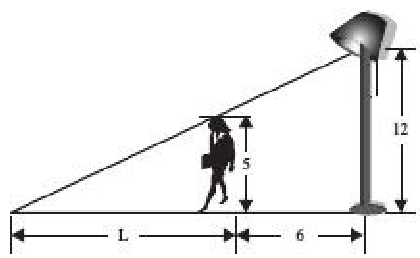
36. $3-2\sqrt{x+4}=0$

37. $\frac{3}{5}=\frac{4}{\sqrt{2x-1}}$

38. $\dfrac{\sqrt{3x+1}}{3}=\dfrac{4}{\sqrt{3x+1}}$

39. $\sqrt{4x+1}-\dfrac{3}{2}=0$

40. Se invierten $ 20 000 000 en títulos que pagan 6,5% anual y 8,5% anual, el inversionista aspira tener un promedio de 7% anual en el rendimiento. ¿Cuánto se invierte a cada tasa?
41. El propietario de un terreno en forma de triángulo equilátero afirma que este tiene un perímetro de 12 000 *mts*. ¿Cuál es la longitud de sus lados?
42. Una lámina tiene forma de trapecio con una área de 30 mts^2; de una de las bases mide 5 *mts*. y la altura 4 *mts*.. Halle la longitud de la otra base.
43. Un recipiente en forma de cono se espera tenga un volumen de $\frac{250}{3}\pi\ cm^3$, ¿cuál debe ser su altura si el radio es de 5 *cm*?
44. **a)** Si $\dfrac{a+bx}{cx+d}=5$, halle *x*. **b)** De la ecuación $F=G\dfrac{mM}{r^2}$, halle *m*.
45. Una mujer de 5 pies de estatura está parada cerca de una lámpara del alumbrado público que tiene 12 pies de altura, como se muestra en la figura. Encuentre la longitud *L* de su sombra, si la distancia desde la base de la lámpara es de 6 pies.



1.9. Ecuación cuadrática

Definición: *la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ en la variable x* se define con a, b, y c constantes y $a\neq 0$, también es llamada ecuación de segundo grado, se dice de segundo grado por ser dos (2) el mayor grado de la variable.

1.9.1. Fórmula cuadrática y el discriminante

Puesto que la ecuación es de segundo grado, se deben tener a lo más dos valores de la variable digamos x_1, x_2 como solución de la ecuación, es decir estos valores satisfacen a la ecuación por tanto:

$$ax_1{}^2+bx_1+c=0$$
$$ax_2{}^2+bx_2+c=0$$

En el logro de la solución de la ecuación se puede proceder mediante la factorización si es posible o la solución general la cual se obtiene de la siguiente forma: $ax^2+bx+c=0$ factorizando a:

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)=-c$$

Al completar el trinomio cuadrado perfecto en x se obtiene:

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=-c$$

Sacando el factor negativo del paréntesis se debe tener en cuenta que el número a lo multiplica, por tanto:

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a}=-c$$

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)=\frac{b^2}{4a}-c$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Sacando raíz cuadrada en ambos miembros se obtiene:

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Despejando x:

$$x+\frac{-b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Obteniéndose así dos soluciones a saber:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Al número $b^2–4ac$ se le denomina el **discriminante** de la ecuación cuadrática; este número nos muestra cuándo la ecuación tiene raíces reales distintas, iguales, complejas o imaginarias de la siguiente forma:

$b^2–4ac>0$ dos raíces reales distintas
$b^2–4ac=0$ dos raíces reales iguales
$b^2–4ac<0$ dos raíces reales complejas

Ejemplo 1

Halle la solución de la ecuación $2x^2+3x–5=0$

Solución

De la ecuación se tiene $a=2$, $b=3$ $c=–5$ por tanto:

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{(3)^2-4(2)(-5)}}{2(2)}=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{-3\pm 7}{4}$$

Observe que el discriminante $b^2–4ac=49>0$; tenemos entonces dos soluciones reales distintas las cuales son:

$$x_1=\frac{-3+7}{4}=\frac{4}{4}=1$$
$$x_2=\frac{-3-7}{4}=\frac{-10}{4}=-\frac{5}{2}$$

Es importante que una vez se obtengan las soluciones se haga una verificación de los resultados obtenidos, para nuestro caso: Si $x_1=1$ sustituyendo en la ecuación se obtiene:

$$2(1)^2+3(1)-5=0$$
$$2+3-5=0$$
$$5-5=0$$
$$0=0$$

Para $x_2=\dfrac{-5}{2}$

$$2\left(-\frac{5}{2}\right)^2+3\left(-\frac{5}{2}\right)-5=0$$
$$\frac{25}{2}-\frac{15}{2}-5=0$$
$$5-5=0$$
$$0=0$$

Ejemplo 2

Halle la solución de $x^2+3x=0$

Solución

Es claro que en este caso se tiene $a=1$, $b=3$, $c=0$ por tanto:

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{(3)^2.-4(1)(0)}}{2(1)}=\frac{-3\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-3\pm3}{2}$$

Nuevamente el discriminante $b^2–4ac=9>0$ por tanto las soluciones son reales distintas y son:

$$x_1=\frac{-3+3}{2}=\frac{0}{2}=0$$
$$x_2=\frac{-3-3}{2}=\frac{-6}{2}=-3$$

Al efectuar la verificación se obtiene:

Para $x_1=0$	$(0)^2–3(0)=0$
$0=0$	
para $x_2=3$,	$(–3)^2+3(–3)=0$
$9–9=0$	

Ejemplo 3

Halle la solución de la ecuación $x^2–3=0$

Solución

En este caso $a=1$, $c=–3$, $b=0$ la solución es entonces:

$$x=\frac{-0\pm\sqrt{(0)^2-4(1)-(3)}}{2}=\frac{0\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{\pm2\sqrt{3}}{2}$$

Las soluciones son:

$$x_1 = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$
$$x_2 = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

Verificación:

$$para \;\; x_1 = \sqrt{3}, \quad \left(\sqrt{3}\right)^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3 - 3 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$
$$para \;\; x_2 = -\sqrt{3}, \quad \left(-\sqrt{3}\right)^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3 - 3 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Los ejemplos anteriores muestran que la fórmula general da solución:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A cualquiera sea la ecuación cuadrática completa o incompleta, es decir, con sus tres constantes *a*, *b*, y *c* o cuando falta uno de los dos *b* o *c* es claro que a≠0 siempre.

Ejemplo 4

Resolver $x^2+x+2=0$

Solución

En este caso se tiene $a=1$, $b=1$, $c=2$ luego se tiene la solución:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

Vemos entonces que en discriminante $b^2-4ac=-7<0$ se tienen entonces dos raíces complejas o imaginarias y en estos casos procedemos a expresar el radical de la siguiente forma $\sqrt{-7} = \sqrt{(-1)7} = \sqrt{-1}\sqrt{7} = i\sqrt{7}$ donde $i = \sqrt{-1}$. Tenemos entonces las soluciones:

$$x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i$$
$$x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2} = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} i$$

Verificación: para $x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i$ sustituimos en la ecuación:

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i + 2 = 0$$

$\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{2} i + \frac{7}{4} i^2 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i + 2 = 0$ recuerde que $i^2=-1$

$$\frac{1-7-2+8}{4}=0$$

Para $x_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i$ se procede de igual forma, queda como ejercicio para el lector.

Ejemplo 5

Halle la solución para $x^2-2x+1=0$

Solución

Para esta ecuación a=1, b=–2, c=1, retomando nuevamente la fórmula la solución está dada por:

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(1)}}{2(1)}=\frac{2\pm\sqrt{0}}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Puesto que el discriminante $b^2-4ac=0$ *las soluciones son reales iguales y están dadas por* $x_1=1$, $x_2=1$.

Verificación: Para $x_1=x_2=1$, $(1)^2-2(1)+1=0$

1.9.2. Solución completando el trinomio cuadrado perfecto

Según se acaba de ver en la solución general de la ecuación cuadrática una vez se quita el coeficiente de x^2 se completa el trinomio cuadrado perfecto sumando y restando el cuadrado del cociente $\frac{b}{2a}$, es decir, $\frac{b^2}{4a^2}$ la solución se puede entonces obtener mediante este proceso.

Ejemplo

Halle la solución de la ecuación $2x^2+5x-4=0$

Solución

Procedemos primero a dividir toda la ecuación por 2 obteniéndose:

$$x^2+\frac{5}{2}x-2=0 \Rightarrow x^2+\frac{5}{2}x=2$$

Sumamos y restamos: $\left(\frac{\frac{5}{2}}{2}\right)^2=\frac{25}{16}$

Obteniéndose $x^2+\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}-\frac{25}{16}=2 \Rightarrow x^2+\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}=2+\frac{25}{16}$

de la cual se obtiene:

$$\left(x+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{57}{16} \Rightarrow x+\frac{5}{4}=\pm\frac{\sqrt{57}}{4} \Rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{57}}{4}$$

Las soluciones son: $x_1=\frac{-5+\sqrt{57}}{4}$

$$x_2=\frac{-5-\sqrt{57}}{4}$$

1.9.3. Solución por factorización

La ecuación cuadrática en muchos casos es posible hallarle la solución mediante la factorización puesto que se comporta como el trinomio de la forma ax^2+bx+c o en el caso en que a=1, se tiene el trinomio x^2+bx+c , por otra parte si $c=0$ se tiene ax^2+bx en la cual es claro que existe un factor común, es decir, $ax^2+bx=x(ax+b)$ en el caso en que $b=0$, se tiene $ax^2+c=0$ de la cual se hace el despeje inmediato para x. Procedemos a continuación a dar solución a las mismas ecuaciones planteadas anteriormente mediante la factorización.

Ejemplo 1

$2x^2+3x–5=0$ en este caso al multiplicar por 2 se trata de hallar dos números que multiplicados den –10 y sumados 3 estos números son:

5 y 2 por tanto se tiene,

$2x^2+5x–2x–5=0$	agrupando
$(2x^2–2x)+(5x–5)=0$	por factor común
$2x(x–1)+5(x–1)=0$	por factor común
$(x–1)(2x+5)=0$	por factor común

Del resultado anterior y apoyándonos en la propiedad de los números reales, si $ab=0 \Rightarrow a=0$ o $b=0$ se obtiene:

$$x-1=0 \Rightarrow x_1=1$$
$$2x+5=0 \Rightarrow x_2=\frac{5}{2}$$

Verificación: para $x_1=1$ se tiene:

$$2(1)^2+3(1)-5=0$$
$$5-5=0$$

Para $x_2=-\frac{5}{2}$

$$2\left(-\frac{5}{2}\right)^2+3\left(-\frac{5}{2}\right)-5=0$$

$$\frac{25}{2}-\frac{15}{2}-\frac{10}{2}=0$$

Ejemplo 2

$x^2+3x=0$ es claro que se tiene un caso de factor común, por tanto: $x(x+3)=0$ de la cual:

$x_1=0$

$x+3=0 \Rightarrow x_2=-3$

Verificación: se deja como ejercicio.

Ejemplo 3

$x^2-3=0$ factorizando como diferencia de cuadrados se obtiene:

$$(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0 \quad \text{de la cual se obtiene:}$$

$$x+\sqrt{3}=0 \Rightarrow x_1=-\sqrt{3}$$

$$x-\sqrt{3}=0 \Rightarrow x_2=\sqrt{3}$$

Verificación: se deja como ejercicio.

Lo anterior demuestra que la solución por factorización produce el mismo resultado que se obtiene con la fórmula general:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Podemos anotar como conclusión que para la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ las soluciones se obtienen con la fórmula general:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

donde el discriminante b^2-4ac será la guía en el análisis de las soluciones tal como se indica:

$$b^2-4ac>0 \quad \textit{dos raíces reales distintas}$$

$$b^2-4ac=0 \quad \textit{dos raíces reales iguales}$$

$$b^2-4ac<0 \quad \textit{dos raíces complejas}$$

Finalmente se vio que la solución también puede obtenerse mediante la factorización de la misma siempre y cuando sea posible.

1.9.4. Formas que se reducen a ecuaciones cuadráticas

Es importante anotar que la ecuación cuadrática no siempre aparece en su forma estándar $ax^2+bx+c=0$, ya que proviene de diferentes situaciones como es el trabajo con radicales, expresiones racionales y otras, es decir, es el problema que se trabaja el que conduce al modelo, resolvemos a continuación algunos casos que muestran cómo después de un proceso algebraico se llega al modelo de la cuadrática:

Ejemplo 1

$\sqrt{2x+1}+x=5$

Solución

Es claro que se debe eliminar el radical y con ello encontrar el valor de la variable x para el cual se tiene esta igualdad, una forma para lograrlo es:

$\sqrt{2x+1}+x=5$

Despejando el radical: $\sqrt{2x+1}=5-x$

Al elevar al cuadrado en ambos miembros se obtiene:

$$\left(\sqrt{2x+1}\right)^2=(5-x)^2$$
$$2x+1=25-10x+x^2$$

Igualando a cero:

$$2x+1-25+10x-x^2=0$$
$$-x^2+12x-24=0$$

De la cual se tiene:

$a=-1$ $b=12$ $c=-24$

La solución es, entonces, la siguiente:

$$x=\frac{-12\pm\sqrt{(12)^2-(-1)(-24)}}{2\,(-1)}=\frac{-12\pm\sqrt{144-96}}{-2}$$
$$=\frac{-12\pm\sqrt{48}}{-2}=\frac{-12\pm 4\sqrt{3}}{-2}$$

Obteniéndose las soluciones:

$$x_1=\frac{-12+4\sqrt{3}}{-2}=6-2\sqrt{3}$$
$$x_2=\frac{-12-4\sqrt{3}}{-2}=6+2\sqrt{3}$$

Ejemplo 2

Halle la solución de $\frac{3x-1}{x+1}=\frac{x}{x-1}$

Solución

En este caso procedemos a utilizar la propiedad de las proporciones

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D} \text{ sí y sólo si } AD=CB \text{, por tanto:}$$
$$(3x-1)(x-1)=x(x+1)$$
$$3x^2-x-3x+1=x^2+x$$

Igualando a cero y simplificando:

$$3x^2-4x+1-x^2-x=0$$
$$2x^2-5x+1=0$$

En esta ecuación cuadrática se tiene $a=2$, $b=-5$, $c=1$ luego la solución es:

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(2)(1)}}{2(2)}=\frac{5\pm\sqrt{25-8}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$$

Las soluciones son, por tanto:

$$x_1=\frac{5+\sqrt{17}}{4}, \quad x_2=\frac{5-\sqrt{17}}{4}$$

Ejemplo 3

Hallar la solución de $\frac{2x-1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{3}{2}$

Solución

Procedemos a efectuar la suma en el miembro izquierdo y luego utilizamos la propiedad anotada anteriormente, igualamos a cero y solucionamos:

$$\frac{(2x-1)(x+1)+x}{x(x+1)}=\frac{3}{2}$$
$$\frac{2x^2-x+2x-1+x}{x(x+1)}=\frac{3}{2}$$
$$2(2x^2+2x-1)=3x(x+1)$$
$$4x^2+4x-2=3x^2+3x$$
$$4x^2+4x-3x^2-3x-2=0$$
$$x^2+x-2=0$$

Esta última puede ser solucionada con factorización:

$$(x+2)(x-1)=0$$
$$x_1=-2, \qquad x_2=1$$

Ejemplo 4

Resolver la ecuación $e^{2x}+e^x-3=0$, *o* $(e^x)^2+e^x-3=0$

Solución

Este ejemplo muestra el caso en el que la cuadrática tiene como base una exponencial como es e^x recuerde que $e=2{,}718281\ldots$, sin embargo, la fórmula estudiada ya es válida en este caso donde $a=1$, $b=1$, $c=-3$ por tanto, se tiene

$$e^x=\frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4(1)(-3)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}=\frac{-1\pm 3.61}{2}$$

Obteniéndose así las raíces:

$$e^x=\frac{-1+6.31}{2}=1.305, \qquad e^x=\frac{-1-3.61}{2}=-2.305$$

Puesto que, se trata de hallar el valor de x se procede así:

$e^x=1.305 \Rightarrow x=\ln(1.305) \Rightarrow = x=0.2662$, para el segundo valor no se tiene solución puesto, que no se tienen logaritmos para números negativos.

Verificación: Si comprobamos la ecuación con el valor encontrado se obtiene

$$\begin{aligned} e^{2(0.2662)}+e^{0.2662}-3&=0\\ 1.7030+1.3048-3&=0\\ 0.0078&=0 \end{aligned}$$

El error de la igualdad aparece debido a la serie de aproximaciones que se han hecho desde que se obtuvo $\sqrt{13}$.

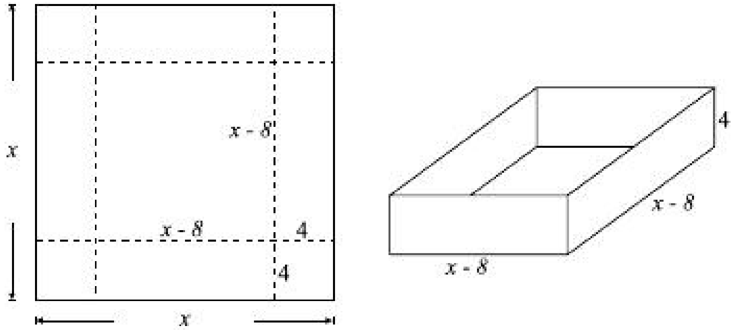
1.9.5. Problemas de cuadrática

Ejemplo 1

Se requiere construir una caja sin tapa con una pieza cuadrada de material cortando cuadrados de 4 cm en sus esquinas y doblando hacia arriba ¿cuál debe ser la longitud de la lámina si el volumen debe ser de 576 cm^3?

Solución:

La figura obtenida y la ecuación para el volumen es la siguiente:



$$(x-8)(x-8)4 = 576$$
$$(x-8)(x-8) = 114$$
$$x^2-16x+64-144=0$$
$$x^2-16x-80 = 0$$
$$(x-20)(x+4) = 0$$
$$x-20 = 0 \rightarrow x= 20$$

Del análisis anterior se tiene que la pieza de material debe ser de 20 cm por 20 cm.

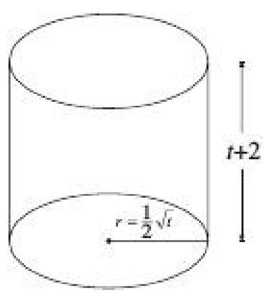
Ejemplo 2

El radio de un cilindro circular recto está dado por $r = \frac{1}{2}\sqrt{t}$ y su altura es $h=t+2$ medidas en pulgadas.

El volumen para este cilindro es V=6¼ *pulg*^{3} ¿Cuáles son las longitudes del radio y la altura?

Solución

Recordamos que el volumen de un cilindro se obtiene con la ecuación V=¼r^2h utilizando la información dada se obtiene $\pi(t+2)\left(\frac{1}{2}\sqrt{t}\right)=6\pi\rightarrow$ $\frac{t}{4}(t+2)=6\rightarrow t^2+2t=24$ de la cual se obtiene la ecuación cuadrática $t^2+2t-24=0 \rightarrow (t+6)(t-2)=0 \rightarrow =4$.



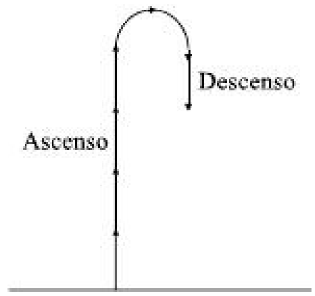
Lo cual quiere decir que el cilindro debe tener de $r = \frac{1}{2}\sqrt{4}=1\,pulg$ $h=4+2=6$ *pulg*

Ejemplo 3

Un objeto lanzado o disparado hacia arriba con la velocidad inicial de V_0 *pies/seg* después de t segundos tiene la altura $h=-16t^2+V_0\,t$ si una bala es disparada verticalmente hacia arriba con una velocidad de 640 *pies=seg*

i. ¿Cuándo caerá la bola al suelo?

ii. ¿En qué tiempo alcanza una altura de 4800 pies?
iii. ¿Cuál es la altura más alta alcanzada por la bala?



Solución:

Una gráfica ilustra el caso:

Como V_0= 640 *pies=seg* el modelo es el siguiente h=–16t^2+640t

i. Es claro que necesitamos averiguar cuando h=0, es decir:
   $0=-16t^2+640t$
   $0=-16t(t-40)$ de la cual tenemos
   $-16t=0 \rightarrow t=0$ momento del disparo
   $t-40 \rightarrow t=40$ caída de la bola, es decir después de los 40
   segundos de altura cae la bola al suelo.
ii. Necesitamos averiguar el tiempo al cual se tienen 4800 pies de altura.

$4800=-16t^2+640t$
$16t^2-640t+4800=0$
$t^2-40t+300=0$
$(t-10)(t-30)=0$ de la cual se tiene
$t-10=0 \rightarrow t=10\ Seg$
$t-30=0 \rightarrow t=30\ Seg$

Lo anterior significa que a los 10 segundos (subiendo) tiene la misma altura que a los 30 segundos (bajando).

iii. En el punto más alto alcanzado por la bala se tiene una sola vez, es decir la ecuación, $16t^2-640t+h=0$ para este punto debe tener una única solución, es decir el discriminante debe ser cero, ese discriminante es:

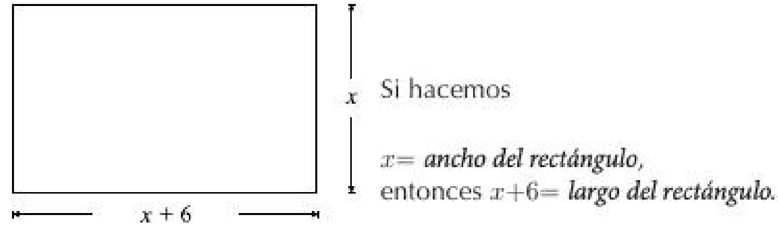
$$(-640)^2-4(16)(h)=0 \rightarrow 640^2=64h \rightarrow h=6400.$$

La altura máxima alcanzada por la bala es 6400 pies.

Ejemplo 4

Un terreno rectangular tiene 6 metros más de longitud que de ancho y su área es de 160 mts^2. ¿Cuáles son las longitudes?

Solución:



Con base en esta información,

x(x+6)=160

$x^2+6x–160=0$

(x+16)(x–10)=0 de la cual se obtiene,

x+16=0 → x=–16

x–10=0 → x=10

Las dimensiones del rectángulo son entonces: ancho 10 metros, largo 16 metros.

1.9.9. División sintética

Antes de hablar del proceso de la división sintética consideramos algunas anotaciones necesarias para dichos conceptos.

Ceros en una Ecuación

Consideramos el polinomio $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdot\cdot\cdot a_1x+a_0$ al igualar a cero este polinomio (equivale a buscar las intersecciones de la gráfica de $P(x)$ con el eje X) se tiene una ecuación de grado n, es decir:

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdot\cdot\cdot a_1x+a_0=0$$

Las soluciones de esta ecuación se denominan los ceros de la misma, si $x=c$ es un cero de esta ecuación, entonces:

$$a_nc^n+a_{n-1}c^{n-1}+\cdot\cdot\cdot a_1c+a_0=0$$

Ejemplo

Un cero para la ecuación $x^3–2x^2+x–2=0$ es $x=2$ puesto que:
$23–2(2)^2+2–2=0$
Esta solución o cero de la ecuación se obtiene de la siguiente forma:
$x3–2x^2+x–2 = 0$
$(x3–2x^2)+(x–2) = 0$
$x^2(x–2)+(x–2) = 0$
$(x–2)(x^2+1) = 0$
De la cual se obtienen:
$x–2=0 \rightarrow x=2$

$x^2+1=0 \rightarrow x=\pm i$

Como puede verse en esta ecuación no todos los ceros son números reales:

Ceros reales: si c es un número real y c es un cero de la ecuación, equivale a afirmar que:

i. $x=c$ es solución de la ecuación.
ii. $x-c$ es un factor de la ecuación.

Teorema del Residuo

Si el polinomio $P(x)$ es divisible por $x-c$ entonces el residuo es el valor $P(c)$.

Demostración recordamos que en la división $P(x) \div D(x)$ existen polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ tales que $P(x) \div D(x) = D(x)Q(x) \div R(x)$ donde, $P(x)$= dividendo, $D(x)$= divisor, $Q(x)$= cociente, $R(x)$= residuo, es de recordar también que el residuo debe ser de grado estrictamente menor que el grado del divisor. Si P(x) es divisible por $x-c$ se tiene que, $P(x)=(x-c\ )Q(x)+R(x)$ donde el residuo R es una constante pues debe ser de menor grado que el divisor que en este caso es $x-c$ si evaluamos en $x=c$:

$$P(c)=(c-c)Q(x)+R \rightarrow R=P(c)$$

Lo cual demuestra el teorema.

Teorema del factor

$x-c$ es un factor de $P(x)=0$ sí y solo si $x-c$ es un factor de $P(x)$

Demostración: si $P(x)$ se factoriza como $P(x)=(x-c)Q(x)$ entonces $P(c)=(c-c)Q(c)=0$, de la misma manera si $P(c)=0$ entonces, $P(x)=(x-c)Q(x)+0=(x-c)Q(x)$ es decir $x-c$ es un factor de $P(x)=0$.

Ejemplo 2

Dado que $x^3-x^2-4x+4=0$, verificar que $x=1$ es un cero y factorizar completamente la ecuación.

Solución

Si sustituimos en la ecuación x por 1 tenemos, $(1)^3-(1)^2-4(1)+4=0$ por teorema del residuo $x-1$ es un factor de la ecuación, efectuando la división se obtiene que $x^3-x^2-4x+4=(x-1)(x^2-4)=0$ sin embargo x^2-

4 corresponde a una diferencia de cuadrados por tanto $x^3-x^2-4x+4=(x-1)(x-2)(x+2)=0$ obteniéndose así la factorización completa de la ecuación.

División sintética

Ilustramos a continuación la división sintética con el ejemplo anterior:

i. Colocamos los coeficientes de la variable una vez ordenada la ecuación en forma decreciente teniendo el cuidado de conservar su signo:

$$x^3-x^2-4x+4$$
$$1\ -1\ -4\ +4$$

a. Si $x=c$ es un cero, dividimos por c para nuestro caso $x=1$ es un cero, entonces:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -4 & +4 & \\ & 1 & 0 & -4 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -4 & 0 & \end{array}$$

Este resultado se obtuvo así, se bajó el 1, luego este uno se multiplica por el divisor 1, $(1)(1)=1$ y colocamos este resultado en el renglón del medio, debajo de -1, sumando estos dos $-1+1=0$ este resultado se multiplica por uno (el divisor) es decir, $(0)(1)=0$ este resultado se coloca de bajo de -4 y sumamos $-4+0=-4$ al multiplicar por uno $(-4)(1)=-4$ y colocamos este resultado debajo del 4, al sumar $-4+4=0$ y este resultado corresponde al residuo.

iii. Los número que aparecen en la tercera fila corresponden a los coeficientes de un polinomio de un grado menor del polinomio original en este caso un polinomio del grado 2, es decir $x^2-0x-4=x^2-4$, lo cual significa que la factorización es la siguiente:

$$x^3-x^2-4x+4=(x-1)(x^2-4)=(x-1)(x-2)(x+2)$$

De esta manera las raíces de la ecuación son:

$(x-1)(x-2)(x+2)=0$ de la cual se obtiene:

$(x-2)=0 \rightarrow x=2$

$(x+2)=0 \rightarrow x=-2$

$x-1=0 \rightarrow x=1$

El siguiente teorema nos dice como buscar los ceros de la ecuación.

Teorema de ceros racionales

Si el polinomio $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n+1}+...\ a_1x+a_0$ tiene coeficientes enteros, entonces todo cero racional es de la forma p/q donde p es un factor del coeficiente a_0 y q un factor del coeficiente principal a_n

Ejemplo

Encontrar la solución de la ecuación $x^3+3x^2-4=0$

En este caso $a_0=-4$ y sus factores ±1, ±2, ±4 y $a_n=1$ sus factores ±1.

Los posibles ceros son: $\frac{\pm 1}{\pm 1}, \frac{\pm 2}{\pm 1}, \frac{\pm 4}{\pm 1},$ es decir, ±1, ±2, ±4, procedemos entonces con la división sintética a verificar cuál de ellos es un cero

1	3	0	-4	1
	1	4	4	
1	4	4	0	

El resultado anterior nos indica que $x=1$ es una solución pues el residuo es cero, por tanto

$$x^3-3x^2-4=(x-1)(x^2+4x+4)=0$$

Como x^2+4x+4 es un trinomio cuadrado perfecto tenemos:

$$x^3-3x^2-4=(x-1)(x+2)^2=0 \text{ es decir, } x-1=0 \rightarrow x=1$$
$$x+2=0 \rightarrow x=-2$$
$$x+2=0 \rightarrow x=-2$$

A la raíz $x=-2$ se le denomina una raíz de multiplicidad 2.

Ejemplo 2

Hallar la solución de la ecuación $x^4+2x^3-7x^2-8x+12 = 0$

Solución

En esta ecuación a_0 =12 y los factores son ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12 puesto que a_n =1 los divisores obtenidos de $\frac{p}{q}$ son los mismos de a_0 procedemos entonces a utilizar la división sintética.

1	2	-7	-8	12	1
	1	3	-4	-12	
1	3	-4	-12	0	

Claramente $x-1$ es un factor para este polinomio: $(x-1)(x^3+3x^2-4x-12)=0$

Nuevamente procedemos por división sintética para: $(x^3+3x^2-4x-12)=0$

1	3	-4	-12	2
	2	10	12	
1	5	6	0	

Puesto que el residuo es cero $x-2$ es un factor, luego, $x3+3x^2-4x-12= (x-2)(x^2+5x+6)$, este último trinomio x^2+5x+6 se factoriza como $x^2+5x+6= (x+3)(x+2)$ por tanto

$$x^4+2x3-7x^2-8x+12=0$$

$$(x-1)(x-2)(x+3)(x+2)=0$$

De lo cual se obtienen los ceros $x=1$, $x=2$, $x=-3$, $x=-2$

Ejemplo 3

Hallar la solución de la ecuación $6x^3-13x^2+9x-2=0$

Solución

En este caso $a_0=-2$ y sus divisores ±1, ±2 y $a_n=6$ con divisores ±1, ±2, ±3, ±6 luego las posibles raíces o ceros son:

$$\frac{p}{q}=\frac{\pm1}{1},\frac{\pm1}{2},\frac{\pm1}{3},\frac{\pm1}{6},\frac{\pm2}{1},\frac{\pm2}{2},\frac{\pm2}{3},\frac{\pm2}{6}$$

$$\frac{p}{q}=\pm1,\frac{\pm1}{2},\frac{\pm1}{3},\frac{\pm1}{6},\pm2,\frac{\pm2}{3}$$

Procediendo por división sintética:

6	−13	9	−2	
	3	−5	2	$\frac{1}{2}$
6	−10	4	0	

Lo cual indica que $x-\frac{1}{2}$ es un factor, nuevamente aplicamos división sintética:

6	−10	4	
	6	−4	1
6	−4	0	

Esto nos muestra que $x-1$ es otro factor, tenemos entonces, $6x^3-13x^2+9x-2=0$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(6x-4)=0$$

De lo cual $x-\frac{1}{2}$, $x=1$, $x=\frac{2}{3}$

1.11. Ejercicios

En cada caso hallar la solución de la ecuación y verificar su respuesta.

1. $-x^2+3x-1=0$
2. $2x^2-2x+1=0$
3. $\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{3}=0$

4. $4z^2 - z - 3 = 0$
5. $x^2 - 12x + 32 = 0$
6. $m^2 + 13m + 30 = 0$
7. $2n^2 - 3n - 9 = 0$
8. $\sqrt{3x-1} + 2 = x - 1$
9. $\dfrac{3x-1}{2x} = \dfrac{x}{x-1}$
10. $(x-1)^2 + 3(x-1) + 2 = ($
11. $\dfrac{x}{\sqrt{2x-1}} = \dfrac{3}{5}$
12. $\sqrt{3+\sqrt{x+1}} = 2$
13. $3x^2 + 5x - 3 = 0$
14. $\dfrac{1}{2}x^2 - 3x + 2 = 0$
15. $-x^2 + 7x - 1 = 0$
16. $\dfrac{3x-1}{x} = \dfrac{2x+1}{5}$
17. $\dfrac{x-2}{2x+1} = \dfrac{x-1}{3x}$
18. $4x - \dfrac{3}{x} = 2$
19. $\dfrac{3x-1}{2-\dfrac{1}{x}} = 5$
20. $\sqrt{3-\dfrac{2}{x}} = 5$
21. $\sqrt{3-\sqrt{2x-1}} = 2$
22. $\sqrt{3x+2} - 1 = x$
23. ¿Para qué valores de k las soluciones de la ecuación $x^2+kx+1=0$ son reales iguales?
24. Dado que $x_1=3$ y $x_2=-8$ son soluciones de una ecuación cuadrática, halle la ecuación.
25. Dado que $x_1 = \frac{3}{5}$ y $x_2 = \frac{-4}{7}$ son soluciones de una ecuación cuadrática, halle la ecuación.

26. Dado que $x_1=3$ y $x_2=3$ son soluciones de una ecuación cuadrática, hallar la ecuación.

27. Para la ecuación $x^2+3x+c=0$ el discriminante es igual a *25*, hallar la ecuación.

28. En la ecuación $ax^2+4x-3=0$ el discriminante es igual a –8 hallar a.

29. Se lanza una pelota hacia arriba a 48 *pies* por segundo desde la azotea de un edificio de *160 pies* de altura. La altura de la pelota puede ser modelada por $h=160+48t-16t^2$, donde t es el número de segundos después de que se arroja. ¿Cuánto tiempo después la altura es cero? ¿Cuánto tiempo después la altura es de 160 *pies*?

30. En un conjunto residencial se tiene un parque de recreación de 40 *m* por 60 *m*, el cual quiere rodearse por un sendero peatonal de anchura uniforme, ¿cuál debe ser la medida de la anchura del camino para tenerse en total 2 816 *metros* cuadrados entre el área del parque y la del sendero?

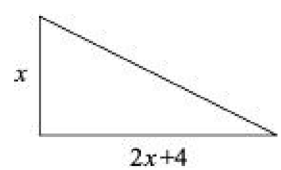
31. Se desea construir una caja rectangular sin tapa y base cuadrada, se estima que la altura sea de 2 *m*. El material para el fondo cuesta \$ 5 000 por metro cuadrado y para los lados \$ 4 000 por metro cuadrado. ¿Qué volumen tendrá una caja construida con \$ 64 000?

32. La suma de los n primeros números enteros positivos está dada por $S=\frac{n(n+1)}{2}$. Si la suma es 210, ¿cuáles son los n números sumados?

33. El producto de dos números pares consecutivos es igual a 80, hallar los números (recuerde que el número par se expresa como $2n$).

34. El producto de dos números impares consecutivos es 195, hallar los números.

35. Hallar x tal que el área del triángulo sea 160 *metros* cuadrados.



Resolver las ecuaciones completando el trinomio cuadrado perfecto

36. $3x^2-6x+4=0$

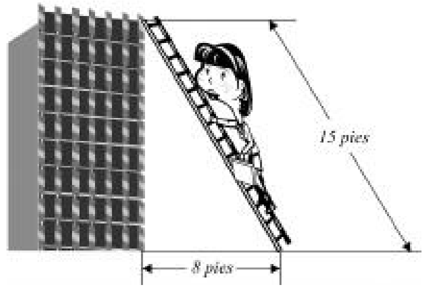
37. $x^2-2x+5=0$

38. $2z^2-4z+8=0$

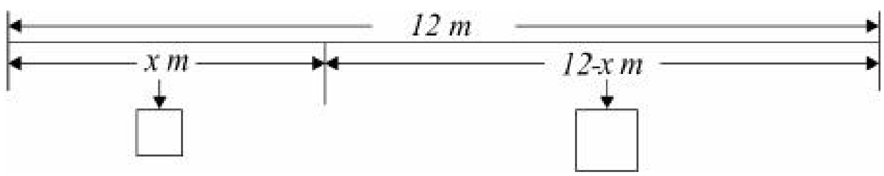
39. $\frac{x}{x+2}=\frac{5}{3x-5}$

40. Una escalera de 15 *pies* de longitud se apoya sobre la pared de un edificio, la base de la escalera se

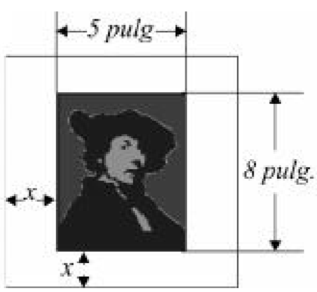
encuentra a 8 *pies* de la base del edificio, ¿a qué altura se encuentra el extremo de la escalera?



41. Un alambre de 12 *m* de longitud se parte en dos porciones formándose dos cuadrados con cada una de ellas, si el área total de los cuadrados es 5 m^2 halle la longitud de los lados de cada uno de ellos.



42. El área superficial total de un cilindro circular recto es de 63π *pulg*^{2} si la altura es de 5 *pulg*, halle el radio del cilindro.

43. 

Una pintura de longitudes 5 por 8 *pulg* se coloca sobre una base rectangular de madera de 108 *pulg*^{2} de área; si alrededor de la pintura se tiene una margen uniforme de x *pulg*, halle el valor de x.

44. El producto de dos números enteros consecutivos es 1122: halle dichos números.

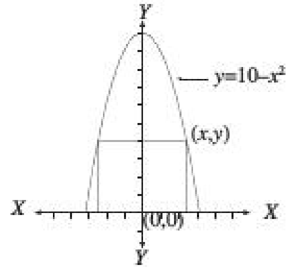
45. En algunos casos las ecuaciones presentan comportamientos en los cuales se debe hacer por lo menos una sustitución para lograr eliminar un radical y hacer menos laborioso el proceso de solución, por ejemplo la ecuación $x-6\sqrt{x}+8=0$ puede solucionarse haciendo la sustitución $u=\sqrt{x}$ de la cual se obtiene $u^2 = x$, de esta forma la ecuación se transforma en $u^2 - 6u + 8 = 0$ se resuelve para u y luego se hallan los valores para x (se deja al lector la terminación del ejemplo).

46. Utilizando el proceso anterior, halle la solución de las siguientes ecuaciones:

    a. $3x - 8\ x + 4 = 0$

    b. $4-\frac{3}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}$

47. Encuentre las dimensiones que dan la máxima área para el rectángulo que se muestra en la figura. Su base está sobre el eje X y los otros dos vértices sobre la parábola $y=10-x^2$



48. Se desea construir una caja abierta base con cuadrada con volumen *16pies*^{3}.

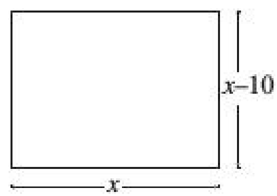
   a. Encontrar una función que modele el área superficial de la caja

   b. ¿Cuáles son las dimensiones que minimizan la cantidad de material usado?

49.

   a. Un terreno rectangular tiene un área de 1200 *mts*^{2}, el ancho es de 10 metros menos que el largo.

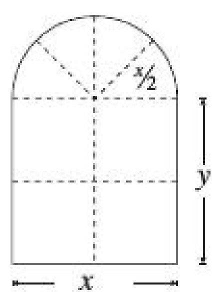
   Hallar las longitudes de sus lados.



b) Una ventana normanda que consta de un rectángulo con un semicírculo en la parte superior debe tener 6*mts* de perímetro.

i. Escribir una función que modele el área de la ventana.
ii. ¿Qué dimensiones maximiza la cantidad de luz?

Hallar la solución en los problemas 50 a 61.



50. $6x^4+7x^3-12x^2-3x+2=0$

51. $x^5-13x^3+36x=0$

52. $6x^4-x^3-8x^2+x+2=0$

53. $x^5-10x^3+9x=0$

54. $5x^4-9x^3-7x^2-9x+2=0$

55. $5x^4-9x^3-7x^2-9x+2=0$

56. $12x^3+4x^2-3x-1=0$

57. $5x^5+4x^4-16x^3-2x^2+11x=0$

58. $x^4-\frac{8}{9}x^2-\frac{1}{9}=0$

59. $3x^3-2x-1=0$

60. $2x^3-3x^2+4=0$

61. $x^3-3x-2=0$

1.10. DESIGUALDADES

Retomamos nuevamente la propiedad de orden de los números reales estudiada ya en el conjunto de los números reales, se afirma allí que:

Si a y b son números reales, se tiene una y solo una de las siguientes afirmaciones:

i. $a = b$ (a es igual a b)
ii. $a < b$ (a es menor que b)
iii. $a > b$ (a es mayor que b)

La primera de las anteriores la consideramos en el estudio de las ecuaciones de primer y segundo grado en una variable.

Desarrollamos o utilizamos ahora las alternativas (*ii*) y (*iii*) consideradas en desigualdades de primer grado o desigualdades de segundo grado en una variable no sin antes recordar la propiedad transitiva de orden que afirma:

Si a, b y c son números reales con $a<b$ y $b<c$ entonces $a<c$

Demostración: Recuerde que si $a<b \Rightarrow b-a>0$, por tanto
$a<b \Rightarrow b-a>0$
$b<c \Rightarrow c-b>0$

Sumando en ambos miembros resulta $c-a>0 \Rightarrow a<c$, la suma anterior es posible, pues recuerde que:

$$\begin{gathered} a<b \\ a<d \\ a+c<b+d \end{gathered}$$

Ejemplo

Si $x<3$ y $3<z \Rightarrow x<z$ por la propiedad de transitividad.

En el caso de las ecuaciones de primero y segundo grado se consideraba como solución el número o números que la satisfacen. En el caso de las desigualdades se tendrá un conjunto de números que satisfacen la desigualdad es decir un número finito o infinito de números reales.

En este caso se habla del **dominio de la solución** o **conjunto solución** de la desigualdad.

En la solución de una desigualdad se procede en forma similar a lo hecho en las ecuaciones salvo que aquí deben tenerse en cuenta las propiedades enunciadas anteriormente para las desigualdades, sin querer ser repetitivos nuevamente las enumeramos.

1.10.1. Propiedades y solución de desigualdades de primer grado

Sean a, b y c números reales:

I. Si $a< b \Rightarrow a+c<b+c$ propiedad de suma
II. Si $a< b \Rightarrow a-c<b-c$ propiedad de resta
III. Si $a< b$ y $c>0 \Rightarrow ac<bc$ propiedad de multiplicación
IV. Si $a< b$ $c<0 \Rightarrow ac>bc$ propiedad de multiplicación

Si observamos las anteriores propiedades se puede escribir para cada una de ellas el cambio ocurrido; así para la primera podemos decir que "al sumar en ambos miembros de una desigualdad el mismo número real, la desigualdad no cambia". Es importante que el lector haga el mismo ejercicio para las tres propiedades restantes.

Nota: *Es importante hacer claridad que aunque las propiedades se enuncian para $<$, son válidas para el resto de casos, es decir $\leq$, $>$, $\geq$.*

Ejemplo 1

Dado que $x<z$ por la propiedad *iii*, $3x<3z$, en particular si $x=-2$, $z=5 \Rightarrow 3(-2)<3(5) \Rightarrow -6<15$.

Ejemplo 2

Puesto que $-3<4$, y $x<0 \Rightarrow -3x>4x$ de tal manera que si $x=-2$ se tiene que $-3(-2)>4(-2) \Rightarrow -6>-8$.

Las desigualdades que se obtienen de la desigualdad inicial mediante las anteriores propiedades se denominan desigualdades equivalentes.

Ejemplo 3

Hallar y graficar sobre la recta de los reales las soluciones para $4x - 3 \leq 5$.

Solución

Utilizando las propiedades enumeradas anteriormente obtenemos desigualdades equivalentes, a saber:

$$4x-3\leq 5$$
$$4x-3+3\leq 5+3 \quad \text{por } (i)$$
$$4x+0\leq 8$$
$$4x\leq 8$$
$$\frac{1}{4}(4x)\leq\frac{1}{4}(8) \qquad \textit{por} \ \ (iii)$$
$$\left(\frac{1}{4}4\right)x\leq\frac{8}{4}$$
$$x\leq 2$$

Sobre la recta de los reales se tiene:

La parte más oscura nos indica que todos los números reales que están sobre ella son solución de la desigualdad, esta solución también se acostumbra a presentar mediante una escritura de conjunto como $\{x\in\Re / x\leq 2\}$ la cual se lee, el conjunto de todos los números reales x tales que son menores e iguales a 2. Otra escritura quizás más utilizada que la anterior es la de intervalos que para este caso corresponde a $(-\infty,2]$. Recuerde que $-\infty$ representa un número real negativo muy grande, se coloca el paréntesis redondo al lado izquierdo para indicar que este número no es parte de la solución. A la derecha se tiene el corchete] para indicar que el número 2 es parte de la solución, si se verifica este hecho se tiene $x\leq 2\Rightarrow 2\leq 2$ lo cual es verdadero pues 2=2. De la misma manera si se elige un número cualquiera en este intervalo solución la desigualdad debe satisfacerse, es decir $-5\in(-\infty,2]$. Entonces, $4(-5)-3\leq 5\Rightarrow -23\leq 5$ lo cual es verdadero.

Intervalos

Recordamos que para números reales a y b el conjunto de número entre los dos se denomina intervalo y tiene una representación como conjunto, como intervalo y su representación gráfica. Estos intervalos son:

Nombre	Intervalo	Conjunto	Gráfica	Ejemplo
Cerrado	$[a, b]$	$\{x \in R / a \leq x \leq b\}$	a [——] b	-2 [——] 5
Abierto	(a, b)	$\{x \in R / a < x < b\}$	a (——) b	-2 (——) 5
Abierto Derecha – Cerrado Izquierda	$[a, b)$	$\{x \in R / a \leq x < b\}$	a [——) b	-2 [——) 5
Abierto Izquierda – Cerrado Derecha	$(a, b]$	$\{x \in R\ a < x \leq b\}$	a (——]	-2 (——] 5
Infinito a Derecha – Cerrado Izquierda	$[a, \infty)$	$\{x \in R / x \geq a\}$	a [——→	-2 [——→
Infinito a Derecha – Abierto a Izquierda	(a, ∞)	$\{x \in R / x > a\}$	a (——→	-2 (——→
Infinito a izquierda – Cerrado Derecha	$(\infty, a]$	$\{x \in R / x \leq a\}$	←——] a	-2 ←——]
Infinito a Izquierda – Abierto a Derecha	(∞, a)	$\{x \in R / x < a\}$	←——) a	-2 ←——)

Es claro que ésta representación gráfica no es la única y se hace sobre la recta de los números reales en el cuadro anterior simplemente se refleja el segmento involucrado en la solución sin embargo se debe entender que este segmento se encuentra sobre la recta de los números reales.

Ejemplo 1

Hallar los valores de x para los cuales $\frac{2x-1}{2} \leq \frac{3}{5}$

Solución

$$\frac{2x-1}{2} \leq \frac{3}{5}$$
$$5\left(2x-1\right) \leq 6$$
$$10x-5 \leq 6$$
$$10x-5+5 \leq 6+5$$
$$10x \leq 11$$
$$\frac{1}{10}(10x) \leq \frac{1}{10}(11)$$
$$x \leq \frac{11}{10}$$

La solución está entonces dada por $\left\{x \in \Re / x \leq \frac{11}{10}\right\}$, escrito en forma de intervalo $\left(-\infty, \frac{11}{10}\right]$ y gráficamente se tiene:

Es importante hacer una prueba para nuestra solución y esto se logra tomando un número cualquiera del intervalo solución, por ejemplo $-10 \in \left(-\infty, \frac{11}{10}\right]$ sustituyendo en la desigualdad se obtiene:

$$\frac{2\,(-10)-1}{2} \leq \frac{3}{5}$$

$$\frac{-21}{2} \leq \frac{3}{5} \quad \text{lo cual es verdadero}$$

Observe que si se toma un número fuera del intervalo solución digamos 5, se obtiene:

$$\frac{2\,(5)-1}{2} \leq \frac{3}{5}$$

$$\frac{9}{2} \leq \frac{3}{5} \;\Rightarrow 45 \leq 6 \quad \text{lo cual es falso}$$

Ejemplo 2

Hallar la solución para $-2 < 3x + 2 < 4$

Solución

$$-2 < 3x + 2 < 4$$
$$-2 - 2 < 3x + 2 - 2 < 4 - 2$$
$$-4 < 3x < 2$$
$$\frac{1}{3}(-4) < \frac{1}{3}(3x) < \frac{1}{3}(2)$$
$$\frac{-4}{3} < x < \frac{2}{3}$$

La solución es entonces $\left\{x \in \Re \,/\, \frac{-4}{3} < x < \frac{2}{3}\right\}$ y en forma de intervalo $\left(\frac{-4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

La gráfica sobre la recta de los reales es la siguiente:

En los extremos del intervalo se introdujeron paréntesis redondos para indicar que ninguno de los dos números de los extremos pertenece al intervalo.

1.12. Ejercicios

Halle la solución en cada caso y grafique, también dar la respuesta con notación de conjunto e intervalo.

1. $5x - 2 \geq 2x - 1$

2. $\frac{3}{2}x-1<x+4$

3. $1\leq 7x-2\leq 3$

4. $3\,(2x-1)\leq x-3\;(x-4)$

5. $\frac{2x-1}{3}<\frac{x}{2}$

6. $\frac{2}{3}>\frac{4x-1}{4}$

7. **7.**

8. $\frac{3x+1}{2}\leq\frac{2x}{3}$

9. $0<\frac{3x+1}{4}<3$

10. $2\,(3x-1)>\frac{3}{2}\;(x+2)$

11. $5\geq 3x-1$

12. $\frac{x}{3}<\frac{4-x}{8}$

13. $-1\leq\frac{1}{2}x-3<2$

14. $2<3x-1\leq\frac{5}{3}$

15. $\frac{3}{2}\;(x-1)>2\,(3x-2)$

16. $-9x+3>2x-5$

17. Halle valores de *x* para los cuales $\sqrt{3x-1}$ exista en los números reales.
18. Halle valores de *x* para los cuales $\sqrt{2-5x}$ exista en los números reales.
19. Halle valores de *x* para los cuales $\sqrt{x-\frac{3}{2}}$ exista en los números reales.
20. Un constructor busca un terreno rectangular cuyo perímetro sea mayor a 80 m y su ancho sea de 10 m. ¿Cuál puede ser el largo del terreno?
21. La equivalencia entre grados Celsius y grados Fahrenheit está dada por $C=\frac{5}{9}\,(F-32)$.

¿Cuál es la temperatura en grados F, que está entre 15 y 25 grados C?

1.10.2. Desigualdad de segundo grado

Hasta ahora se han desarrollado desigualdades de primer grado, es decir aquellas en las cuales la variable tiene como máximo exponente uno. Se tienen también desigualdades de segundo grado es decir desigualdades de la forma $ax^2 + bx + c \leq 0$, un posible procedimiento en su solución es:

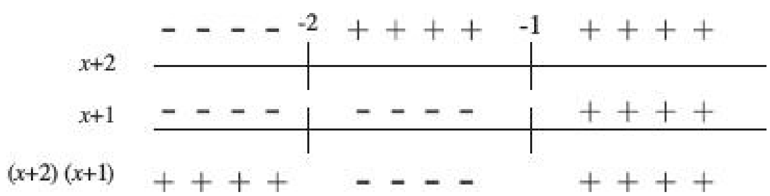
i. Expresar la desigualdad en la forma menor o igual a cero siempre.
ii. Factorizar la expresión cuadrática si es posible.
iii. Hacer un análisis con un procedimiento analítico o gráfico.
iv. Dar la solución en forma de intervalo y graficar.

Ejemplo 1

Hallar la solución para $x^2+3x+2\leq 0$

Solución

i. Es claro que este numeral ya se cumple.
ii. En este caso el polinomio es factorizable así $x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$ por tanto $(x+2)(x+1)\leq 0$
iii. El análisis para este caso es



i. El análisis anterior da como resultado que la solución de la desigualdad corresponde al intervalo [–2,–1] ya que se buscan los valores para los cuales la desigualdad es negativa o cero.

El cuadro anterior muestra que el factor $x+2$ es positivo para valores mayores a –2 número en el cual dicho factor es cero, de la misma manera el factor es negativo para valores menores a–2. El análisis del factor $x+1$ se efectúa de la misma manera, es decir, se encuentra que dicho factor es cero en –1, hacia la derecha de este número es positivo el factor y hacia la izquierda es negativo.

Finalmente en el último renglón se observa el resultado de multiplicar los signos de los factores en cada uno de estos intervalos definidos por los mismos, y del cual hemos tomado la solución indicada en el numeral iv).

Ejemplo 2

¿Para qué valores de k la ecuación $x^2+kx+4=0$ tiene soluciones reales distintas?

Solución

i. Es claro que se debe hallar la solución de la ecuación $k^2–16>0$ que corresponde al discriminante de la misma.

i. La factorización es $k^2-16=(k-4)(k+4)>0$

ii. El análisis correspondiente es

	$-\infty$ … -4	-4 … 4	4 … ∞
$k-4$	$- - - -$	$- - - -$	$+ + + +$
$k+4$	$- - - -$	$+ + + +$	$+ + + +$
$(k-4)(k+4)$	$+ + + +$	$- - - -$	$+ + + +$

i. El análisis anterior muestra que el valor de k debe tomarse en el siguiente intervalo $(-\infty,-4)\cup(4,\infty)$.

1.13. Ejercicios

Hallar la solución en cada caso, expresar la respuesta como un intervalo.

1. $x^2 - x \geq 0$
2. $x^2 - 10x < -16$
3. $3x - \frac{1}{x} \leq 0$
4. $\frac{2}{x} + 1 \leq \frac{x}{2}$
5. $\frac{1}{x} - 2x \leq \frac{3}{5}$
6. $\frac{x-1}{3} \geq \frac{x}{x+2}$
7. $3\left[2x - \frac{4x}{5} \quad x-1\right] < 3$
8. $5x + \frac{3}{2_x} > 0$
9. $2x-1 \quad x+3 \leq -2x+1$
10. $\frac{x}{x-3} \leq \frac{x+1}{3x}$
11. ¿Para qué valores de k las soluciones de la ecuación $x^2+kx-3=0$ son reales distintas?
12. ¿Para qué valores de k existe $\sqrt{k^2+8k+12}$ en los reales?
13. ¿Para qué valores de k las soluciones de la ecuación $x^2+kx+1=0$ son complejas?
14. Hallar valores de x para los cuales la raíz existe en los números reales.

a. $\sqrt{x^2+6x+7}$

b. $\sqrt{3x-\dfrac{12}{x}}$

15. ¿Para qué valores de k, existe $\sqrt{k^2-4k}$ en los complejos?

1.10.3. Desigualdades con valor absoluto

Estudiamos enseguida desigualdades que se expresan con valor absoluto, así por ejemplo si se trabaja en el intervalo (–4,4) es decir $-4<x<4$ este resultado o desigualdad puede ser escrita como $|x|<4$ el cual se lee, "valor absoluto de x menor que 4", esta desigualdad indica también que x debe estar a menos de 4 unidades del cero. Este tipo de desigualdad se trabaja con las propiedades de valor absoluto y, además, en la solución se tienen en cuenta los siguientes resultados.

i. $|x|<d$ es equivalente a $-d<x<d$
ii. $|x|\leq d$ es equivalente a $-d\leq x\leq d$
iii. $|x|>d$ es equivalente a $x>d$ o $x<-d$
iv. $|x|\geq d$ es equivalente a $x\geq$d o $x\leq -d$

Ejemplo 1

Halle la solución para $|2x-3|<4$

Solución

Teniendo en cuenta la propiedad *i*) se obtiene $-4<2x-3<4$. Se procede a despejar x con los procesos ya vistos:

$-4<2x-3<4$
$-4+3<2x-3+3<4+3$
$-1<2x<7$

Finalmente multiplicando por $\frac{1}{2}$ todos los miembros de la desigualdad se obtiene:

$$\frac{1}{2}(-1)<\frac{1}{2}(2x)<\frac{1}{2}(7)$$
$$-\frac{1}{2}<\frac{2}{2}x<\frac{7}{2}$$
$$-\frac{1}{2}<x<\frac{7}{2}$$

El resultado anterior muestra que la solución es el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$ cuyo gráfico es

Verificación: Tomando un valor de este intervalo digamos x=1 y sustituyendo en el enunciado inicial se tiene:

$|2(1)-3|<4$
$|2-3|<4$
$|-1|<4$
1<4 lo cual es verdadero

Ejemplo 2

Hallar la solución para $|3x+2|\geq 3$

Solución

La desigualdad es equivalente a: $3x+2\geq 3$ o $3x+2\leq -3$ Solucionando cada una de las desigualdades se obtiene:

$$\begin{array}{lcl} 3x+2\geq 3 & \text{o} & 3x+2\leq -3 \\ 3x+2-2\geq 3-2 & \text{o} & 3x+2-2\leq -3-2 \\ 3x\geq 1 & \text{o} & 3x+\leq -5 \end{array}$$

Multiplicando por $\frac{1}{3}$ en ambos miembros de las desigualdades:

$$\begin{array}{lcl} \frac{1}{3}(3x)\geq \frac{1}{3}(1) & o & \frac{1}{3}(3x)\leq \frac{1}{3}(-5) \\ x\geq \frac{1}{3} & o & x\leq -\frac{5}{3} \end{array}$$

Expresada esta solución en forma de intervalo es:

$$\left(-\infty, -\frac{5}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{3}, \ \infty\right)$$

La gráfica sobre los reales es:

Al igual que en el ejemplo anterior es fácil verificar la validez de la solución.

1.10.4. Propiedades del valor absoluto

Es importante tener en cuenta las siguientes propiedades del valor absoluto:

i. $|ab| = |a||b|$

ii. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

iii. $|a-b| = |b-a|$

iv. $-|a| \le a \le |a|$

Ejemplo 1

Halle la solución para $\left|\dfrac{2x+1}{-5}\right| \le 4$

Solución

Utilizando la propiedad (*ii*) se tiene:

$$\frac{|2x+1|}{|-5|} \le 4$$

$$\frac{|2x+1|}{5} \le 4 \Rightarrow |2x+1| \le 20$$

Procedemos como en los casos anteriores

$$-20 \le 2x+1 \le 20$$

$$-21 \le 2x \le 19$$

$$-\frac{21}{2} \le x \le \frac{19}{2}$$

nuestra solución es entonces el intervalo $\left[-\dfrac{21}{2},\ \dfrac{19}{2}\right]$ cuya gráfica correspondiente es:

Ejemplo 2

Hallar la solución para $\left|\dfrac{2x+1}{x+2}\right| < 3$

Solución

Procedemos a solucionar este ejercicio mediante dos formas así:

$$-3 < \frac{4x+1}{x+2} < 3$$

Este resultado conduce a dos desigualdades:

$$-3 < \frac{4x+1}{x+2} \quad \text{y} \quad \frac{4x+1}{x+2} < 3$$

Se procede entonces a dar solución a cada una de ellas y a hallar la intersección entre ellas que será la solución de la desigualdad original:

$$-3 < \frac{4x+1}{x+2}$$

$$0 < \frac{4x+1}{x+2} + 3$$

$$0 < \frac{7x+7}{x+2}$$

		-2		-1	
7x+7	- - - -		- - - -		+ + + +
x+2	- - - -		+ + + +		+ + + +
(7x+7) (x+2)	+ + + +		- - - -		+ + + +

La solución está dada por $(-\infty,-2)\cup(-1,\infty)$

La solución para la segunda desigualdad es:

$$\frac{4x+1}{x+2} < 3$$

$$\frac{4x+1}{x+2} - 3 < 0$$

$$\frac{x-5}{x+2} < 0$$

		-2		5	
x-5	- - - -		- - - -		+ + + +
x+2	- - - -		+ + + +		+ + + +
(x-5) (x+2)	+ + + +		- - - -		+ + + +

La solución correspondiente es el intervalo $(-2, 5)$.

De la intersección de los dos resultados anteriores se obtiene como solución el intervalo $(-1, 5)$.

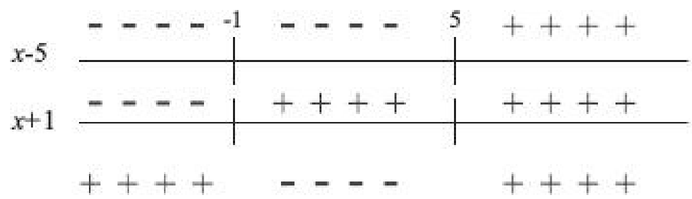
Utilizando las propiedades la desigualdad se transforma en:

$$\frac{|4x+1|}{|x+2|}<3 \Rightarrow |4x+1|<3|x+2|$$

Se eleva al cuadrado en ambos miembros obteniéndose

$(4x+1)^2<9(x+2)^2$
$16x^2+8x+1<9x^2+36x+36$
$x^2–4x–5<0$
$(x–5)(x+1)<0$

Procedemos nuevamente a efectuar un análisis gráfico:



El resultado nos muestra el mismo intervalo solución que se obtuvo con el procedimiento anterior, es decir, (–1, 5).

Ejemplo 3

Hallar la solución para $|x–2|+|3x+1<10$

Solución

Para este caso primero se debe analizar cada uno de los sumandos aplicando la definición del valor absoluto.

$$|x-2|=\begin{cases} x-2 & \text{si } x-2\geq 0 \\ -(x-2) & \text{si } x-2<0 \end{cases} \Rightarrow |x-2|=\begin{cases} x-2 & \text{si } x\geq 2 \\ 2-x & \text{si } x<2 \end{cases}$$

Analizamos el segundo sumando

$$|3x+1|=\begin{cases} 3x+1 & \text{si } 3x+1\geq 0 \\ -3x-1 & \text{si } 3x+1<0 \end{cases} \Rightarrow |3x+1| = \begin{cases} 3x+1 \text{ si } x\geq -\frac{1}{3} \\ -3x-1 \text{ si } x<-\frac{1}{3} \end{cases}$$

Observando los resultados de ambos sumandos se tienen los intervalos

$$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right),\left(-\frac{1}{3},2\right) \text{ y } (2,\infty).$$

Seguidamente analizamos la desigualdad original para cada uno de los intervalos:

a.
$$\text{Si } x < \frac{-1}{3},$$
$$|x-2|+|3x+1|<10$$
$$2-x+\ (-3x-1)<10$$
$$1-4x<10$$
$$1-9<4x$$
$$-\frac{9}{4}<x$$

b.
$$\text{Si } -\frac{1}{3}<x<2$$
$$|x-2|+|3x+1|<10$$
$$2-x+3x+1<10$$
$$2x<7$$
$$\mathrm{x}<\frac{7}{2}$$

c.
$$\text{Si } x \geq 2$$
$$|x-2|+|3x+1|<1$$
$$x-2+3x+1<10$$
$$4x-1<10$$
$$x<\frac{11}{4}$$

Finalmente interceptando los resultados obtenidos en *a*, *b* y *c* se observa que la solución está dada por el intervalo $\left(\frac{-9}{4},\frac{1}{4}\right)$

Verificación: Si se toma un valor cualquiera en este intervalo digamos –1 se obtiene:

$$|-1-2|+|3(-1)+1|<10$$
$$|-3|+|-2|<10$$
$$5<10$$

1.14. Ejercicios

Hallar la solución en cada caso dar la respuesta en forma de intervalo:

1. $|3x-1|\leq 4$

2. $\left|\frac{2}{3}x-5\right|\leq 7$

3. $|-x+4|\leq 1$

4. $\left|3x-\frac{1}{2}\right|>5$

5. $\left|\frac{1}{2}x-\frac{3}{5}\right|\geq 2$

6. $\left|\frac{3x-1}{x+2}\right|<1$

7. $\left|2-\frac{1}{x}\right|>1$

8. $|x-2|+|x-1|>6$

9. $|x+1|+|x-5|<7$

10. $|x-3|+|x+2|=5$

1.15. Ejercicios varios

En los ejercicios del 1 al 10 hallar la solución de las ecuaciones dadas:

1. $3(2x-1)=4\left(\frac{1}{2}x+4\right)$

2. $x^3=x$

3. $\frac{2}{x-2}+\frac{3}{2x+1}=1$

4. $\frac{3x}{x-1}=\frac{x}{x+3}$

5. $2x(3x-1)=x(5x+4)$

6. $\dfrac{3x+1}{x-1}=\dfrac{4x-2}{x-1}$

En los ejercicios del 11 al 20 hallar la solución de la desigualdad dada.

11. $|3x-1|\le 5$

12. $-2\le \dfrac{7}{2}x-4\le 5$

13. $x^3\le x$

14. $\dfrac{2}{x-1}\ge \dfrac{x}{x+2}$

15. $|4x+5|\ge 7$

16. $\left|\dfrac{3x-1}{x+1}\right|\le 2$

17. $(2x-1)(x+3)\le 4$

18. $\dfrac{3x}{2x-1}\le \dfrac{x+2}{x-1}$

19. $(x-3)(2x+4)\ge 3x-1$

20. $\left|\dfrac{7}{2}x-\dfrac{4}{5}\right|\le 3$

21. El área en una región triangular es de 60 m^2 si la base es el doble de la altura hallar las longitudes de la altura y la base.
22. Hallar los valores de k, para los cuales $\sqrt{k^2+7k+10}$ tiene solución en los números reales.
23. Hallar los valores de k, para los cuales la ecuación $2x^2 - kx + 4 = 0$ tiene,
    a. Soluciones reales iguales:
    b. Soluciones reales distintas.
    c. Soluciones complejas.

24. Para un objeto que cae el espacio recorrido está dado por $S=\frac{1}{2}gt^2+V_0t$ ¿en qué tiempo el espacio

recorrido es de 24 *m* si V_0=8*m⁄seg.g*=9.8 *m⁄seg.g* ?

25. Se hace una inversión de $ 35 000 000 en títulos que rentan 10% anual y 12% anual. Si el rendimiento es de $ 3 700 000 en un año, ¿cuál fue la cantidad invertida en cada una de las tasas?
26. Si dos ciclistas se encuentran a una distancia de 130 *km* uno del otro y se desplazan a 40 *km/h y* 25 *km/h* uno hacia el otro.
    a. ¿En cuánto tiempo se encuentran?
    b. ¿Cuál es la distancia recorrida por cada uno?

27. En cada caso hallar la ecuación de segundo grado que corresponde a las soluciones dadas.
    a. $x_1 = -3, \quad x_2 = 4,$
    b. $x_1 = -\sqrt{3}, \; x_2 = \sqrt{3}$
    c. $x_1 = -3i, \; x_2 = 3i,$
    d. $x_1 = 2 - \sqrt{2}, \quad x_2 = 2 + \sqrt{2}$

28. Hallar los valores de *x* para los cuales $\sqrt{2x-5}$ existe en los números reales.

Capítulo 2

Plano cartesiano

Objetivos

- Identificar los elementos del plano cartesiano: ejes, origen, ordenada, abscisa, puntos y las coordenadas rectangulares.
- Identificar las fórmulas de: distancia entre dos puntos, punto medio, intersección con los ejes y simetrías.
- Utilizar las representaciones analíticas de la recta en la resolución de problemas.
- Identificar las distintas formas de la ecuación de la circunferencia y aplicar estos conceptos a la resolución de problemas.
- Reconocer un sistema de ecuaciones y los distintos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales y no lineales.
- Analizar e identificar las posibilidades que pueden presentarse al resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Valorar la importancia del estudio de los sistemas de ecuaciones lineales y no lineales, para el planteamiento y resolución de problemas.
- Identificar y mostrar la región solución de una desigualdad y un sistema de desigualdades lineales.

2.1. Introducción

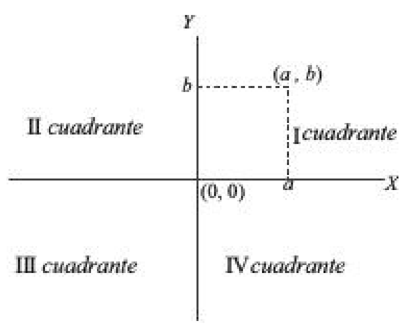
En las unidades anteriores hemos visto cómo trabajar con números reales tanto en la parte operativa como en su representación sobre la recta real, teniendo en cuenta su ordenación, es común que diariamente hablemos o escuchemos de informaciones que relacionan dos cantidades por ejemplo: el niño nació con un peso de 4000 gramos, la estatura de la niña de 3 años es de 0,90 cm, etc.

Información como la anterior puede darse o escribirse así (0,4000) y (3,0.90) donde el primer número da el tiempo y el segundo el peso y la estatura respectivamente, estos se denominan **pares ordenados,** el primer número en cada uno de ellos se denomina primera componente o abscisa y el segundo número se denomina segunda componente u ordenada.

Estos conceptos aparecen en el llamado ***plano cartesiano*** definido por una recta real en forma horizontal llamada eje X, y una recta real perpendicular a la anterior llamada eje Y, de tal manera que coinciden en el punto (0, 0) es decir el cero del eje X con el cero del eje Y, se forman así cuatro cuadrantes

Al eje X se le denomina eje de abscisas y al eje Y eje de ordenadas. Del origen (0, 0) hacia la derecha y parte superior se tienen cantidades o números positivos y hacia la izquierda y parte inferior los números negativos, en este sistema de coordenadas un punto debe ser de la forma (a, b) el cual se ubica en el plano así:

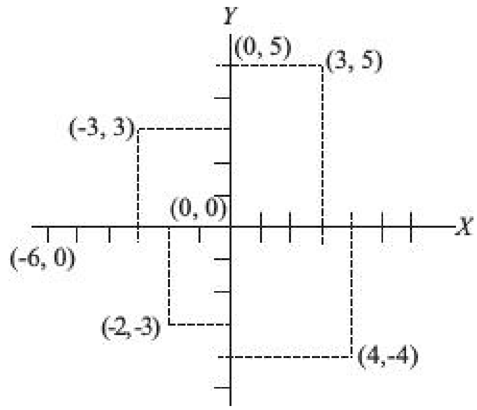
i. Ubicamos el número a o abscisa sobre el eje X y por este punto trazamos una paralela al eje Y.
ii. Ubicamos el número b u ordenada sobre el eje Y por este trazamos una paralela al eje X.
iii. El punto de intersección o corte de las rectas descritas anteriormente, corresponde al par ordenado (a,b)
iv. Inversamente, conocido un punto, se proyectan perpendiculares a los ejes a partir del mismo para hallar la abscisa y ordenada correspondiente.



Ejemplo 1

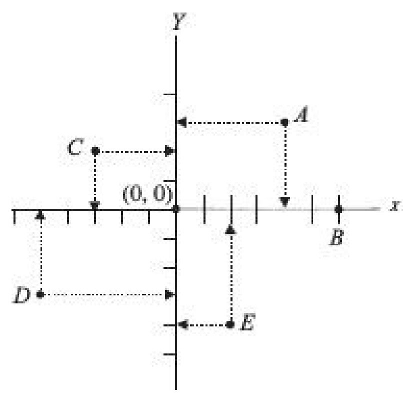
Ubicar los puntos (3, 5), (− 2, − 3), (4, − 4), (− 3, 3), (0, 5), (− 6, 0).

Solución



Ejemplo 2

Para los puntos que se indican en el plano hallar las coordenadas respectivas.



Según observamos en la gráfica y siguiendo el comportamiento de las flechas o proyecciones que nos muestran las coordenadas de cada punto sobre las respectivos ejes de tal manera que se tienen los puntos: $A(4,3)$, $B(6,0)$, $C(-3,2)$, $D(-5,-3)$, $E(2,-4)$.

> **Nota:** Es de aclarar que en estos ejemplos hemos tomado números enteros como coordenadas de los puntos lo cual no quiere decir que solo en esos casos sea válido el proceso, simplemente se debe al hecho de que cuando son números enteros la representación es más precisa, sin embargo en caso de fraccionarios, decimales, etc., se trabaja con escalas aproximadas.

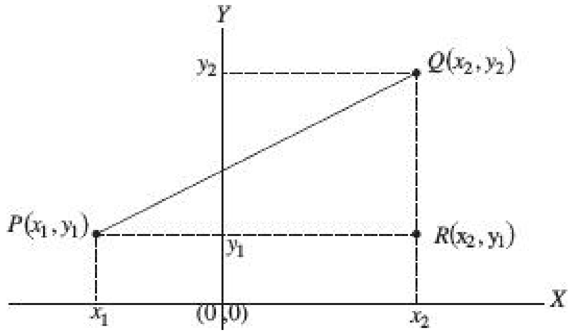
2.2. Distancia entre dos puntos

En el estudio de los números reales y sobre la recta real, dados los números *a y b* la distancia entre ellos se definió como $|a-b|=|b-a|$ en forma similar se puede calcular la distancia entre dos puntos en el plano.

Sean $P(x_1, y_1)$ *y* $Q(x_2, y_2)$ puntos del plano, **la distancia entre *P y Q*** es:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Realmente esta distancia corresponde también a la longitud del segmento de recta que une los dos puntos:



De la gráfica, observamos que la longitud PR es $|x_2 - x_1|$ y la longitud RQ es $|y_2 - y_1|$ de tal manera que la hipotenusa del triángulo PRQ utilizando el Teorema de Pitágoras es:

$$d = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

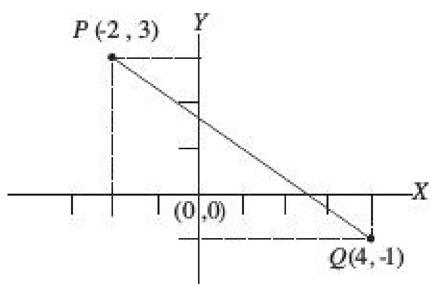
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo 1

Hallar la longitud entre los puntos $P(-2, 3)$ y $Q(4, -1)$.

Solución

Es importante graficar en el plano los puntos y el segmento que los une.



Si se toma como $x_2 = 4$, $x_1 = -2$, $y_2 = -1$, $y_1 = 3$.

La distancia es $d = \sqrt{(4-(-2))^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$

Ejemplo 2

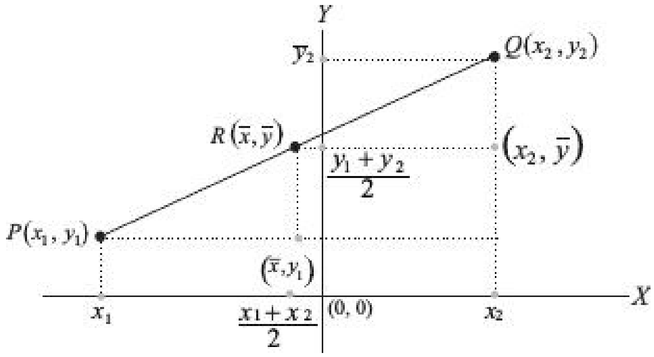
Halle la distancia entre los puntos $(-3, 3)$ y $(4, 3)$.

Solución

Considerando $x_2 = 4$, $x_1 = -3$, $y_2 = 3$, $y_1 = 3$, se tiene $d = \sqrt{(4-(-3))^2 + (3-3)^2} = \sqrt{7^2} = 7$

2.3. Punto medio

Conocido el segmento de recta con extremos los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ se pueden obtener las coordenadas del punto intermedio entre P y Q los cuales están dados por $(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ este resultado se obtiene a partir de la siguiente figura.



Si el punto $R(\overline{x}, \overline{y})$ es intermedio entre P y Q se debe tener que $\overline{PR} = \overline{RQ}$ en términos de las coordenadas de los puntos:

$$\overline{x} - x_1 = x_2 - \overline{x} \Rightarrow 2\overline{x} = x_1 + x_2 \Rightarrow \overline{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

De la misma manera:

$$\overline{y} - y_1 = y_2 - \overline{y} \Rightarrow 2\overline{y} = y_1 + y_2 \Rightarrow \overline{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Ejemplo 1

Si los extremos de un segmento son los puntos $(-2, 5)$ y $(3, -2)$ hallar el punto medio sobre ese segmento.

Solución

Utilizando el resultado anterior:

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{-2+3}{2}, \frac{5-2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Ejemplo 2

En un segmento de recta, uno de los extremos tiene coordenadas $(-3, -2)$ y el punto medio es $(1, 3)$. Hallar el otro extremo.

Solución

Designemos por (x,y) el extremo desconocido, de la definición se tiene $\frac{x-3}{2}=1$ de la cual se obtiene x=5 para el caso de las ordenadas $\frac{y-2}{2}=3$ despejando se obtiene y=8. Por tanto, el extremo del segmento buscado es (5,8).

2.4. Ecuaciones de dos variables

En la sección anterior vimos qué es una ecuación y cómo solucionar ecuaciones de primero y segundo grado con una variable. Seguramente encontraremos ecuaciones de grado superior y también ecuaciones con dos o más variables, las siguientes son ecuaciones en dos variables:

$$2x + y = 0$$
$$y = x^2$$
$$x^2 + y^2 = 4$$

La **solución de una ecuación con dos variables** está dada por todos los puntos (a,b) del palno que la satisfacen, es decir, todos los pares ordenados (a,b) del plano que al sustituir en la ecuación la reduce a una identidad.

Ejemplo 1

Son soluciones de la ecuación $2x+y=0$ los puntos (0,0), (–1,2), (1,–2), (2,–4), en realidad estas soluciones pueden obtenerse expresando y en términos de x y luego se le dan valores a x para obtener el valor de y correspondiente, este proceso también lo llamamos tabulación.

Los puntos anteriores se obtienen así:
Despejamos y, $y=-2x$
Damos valores a x

$x=0 \Rightarrow y=-2(0)=0 \Rightarrow (0,0)$
$x=-1 \Rightarrow y=-2(-1)=2 \Rightarrow (-1,2)$
$x=1 \Rightarrow y=-2(1)=2 \Rightarrow (1,-2)$
$x=2 \Rightarrow y=-2(2)=-4 \Rightarrow (2,-4)$

Se pueden obtener otros puntos dando otros valores a x, este trabajo se suele presentar en una tabla como la siguiente:

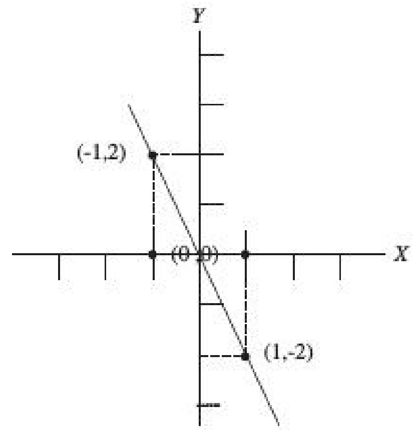
x	0	-1	1	2
y	0	2	-2	-4

Graficar: Puesto que hay infinitos puntos que son soluciones de la ecuación se genera *una gráfica en el plano cartesiano*; el proceso para obtenerla es el siguiente:

a. Hacer una tabulación para hallar pares ordenados que serán ubicados en el plano.
b. Unir los puntos obtenidos anteriormente con un trazo continuo.

Ejemplo 1

La representación de la ecuación $2x + y = 0$ se puede obtener a partir de los puntos obtenidos anteriormente.



Ejemplo 2

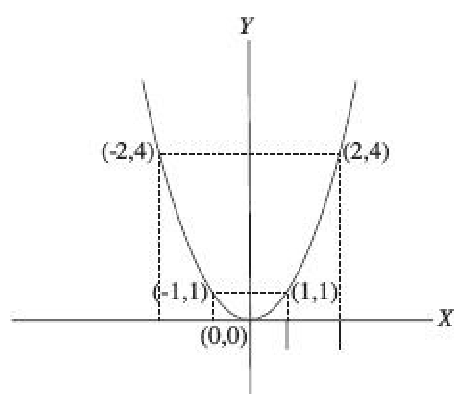
Consideramos la ecuación $y=x^2$, graficarla.

Solución

Puesto que tenemos expresada *y* en función de *x* resulta fácil hallar puntos que sean solución de la ecuación, esto lo podemos hacer mediante un cuadro de tabulación.

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

Observemos que este proceso muy utilizado en la graficación es otra manera de presentar los pares ordenados que son solución de la ecuación, en este caso en realidad se han obtenido los pares ordenados $(-2,4),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,4)$



Ejemplo 3

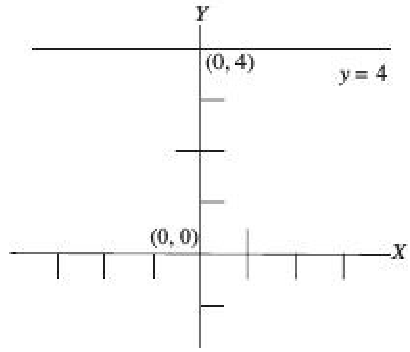
Graficar la ecuación $y=4$

Solución

En este caso la tabulación se presenta en la siguiente tabla:

x	-2	-1	0	1	2
y	4	4	4	4	4

Observamos que la ordenada *y* no cambia pues la variable *x* no aparece, la gráfica es la siguiente:



2.4.1. Intersección con los ejes

Como las ecuaciones de dos variables generan una gráfica sobre la cual se encuentran todas las soluciones, nos preguntamos si estas gráficas cortan al eje X o al eje Y. Como se observó anteriormente sobre el eje X las coordenadas son de la forma $(a,0)$, es decir, $y=0$ esto nos dice entonces que cuando se trata de hallar las intersecciones con el eje X, hacemos $y=0$ en la ecuación y hallamos el valor de x, de la misma manera hallamos los puntos sobre el eje Y, en este caso $x=0$

Ejemplo 1

En la ecuación mencionada anteriormente $2x+y=0$, si hacemos $y=0$ se obtiene $2x+0=0\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0$.

Es decir, el punto de corte es $(0,0)$. De la misma manera si $x=0$. Sustituyendo, $2(0)+y=0\Rightarrow y=0$ de lo cual se obtiene nuevamente el punto $(0,0)$.

Ejemplo 2

Hallar las intersecciones de $3x+5y=10$ con los ejes coordenados.

Solución

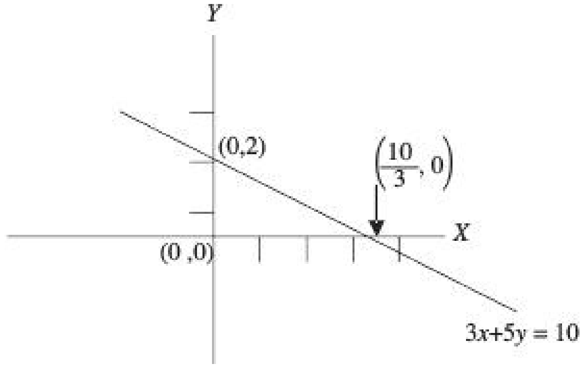
Intersección con el eje X, ($y=0$) sustituyendo,

$$\mathbf{3x + 5(0) = 10 \Rightarrow 3x = 10 \Rightarrow x} = \frac{10}{3}$$

Luego el punto de intersección es $\left(\frac{10}{3}, 0\right)$.

Para el corte con el eje Y, hacemos ($x=0$). De tal manera que la ecuación se transforma en $3(0)+5y=10\Rightarrow 5y=10\Rightarrow y=2$ el punto es entonces $(0,2)$.

Si ubicamos estos dos puntos en el plano y los unimos se obtiene una recta que corresponde a la gráfica de esta ecuación:



> ***Nota:*** *Observamos que cuando y = 0 la ecuación se reduce a una ecuación de primer grado o lineal en la variable x, cuya solución ya fue estudiada.*

Ejemplo 3

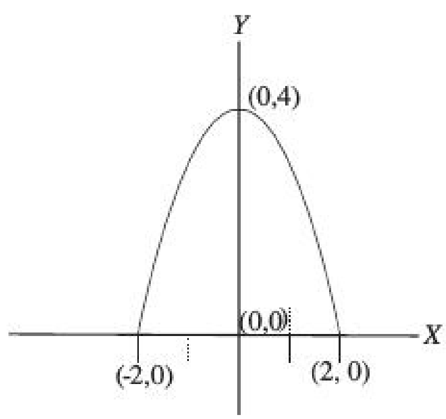
Hallar la intersección de $y = 4 - x^2$ con los ejes coordenados.

Solución

Intercepto con el eje Y, nuevamente recordamos que en este caso se hace (x=0), por tanto $y=4-0^2=4$, es decir, el punto de corte es (0,4) Intercepto con el eje X al hacer y=0 se obtiene la ecuación cuadrática $4-x^2=0$, factorizando y resolviendo $(2-x)(2+x)=0 \Rightarrow x=2$, $x=-2$ obteniéndose los puntos (–2,0) y (2,0). Tabulando se obtiene:

x	-2	-1	0	1	2
y	0	3	4	3	4

La gráfica es la siguiente:



2.4.2. Simetrías

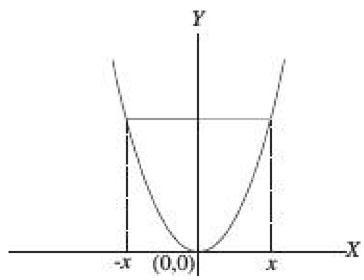
Intuitivamente la simetría significa que una figura es simétrica si podemos encontrar una línea imaginaria que la corte en dos partes iguales. En forma similar podemos pensar o verificar que al colocar un espejo en la mitad de la figura la imagen reflejada y la mitad de la misma forman la figura completa.

En el trabajo de graficación es importante conocer el comportamiento de la gráfica en relación con los ejes coordenados o el origen, así por ejemplo en la ecuación $y=x^2$, se observa que para $x=2$, $y=4$ y para $x=-2$, $y=4$, podemos decir entonces que los puntos (2,4) y (–2,4) que equidistan del eje Y pertenecen a la gráfica, lo cual equivale a decir que la gráfica es simétrica respecto al eje Y. Observaciones similares nos llevan a:

i. La gráfica es simétrica respecto al eje Y, si al cambiar x por –x, la ecuación no cambia

Ejemplo 1

Si en la ecuación $y=x^2$ cambiamos x por $-x$ se tiene $y=(-x)^2=x^2$ la ecuación no cambia, luego esta grafica es simétrica respecto al eje Y:

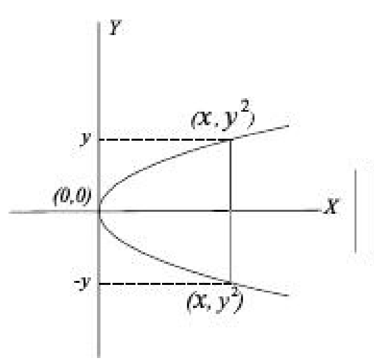


La gráfica anterior muestra la simetría desde el punto de vista geométrico la cual se verifica con la congruencia de los segmentos que unen un punto del eje Y con un punto de la gráfica a derecha e izquierda.

ii. La ecuación es simétrica respecto al eje X, si al cambiar y por –y la ecuación no cambia.

Ejemplo 2

Si en la ecuación $x=y^2$ se cambia y por $-y$ se tiene que $x=(-y)^2=y^2$ la ecuación no cambia, lo cual quiere decir que hay simetría respecto al eje X:



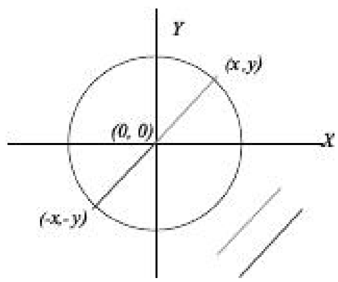
Nuevamente a la derecha se muestra cómo los segmentos de la gráfica al eje X desde la parte superior y a la parte inferior es la misma:

iii. La ecuación es simétrica respecto al origen si al cambiar x por –x, y por –y la ecuación no cambia.

Ejemplo 3

Consideramos la ecuación $x^2 + y^2 = a^2$, si cambiamos ***x*** por ***–x***, ***y*** por ***–y*** se obtiene,$(-x)^2 + (-y)^2 = a^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$ lo cual muestra que la ecuación no cambia, es decir, se tiene una simetría respecto al origen:

Se debe tener que el segmento que une a (0,0) con (*x*,*y*) debe se congruente con el segmento que une (0,0) con (–*x*,–*y*)*d* Nuevamente a la derecha parte inferior mostramos que los segmentos que parten del origen a la curva son iguales.



1.1. Ejercicios

1. Sobre el plano cartesiano mostrar los puntos correspondientes a los pares ordenados

$$(-3, 0), (1, 4), (-2, -3), (4, -2), (0, -2), (-2, 5), (4, 0), (0, 5).$$

2. El punto medio entre los puntos $(x, 4)$ *y* $(3, y)$ *es* (0,1) hallar x *e y*.
3. Si la distancia entre los puntos $P(-3, y)$ *y* $Q\,(5, -1)$ *es* $\sqrt{89}$ hallar *y*.

En los ejercicios del 4 al 12 comprobar la simetría de las curvas dadas respecto al eje *X*, eje *Y*, y el origen:

4. $y = x^3$
5. $xy = 1$
6. $y = x^2 + 3x + 2$
7. $y = 3x + 2$
8. $y = (x-2)^3 + 2$
9. $y = x^4 + x$
10. $4x^2 + 9y^2 = 36$
11. $9x^2 - 4y^2 = 36$
12. $y = \sqrt{x^2 - 4}$

En los ejercicios del 13 al 21 elaborar una gráfica para la ecuación dada:

13. $y = 5x + 3$
14. $y = x^3 + 1$

15. $y = (x-2)^2$
16. $x-2y=4$
17. $y=-x^2+1$
18. $y=4$
19. $x=3$
20. $y=\sqrt{x}$
21. $y=\sqrt{x}-3$

En los ejercicios del 22 al 30, hallar los puntos de corte con el eje X, el eje Y, de las curvas correspondientes a la ecuación dada.

22. $y=x^2+x$
23. $4x-y=7$
24. $y=x^3+8$
25. $x+y^2=0$
26. $y=x^2+x-12$
27. $xy=2$
28. $x^2+y^2=9$
29. $4x^2+9y^2=36$
30. $9x^2-4y^2=36$
31. La longitud de un segmento de recta que une los puntos $(x,-2)$ y $(4,3)$ es $\sqrt{74}$, hallar el valor de la abscisa x.

En los ejercicios del 32 al 37 hallar la distancia entre los puntos dados al igual que el punto medio:

32. $A(-2,3)$, $B(4,0)$
33. $A(-1,-4)$, $B(4,3)$
34. $A(-2,3)$, $B(4,-2)$
35. $A(-3,0)$, $B(0,5)$
36. $A(-4,0)$, $B(7,0)$
37. $A(5,5)$, $B(-2,-2)$
38. Comprobar que al unir los puntos $A(2,1)$,$B(5,1)$ y $C(5,4)$ se forma un triángulo rectángulo, usar el Teorema de Pitágoras para verificarlo. Hallar el perímetro y el área de dicho triángulo.
39. Comprobar que al unir los puntos $A(3,3)$, $B(-3,3)$, $C(-3,-3)$ y $D(3,-3)$ se obtiene un cuadrado, hallar el área y el perímetro, ¿cuál es la longitud de la diagonal?
40. Comprobar que los puntos $A(3,2)$, $B(9,2)$, $C(4,4)$ y $D(8,+4)$ forman un trapecio, hallar el perímetro y el área.

2.5. CIRCUNFERENCIA

Consideramos ahora la ecuación de la forma $x^2+y^2=a^2$ donde a es una constante, además esta curva resulta simétrica para los tres casos anotados anteriormente:

i. **Simétrica con el eje** Y, si cambiamos x por $-x$, se obtiene $(-x)^2+y^2=a^2$, la cual es igual a $x^2+y^2=a^2$ es decir, la ecuación no cambia.
ii. **Simétrica con el eje** X**,** cambiando y por $-y$ en la ecuación, x^2+

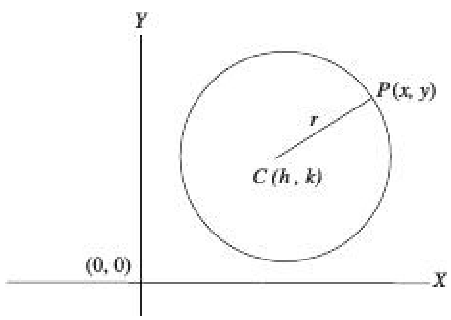
$(-y)^2=a^2 \Rightarrow x^2+y^2=a^2$ y la ecuación no cambia.

iii. **Simétrica respecto al origen,** en este caso cambiamos (x,y) por $(-x,-y)$ obteniéndose $(-x)^2+(-y)^2=a^2 \Rightarrow x^2+y^2=a^2$ con lo cual se comprueba la simetría al origen.

La definición que sigue nos aclara el por qué esta curva tiene las tres simetrías.

2.5.1. Ecuación de la circunferencia y gráfica

Definición: La *circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos P* (x, y) *del plano tales que la* ***distancia*** *a un punto fijo llamado centro* (C) *es constante, esta se denomina radio* (r).



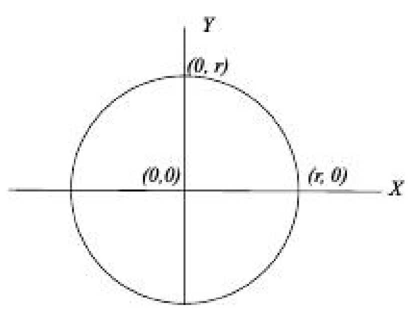
Ecuación Centro (*h*,*k*)

Si aplicamos la definición con un centro $C(h,k)$, $(h,k)\neq(0,0)$ se obtiene: $r=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$

$$r^2=(x-h)^2+(y-k)^2$$

La cual se conoce como ***ecuación de la circunferencia centro (h, k).*** Si $h = k = 0$ se tiene el centro en (0, 0) y la ecuación es:

$$x^2+y^2=r^2$$

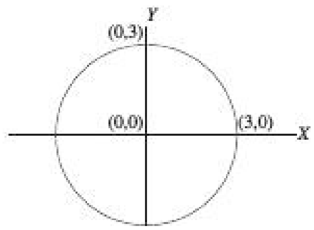


Ejemplo 1

Dada $x^2+y^2=9$, hallar radio de la circunferencia, diámetro, longitud de la circunferencia, área del círculo y graficar.

Solución

La ecuación $x^2+y^2=9$ nos muestra una circunferencia con centro (0,0) y radio $r=3$, el diámetro es dos veces el radio, es decir, $D=2r=2(3)=6$ la longitud de la circunferencia es $s=2\pi r=2\pi(3)=6\pi$ esta longitud suele llamarse también *circunferencia*. El área del círculo es $A=\pi r^2=\pi(3)^2=9\pi$



Recuerde que la gráfica se construye con un compás centrado en el origen y una abertura de tres unidades:

Ejemplo 2

Halle la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es el segmento con extremos los puntos (–2,3) y (4,1), hallar el radio, longitud de la circunferencia, área del círculo y graficar.

Solución

Puesto que se conocen los extremos del diámetro, el punto medio corresponderá al centro, es decir:

$$C=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{-2+4}{2},\frac{3+1}{2}\right)=(1,2)$$

El radio es la distancia entre el centro y uno de los extremos o la mitad del diámetro el cual equivale a la distancia entre los dos extremos dados:

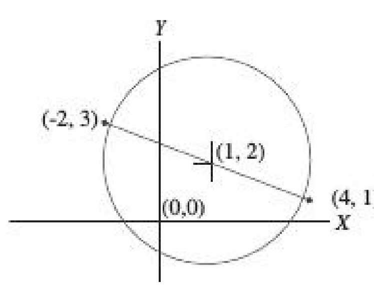
$r=\sqrt{(1-2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{10}$ Por lo tanto, la ecuación de la circuferencia es: $(x-1)^2+(y-2)^2=10$

La gráfica correspondiente es:

Longitud de la circunferencia:

$$s=2\pi\sqrt{10}=2\sqrt{10}\,\pi$$

$$s=2\pi\sqrt{10}=2\sqrt{10}\,\pi$$



Ejemplo 3

Halle la ecuación de la circunferencia con centro (2,3) y tangente al eje *X*.

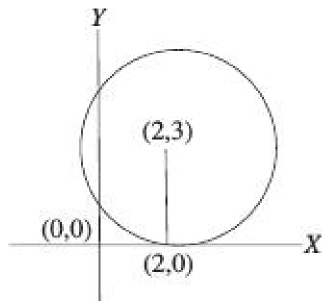
Solución

Si la circunferencia es tangente al eje *X*, quiere decir que se toca con este eje en un punto, en el cual el radio es perpendicular al eje *X*, puesto que el radio debe ser perpendicular con la recta tangente en el punto (2,0) y el radio es:

$$r=\sqrt{(2-2)^2+(3-0)^2}=3.$$

Este resultado nos permite escribir la ecuación la cual es:

$(x-2)^2+(y-3)^2=9$

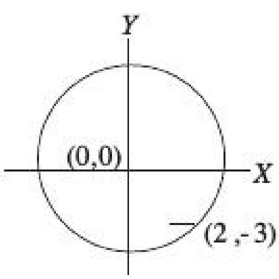


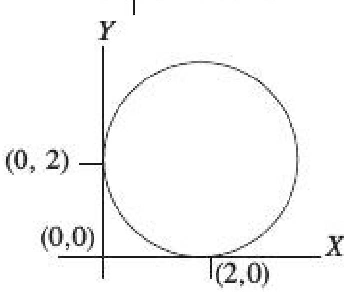
Gráfica correspondiente

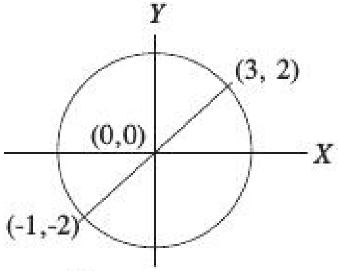
1.2. Ejercicios

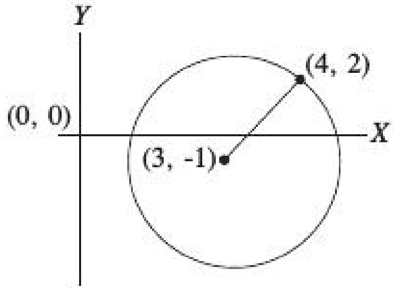
1. Dada $x^2+y^2=16$ graficarla, hallar radio, diámetro, longitud de la circunferencia, área del círculo.
2. Una circunferencia con centro el origen pasa por el punto (3,4) hallar la ecuación.
3. Halle la ecuación de una circunferencia tangente al eje *X* en el punto (3,0) y al eje *Y* en el punto (0,3); halle también la longitud de este círculo y el área.

En los ejercicios del 4 al 7 hallar la ecuación de cada una de las circunferencias mostradas en las gráficas.

4. 

5. 

6. 

7. 

8. Una circunferencia con centro en el origen tiene una longitud de 8π *cm*. Hallar su ecuación.
9. Hallar el área dentro de la circunferencia $x^2+(y-3)^2$ y exterior a la circunferencia $x^2+(y-3)^2=1$.
10. Los extremos del diámetro de una circunferencia son los puntos (–3,4) y (3–2); hallar la ecuación y la gráfica.
11. Una circunferencia tiene centro el punto (–1,–2) y pasa por el punto (2,3); hallar la ecuación, la longitud de la circunferencia, el área del círculo y graficar.
12. Una circunferencia con centro en el origen tiene un diámetro de 10 *cm*. Halle el radio, la ecuación, longitud y área del círculo, graficar.
13. Una circunferencia con centro en (3,4) es tangente al eje *Y*, hallar la ecuación y graficar.

2.5.2. Forma general de la ecuación de la circunferencia

Nuevamente retomamos la ecuación de la circunferencia con centro (h,k) la cual es:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Desarrollando los binomios obtenemos:

$$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2=r^2$$
$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$$

Haciendo $A=-2h$, $B=-2k$, $C=h^2+k^2-r^2$ se obtiene la ecuación:

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

Conocida como **forma general de la circunferencia,** sin embargo, puede considerarse una forma más amplia a saber:

$$Ax^2+Ay^2+Bx+Cy+D=0 \text{ con } A>0 \text{ o } A<0$$

En la práctica cuando se tiene la ecuación en forma general, se debe llevar a la forma centro (h, k) para poder identificar el centro y el radio, este proceso se hace completando los trinomios cuadrados perfectos en ambas variables.

Ejemplo 1

Dada la ecuación $x^2+y^2+4x-6y=3$ hallar, centro, radio, longitud de la circunferencia, área del círculo y graficar.

Solución

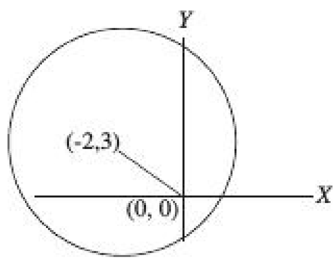
Procedemos a completar los trinomios cuadrados perfectos en las dos variables:

$(x^2+4x)+(y^2+6y)= 3$

$(x^2+4x+4)+(y^2+6y+9)= 9+3+4$

$(x+2)^2+(y-3)^2= 16$

Se observa entonces que se tiene una circunferencia con centro en el punto $(-2, 3)$ y radio $r^2=16 \Rightarrow r= 4$ con esta información calculamos, longitud de la circunferencia y área del círculo:



$S=2\pi\, r=2\pi 4 =8\pi$,
$A=\pi r^2 = \pi(4)^2=16\pi$

Finalmente se elabora la gráfica:

Ejemplo 2

Dada $2x^2 + 2y^2 - 6x + 4y = 0$ hallar centro y radio de la circunferencia y graficar.

Solución

Procedemos a completar los trinomios cuadrados perfectos a fin de identificar el centro y el radio.

$$(2x^2-6x)+(2y^2+4y)=0$$

$$2\left(x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)+2\left(y^2+2y+1-1\right)=0$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{13}{4}$$

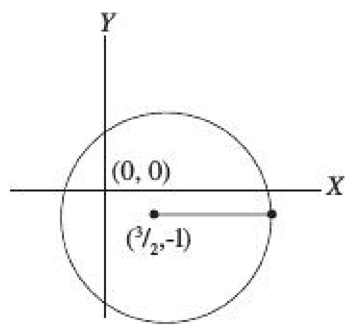
Luego el centro es el punto

$$\left(\frac{3}{2},-1\right) y\ r^2=\frac{13}{4} \Rightarrow r=\frac{\sqrt{13}}{2}$$

1.3. Ejercicios

En los ejercicios del 1 al 6, hallar la ecuación de la circunferencia, forma centro(h,k), hallar radio, longitud de la circunferencia área del círculo y graficar:

1. $x^2+y^2-2x+4y=4$
2. $3x^2+3y^2-9x+6y=6$
3. $x^2+y^2-4x=0$
4. $x^2+y^2+6y=0$
5. $x^2+y^2-2x+6y=4$
6. $2x^2+2y^2-4x+5y=1$
7. Hallar el área exterior a $x^2+y^2+4y=0$ e interior a la circunferencia $x^2+y^2+6y=0$



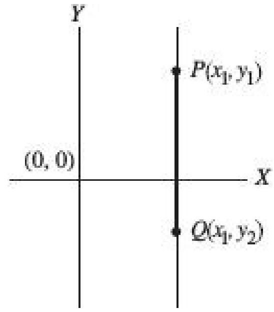
2.6. Rectas

Consideramos ahora la ecuación de la forma $y=mx+b$, cuya gráfica corresponde a una recta, esta ecuación aparece a partir del concepto fundamental de pendiente la cual se define así:

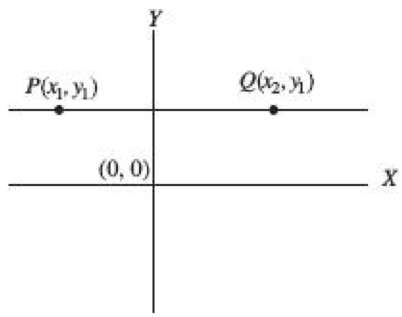
Definición: *La pendiente de la recta que pasa por los puntos* $P(x_1, y_1)$ *y* $Q(x_2, y_2)$ es

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \text{ donde } x_1 \neq x_2$$

La definición nos dice *que la pendiente es la razón entre el incremento de las ordenadas y el incremento de las abscisas*. La definición muestra también que en el caso de una recta vertical, la pendiente no está definida y en el caso de una recta horizontal la pendiente es cero:



Pendiente indefinida

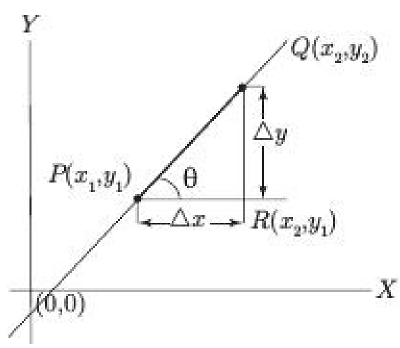


Pendiente cero

Si llamamos θ el ángulo formado por la recta con la horizontal, observamos que:

$$\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Lo cual significa que la pendiente no es más que el valor de la tan θ:



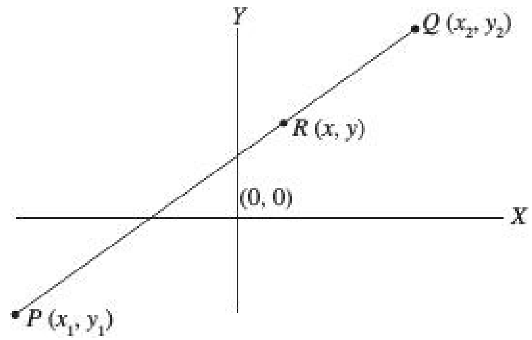
Las observaciones anteriores nos dicen que si conocemos el ángulo formado por la recta con la horizontal podemos hallar la pendiente y viceversa, es decir, conocida la pendiente es posible hallar el ángulo inclinación θ.

La ecuación de la recta puede ser obtenida a partir de dos puntos, o a partir de la pendiente y uno de sus puntos.

2.6.1. Ecuación de la recta conocidos dos puntos

Una recta que pase por los puntos $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$ tiene por ecuación,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$



La ecuación anterior se obtiene del siguiente análisis, la pendiente entre los puntos conocidos P y Q, es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Para un punto cualesquiera $R(x, y)$ de la recta es condición necesaria para que esté en la recta que la pendiente entre este punto y uno de los puntos conocidos sea igual a la pendiente dada por los dos puntos conocidos:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

De la cual se obtiene:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Ejemplo 1

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (–2,3) y (3,–1)

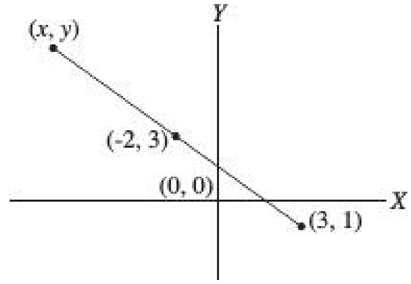
Solución

Para un punto (x, y) sobre la recta

$$y - (-1) = \frac{3 - (-1)}{-2 - 3}(x - 3)$$

$$y + 1 = -\frac{4}{5}(x - 3)$$

$$y = -\frac{4}{5}x + \frac{7}{5}$$



Una pregunta que seguramente se hace el lector es *¿cómo comprobar que esta ecuación sí es la correcta*? Según lo expresado para ecuaciones en dos variables, los dos puntos con los cuales hallamos la ecuación deben satisfacer a la misma o deben ser solución de la misma, veámoslo:

Para $(-2{,}3) \Rightarrow 3 = -\frac{4}{5}(-2) + \frac{7}{5} \Rightarrow 3 = \frac{8}{5} + \frac{7}{5} = \frac{15}{5} = 3$

Para $(3{,}-1) \Rightarrow -1 = -\frac{4}{5}(3) + \frac{7}{5} \Rightarrow -1 = -\frac{12}{5} + \frac{7}{5} = -\frac{5}{5} = 1$

Ejemplo 2

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (0,*b*) y (*a*,0)

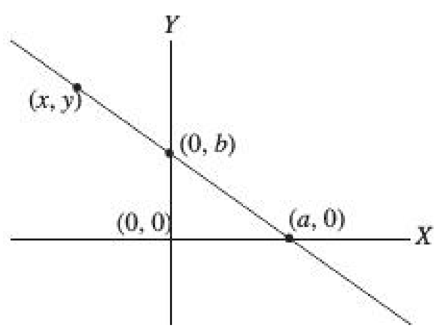
Solución

Para un punto (*x*,*y*) sobre la recta se tiene entonces:

$$y - 0 = \frac{b-0}{0-a}(x-a)$$

$$y - 0 = \frac{-b}{a}(x-a)$$

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$



Esta ecuación puede escribirse como $\frac{b}{a}x + y = b \Rightarrow bx + ay = ab$

Dividiendo todos los sumandos por *ab* la ecuación se reduce a:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

La cual se denomina ecuación simétrica de la recta.

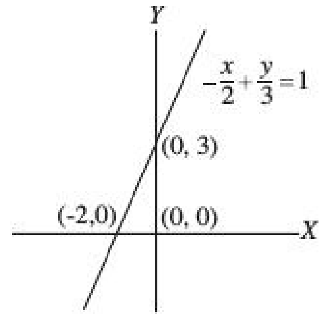
Ejemplo 3

Obtener la ecuación simétrica para la recta con abscisa –2 y ordenada 3, graficar.

Solución

Si tomamos la ecuación obtenida en el ejemplo anterior se observa entonces que en este caso *a*=–2 y *b*=3 por tanto la ecuación es:

$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1 \Rightarrow -\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$$



2.6.2. Ecuación pendiente punto

Si la recta tiene pendiente *m* y pasa por el punto $P(x_1,y_1)$, la ecuación es

$$\begin{aligned} y-y_1 &= m(x-x_1) \\ y &= mx-mx_1+y_1 \\ y &= mx+b \qquad \text{con} \qquad b=y_1-mx_1 \end{aligned}$$

En realidad esta ecuación se obtiene en forma similar al caso anterior. Si (x,y) es un punto cualesquiera sobre la recta se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{y-y_1}{x-x_1} &= m \\ y-y_1 &= m(x-x_1) \\ y &= mx-mx_1+y_1 \\ y &= mx+b \end{aligned}$$

Ejemplo 1

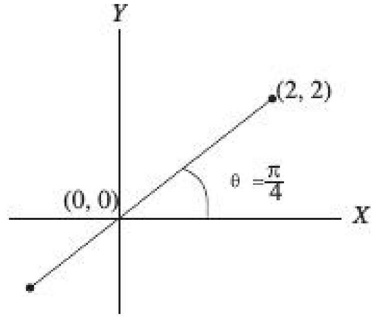
Si una recta pasa por el punto (2,2) y tiene un ángulo de inclinación de $\theta=\frac{\pi}{4}$ obtener la ecuación.

Solución

Según lo anotado en el estudio de la pendiente, puesto que se tiene el ángulo inclinación la pendiente es $m=tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow m=1$

Este valor se puede obtener usando una calculadora, y trabajando en radianes, logramos entonces conocer la pendiente de la recta y conocemos un punto, luego la ecuación es: y–2 =1(x–2)

y–2 = x–2 ⇒y=x



Ejemplo 2

Una recta pasa por el punto (1,3) y tiene pendiente $m=-\frac{3}{2}$, hallar la ecuación.

Solución

Puesto que tenemos pendiente y punto la ecuación es:

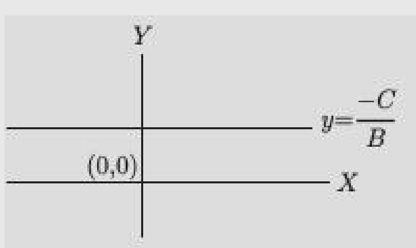
$$y-3=-\frac{3}{2}(x-1)$$
$$y-3=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}\Rightarrow y=-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}$$

2.6.3. Forma general de la ecuación de la recta

Si se observan las ecuaciones en los ejercicios anteriores, vemos que se pueden expresar en la forma $Ax + By + C = 0$, además de la última forma vista al despejar $y = mx + b$,, la cual muestra que el coeficiente de x es la pendiente, veamos entonces si la ecuación $Ax + By + C = 0$ representa una recta.

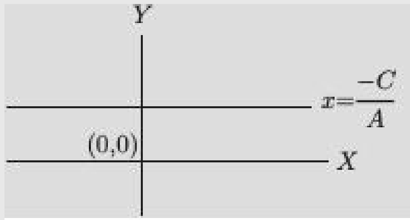
i. Si A,B≠0 despejando y de $Ax+By+C$ se obtiene: $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ la cual es la ecuación de la recta con pendiente $m=-\frac{A}{B}$ y ordenada $-\frac{C}{B}$, es decir, tenemos la forma $y=mx+b$.

ii. Si A=0 y $B \neq 0$, resulta, B $y+C=0\Rightarrow y=-\frac{C}{B}$ la cual es la ecuación de una recta paralela al eje X ya que cualesquiera sea el valor para x el valor de y será el mismo, observe que si C=0 se obtiene la recta y=0 la cual corresponde al eje X, es de anotar también que en este caso la recta tiene pendiente m=0.



iii. Si A≠0 y B=0 resulta $Ax+C=0\Rightarrow x=-\frac{C}{A}$ que corresponde a la ecuación de una recta paralela al eje Y, pues cualesquiera sea el valor de y el valor de x será el mismo, decimos en este caso que la pendiente de la recta es indeterminada

(Infinito). En el caso en que $C = 0$, la recta obtenida es x=0 que corresponde al eje Y.

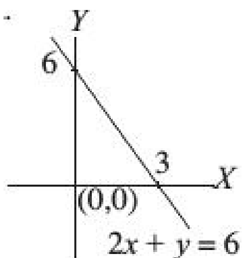


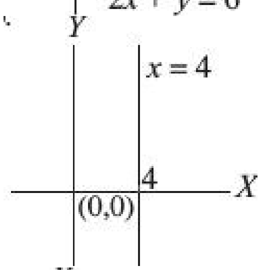
Ejemplo

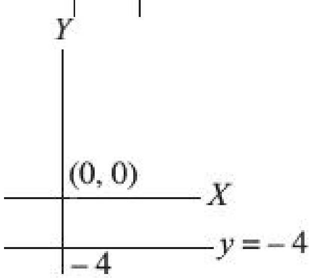
Graficar las rectas cuyas ecuaciones son dadas:

a. $2x+y = 6$
b. $x = 4$
c. $y = –4$

Solución

a. 

b. 

c. 

2.6.4. Perpendicularidad y paralelismo

Consideremos dos rectas:

i. l_1, l_2 con pendientes m_1 y m_2 respectivamente.

ii. l_1 es paralela a l_2 si y solo si $m_1 = m_2$.
iii. l_1 es perpendicular a l_2 si y solo si $m_1\, m_2=-1$

Presentamos a continuación una demostración del segundo resultado, para ello consideramos las rectas l_1 y l_2 perpendiculares entre sí que pasan por el origen y tienen por ecuaciones $y = m_1 x$, $y = m_2\, x$ respectivamente, sea $A(a,\, a\, m_1)$ un punto sobre la recta l_1 y $B(a,\, a\, m_2)$ un punto sobre la recta l_2, el triángulo AOB resulta ser rectángulo, por el Teorema de Pitágoras se tiene:

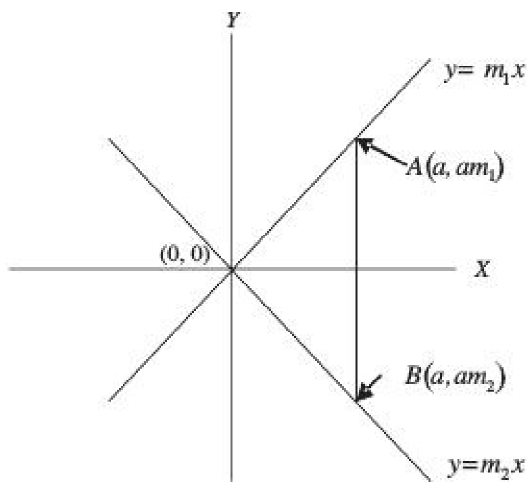
$$(d(O,A))^2 + (d(O,B))^2 = (d(A,B))^2$$

$$\left(\sqrt{(am_1-0)^2+(a-0)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(a-0)^2+(am_2-0)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(a-a)^2+(am_1-am_2)^2}\right)^2$$

$$a^2m_1^2 + a^2 + a^2 + a^2m_2^2 = a^2m_1^2 - 2am_1am_2 + a^2m_2^2$$

$$2a^2 = -2m_1m_2a^2$$

$$-1 = m_1m_2$$



Ejemplo 1

Verificar si las rectas con ecuaciones $2x+y-3=0$, $-x+2y+5=0$ son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos.

Solución

Tenemos ecuaciones en forma general, hallamos la pendiente para cada una de ellas:

$$2x+y-3=0 \Rightarrow y=-2x+3 \Rightarrow m_1=-2$$
$$-x+2y+5=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}=m_2=\frac{1}{2}$$

Al multiplicar las dos pendientes se obtiene:

$$m_1m_2=(-2)\left(\frac{1}{2}\right)=-1$$

Este resultado nos muestra que las rectas son perpendiculares entre sí.

Ejemplo 2

Si la recta que pasa por el punto (–2,1) es perpendicular a la recta $-3x+2y=5$, ¿cuál es la ecuación?

Solución

La ecuación $-3x+2y=5$ tiene pendiente $m=\frac{3}{2}$ ya que si despejamos y se obtiene $2y=3x+5\Rightarrow y=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$, como la recta que queremos hallar es perpendicular se debe cumplir que $m\left(\frac{3}{2}\right)=-1\Rightarrow m=-\frac{2}{3}$, con lo cual la ecuación de la recta buscada es $y-1=-\frac{2}{3}(x+2)\Rightarrow y=-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$

Ejemplo 3

Dadas las rectas $3k\,x + 2\,y = 3$, $-4x + 3\,y = 7$ hallar k tal que las rectas sean paralelas.

Solución

Primero debemos hallar las pendientes para cada una de estas rectas:

$$3k\,x+2y=3\Rightarrow y=-\frac{3k}{2}x+\frac{3}{2}\Rightarrow m_1=-\frac{3k}{2}$$

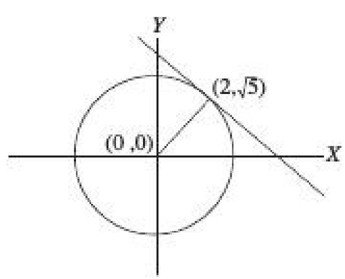
$$-4x+3y=7\Rightarrow y=\frac{4}{3}x+\frac{7}{3}\Rightarrow m_2=\frac{4}{3}$$

Puesto que las rectas deben ser paralelas se tiene que:

$$m_1=m_2\Rightarrow\frac{-3k}{2}=\frac{4}{3}\Rightarrow k=-\frac{8}{9}$$

Ejemplo 4

Escribir la ecuación de la circunferencia y de la recta tangente en el punto indicado en la gráfica:



Solución

El radio está dado por:

$$r=\sqrt{(2-0)^2+\left(\sqrt{5}-0\right)^2}=\sqrt{9}=3$$

Como la circunferencia tiene centro en el origen la ecuación es: $x^2+y^2=9$

En el punto $\left(2,\sqrt{5}\right)$ el radio debe ser perpendicular a la recta tangente, la pendiente del radio es:

$$m_r=\frac{\sqrt{5}-0}{2-0}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Por condiciones de perpendicularidad se tiene que $m_r\ m_{\tan} = -1$, es decir:

$$\frac{\sqrt{5}}{2} m_{\tan} = -1 \Rightarrow m_{\tan} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

La ecuación de la recta tangente es entonces:

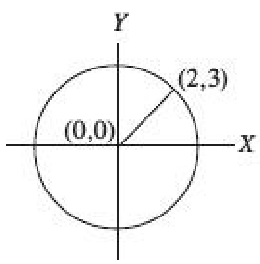
$$y - \sqrt{5} = -\frac{2}{\sqrt{5}}(x-2)$$

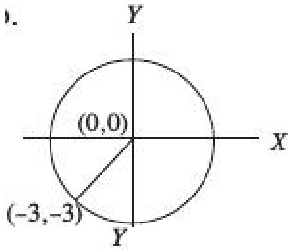
$$y = -\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{9}{\sqrt{5}}$$

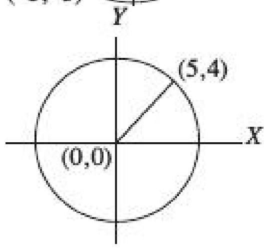
1.4. Ejercicios

En los ejercicios del 1 al 10 hallar la ecuación de la recta que satisfaga la condición dada.

1. Pasa por los puntos $(-2,1)$ *y* $(3,-4)$.
2. Pasa por el punto $(-2,-1)$ y tiene pendiente $\frac{1}{2}$.
3. Tiene pendiente 0 y pasa por el punto (1,3).
4. Tiene ordenada 2 y abscisa -3.
5. Es paralela al eje Y, pasa por el punto $(-2,1)$.
6. Pasa por los puntos $(-3,-1)$ *y* $(4,2)$.
7. Pasa por el punto (1,3) y su ángulo inclinación es $\frac{\pi}{6}$
8. La pendiente es -3 y pasa por el punto (2,3) .
9. Pendiente cero y pasa por el origen.
10. Pendiente indefinida pasa por el origen.
11. Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1,3)$ y es paralela a $2x - y + 5 = 0$.
12. Hallar la ecuación de una recta paralela a $-3x + 2y = 7$ y que pasa por el punto (3, 2) .
13. Hallar k tal que $2(k+3)x - y = 4$ *y* $3x + 2y = 7$ son, a) paralelas, b) perpendiculares.
14. Dadas las ecuaciones $2x + 3y = 4$, $-3x + 2y = 7$ verificar si son paralelas o perpendiculares.
15. La recta $2x + 3y = 6$ forma un triángulo rectángulo con los ejes coordenados en el primer cuadrante, hallar perímetro y área de este triángulo.
16. En cada caso escribir la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto indicado.

a. 

b. 

c. 

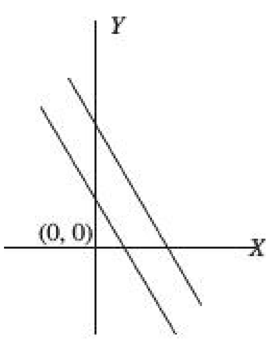
2.7. Sistemas de ecuaciones lineales

Es importante recordar que en forma muy frecuente encontramos sistemas de ecuaciones lineales conformados por 2 o más ecuaciones, inicialmente se debe considerar las posibilidades que tiene un sistema de dos ecuaciones lineales de la forma:

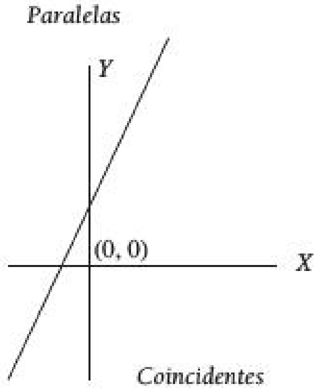
$$a_1x+b_1y=c_1$$
$$a_2x+b_2y=c_2$$

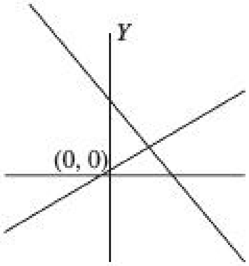
Estas dos líneas pueden ser:

i. paralelas,
ii. coincidentes,
iii. rectas que se interceptan en algún punto.

i. 

Paralelas

ii. 



iii. Con intersección

Ejemplo

a. Las rectas **2*x* + 3 *y* = 5 *y* 2*x* + 3 *y* = 7**, son paralelas.
b. Las rectas ***x* + 2 *y* = 1 *y* 3*x* + 6 *y* = 3** son coincidentes es decir son la misma recta, observamos que al dividir la segunda por 3 se obtiene la primera.
c. Las rectas **2*x* − *y* = 1, *x* + 3 *y* = 4** se deben interceptar en algún punto.

2.7.1. Solución sistemas de ecuaciones lineales

Cuando hacemos referencia a la solución de un sistema lineal, tratamos de hallar el punto de intersección de las dos rectas, es decir, el punto de coincidencia de ambas (si existe) para lograrlo se tiene tres procesos algebraicos conocidos como ***reducción, sustitución*** e ***igualación***.

A. Reducción

El método consiste en lograr que una de las variables tenga el mismo coeficiente numérico pero los signos sean contrarios, de tal manera que al sumar las ecuaciones se eliminará una de las variables y el sistema se reduce a una ecuación de primer grado en una variable con lo cual se conocerá el valor de una de ellas y luego se remplaza en una de las ecuaciones originales para obtener el valor de la segunda.

Ejemplo

Hallar la solución del sistema: $2x – y = 3$
$x – 3y = –2$

Solución

Si multiplicamos la primera ecuación por 3, y luego sumamos las dos se obtiene:

$6x – 3y = –2$
$x – 3y = –2$

Sumando las dos ecuaciones el resultado es $7x = 7 \Rightarrow x = 1$ si remplazamos en la primera ecuación este valor se obtiene el valor de y así $2(1) – y = 3 \Rightarrow 2 – 3 = y \Rightarrow y = –1$

Este resultado indica que las rectas se interceptan en el punto (1, –1).

B. Igualación

Este proceso consiste en despejar la misma variable en ambas ecuaciones y se igualan los dos resultados, puesto que en el punto de encuentro las variables de ambas ecuaciones deben tener el mismo valor. Luego se procede en forma similar al caso anterior.

Ejemplo

Hallar la solución del sistema

$2x–y=3$
$x+3y=–2$

Solución

Si despejamos la variable *y* en ambas ecuaciones resulta:

$$2x-y=3 \Rightarrow 2x-3=y$$
$$x+3y=-2 \Rightarrow y=\frac{-x-2}{3}$$

Ahora igualamos estos resultados

$$2x-3=\frac{-x-2}{3}$$
$$7x=7$$
$$x=1$$

Remplazando en $y=2x–3 \Rightarrow y=2(1)–3=–1$

> **Nota:** *Se multiplicó por 3 la primera ecuación porque se observó que al hacer esto el coeficiente de y es el mismo y de signos contrarios. Si quisiéramos eliminar x multiplicamos por -2 la segunda ecuación (hacerlo) y luego se suman.*

Se obtiene así el punto (1,–1) **(1, −1)**, es decir, el mismo resultado obtenido con el proceso anterior.

C. Sustitución

En este caso se despeja una de las variables en una de las ecuaciones y se sustituye en la otra con lo cual se obtendrá el valor de una de las variables y luego se procede como en los casos anteriores.

Ejemplo 1

Hallar la solución del sistema:

$$2x-y=3$$
$$x+3y=-2$$

Solución

Despejamos la variable *y* de la primera ecuación:

$$\begin{gathered}2x-y=3\\2x-3=y\end{gathered}$$

Sustituyendo en la segunda:

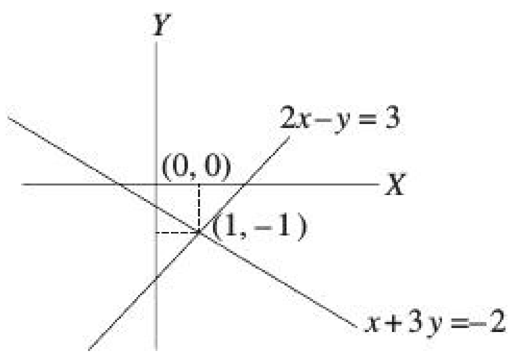
$$\begin{gathered}x+3(2x-3)=-2\\7x=7\\x=1\end{gathered}$$

Remplazando en $y=2x-3 \Rightarrow y=2(1)-3=-1$

Nuevamente se obtiene el punto (1,–1).

Se consideraron los tres procesos con el mismo sistema de ecuaciones con el fin de comprobar que todos conducen al mismo resultado, no se quiere mostrar con esto que la solución de un sistema tenga que hallarse empleando los tres métodos o procesos, puesto que basta proceder con uno de ellos para obtener la solución.

Es importante comprobar también que las dos rectas pasan por el punto (1,–1) graficándolas en el mismo plano, para nuestro caso la gráfica es:



Ejemplo 2

Hallar la solución para el sistema:

$$\begin{gathered}x+2y=3\\3x+6y=5\end{gathered}$$

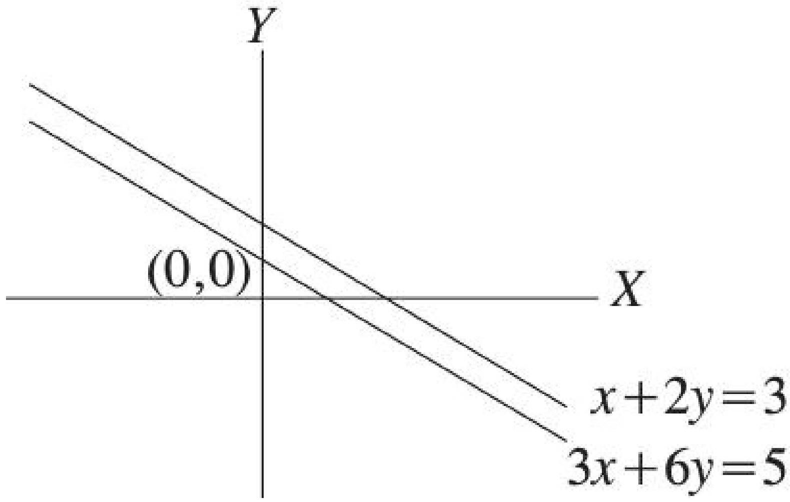
Solución

Si procedemos a resolver el sistema con reducción, multiplicamos la primera ecuación por -3 y sumamos:

$$\begin{aligned}&-3x-6y=-9\\&3x+6y=5 \text{ sumando}\\&0=-4\end{aligned}$$

Este resultado nos indica que el sistema no tiene solución, es decir, las rectas son paralelas, si graficamos observamos que esta afirmación es correcta:

(0,0)



Ejemplo 3

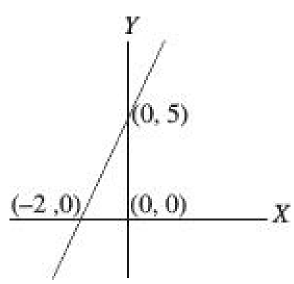
Hallar la solución para el sistema $-2x + y = 5$, $4x - 2y = -10$

Solución

Nuevamente utilizamos reducción multiplicando la primera ecuación por 2 y sumamos.

$$\begin{array}{r} -4x+2y=10 \\ 4x-2y=-10 \\ \hline 0=0 \end{array}$$

El resultado muestra que las dos ecuaciones son iguales, es decir, las rectas coinciden la solución en este caso son todos los puntos de la forma $(x, 5+2x)$ con $x \in \Re$, significa entonces que se tienen infinitas soluciones para el sistema ya que la gráfica representa una sola línea recta.



Ejemplo 4

La suma de dos números enteros positivos es 60 y tres veces el menor más el mayor es 100. Hallar los dos números.

Solución

Sean

x = número entero menor
y = número mayor

Con las condiciones dadas obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned} x+y &= 60 \\ 3x+y &= 100 \end{aligned}$$

Procedemos con reducción multiplicando la primera ecuación por menos uno (–1) y luego sumamos:

$$\begin{aligned} -x-y &= -60 \\ 3x+y &= 100 \\ 2x &= 40 \end{aligned}$$

Remplazamos en la primera ecuación: 20+y = 60 ⇒ y = 40 Luego los números son 20 y 40.

Ejemplo 5

Se invierten $800 000 en títulos valores, una parte al 8% efectivo anual y el resto al 10% efectivo anual, se espera un rendimiento de $70 000 en el año. ¿Cuáles son las cantidades invertidas en cada uno de estos títulos?

Solución

Sean:

x = cantidad invertida al 8%
y = cantidad invertida al 10%

De la información dada se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned} x + y &= 800\,000 \\ 0{,}08x + 0{,}10y &= 70\,000 \end{aligned}$$

Multiplicamos por 100 la segunda ecuación con el fin de tener coeficientes enteros:

$$\begin{aligned} x + y &= 800\,000 \\ 0{,}08x + 10y &= 700\,000 \end{aligned}$$

Multiplicamos por -10 la primera ecuación y sumamos:

$$\begin{aligned} -10x - 10\,y &= 800\,000 \\ 8x + 10y &= 700\,000 \\ -2x &= -1000\,000 \\ x &= 500\,000 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación x+y=800 000 se obtiene:

$$\begin{aligned} 500\,000 + y &= 800\,000 \\ y &= 300\,000 \end{aligned}$$

Se deben invertir $500 000 al 8% y $300 000 al 10%. *Observamos que a mayor tasa es menor la inversión esto se debe a factores de riesgo, es decir, un posible indicador de alto riesgo en la inversión es el pago de tasas altas.*

1.5. Ejercicios

En los ejercicios del 1 al 3, graficar los sistemas en el mismo plano e indicar si tiene solución, no tiene o tiene infinitas soluciones:

1. $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -x + 3y = 5 \\ -2x + 6y = 10 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 6x + 2y = 8 \end{cases}$

En los ejercicios del 4 al 15 hallar la solución del sistema, graficar indicando el punto de intersección si lo tiene.

4. $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ x - 4y = -2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -x + 3y = 4 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x - \dfrac{1}{2}y = 3 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x + 4y = 5 \\ x + 2y = 11 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x + 2y = 1 \\ 3x - 5y = -11 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x + y = -4 \\ \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{6}y = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$

10. $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ -2x - 6y = -7 \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{1}{3}x + y = 5 \\ -x - 3y = -10 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2(x - 3y) = 3\,(-x + y - 2) \\ 2x - y) = 2\,(x - 3y + 1) \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{2}{x+2y+4} = \dfrac{3}{-x-4y} \\ \dfrac{3x-y}{2} = \dfrac{x+y+1}{3} \end{cases}$

14. $\begin{cases} 7x + 2y = 5 \\ 3x = 2 \end{cases}$

15. $\begin{cases} -2x + y = 7 \\ 3y = 1 \end{cases}$

En los ejercicios 16 a 18 comprobar que el punto dado sí es solución del sistema dado:

16. $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ -2x + 3y = 0 \\ \text{punto } (3,2) \end{cases}$

17. $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{2}{5}y = -\frac{1}{15} \\ -x + \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \\ \text{punto } (1,1) \end{cases}$

18. $\begin{cases} \frac{2}{3}x + y = \frac{-8}{3} \\ \frac{-1}{2}x + \frac{3}{5}y = -\frac{1}{10} \\ \text{punto } (-1,-2) \end{cases}$

19. Verificar que el sistema $2x - y = 5;\ x - \frac{1}{2}y = \frac{5}{2}$ tiene infinitas soluciones, e indicar por lo menos 5 soluciones particulares.
20. Comprobar que el sistema $3x + 2y = -1;\ -\frac{3}{2}x - y = \frac{1}{2}$ tiene infinitas soluciones y dar por lo menos 5 soluciones particulares.
21. La suma de dos números enteros es igual a 50, la mitad del menor más un tercio del mayor es igual a 20. ¿Cuáles son los números?
22. Un inversionista dispone de \$ 1 000 000 para invertir en títulos que ofrecen rendimientos del 10% efectivo y 12% efectivo respectivamente. Si espera rendimientos anuales de \$ 108 000, ¿cuál fue la cantidad invertida en cada una de las alternativas?
23. Un comerciante vendió 100 unidades de dos productos, si uno de estos productos le deja una utilidad de \$ 5 000 y en el otro producto la utilidad es de \$ 10 000, ¿cuántas unidades vendió de cada uno de estos productos si la utilidad total fue de \$ 800 000?
24. Un viajero encuentra en su cartera 150 billetes de \$ 50 000 y \$ 20 000 dándole un valor total de \$ 5 100 000, ¿cuántos billetes de \$ 50 000 y cuántos de \$ 20 000 se tienen?

2.8. Sistemas de ecuaciones no lineales

Hemos visto cómo en el caso de tener dos ecuaciones lineales, es posible que estas tengan un punto en común o punto de intersección, sin embargo, no necesariamente ocurre esto con solo ecuaciones lineales, sino por el contrario en el trabajo del cálculo se debe indagar por los puntos de intersección de ecuaciones cuadráticas con lineales, cuadráticas con cuadráticas, cúbicas y cuadráticas con lineales, etc. El proceso de solución en estos casos puede ser con los métodos mencionados, es decir, la reducción sustitución o igualación.

Ejemplo 1

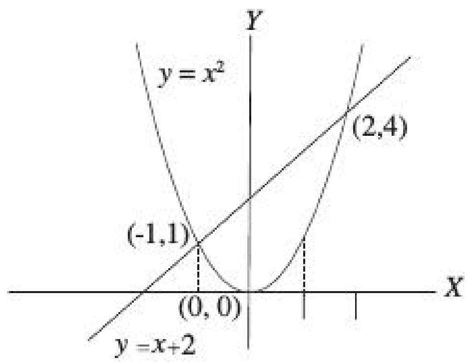
Hallar los puntos de intersección de las ecuaciones $y=x^2$, $y=x+2$.

Solución

Como puede observarse en este caso se tiene una ecuación cuadrática y una lineal además en ambas está despejada la variable y. Luego podemos proceder por igualación.

$$\left.\begin{array}{r} y=x^2 \\ y=x+2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2=x+2 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x=-1,\ \ x=2$$

Sustituyendo en la primera ecuación y evaluando se obtienen los puntos (–1,1), (2,4) graficando este sistema se obtiene:



Ejemplo 2

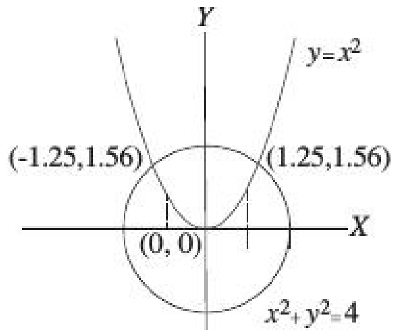
Hallar los puntos de corte entre las ecuaciones $y=x^2$, $x^2+y^2=4$

Solución

Se observa que la primera ecuación $y=x^2$ representa una parábola y la segunda representa una circunferencia con centro (0,0) y radio $r=\sqrt{4}=2$ procedemos por sustitución:

$$\left.\begin{array}{r} y=x^2 \\ x^2+y^2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow y+y^2=4 \Rightarrow y^2+y-4=0$$

Resolviendo esta última ecuación cuadrática con la fórmula obtenemos $y_1=1.56$, $y_2=-2.56$ al sustituir estos valores en la primera ecuación se obtienen los puntos (–1.25, 1.56) y (1.25, 1.56):



Ejemplo 3

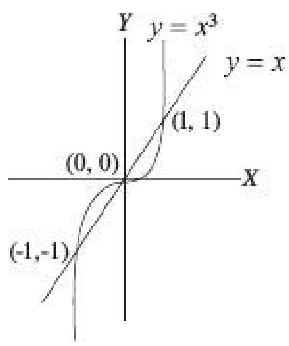
Hallar los puntos de intersección entre las curvas $y = x^3$, $y = x$.

Solución

Procedemos por igualación:

$x^3=x \Rightarrow x^3-x=0 \Rightarrow x(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow x=0,\ x=1,\ x=-1$

De lo anterior se obtienen los puntos (0,0),(–1,–1),(1,1)



2.9. Regiones en el plano

2.9.1. Desigualdades

De la misma manera como se obtienen intervalos en la recta real como solución de una desigualdad lineal, cuadrática o de mayor grado, en las desigualdades en *dos variables* se tiene como solución una región del plano, como ejemplos de desigualdades lineales tenemos:

$$2x + y < 5$$
$$y \geq x^2$$
$$x^2 + y^2 \leq 9$$
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$$

Solución de una desigualdad

El proceso de solución de una desigualdad en dos variables es el siguente:

i. Trazar la gráfica para la igualdad asociada a la desigualdad dada, es decir, si $g(x,y)<c$ la igualdad correspondiente es $g(x,y)=c$, esta gráfica será continua si tenemos $\leq$ o $\geq$ en caso contrario se tendrá la gráfica con un trazo discontinuo.

ii. La grafica de $g(x,y)<c$ define dos regiones o semiplanos, uno de los cuales es solución de la desigualdad, basta tomar un punto (x_0, y_0) en una de estas regiones y verificar si satisface a la desigualdad $g(x_0,y_0)<c$ si el punto satisface la desigualdad esta es la región solución en caso contrario será la región contraria.

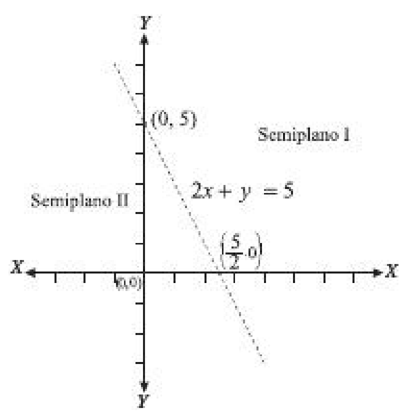
iii. Identificada la región se pasa a sombrearla.

Ejemplo 1

Hallar la región solución para la desigualdad $2x+y<5$

Solución

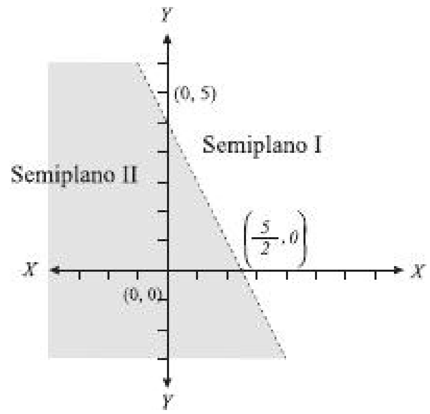
i. Procedemos a trazar la gráfica de la igualdad asociada teniendo en cuenta que esta que-da a trozos pues es una desigualdad estrictamente menor l cual significa que los puntos sobre la gráfica no son parte de la solución:



ii. Como puede observarse de nuestra gráfica tenemos dos regiones que se denotan por Semiplano I y Semiplano II. Elegimos un punto cualesquiera de uno de estos, en este caso el punto (0,0) del Semiplano o Región II, esto para agilizar los cálculos, pues como ya se dijo es un punto cualesquiera, seguidamente verificamos si la desigualdad se satisface, es decir, sustituimos.

$$2x+y<5 \rightarrow 2(0)+0<5 \rightarrow 0<5$$

Lo cual es verdadero por tanto la región II es la solución de la desigualdad:.



La parte sombreada nos indica que todos los puntos de ésta región son solución de la desigualdad.

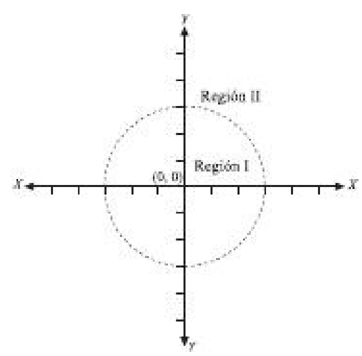
Ejemplo 2

Hallar la región solución para la desigualdad $x^2+y^2 \leq 9$

Solución

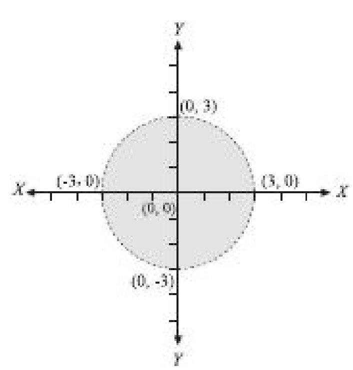
i. Trazamos la gráfica de la igualdad asociada, es decir, $x^2+y^2=9$ la cual corresponde a una circunferencia con centro en el origen y radio 3.

ii. Se tienen entonces dos regiones, I, II, elegimos nuevamente un punto en una de ellas, nuevamente tomamos (0,0) en I y sustituimos en la desigualdad:



$$x^2+y^2 \leq 9 \rightarrow 0^2+0^2 \leq 9 \rightarrow 0 \leq 9$$

Resultado verdadero, esto quiere decir que la región solución es la I, por tanto, su representación es la siguiente.



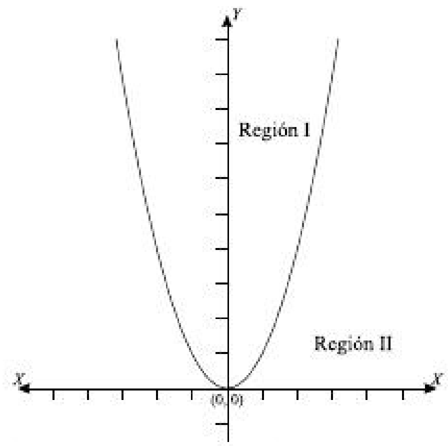
Ejemplo 3

Hallar la solución para la desigualdad $y \leq x^2$

Solución

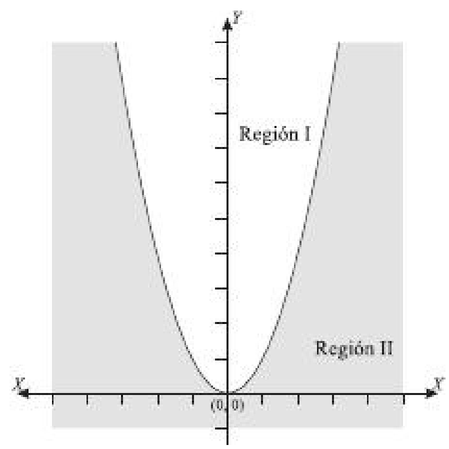
i. La igualdad asociada en este caso es $y=x^2$ que corresponde a una parábola con vértice (0,0)

ii. Se generan las regiones I, II, una interior o superior a la parábola y la otra en su exterior. Consideramos el punto (3,–2) de la región II, y lo sustituimos en la desigualdad:



$$y\leq x^2 \quad \rightarrow \quad -2\leq(-3)^2 \quad \rightarrow \quad -2\leq 9$$

Resultado válido, esto quiere decir que la región solución es la II:

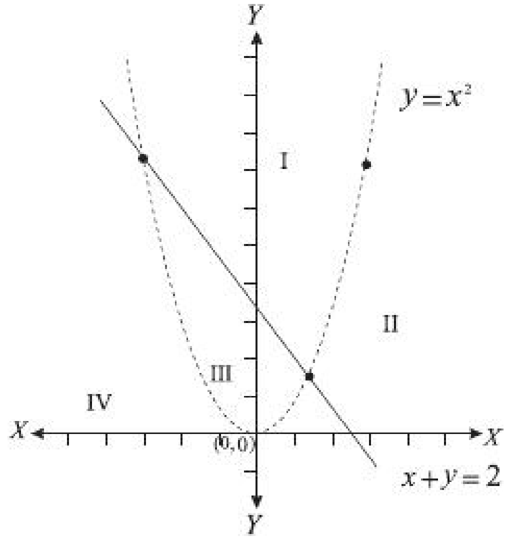


Ejemplo 4

Hallar la región solución para el sistema dado $y>x^2$, $x+y<2$

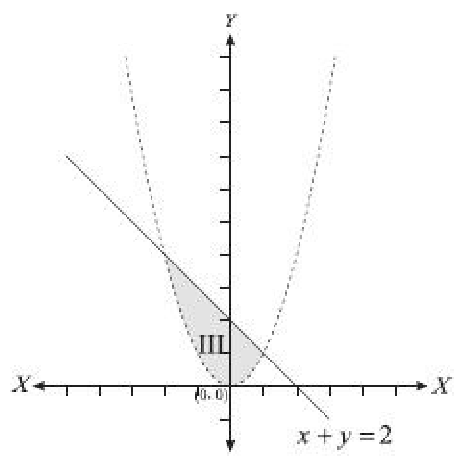
Solución

i. Las igualdades asociadas al sistema son, $y=x^2$, $x+y=2$ la primera corresponde a la parábola con vértice el origen y la segunda a una recta con intersecciones con los ejes en los puntos (0,2) y (2,0) y sus gráficas son:



ii. En la gráfica se observa que se tienen 4 regiones, una de las cuales debe ser la solución del sistema, elegimos el punto (0,1) de la región 3 y lo sustituimos en el sistema.

Para $y>x^2 \rightarrow 1>0^2 \rightarrow 1>0$ lo cual es verdadero. Para la segunda $x+y<2 \rightarrow 0+1<2 \rightarrow 1<2$ lo cual es también verdadero, luego este punto satisface el sistema, es decir, esta es la región solución del sistema:

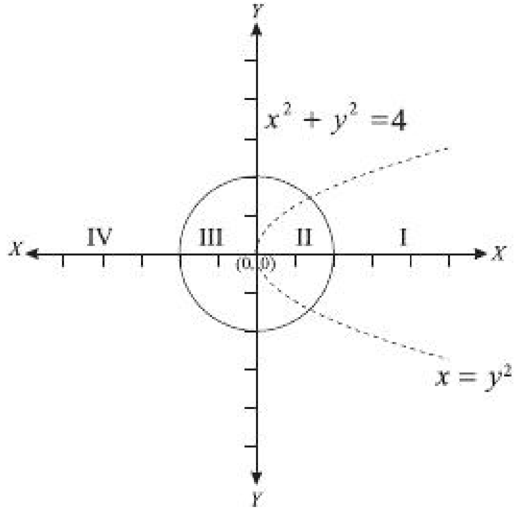


Ejemplo 5

Hallar la solución del sistema $x^2+y^2 \leq 4$, $x>y^2$

Solución

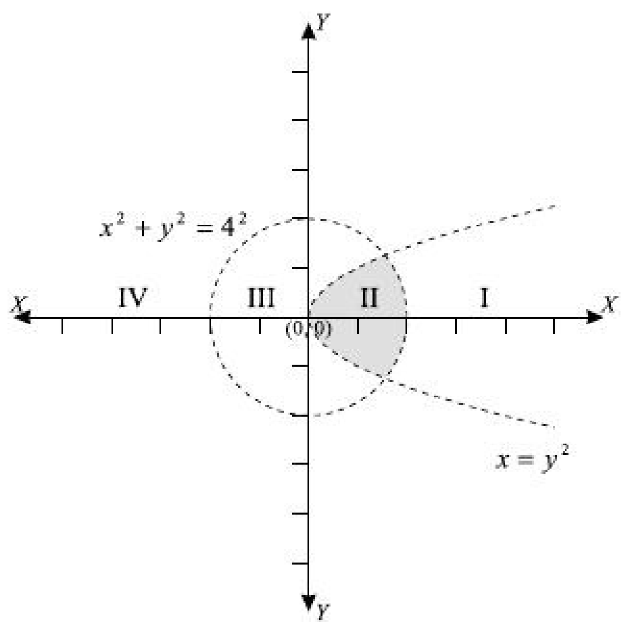
i. Las ecuaciones asociadas al sistema son $x^2+y^2=4$, $x=y^2$ las cuales corresponden a una circunferencia con centro el origen y radio 2 y una parábola sobre el eje X y vértice en el origen la cual abre hacia la derecha:



ii. Como podemos ver en la figura se generan 4 regiones, elegimos el punto (1,0)en la región II y verificamos en el sistema de desigualdades.

Sustituyendo en la primera $1^2+0^2 \leq 4$, $\rightarrow 1 \leq 4$ lo cual es verdadero, hacemos lo mismo con la segunda $1>0^2$ $\rightarrow$ $1>0$ lo cual es cierto

Como el punto satisface al sistema la región II es la solución del sistema:



1.6. Ejercicios

Obtener los puntos de intersección entre las curvas dadas por las ecuaciones en cada uno de los casos:

1. $y = x^2, \quad y = 4 - x^2$
2. $x^2 + y^2 = 4, \quad y = x + 1$
3. $y = \sqrt{x}, \quad y = x$
4. $x^2 + y^2 = 9, \; \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$
5. $x^2 + y^2 = 9, \; x^2 + y^2 - 2x = 0$

6. $y = x,\ \ xy = 1$
7. $x = y^2,\ \ x = 9 - y^2$
8. $y = -x^2,\ \ y = x^3$
9. $y = x,\ \ \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$
10. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{2} = 1,\ \ x^2 + y^2 = 9$
11. $x^2 + y^2 = 5,\ \ y - x = 1,$
12. $x = y^2,\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

1.7. Ejercicios adicionales

1. Hallar el valor de $k \neq 0$ para el cual las rectas $2k\,x + 3y = 5$, $4x + 3k\,y = 2$ son paralelas.
2. Comprobar que el sistema $-3x + y = -5$, $2x + 3\,y = -3$ tiene como solución (1,–2).
3. Mediante reducción hallar la solución del sistema

$$\frac{1}{2}x + 3y = 5,\ \ 3x + \frac{2}{5}y = 4$$

4. Hallar la solución del sistema y graficar: $y = -x$, $2\,y = -x$
5. Hallar las simetrías respecto al eje X, eje Y al origen para las gráficas dadas por las siguientes ecuaciones:
   a. $4x^2 + 9y^2 = 36$
   b. $9x^2 - 4y^2 = 36$
   c. $x^2 + y^2 = 16$
   d. $xy = 5$
   e. $y = x^2 + 2x - 1$
   f. . $y = 2x - 3$

6. En el plano cartesiano representar los siguientes pares ordenados:
   $(3,4),\ (-2,0),\ (0,-5),\ (-3,-2),\ (4,-1),\ (-3,4),\ (7,0),\ \left(0,\ \frac{3}{2}\right)$
7. Hallar la distancia entre los pares de puntos indicados:
   a. (–2,3) y (7,–1)
   b. (3,4) y (–2,–3)
   c. (–3,–4) y (4,7)

8. Hallar el punto medio entre los pares de puntos dados:
   a. (–1,–3) y (4,7)
   b. (–1,5) y (4,–2)
   c. (–2,3) y (5,3)

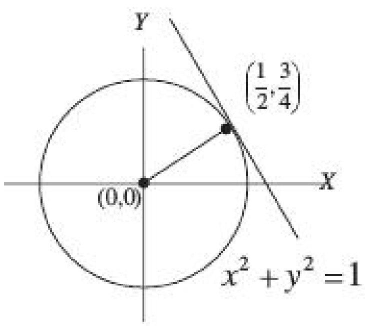
9. Hallar la pendiente de la recta que corresponde al ángulo de inclinación dado:
   a. $\theta = \frac{\pi}{4}$

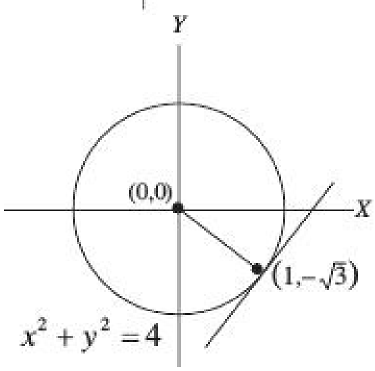
b. $\theta = \frac{\pi}{3}$
c. $\theta = \frac{\pi}{6}$
d. $\theta = \frac{5\pi}{6}$

En los ejercicios 10 al 13 para la circunferencia dada hallar, centro, radio, longitud de la circunferencia, área del círculo y graficar.

10. $x^2+y^2-2x+4y=2$
11. $x^2+2x+y^2=1$
12. $x^2+y^2+4y=3$
13. $x^2+y^2-2x+6y=1$

En los ejercicios 14 y 15 hallar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto dado:

14. 

15. 

16. Verificar si en el sistema las rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos:

a. $\begin{cases} 3x+y=7 \\ -x+3y=10 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x+y=3 \\ -x+3y=-5 \end{cases}$

c. $\begin{cases} -x+2y=6 \\ -3x+6y=20 \end{cases}$

17. Hallar la solución del sistema y graficar, $y=-x$, $x^2+y^2=4$
18. Hallar la ecuación de la recta que pase por el punto $(-1,3)$ y sea:
    1. Paralela a la recta $2x-y=5$
    2. Perpendicular a la recta $3x+2y=7$

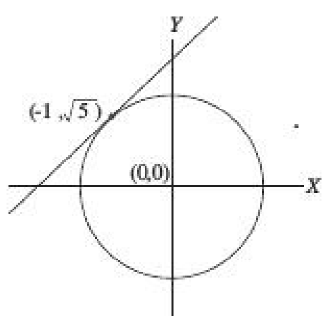
19. Hallar la ecuación de la recta que cumpla la condición dada:
    a. Pasa por (–2,3) y tiene pendiente cero.
    b. Pasa por los puntos (–1,–3) y (4,3)
    c. Pasa por (2,–3) y tiene pendiente indefinida
    d. El ángulo de inclinación es $\frac{\pi}{3}$ y pasa por el punto (2,3).

20. Los extremos de un segmento de recta son (–2,–1) y (4,y) si la distancia entre los dos es 10, hallar la ordenada y.
21. El diámetro de una circunferencia tiene por extremos (–2,3) y (4,–1), hallar centro, radio, graficar, calcular la longitud de la circunferencia y el área del círculo.
22. Hallar la ecuación simétrica de la recta con ordenada -2 y abscisa 5.
23. Dado el sistema $2x + 3y = 7 - x + 4y = 2$
    a. Hallar la solución por reducción.
    b. Hallar la solución por sustitución.
    c. Hallar la solución por igualación.
    d. Graficar el sistema e indicar el punto solución.

24. Dado el sistema $ax+ by = c$
    $dx+ey=f$

¿Qué condición necesitamos para *a, b, d y e* con el fin de que el sistema tenga solución única?

25. Hallar la solución del sistema y graficar indicando los puntos de intersección:$y=x^3$ $y=\sqrt{x}$
26. Dada $x^2+y^2+6x–4y=3$ hallar, centro, radio, área del círculo, longitud de la circunferencia y graficar.
27. Escribir la ecuación de la circunferencia y la ecuación de la recta tangente de la gráfica dada.



a. Dado el sistema de ecuaciones $-2x+y=3$; $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=5$. Hallar la solución y graficar.
b. Ubicar en el plano cartesiano los siguientes puntos:

$$(-3,1), \left(2,\frac{1}{2},\right) (3,-5), (-2,-4)$$

30. Si el punto medio entre los puntos (x,–2) y (5,y) en (1,1) hallar x e y.
31. Verificar las simetrías respecto al eje X, eje Y y origen de la curva dada por la ecuación, $4x^2 + 9y^2 = 36$.
32. Si el ángulo de inclinación de una recta es $\frac{\pi}{3}$, hallar la pendiente y la ecuación de la recta si esta pasa por el punto (–2,3).
33. Hallar los valores de k≠0, para los cuales las rectas $(2k–1)x+3y=4$, $5x+2ky=7$ son:

a. Paralelas.
b. Perpendiculares.

34. Halle la ecuación de la recta que:
   a. Pasa por (–1, 3) y es paralela a $3x - y = 7$.
   b. Pasa por (2, 1) y es perpendicular a $-2x + 5y = 11$.

35. Si calculamos la distancia de los puntos $(-2,3)$ y $(3,-4)$ al origen, ¿cuál es la mayor?

Hallar la región solución en los ejercicios 36 a 50.

36. $3x + y \geq 6$
37. $2x - y < 2$
38. $x \leq 3$
39. $x > -2$
40. $y < 3$
41. $y \geq -2$
42. $y \geq x$
43. $y \leq -7$
44. $-x + 2y > 3$
45. $y > -x^2$
46. $x^2 + y^2 \leq 4$
47. $x^2 + y^2 > 4$
48. $y \leq x^3$
49. $x > y^2$
50. $x \leq y^2$

Hallar la solución en los ejercicios 51 a 56:

51. $\begin{cases} y > x^2 \\ y \leq x + 2 \end{cases}$
52. $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 3 \end{cases}$
53. $\begin{cases} x > y^2 \\ x \leq 4 \end{cases}$
54. $\begin{cases} y < x \\ x \leq 2 \end{cases}$
55. $\begin{cases} x + y \leq 3 \\ y \geq -2 \end{cases}$
56. $\begin{cases} y \geq x^2 \\ y \leq 4 - x^2 \end{cases}$

Capítulo 3

Geometría euclidiana

Objetivos

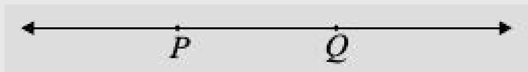
- Reconocer los teoremas de Thales, Pitágoras y la Fórmula de Herón como herramientas básicas en la resolución de problemas de tipo geométrico.
- Identificar y representar los elementos geométricos que caracterizan a los cuadriláteros, triángulos, polígonos regulares y figuras circulares.
- Calcular el área y perímetro de figuras planas.
- Calcular el área lateral, área total y volumen de cuerpos geométricos: prismas, pirámides, conos, cilindros y esferas.
- Resolver problemas geométricos que involucren figuras planas y sólidos.
- Valorar la importancia del estudio de la geometría euclidiana, para el estudio posterior del cálculo.

3.1. Términos indefinidos

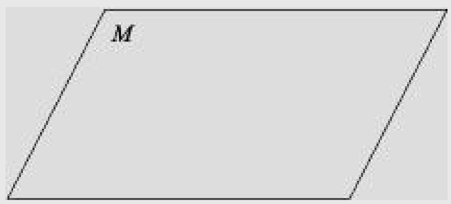
Se les puede asignar un significado por medio de descripciones los cuales no se consideran como definiciones; estos términos indefinidos son:

Punto: no tiene ubicación, longitud, anchura ni altura. Se designa al punto conceptual por medio de una letra mayúscula, así: *P.Q. R.*

Recta: longitud ilimitada, derecha sin grosor ni extremos. Se designa con letras mayúsculas en dos puntos cualesquiera sobre ella.



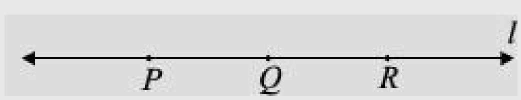
Plano: un plano tiene longitud y anchura pero no espesor. Un plano se representa como parte de un objeto físico, como el corte más delgado posible, pero no son las representaciones reales de un plano.



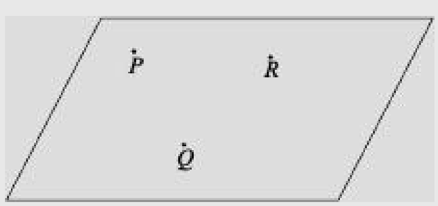
El punto, la recta y el plano cumplen las siguientes propiedades:

- Existen infinitos puntos.
- Por un punto pasan infinitas rectas.
- Dados dos puntos diferentes, estos determinan una única recta.
- Una recta contiene infinitos puntos.
- Existen infinitas rectas.
- Tres puntos que no están en una recta determinan un plano.
- Un plano contiene infinitos puntos.

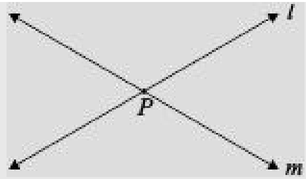
Puntos colineales: tres o más puntos son colineales si pertenecen a una misma recta *l*.



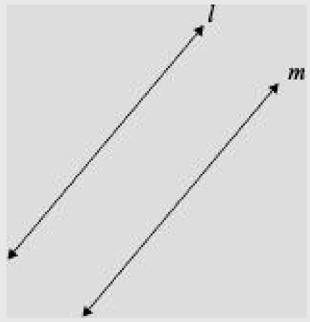
Puntos coplanares: son puntos que se encuentran en un mismo plano *M*.



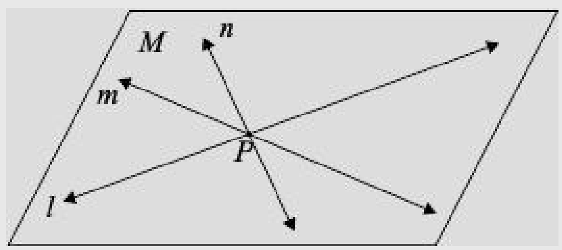
Rectas intersecantes: son dos rectas con un punto en común.



Rectas paralelas: son rectas que están en el mismo plano y no se intersecan, no tienen un punto en común, es decir *l* es paralela a *m* y se nota $l||m$.



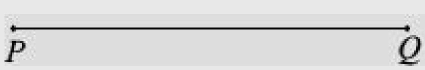
Rectas concurrentes: son tres o más rectas coplanares que tienen un punto en común.



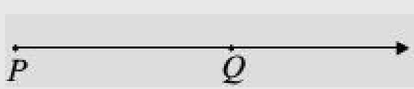
3.2. SEGMENTOS DE LÍNEA

Definición: un **segmento de línea** es la parte entre dos puntos de una línea recta, incluyendo estos dos puntos.

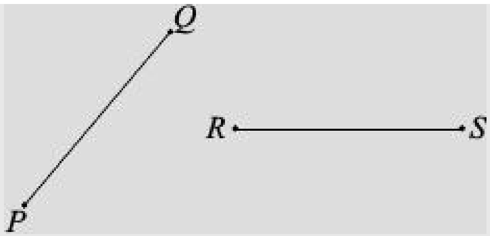
Se designa así: $\overline{PQ}$ que es “el segmento de línea recta $\overline{PQ}$ o $\overline{QP}$”.



Rayo o semirrecta: es la porción de una línea que cae a un lado de un punto e incluye el punto, se designa así: $\overrightarrow{PQ}$.



Congruencia de segmentos: dos segmentos de línea son congruentes si tienen la misma longitud, $\overline{PQ}$ es congruente con $\overline{RS}$ y se nota $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$.



Un segmento es congruente con otro segmento si al colocar el primero sobre el segundo, sus extremos coinciden.

Longitud de un segmento: al considerar una semirrecta, el número que expresa la distancia entre dos puntos *P y Q* se llama medida o longitud del segmento $\overline{PQ}$, así: *PQ*= Longitud de $\overline{PQ}$.

Si $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$, entonces *PQ*=*RS*, es decir dos segmentos son congruentes si tienen igual longitud.

3.3. Razones y proporciones

Definición: se llama razón geométrica o relación de dos cantidades al cociente que resulta de dividir la primera entre la segunda. La razón entre *a y b* es: $\frac{a}{b}$, donde b≠0; *a* es el antecedente y *b* es el consecuente.

Proporción: Es la igualdad de dos razones.

3.3.1. Algunas propiedades de las proporciones

i. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, entonces $a \cdot b= c \cdot d$

ii. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, entonces $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

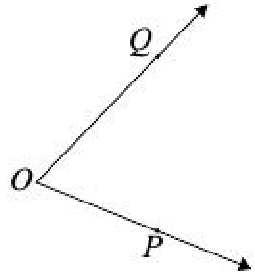
iii. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

iv. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, entonces $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

v. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots=\frac{m}{n}=\frac{a+c+e+\cdots+m}{b+d+f+\cdots+n}=\frac{a}{b}=\cdots=\frac{m}{n}$

3.4. Ángulos y medición de ángulos

Un ángulo es la abertura entre dos semirrectas de origen común. El origen común se llama vértice del ángulo y las dos semirrectas lados del ángulo.

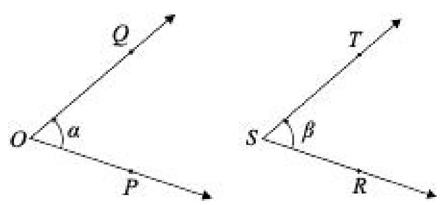


OP y OQ	lados del ángulo
O	vértice del ángulo
$\angle POQ$	ángulo *POQ*
OP	lado inicial
OQ	lado terminal

3.4.1. Congruencia de ángulos

Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida.

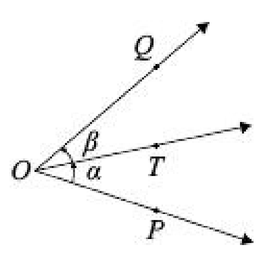
El ángulo $\angle POQ$ es congruente con el ángulo $\angle RST$ si $\angle\alpha \cong \angle\beta$



3.4.2. Bisectriz de un ángulo

Es la semirrecta de origen en el vértice del ángulo y que lo divide en dos ángulos congruentes.

Si *OT* es la bisectriz del ángulo $\angle POQ$, entonces $\angle POT \cong \angle TOQ$ es decir $\angle\alpha \cong \angle\beta$:



3.4.3. Medición de ángulos

Se usan diferentes sistemas para medir ángulos. Los dos sistemas de medida de ángulos más comunes son el sistema sexagesimal y el cíclico. El tamaño de un ángulo depende de qué tanto debe rotarse uno de sus lados alrededor del vértice, hasta que coincida con el otro lado.

En el sistema sexagesimal la unidad de medida es el grado que equivale a $\frac{1}{360}$ parte del ángulo de una vuelta, es decir: $1° = \frac{1}{360}$ lo que implica que 360°=1 vuelta.

Para medir con más precisión los ángulos se utilizan las unidades de minuto y segundo.

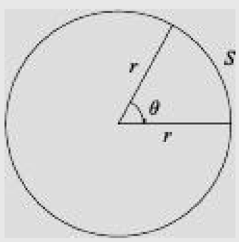
Simbólicamente se tiene: 1° grado =60 minutos y 1 minuto = 60' segundos.

En el sistema cíclico o radianes la unidad de medida es el radián, donde un ángulo en radianes es: $\theta = \frac{s}{r}$; donde s es el arco y r es el radio.

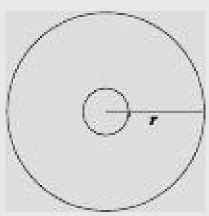
Si s=r, entonces θ=1 radián.

Definición de Radian

Un radian es la medida de un ángulo central θ, cuyos lados cortan un arco S, igual en longitud al radio r, de la circuferencia del círculo.



Si se tiene un giro completo el ángulo θ es igual a:



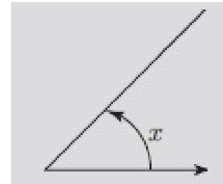
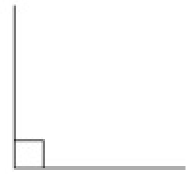
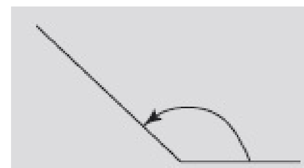
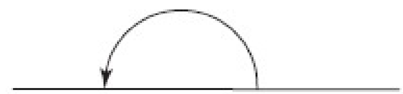
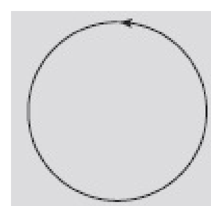
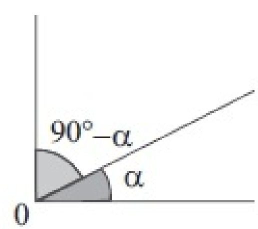
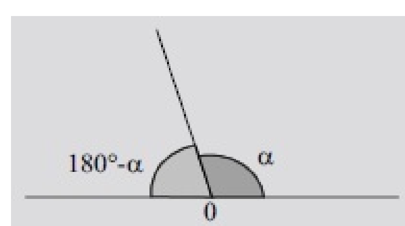
$\theta = \frac{s}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ radianes

Como $360^\circ = 2\pi$ rad, entonces $180^\circ = \pi$ rad, es decir;

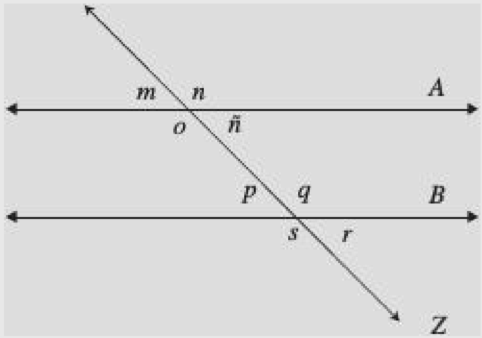
$$1rad = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{3{,}1415} = 57{,}29^\circ$$

Además $1^\circ = \frac{2\pi}{360^\circ} = \frac{3.1415}{180^\circ} = 0{,}01745$ rad.

3.4.4. Tipos de ángulos

Ángulo agudo Es el ángulo que mide entre 0°y 90°	
Ángulo recto Es el ángulo que mide 90°	
Ángulo obtuso Es el ángulo que mide más de 90° y menos de 180°	
Ángulo llano Es un ángulo que mide 180°	
Ángulo completo Es el ángulo que mide 360°	
Ángulos complementarios Dos ángulos son complementarios, si la suma es un ángulo recto 90°.	
Ángulos suplementarios Dos ángulos son suplementarios, si la suma es un ángulo llano 180°.	

3.4.5. Ángulos entre dos rectas paralelas y una recta secante (transversal)



Opuestos por el vértice: *m* y *ñ; o* y *n; p* y *r; q* y *s.*

Alternos internos: son los no colaterales ambos internos y no adyacentes

o y *q; ñ* y *p.*

Alternos externos: son los no colaterales ambos externos y no adyacentes

m y *r; n* y *s.*

Correspondientes: son los colaterales ambos externos y no adyacentes

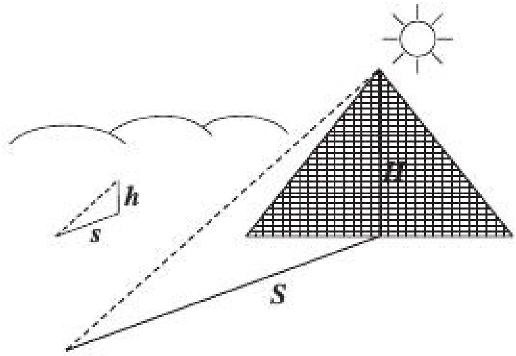
n y *q; ñ* y *r; m* y *p; o* y *s.*

3.5. Teorema de Thales

Thales nació alrededor del año 640 A.C. en Mileto, Asia Menor (ahora Turquía). Thales era un hombre que se destacó en: ingeniería, astronomía y geometría; Thales era considerado uno de los siete sabios de Grecia. En sus teoremas geométricos aparecen los inicios del concepto de demostración que se consideran como el punto de partida en el proceso de organización racional de las matemáticas. Se cuenta que comparando la sombra de un bastón y las sombras de las pirámides, Thales midió por semejanza, sus alturas respectivas; la proporcionalidad entre los segmentos que las rectas paralelas determinan en otras rectas dio lugar a lo que hoy se conoce como el Teorema de Thales:

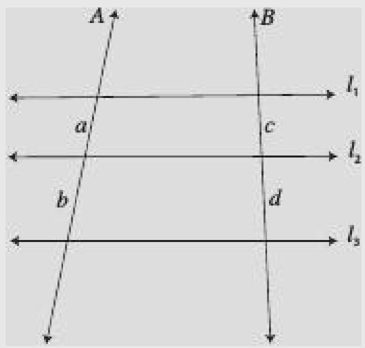
En la siguiente figura puesto que los rayos del sol inciden paralelamente sobre la Tierra, los triángulos rectángulos determinados por la altura de la pirámide y su sombra y el determinado por la altura del bastón y la suya son semejantes.

H: altura de la pirámide
h: altura del bastón
S: sombra de la pirámide
s: sombra del bastón



$$\frac{H}{S}=\frac{h}{s}\,;\; H=\frac{S\cdot h}{s}$$

Teorema: *Si tres o más rectas paralelas son intersecadas por dos rectas transversales, los segmentos de las transversales determinados por las paralelas son proporcionales:*



En la figura si

$l_1 \| l_2$ y $l_2 \| l_3 \|$, *A* y *B* son rectas transversales, los segmentos *a*, *b*, *c* y *d* son proporcionales.

Es decir; $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

En el Teorema de Thales la hipótesis y la tesis son:

Hipótesis	***Tesis***
l_1 // l_2 // l_3	$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$
a y *b* son correspondientes de *A*	
c y *d* son correspondientes de *B*	

Prueba

Supongamos que $a = xu$ y $c = yu$

Si trazamos paralelas por los puntos donde se toma cada unidad de u, los segmentos b y d quedarán divididos en segmentos cuyas medidas son iguales a u' de manera que:

$b = xu'$ y $d = yu'$

Luego, $\frac{a}{c} = \frac{xu}{yu}$ entonces $\frac{a}{c} = \frac{x}{y}$ (1) y $\frac{b}{d} = \frac{xu'}{yu'}$ entonces $\frac{b}{d} = \frac{x}{y}$ (2)

De las expresiones (1) y (2) se tiene que $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

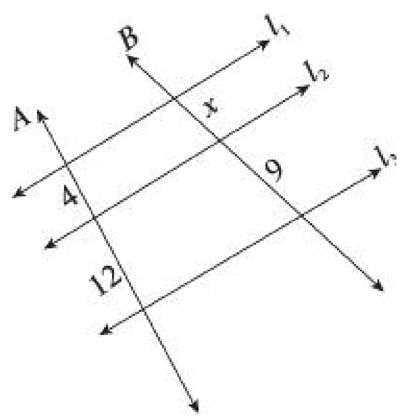
Ejemplo 1

En la figura $l_1 \| l_2$ y $l_2 \| l_3$, *A y B* son segmentos transversales, calcule la medida del segmento x.

Solución

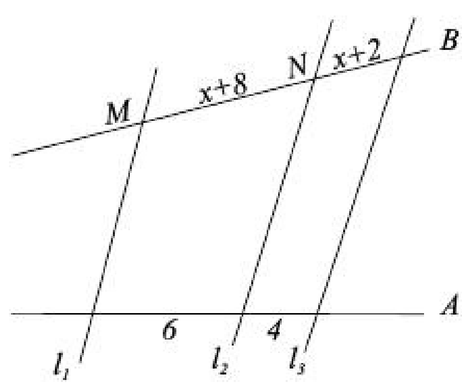
Así:

$$\frac{4}{12} = \frac{x}{9};\; x = \frac{(4)\cdot(9)}{12};\; x = 3$$



Ejemplo 2

En la figura $l_1 \| l_2$ y $l_2 \| l_3$, A y B son segmentos transversales, calcular *x y* el segmento *MN*.



Solución

Así:

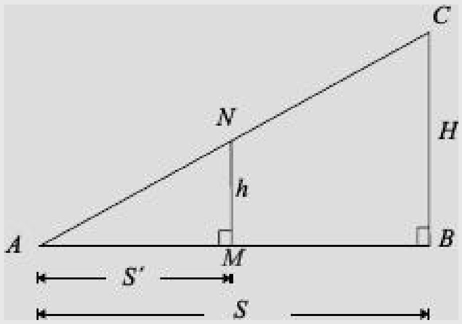
$\frac{6}{4} = \frac{x+8}{x+2}$; $6(x+12) = 4(x+8)$; $6x+12 = 4x+32$; $6x - 4x = 32$;

$2x=20$; $x=10$

Como $MN=x+8$, entonces $MN=x+8=10+8=18$, luego el trazo $MN=18$

3.5.1. Aplicación del teorema de Thales a triángulos

Dos triángulos están en posición de Thales, cuando "*tienen un ángulo común y los lados opuestos a dicho ángulo son paralelos*"

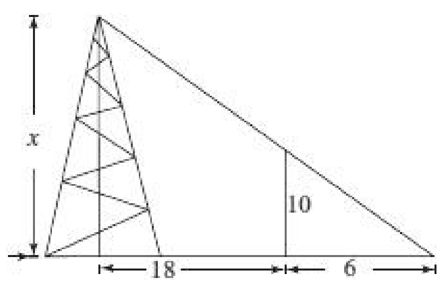


En los triángulos ΔAMN y ΔABC, sus lados tienen la misma razón de semejanza, es decir:

$$\frac{AN}{AC}=\frac{NM}{CB} \text{ o } \frac{AN}{AM}=\frac{AC}{AB}$$

Ejemplo 3

Calcular la altura de la torre.

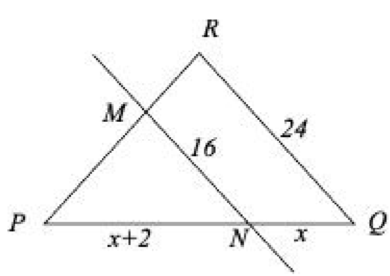


Solución

$$\frac{10}{6}=\frac{x}{18+6} \qquad \frac{10}{6}=\frac{x}{24} \qquad x=\frac{(10)\cdot(24)}{6} \qquad x=40$$

Ejemplo 4

En el triángulo $APQR$, $MN\|RQ$, calcular x y el segmento PN.



Solución

$$\frac{16}{x+2}=\frac{24}{(x+2)+x} \qquad \frac{16}{x+2}=\frac{24}{2x+2} \qquad 16(2x+2)=24(x+2)$$

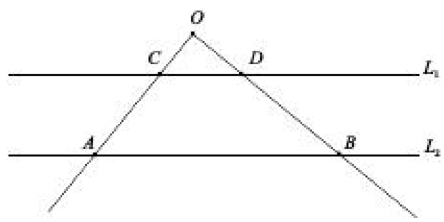
$$32x+32=24x+48$$

$$32x-24x=48-32\,;\; 8x=16\,;\; x=2$$

Luego, $PN = x + 2 = 2 + 2 = 4$

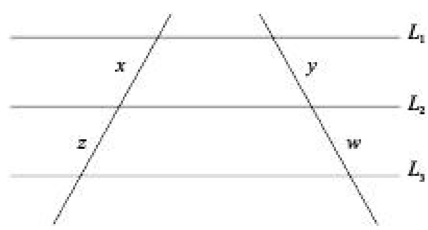
3.1. Ejercicios

1. En la siguiente figura la recta L_1 es paralela a la recta L_2. De acuerdo con los datos dados hallar:



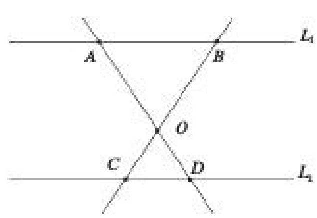
a. Si OA=24m, OD=10, y $\overline{DB}$=20m, hallar la medida de CA
b. Si CA= 9 m, OC = 4 m y OB=10m hallar la medida de DB

2. En la siguiente figura la recta L_1 , L_2 y L_3 son paralelas. De acuerdo con los datos dados hallar:



a. Si x = 48 m, y = 60 m y z = 60 m, hallar la medida de w
b. Si x = 42 m, z = 30 m y $y + w$ = 118 m, hallar la medida de y

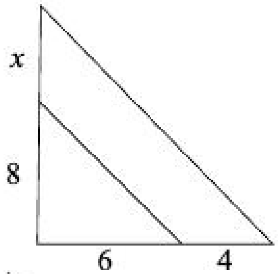
3. En la siguiente figura la recta L_1 es paralela a la recta L_2. De acuerdo con los datos dados hallar:



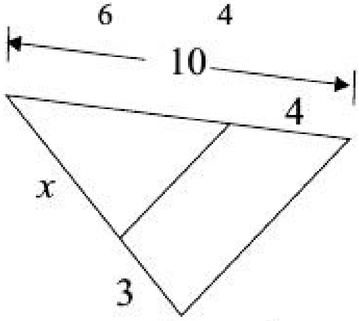
a. Si OA=x+26, OB=20m, OC=8m, OD=x+8 hallar la medida de OA.
b. Si OB=8m, OC=7m y OD=6m, hallar la medida de AD.

4. Despejar x en los siguientes triángulos.

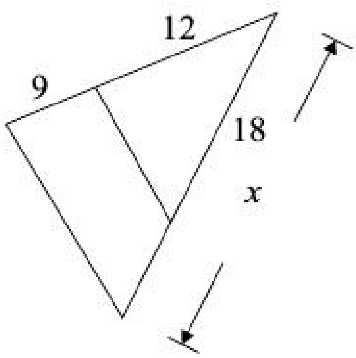
a.



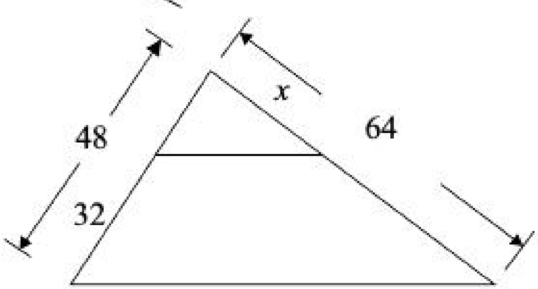
b.



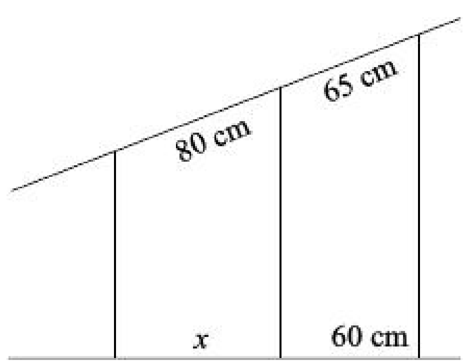
c.



d.

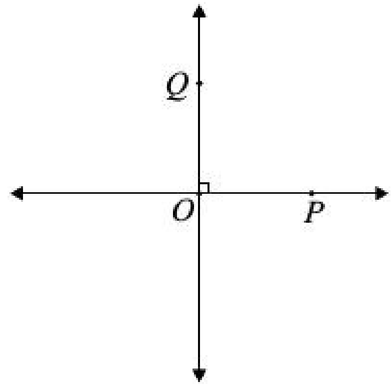


5. La siguiente figura ilustra un diseño arquitectónico para una biblioteca. De acuerdo con los datos dados determinar el valor de *x*.



3.6. Rectas perpendiculares

Si las rectas *OP y OQ* determinan un ángulo recto, entonces se llaman perpendiculares y se escribe: $\overleftrightarrow{OP} \perp \overleftrightarrow{OQ}$.

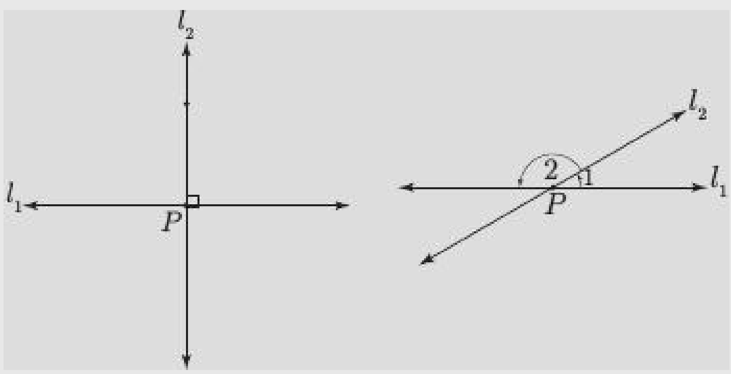


Similarmente también son perpendiculares las rectas y los segmentos que determinan los puntos *O,P y Q*; $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{OQ} \perp \overrightarrow{OP}$.

Se observa que los ángulos $\angle POQ$ y $\angle QOR$ son adyacentes y congruentes (ambos rectos) así:

Dos rectas son perpendiculares si se cortan en un punto formando ángulos adyacentes y congruentes.

Si dos rectas l_1 y l_2 en un plano cumplen que $l_1 \cap l_2 = \{p\}$; entonces las rectas son secantes y se presentan dos posibilidades:



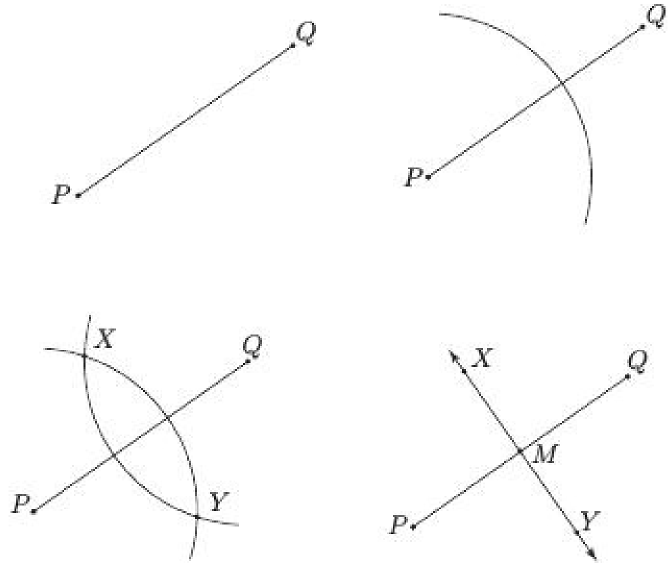
Si dos rectas l_1 y l_2 secantes no son perpendiculares, entonces decimos que son oblicuas.

Vemos que $\angle 1 \neq \angle 2$, así l_2 no es perpendicular a l_1.

3.6.1. Mediatriz de un segmento

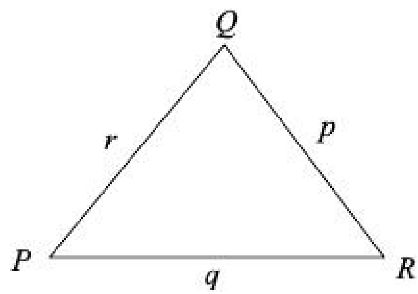
Sea el segmento $\overline{PQ}$ con una abertura de compás mayor a $\frac{PQ}{2}$ y con centro en P , trazamos dos arcos. Con igual abertura y con centro en Q, trazamos otros dos arcos que corten los anteriores y finalmente trazamos $\overleftrightarrow{XY}$; la intersección de $\overline{PQ}$ y $_{\text{del}}\,\overleftrightarrow{XY}\,_{\text{segmento}}$ es el punto M. El punto M obtenido en este procedimiento es el punto medio $\overline{PQ}$.

La recta $\overleftrightarrow{XY}$ es perpendicular al segmento $\overline{PQ}$ en su punto medio M y recibe el nombre de *mediatriz del segmento* $\overline{PQ}$.



3.7. TRIÁNGULOS

Dados tres puntos *P*,*Q* y *R* no colineales, la unión de los tres segmentos $\overline{PQ}, \overline{QR}$ y $\overline{PR}$ se llama triángulo.

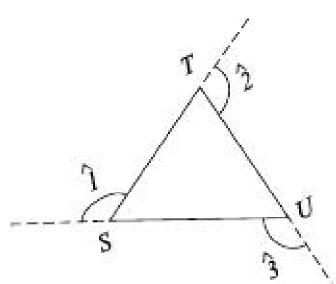


Los puntos *P*, *Q y R* se llaman vértices del triángulo.

Los segmentos $\overline{PQ}, \overline{QR}$ y $\overline{PR}$ se llaman lados del triángulo.

Los ángulos determinados por cada dos lados del triángulo se llaman ángulos interiores, estos son: $\angle RPQ$ y $\angle QPR$

El triángulo ΔPQR tiene tres ángulos $\angle P$, $\angle Q$ y $\angle R$ y tres lados, $QR=p$, $PR=q$, y $PQ=r$.



El perímetro de un triángulo es el número que representa la suma de las longitudes de sus lados.

Así en el triángulo ΔPQR se tiene:

$QR+PR+PQ=p+q+r$.

Los ángulos adyacentes a los interiores se llaman

ángulos exteriores. En el triángulo ΔSTU los ángulos $\angle 1$, $\angle 2$ y $\angle 3$ son exteriores.

Se tiene que $\angle 1 + \angle S = 180^\circ$; $\angle 2 + \angle T = 180^\circ$ y $\angle 3 + \angle U = 180^\circ$

3.7.1. Clasificación de triángulos

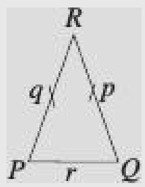
Los triángulos se clasifican de acuerdo con la propiedad de sus lados o de sus ángulos.

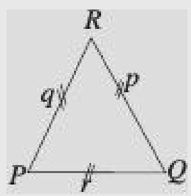
De acuerdo a sus lados se clasifican como:

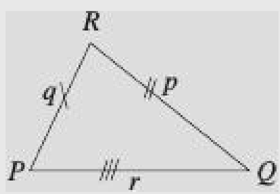
Isósceles: si dos lados son congruentes; $p = q$ y $\angle P \cong \angle Q$

Equilátero: si los tres lados son congruentes; $p=q=r$ y $\angle P \cong Q \cong R$

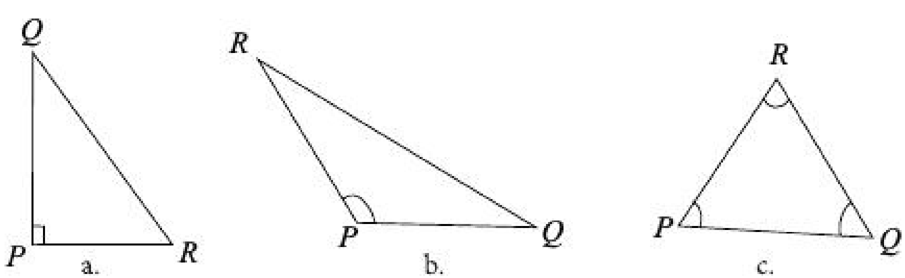
Escaleno: si sus tres lados tienen longitudes diferentes; $p \neq q \neq r$ y $\angle P \neq Q \neq R$







Si se clasifican los triángulos de acuerdo a sus ángulos se tiene:



Un triángulo es ***rectángulo*** si tiene un ángulo recto.

El triángulo (a) ΔPQR tiene recto el ángulo P. El lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa y los otros dos lados catetos.

El ángulo $\angle RPQ$ es recto; es decir $\angle RPQ$=90°

Un triángulo es *obtusángulo*, si tiene un ángulo obtuso.

En el triángulo (b) ángulo $\angle QPR$ es obtuso, es decir; 90°<*QPR*<180°.

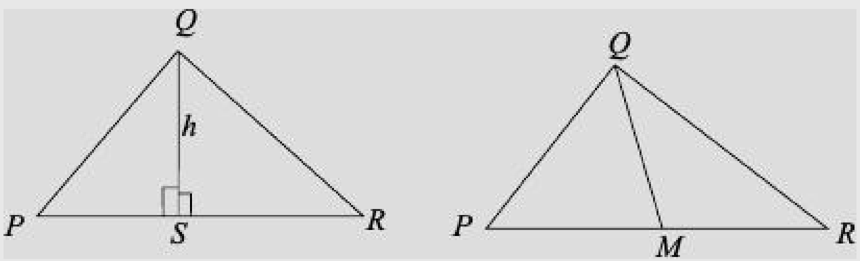
Un triángulo es *acutángulo*, si tiene tres ángulos agudos.

Los ángulos $\angle QPR$ y $\angle QRP$ del triángulo (c) son agudos, ya que, cada uno mide menos de 90°.

La suma de los tres ángulos interiores de un triángulo ΔPQR es 180° 180° o π rad. Como los tres ángulos de un triángulo equilátero son congruentes, la medida de cada uno es: $\frac{180°}{3}=60°$ ó $\frac{\pi}{3}$

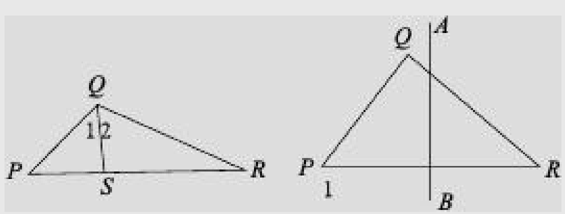
3.7.2. Líneas en triángulos

Altura: es el segmento perpendicular comprendido entre un vértice y la recta que contiene el lado opuesto; se tiene que *QS* es la altura sobre *PR*, así: $QS \perp PR$.



Mediana: es el segmento trazado de un vértice al punto medio del lado opuesto. Se tiene que *QM* es la mediana al lado *PR*, bisecta a *PR*, así *PM*=*MR*.

Bisectriz: es el segmento que bisecta un ángulo y se extiende hasta el lado opuesto. *QS* es la bisectriz de ángulo $\angle Q$; lo bisecta, haciendo $\angle 1 = \angle 2$.



Mediatriz: la mediatriz de un lado de un triángulo es la línea que es perpendicular a este lado y lo bisecta; vemos que *AB* es la mediatriz de *PR;* $AB \perp PR$ y lo bisecta.

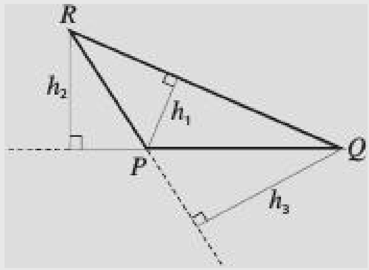
Las ***tres medianas*** de un triángulo se interceptan en un punto llamado ***baricentro.***

Las ***tres bisectrices*** de un triángulo se interceptan en un punto llamado **incentro.**

Las mediatrices de un triángulo se interceptan en un punto llamado ***circuncentro***.

Las ***tres alturas*** de un triángulo se interceptan en un punto llamado ***ortocentro***.

Las alturas del triángulo obtuso ΔPQR son:



Sobre el lado QR se traza la altura h_1
Sobre el lado PQ se traza la altura h_2
Sobre el lado PR se traza la altura h_3

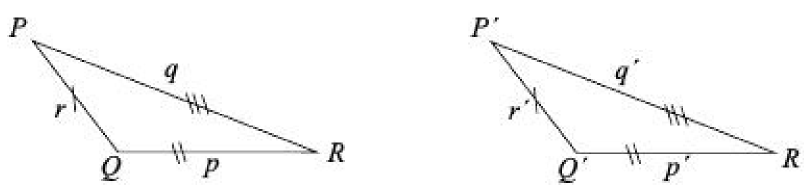
3.7.3. Congruencia de triángulos

Dos figuras son congruentes cuando tienen la misma forma y el mismo tamaño. La palabra congruente se deriva de las palabras latinas *con* que significa “con” y *gruere*, que significa “concordar, convenir”. Las figuras congruentes pueden hacerse coincidir parte por parte, donde las partes coincidentes se llaman partes correspondientes. El símbolo para notar congruencia es, ≅; el cuál es la combinación de dos símbolos:

=; que significa tener el mismo tamaño
≈; que significa tener la misma forma.

Triángulos congruentes: son los que tienen el mismo tamaño y la misma forma.

Si dos triángulos son congruentes, sus lados y ángulos correspondientes son congruentes:



La figura anterior tiene lados congruentes:

$p \cong p'$; $q \cong q'$; $r \cong r'$; y ángulos correspondientes congruentes.

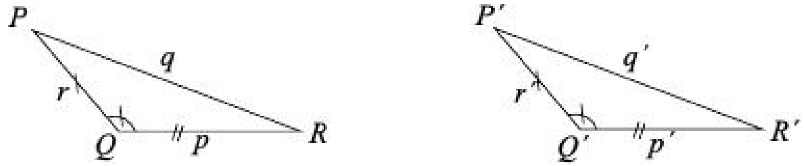
$\angle P \cong \angle P'$; $\angle Q \cong \angle Q'$; $\angle R \cong \angle R'$

Así los triángulos $\Delta PQR \cong \Delta P'Q'R'$ son congruentes.

A. Principios para probar la congruencia de triángulos

Principio del lado, ángulo y lado (LAL)

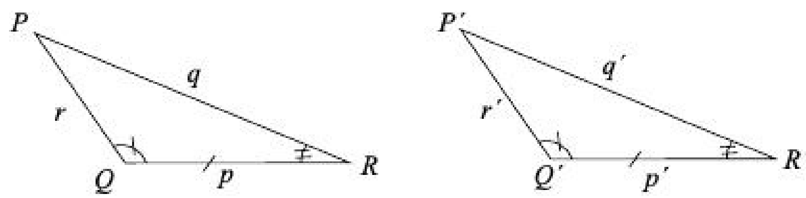
Si dos lados y el ángulo comprendido de un triángulo son congruentes con las partes correspondientes de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.



Si $r \cong r'$, $p \cong p'$ y $\angle Q \cong \angle Q'$, entonces $\Delta\, PQR \cong \Delta\, P'Q'\,R'$.

Principio del ángulo, lado y ángulo (ALA)

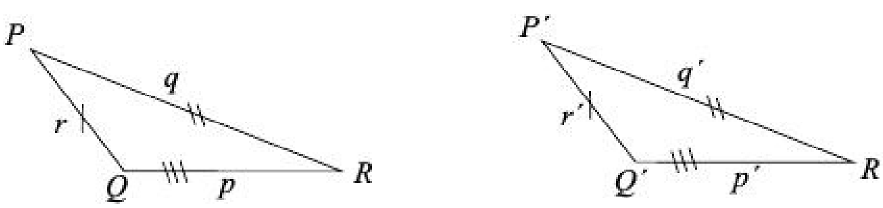
Si un lado y los dos ángulos adyacentes de un triángulo son congruentes con las partes correspondientes de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes:



$\angle Q \cong \angle Q'$ $\angle R \cong \angle R$, y $p \cong p'$, entonces $\Delta\, PQR \cong \Delta\, P'Q'\,R$,

Principio del lado, lado y lado (LLL)

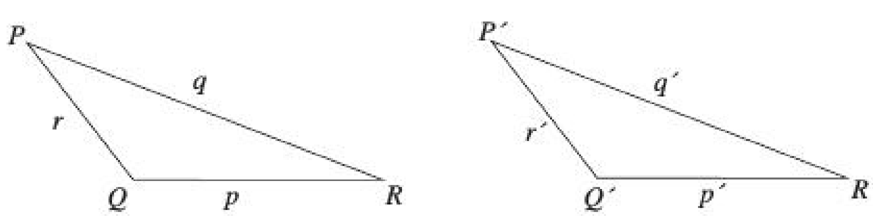
Si los tres lados de un triángulo son congruentes con los tres lados de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes:



Si $p \cong p'$, $q \cong q'$ y $r \cong r'$, entonces $\Delta\, PQR \cong \Delta\, P'Q'\,R$,

3.7.4. Semejanza de triángulos

Dos figuras son similares si tienen la misma forma aunque no el mismo tamaño. El símbolo para "similar" es ≈. El triángulo ΔPQR es similar al triángulo $\Delta P'Q'R'$ ya que los ángulos correspondientes son congruentes y sus lados correspondientes son proporcionales:

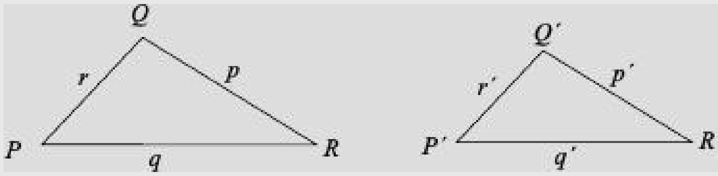


$\angle P \cong \angle P'$ y $\dfrac{r}{r'} = \dfrac{q}{q'} = \dfrac{p}{p'}$

$\angle Q \cong \angle Q'$

$\angle R \cong \angle R'$

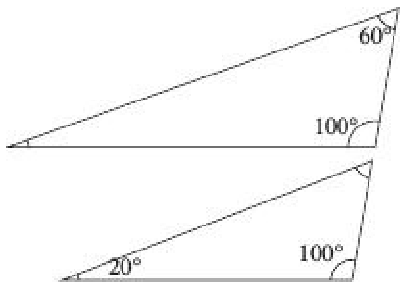
Algunos principios sobre triángulos semejantes



i. Dos triángulos son semejantes, si dos ángulos de un triángulo son congruentes respectivamente con dos ángulos del otro.

Si $\angle P \cong \angle P'$; $\angle Q \cong \angle Q'$, entonces $\Delta PQR \approx \Delta P'Q'R'$.

Ejemplo

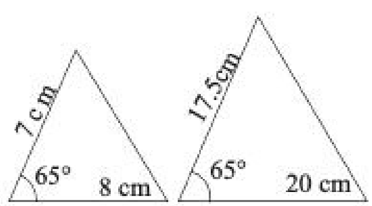


$$180° – 100° – 60° = 20°$$

ii. Dos triángulos son semejantes si un ángulo de un triángulo es congruente con el ángulo del otro triángulo y los lados que incluyen estos ángulos son proporcionales.

Si $\angle R \cong R'$ y $\dfrac{p}{p'} = \dfrac{q}{q'}$ entonces $\Delta PQR \approx \Delta P'Q'R'$.

Ejemplo



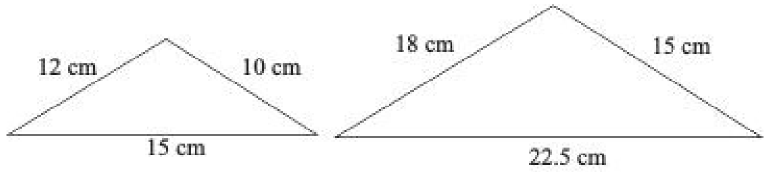
$$\frac{20}{17.5} = \frac{8}{7};(20)(7)=(17.5)(8);\ 140=140$$

Los triángulos anteriores son semejantes porque tienen dos lados proporcionales y un ángulo igual.

iii. Dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales.

$$\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'} \text{ , entonces } \Delta PQR \approx \Delta P'Q'R'$$

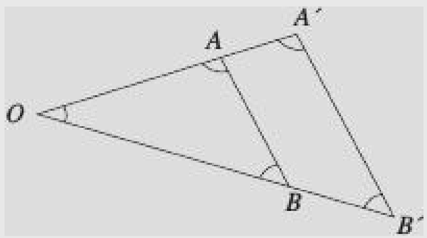
Ejemplo



$$\frac{10}{15}=\frac{12}{18}=\frac{15}{22.5}$$

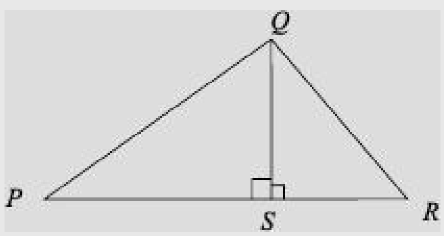
Son semejantes porque tienen los lados proporcionales.

iv. Una línea paralela a un lado de un triángulo forma un triángulo semejante al triángulo dado.



Si $AB \| A'B'$, entonces $\Delta OA'B' \approx OAB$

v. La altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo divide a este triángulo en dos triángulos que son semejantes al triángulo dado entre sí:



Así, $\Delta PQS \approx \Delta RQS \approx \Delta PQR$

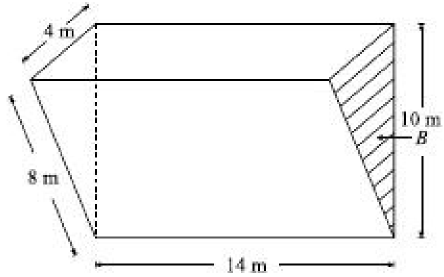
3.8. Fórmula de Herón

El Teorema de Herón se debe a Herón de Alejandría quien vivió hacia el siglo III a. de C. Son conocidas varias obras suyas, pero se le recuerda sobre todo por la llamada fórmula de Herón, que nos permite calcular el área de un triángulo conociendo solamente los tres lados. No es necesario por tanto conocer la altura ni ninguno de los ángulos. Si llamamos S al semiperímetro donde a, b, y c son los tres lados y A el área entonces se tiene:

Sea S el semiperímetro, $S=\frac{a+b+c}{2}$; entonces el área del triángulo por medio de la fórmula de Herón se calcula por la expresión $A=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

Ejemplo 1

Dado el siguiente prisma de base triangular hallar:



a. Área superficial total
b. Volumen

Solución:

a. El área superficial total es de dos veces el área de la base B, más el área lateral, es decir: el área de la base B es un triángulo el cual conocemos las medidas de los lados 8m 4m y 10m respectivamente. Entonces por medio de la fórmula de Herón, calculamos el área de B. Hallemos, primero el semiperimetro (S) de la base:

$$S=\frac{P}{2}=\frac{8m+4m+10}{2}=\frac{22m}{2}=11m \text{ así } a=8,\ b=4,\ c=10$$

$$B=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\sqrt{11m(11m-8m)(11m-4m)(11m-10m)}$$

$$B=\sqrt{11m(3m)(7m)(1\ m)}=\sqrt{231m^4}=\sqrt{21m^2},$$

Luego el área superficial total se usa, el perímetro P =22m y la altura h=14md

$$A_T=A_L+2B=p.h+2B=(22\,m)(14\,m)+2\sqrt{231}\,m^2$$

$$A_t=380\,m^2+2\sqrt{231}\,m^2=(308+2\sqrt{231})\,m^2\approx 338{,}39\,m^2$$

b. Para calcular el volumen se multiplica el área de la base B por la altura h, así:

$$V=B.h=(308+2\sqrt{231})\,m^2\times(14\,m)$$

$$V=(308+2\sqrt{231})(14)\,m^3=(4312+28\sqrt{231})\,m^3$$

$$V=4737{,}56\,m^3$$

3.9. Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los dos catetos. Si el triángulo rectángulo tiene catetos de longitudes a y b , y la medida de la hipotenusa es c , se tiene que:

$$a^2+b^2=c^2$$

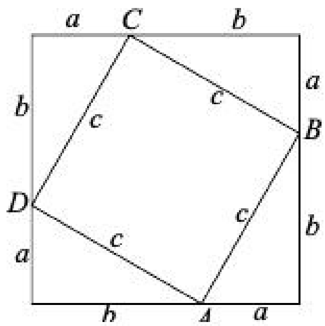
Una demostración geométrica del teorema de Pitágoras, es comparando las siguientes áreas.

A= $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ y (2) $A=c^2+\frac{4ab}{2}$

Igualando las expresiones (1) y (2) se tiene:

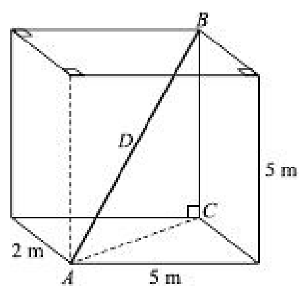
$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$, así, $a^2 + b^2 = c^2$

El teorema de Pitágoras es importante para ha-cer análisis geométrico en diferentes áreas del conocimiento. Por esto la comprensión y destreza en su manejo es de vital importancia, particularmen-te en el estudio de los fenómenos físicos. El Teorema de Pitágoras tiene más de mil demostraciones las cuales han sido clasificadas en cuatro grandes grupos que son: algebraicas, geométricas, dinámicas y cuaterniónicas.



Ejemplo 2

Dado el siguiente prisma recto de base rectangular, hallar la medida de la distancia de $\overline{AB} = D$.



Solución:

Primero hallamos la distancia $\overline{AC}$, utilizando el Teorema de Pitágoras:

$$(5m)^2 + (2m)^2 = (\overline{AC})^2$$
$$25m^2 + 4m^2 = (\overline{AC})^2$$
$$29m^2 = (\overline{AC})^2$$
$$\sqrt{29}\, m = \overline{AC}$$

Aplicando otra vez el teorema de Pitágoras tenemos:

$$D^2 = (\overline{AC})^2 + (5m)^2$$
$$D^2 = (\sqrt{29}m^2) + 25m^2$$
$$D^2 = 29m^2 + 25m^2$$
$$D^2 = 54m^2$$
$$D = \sqrt{54}\, m$$
$$D = 3\sqrt{6}\, m$$

3.2. Ejercicios

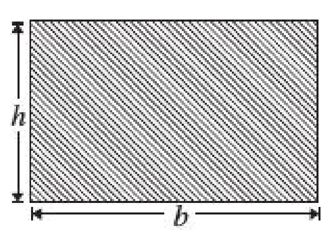
1. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 125*cm* y la proyección de un cateto sobre ella es de 40*cm*. Calcular la medida de:
   a. Los catetos
   b. La altura relativa a la hipotenusa
   c. El área del triángulo

2. Calcular los lados de un triángulo rectángulo si la proyección de uno de los catetos, sobre la hipotenusa es de 10 *cm* y la altura relativa a la misma es de $\sqrt{20}$ *cm*.
3. Una escalera de 8*m* de longitud está apoyada sobre una pared. El pie de la escalera dista 5*m* de la pared. ¿Qué altura alcanza la escalera sobre la pared?
4. Calcular el área de un triángulo inscrito en una circunferencia que tiene un radio de $\sqrt{8}\,cm$.
5. Calcular el área de un cuadrado inscrito en una circunferencia que tiene una longitud de $2\sqrt{123}$ *cm*.
6. En un cuadrado de $\sqrt{3}$ *m* de lado se inscribe un círculo. Hallar el área comprendida entre el cuadrado y el círculo.
7. Calcular el área de una corona circular determinada por las circunferencias inscrita y circunscrita a un cuadrado que tiene una diagonal de $2\sqrt{2}$ *m*.
8. El perímetro de un trapecio isósceles es de 20*m* si las bases miden 8 *m* y 5 *m* respectivamente, calcular la longitud de los lados no paralelos y el área.
9. Se inscribe una circunferencia en un hexágono regular de *10cm* de lado. Hallar él área comprendida entre el hexágono y la circunferencia.
10. En una circunferencia una cuerda mide 100*cm* y dista 20*cm* del centro. Calcular el área del círculo y la longitud de la circunferencia.
11. Sobre un círculo de 10 cm de radio se traza un ángulo central de 45°. Hallar el área del segmento circular comprendido entre la cuerda que une los extremos de los dos radios y su arco correspondiente.
12. Se inscribe un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 30*cm* y 36*cm* en una circunferencia, si la hipotenusa del triángulo coincide con el diámetro de la circunferencia, calcular el área del círculo y la longitud de la circunferencia.

3.10. POLÍGONOS

3.10.1. Área del rectángulo

El área del rectángulo es igual al producto de la medida de su base por su altura, es decir; $Área = A = b \cdot h$



3.10.2. Área del paralelogramo

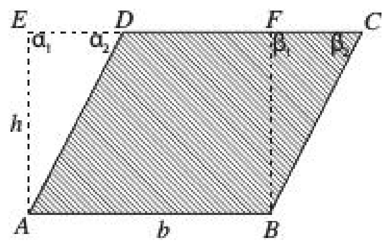
En el paralelogramo *ABCD* se trazan los segmentos perpendiculares $AE \perp AB$ y $BF \perp DC$, formando un rectángulo *ABFE*; también se forman los triángulos ΔADE y *DBCF* donde se cumple que:

$$BC==AD$$

$$\angle\alpha=\angle\beta$$

$$\angle\alpha 1=\angle\beta 1=90^{\circ}$$

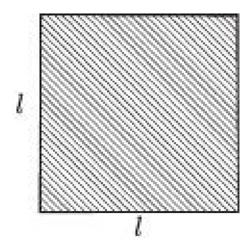
Así el $\Delta ADE=DBCF$, luego el área del paralelogramo es igual al área del rectángulo; es decir: Área$=A=b\cdot h$



3.10.3. Área del cuadrado

Si la medida de la base y de la altura en un rectángulo, son iguales, entonces el rectángulo se transforma en un cuadrado, donde su área es igual al cuadrado de la medida del lado *l*.

$$Área=A=l\cdot l=l^2$$



3.10.4. Área del triángulo

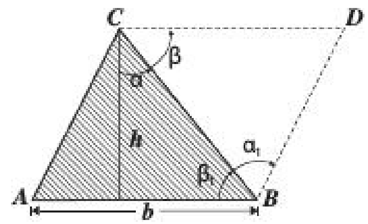
Sea el triángulo ΔABC, si se trazan paralelas a sus respectivos lados opuestos, se forma un paralelogramo *ABCD*.

En los triángulos ΔABC y ΔBDC se tiene: $CB=CB$ $\angle\alpha=\angle\alpha_1$; así en los triángulos ΔABC y ΔBDC se tiene que $\angle\beta=\angle\beta_1$ por alternos internos, luego los triángulos $\Delta ABC = \Delta BDC$.

El área del paralelogramo es dos veces el área del triángulo ΔABC es decir; Área$=2\Delta ABC$, entonces el área del triángulo ΔABC es:

$$\acute{A}rea\ \Delta ABC = \frac{A_{paralelogramo}}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$$

por lo tanto, $\acute{A}rea\ tri\acute{a}ngulo = \frac{b \cdot h}{2}$



3.10.5. Área del trapecio

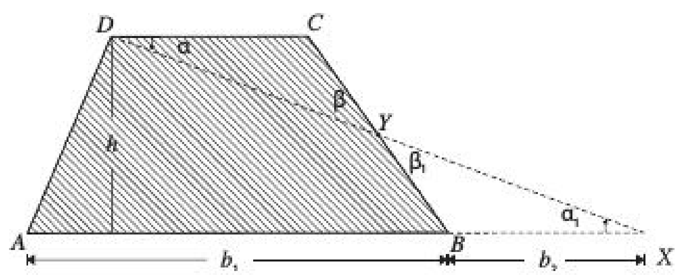
Sea el trapecio *ABCD*, prolongando *AB* y si *BX=DC* se tiene ΔAXD.

Se observa que el trapecio *ABCD* es equivalente al triángulo Δ*AXD*, ya que el cuadrilátero *ABYD* más el triángulo Δ*YCD* es igual al trapecio *ABCD*; donde Δ*YCD*=Δ*BXY* porque: *DC=BX*; $\angle\alpha=\angle\alpha_1$ y $\angle\beta=\angle\beta_1$.

Así el área del trapecio *ABCD=A*Δ*AXD*, de esta manera se tiene que:

$$ABCD = A\Delta AXD = \left(\frac{b_1+b_2}{2}\right) \cdot h$$

Es decir el área del trapecio es igual al semiproducto de la suma de las medidas de las bases por la medida de la altura.

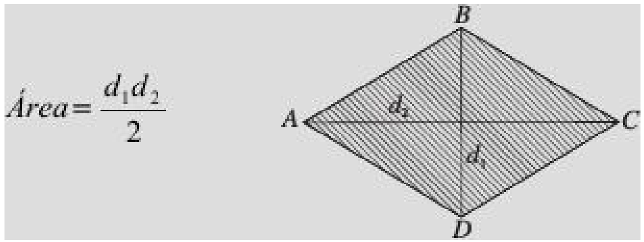


3.10.6. Área del rombo

Sea el rombo *ABCD*; si se trazan las diagonales se observa que el rombo es la unión de los triángulos Δ *ABC* y Δ *ADC*, los cuales son congruentes; se observa que el área del rombo es el doble del área de un triángulo:

$$\acute{A}rea\ del\ rombo = 2A\quad ABC = 2\left[\frac{d_2(d_1/2)}{2}\right] = \frac{d_1 d_2}{2}$$

Es decir el área del rombo es el semiproducto de las medidas de las diagonales:



3.10.7. Área del polígono regular

Un polígono es regular si tiene todos sus lados y ángulos iguales, y puede ser inscrito y circunscrito en una circunferencia. El centro del polígono coincide con el centro de la circunferencia y es equidistante de los vértices y lados del mismo. Si unimos los vértices de un polígono en forma consecutiva, dando solo una vuelta a la circunferencia, el polígono obtenido se llama *convexo*.

El *ángulo central* de un polígono regular es el que tiene como vértice el centro del polígono y sus lados pasan por dos vértices consecutivos. La medida en grados de un ángulo central es el resultado de dividir 360° entre el número de lados del polígono.

El *ángulo interior* de un polígono regular es el que está formado por dos lados consecutivos del polígono. Su medida es 180°, menos la medida del ángulo central correspondiente.

La *apotema* de un polígono regular es la medida del centro del polígono al punto medio de un lado.

El *perímetro* de un polígono regular es la suma de los lados del polígono regular. Y el *área* del polígono regular es el producto del semiperímetro por la apotema, que equivale a sumar las áreas de los triángulos que forman el polígono regular.

La siguiente figura es un polígono que se descompone en *n* triángulos isósceles congruentes que tienen de base *l* y altura *a*, que corresponden a las medidas del lado y la apotema del polígono.

Así el área del polígono regular es:

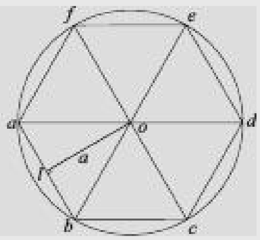
Apolígono regular = *(número de triángulos).(área del triángulo*

$$= n \cdot \left(\frac{l \cdot a}{2} \right) = \frac{(n \cdot l) \cdot a}{2} = \frac{p \cdot a}{2},$$

donde $p = n \cdot l$ es el perímetro del polígono.

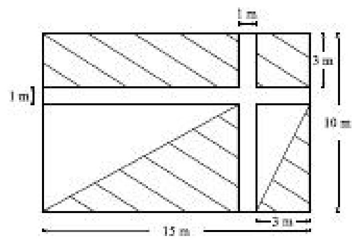
Es decir el área de un polígono regular es:

$$A_{polígono\ regular}=\frac{p \cdot a}{2}$$

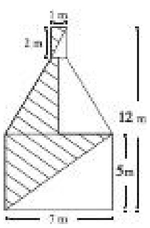


3.3. Ejercicios

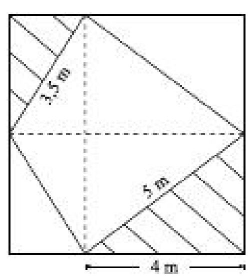
1. Calcular el área sombreada en la figura



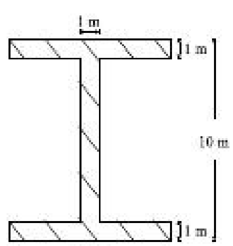
2. Calcula el área sombreada en la figura.



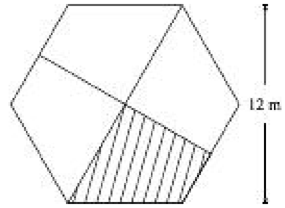
3. Calcula el área sombreada.



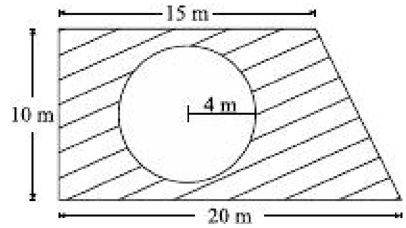
4. Calcula el área sombreada.



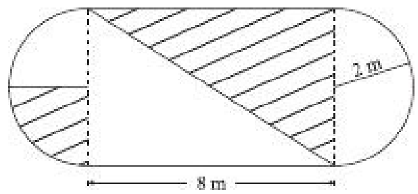
5. Calcula el área sombreada en la figura hexagonal.



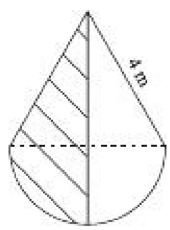
6. Calcula el área sombreada en la figura.



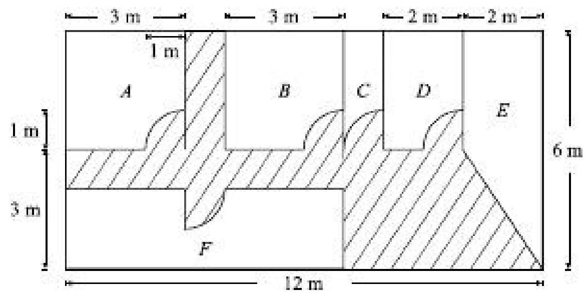
7. Calcula el área sombreada en la figura.



8. Calcula el área total sombreada, dado que el triángulo es equilátero y un lado coincide con el diámetro del semicírculo.



9. Calcula el área sombreada, la cual representa el espacio libre de un apartamento, con los espacios utilizados *A*, *B*, *C*, *D*, *E* y *F*.



3.11. Relaciones entre segmentos y apotemas en polígonos regulares

3.11.1. Hexágono regular inscrito en una circunferencia

Si se inscribe un hexágono regular en una circunferencia con centro en *O* y radio *r* se tiene que las medidas del lado *l* y la apotema *a* del polígono son:

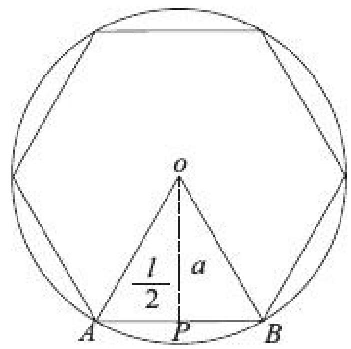
En el triángulo equilátero ΔABO se observa que:

l: *medida del lado del héxagono*

a: *apotema (altura del triángulo)*

Se tiene que el radio *r* de la circunferencia es igual al lado *l* del polígono, es decir: *r*=l

Además en el triángulo ΔAPO rectángulo en *P* se tiene:



$r^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + a^2$

$r^2 = \frac{l^2}{4} + a^2$, entonces $a^2 = r^2 - \frac{l^2}{4}$, es decir:

$a^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3}{4}r^2$, así $a = \frac{\sqrt{3}}{2}r$

3.11.2. Triángulo equilátero inscrito en una circunferencia

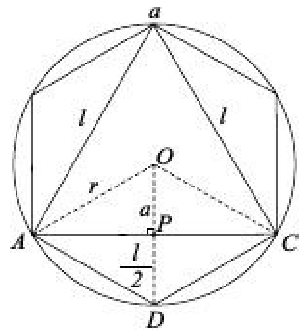
Si se inscribe un triángulo equilátero en una circunferencia con centro en *O* y radio *r* se tiene que las medidas del lado *l* y la apotema a son:

En la figura se observa que los segmentos, *OA*=*AD*=*DC*=*OC*=*r* y forman el rombo *OADC*, donde las diagonales *AC* y *OD* son perpendiculares y se cortan en sus puntos medios, así:

$OP = \frac{OD}{2}$, entonces $a = \frac{r}{2}$

Luego, en el triángulo ΔAPO rectángulo en *P* se tiene: $r^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + a^2$

$\left(\frac{l}{2}\right)^2 = r^2 - a^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3}{4}r^2$, luego $\frac{l^2}{4} = \frac{3}{4}r^2$, entonces $l = \sqrt{3}r$



3.11.3. Cuadrado inscrito en una circunferencia

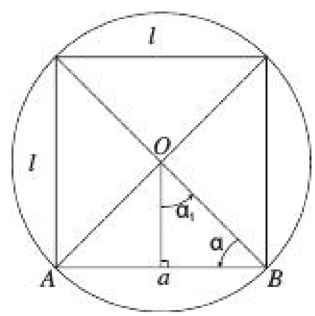
Si se inscribe un cuadrado en una circunferencia con centro en *O* y radio *r* se tiene que las medidas del lado *l* y la apotema a son:

En la figura se observa que el ángulo $\angle AOB=\frac{360°}{4}=90°$, así, el triángulo ΔAOB es rectángulo en O, donde la hipotenusa es el lado del cuadrado y sus catetos coinciden con el radio de la circunferencia, es decir:

$$l^2=r^2+r^2=2r^2\text{, entonces } l=\sqrt{2}r$$

Además el triángulo ΔAOB es isósceles, entonces haciendo $AO=OB$ se tiene:

$$a=\frac{l}{2}=\frac{\sqrt{2}r}{2}$$



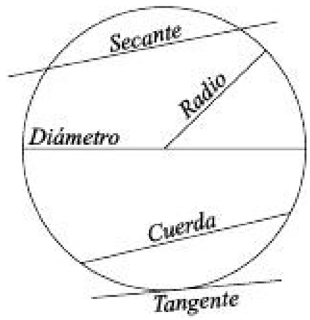
3.4. Ejercicios

1. Si el lado de un cuadrado inscrito en una circunferencia es igual a 10*cm*, calcular el lado del octágono inscrito en la misma circunferencia.
2. Calcular el lado del hexágono regular inscrito en una circunferencia de 15*cm*. de diámetro.
3. El lado de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia mide 5*cm*. Calcular el lado del cuadrado inscrito en la misma circunferencia.
4. Calcular la altura de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de 12 *cm*. de radio.
5. Si un hexágono inscrito en una circunferencia tiene 15*cm*. de medida por lado, calcular el valor del radio de la circunferencia en el que está inscrito.
6. Calcular el valor del lado de un pentágono regular inscrito en una circunferencia que tiene un radio de $\sqrt{8}\,cm$.

7. Si el lado de un octágono regular es igual a $5 cm.$, calcular el radio de la circunferencia a la que está inscrito.

3.12. Circunferencia y área del círculo

El círculo está formado de una sucesión de puntos que están a la misma distancia de un punto llamado centro. En la siguiente figura se muestran algunos elementos en el círculo.



Radio: es un segmento con un extremo en el centro y otro en el círculo.

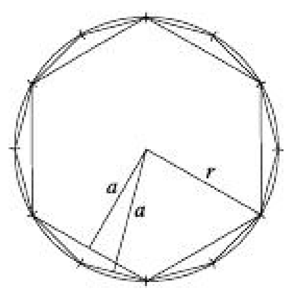
Diámetro: es una cuerda que pasa por el centro del círculo.

Secante: es una línea que interseca dos veces al círculo.

Tangente: es una línea que interseca al círculo en un solo punto y no lo cruza.

El círculo también se puede considerar como un polígono regular con un número infinito de lados, como se muestra en la siguiente figura.

En este proceso de aproximación indefinida de los polígonos al círculo, el perímetro de los polígonos tiende a la longitud de la circunferencia y las medidas de las apotemas a la del radio, es decir: $p \to 2\pi r$ y $a \to r$



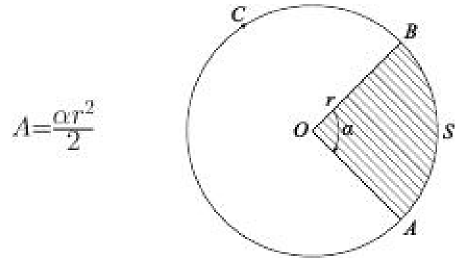
Así, el área del círculo es: $A_c = \dfrac{p \cdot a}{2} = \dfrac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$

Recordemos que la razón entre la longitud de la circunferencia $2\pi r$ y el diámetro es el número la irracional π=3,141592. . . , es decir $\frac{2\pi r}{2r} = \pi$ donde $\frac{2\pi r}{2r} = \frac{C}{d}$ que es la razón circunferencia sobre su diámetro.

3.12.1. Longitud de arco, área de un sector y de un segmento

Un sector de un círculo es la parte del círculo acotada por dos radios y su arco interceptado.

$\widehat{AB} = S$, donde S es la longitud de arco.



El arco está formado por un círculo de radio r y un ángulo central α en radianes y tiene una longitud de arco S que es:

$S = \alpha \cdot r$, entonces $\alpha = r$

Recordemos lo siguiente:

a. Si S=r se tiene que el ángulo α=1rad
b. Si S=$2\pi r$ se tiene que el ángulo $\alpha = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi rad$

Tenga en cuenta que $\widehat{AB}$ es el arco menor y $\widehat{ABC}$ es el arco mayor.

De acuerdo a lo anterior se tiene:

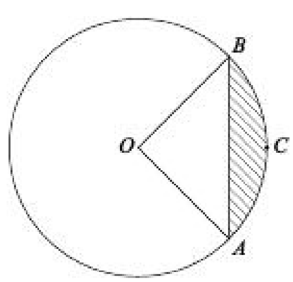
i. En un círculo de radio r; la longitud de arco S de medida es igual a $\frac{m}{360°}$ de la circunferencia del círculo, es decir:

$$S = \left(\frac{m}{360^\circ}\right)(2\pi r) = \frac{\pi m r}{180^\circ}$$

i. El área A_c de un sector de medida m° es igual a $\frac{m}{360°}$ del área del círculo, es decir:

$$A_c = \left(\frac{m}{360}\right)(\pi r^2) = \frac{m\pi r^2}{360}$$

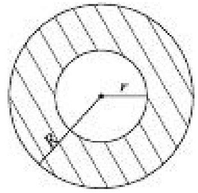
Un segmento de un círculo es una parte de un círculo acotada por una cuerda y su arco, como se muestra en la siguiente figura:



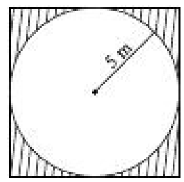
$\widehat{ACB}$, es el arco del segmento menor.

3.5. Ejercicios

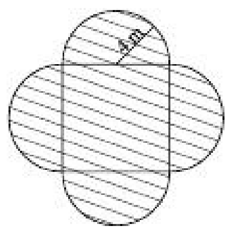
1. Hallar el área sombreada, si los radios miden r=2m y R=4m.



2. Hallar el área sombreada.

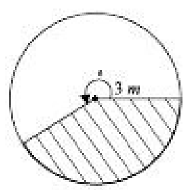


3. Hallar el área sombreada

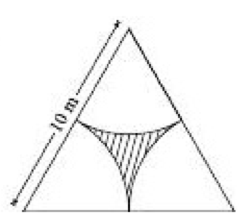


4. Hallar el sector sombreado,

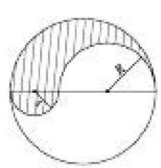
si $\theta = \dfrac{5\pi}{4}$



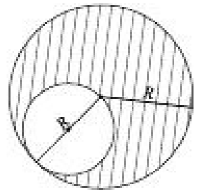
5. Hallar el área de la región sombreada en el triángulo equilátero de lado 10m.



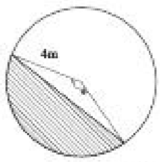
6. Calcular el área sombreada si r=3m.

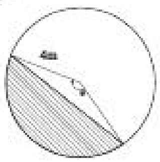


7. Calcular el área sombreada si R=16m.

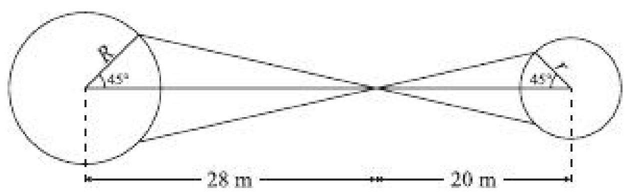


8. Hallar el área de los segmentos circulares.

a. 

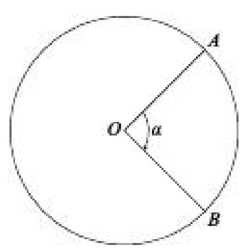
b. Si θ= 

9. Hallar la longitud de la banda que une las circuferencias si R =15m y r =10m



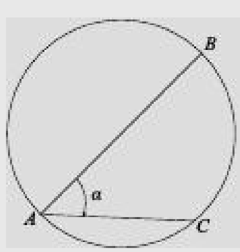
3.12.2. Medición de ángulos y arcos en un círculo

Si el vértice está en el centro del círculo se genera un ángulo central, que es igual a: $m(\ AB) = m(\alpha\ )$



Si el vértice está sobre el círculo se tiene:

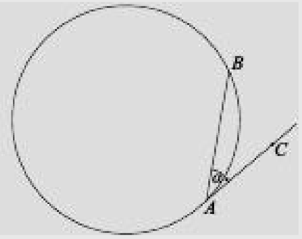
i. Un ángulo inscrito,que es igual a



$$m(\alpha)=\frac{m(\widehat{AB})}{2}$$

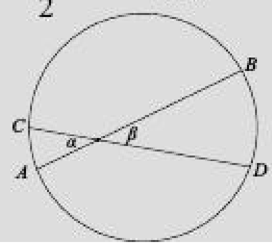
ii. Un ángulo formado por una cuerda y una tangente, que es igual a

$$m(\alpha)=\frac{(\widehat{AB})}{2}$$



Si el vértice está dentro del círculo se tiene un ángulo formado por dos cuerdas que se intersecan, y es igual a:

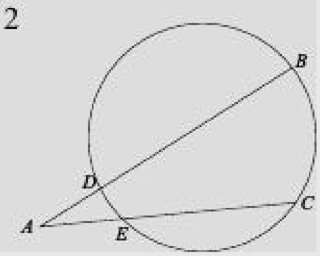
$$m(\alpha)=\frac{\widehat{AC}+\widehat{BD}}{2} \circ\ m(\alpha)=\frac{m(\alpha)+m(\beta)}{2}$$



Si el vértice está fuera del círculo se tiene:

i. Un ángulo formado por dos secantes, que es igual a

$$m(\alpha)=\frac{\widehat{BC}-\widehat{DE}}{2}$$



También se cumple que

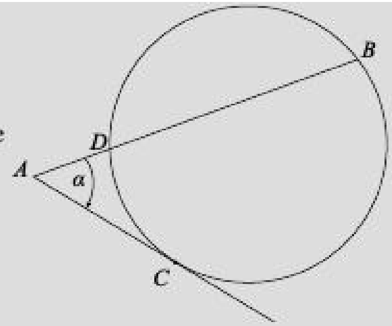
$$\overline{AB}\cdot\overline{AD}=\overline{AC}\cdot\overline{AE}$$

ii. Un ángulo formado por una secante y una tangente, que es igual a

$$m(\alpha)=\frac{\widehat{BC}-\widehat{DC}}{2}$$

También se cumple que

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}\cdot\overline{AD}$$



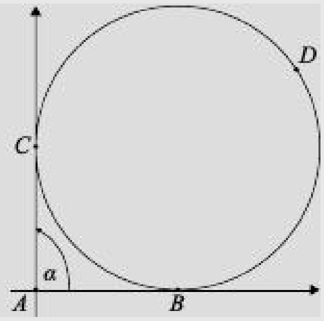
ii. Un ángulo formado por dos tangentes, que es igual a:

$$m(\alpha)=\frac{CDB-CB}{2}$$

o $m(\alpha)=180^{\circ}-m(\alpha)$

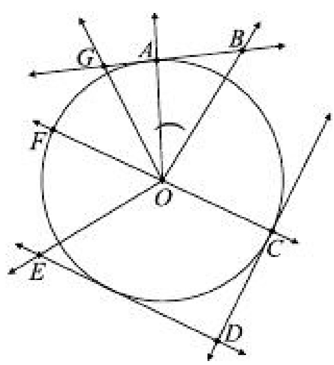
También se cumple que

$$\overline{AC}=\overline{AB}$$



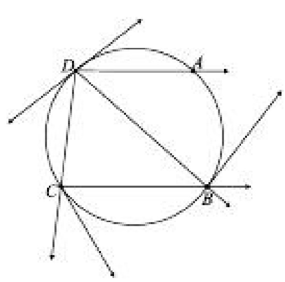
3.6. Ejercicios

1. Dado el círculo con los trazos de cuerdas, radios y diámetros, relacionados con los siguientes, hallar:

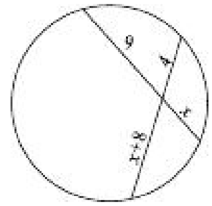


a. Los ángulos centrales
b. Los ángulos que tengan al menos un lado en una tangente.

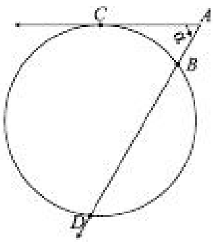
2. Hallar los ángulos inscritos:



3. Hallar el valor de x:

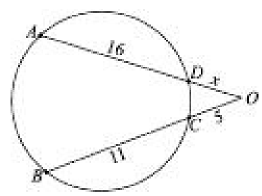


4. Hallar las mediadas del ángulo

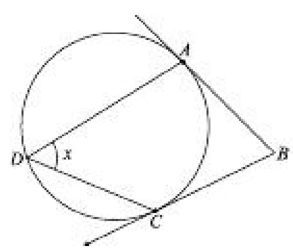


$\angle CAB=\alpha$, si $\widehat{BD}=\dfrac{3\pi}{4}$ y $\widehat{CD}=60°$

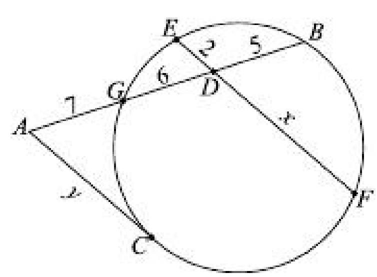
5. Hallar el valor de *x*:



6. Hallar el valor del ángulo $\angle$ABC; si $x=\dfrac{\pi}{3}$

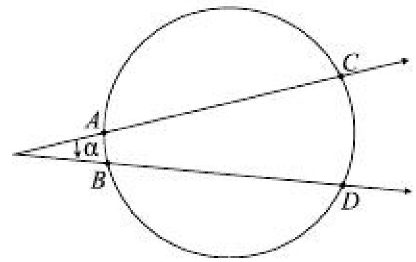


7. Hallar el valor de *x* e *y*, si $\overline{AC}$ es tangente al circulo



8. Hallar la medida del ángulo *α* si

$\widehat{AB} = 15°$ y $\widehat{CD} = \frac{\pi}{3}$



3.13. Áreas y volúmenes de sólidos

Geometría del espacio

La geometría del espacio es la rama de la geometría que se ocupa de las propiedades y medidas de las figuras geométricas en el espacio tridimensional o espacio euclídeo; entre estas figuras, también llamadas ***sólidos***, se encuentran el cono, el cubo, el cilindro, la pirámide, la esfera, el prisma, los poliedros regulares y otros poliedros.

La geometría del espacio amplía y refuerza las proposiciones de la geometría plana y es la base fundamental de la trigonometría esférica, la geometría analítica del espacio, la geometría descriptiva y otras ramas de las matemáticas.

3.13.1. Clasificación de sólidos

Poliedros

Un poliedro es un sólido limitado únicamente por un número finito de superficies planas que son regiones poligonales que cumple:

- El interior de dos regiones cualesquiera no se interseca.
- Cada lado de cualquiera de los polígonos, es también un lado de uno de los otros polígonos.
- La intersección de dos caras cualesquiera del poliedro es una arista.
- La intersección de dos aristas cualesquiera es un vértice del poliedro.

Un poliedro es *regular* si sus caras son polígonos regulares y sus ángulos poliedros son iguales. Existen exactamente cinco poliedros regulares que están limitados por triángulos equiláteros, cuadrados o pentágonos regulares; estos poliedros son: el tetraedro, hexaedro (cubo), octaedro, dodecaedro, icosaedro.

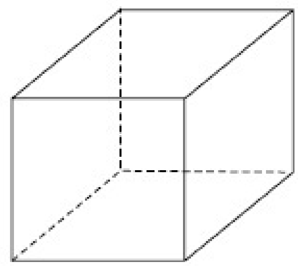
La fórmula de Euler para poliedros

Este es un resultado interesante y visualmente sorprendente. Si se tiene un poliedro regular o irregular, la fórmula de Euler indica que si C representa el número de caras del poliedro, A representa el número de aristas y V representa el número de vértices del poliedro entonces se cumple que: $C + V - A = 2$

Ejemplo 1

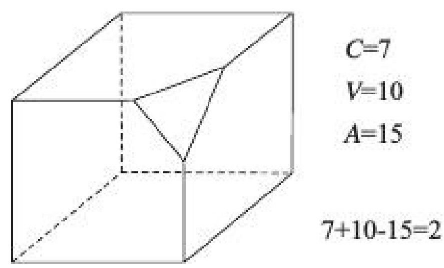
La siguiente figura es un cubo cualquiera donde: C = 6; V =8 *y* A=12

Se verifica fácilmente que $C + V - A= 2$ es decir: $C + V - A= 6 + 8 - 12 = 2$



Ejemplo 2

Si se realiza un corte en la esquina al cubo anterior se obtiene un nuevo poliedro irregular que cumple la misma relación entre sus caras, aristas y vértices.



De hecho no importa cuántos cortes se le apliquen y lo irregular de la forma final la igualdad anterior seguirá siendo válida. Este tipo de resultado puede ser útil para mejorar la capacidad visual y los procesos aritméticos en los estudiantes de los primeros niveles usando como estrategia didáctica la construcción y posterior corte de un poliedro, para que el estudiante verifique con algunos ejemplos la validez de la fórmula.

3.7. Ejercicio

1. Completar la siguiente tabla:

Poliedro	Caras C	Vértices V	Aristas A	$C+V-A=2$
Tetraedro				
Hexaedro				
Octaedro				
Dodecaedro				
Icosaedro				

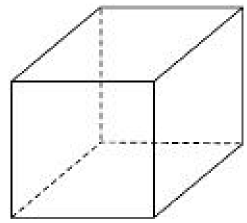
Existen otros tipos de poliedros que son figuras en el espacio conocidos: los prismas y las pirámides.

3.13.2. Áreas y volúmenes de prismas

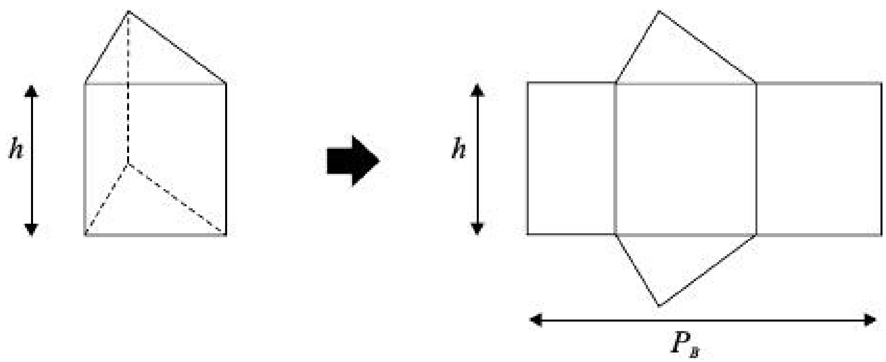
Definición: Un ***prisma*** es un poliedro que tiene dos caras paralelas, llamadas bases, las demás caras son paralelogramos, llamadas caras laterales del prisma. Un *paralelepípedo* es un prisma cuyas caras laterales son paralelogramos congruentes.

Ejemplo

Un *paralelepípedo* cuyas caras son cuadrados congruentes es un cubo.



A. Área del prisma



El desarrollo plano de un prisma recto está compuesto por un rectángulo y los dos polígonos que forman las bases. Uno de los lados del rectángulo coincide con el perímetro de la base, y el otro, con la altura del prisma.

El **área lateral** (área del rectángulo) es igual al perímetro de la base P_B por la altura h:

$$A_L = P_B \cdot h$$

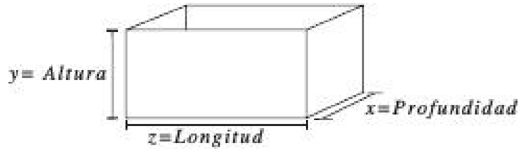
El **área total** es la suma del área lateral y el área de las bases B , es decir:

$$A_T = A_L + 2B; \;\; A_T = P_B \cdot h + 2B$$

B. Ortoedro

Un ortoedro es un paralelepípedo ortogonal, es decir, cuyas caras forman entre sí ángulos diedros rectos. Los ortoedros son prismas rectangulares rectos, y también son llamados paralelepípedos rectangulares. Las caras opuestas de un ortoedro son iguales entre sí. El cubo es un caso especial de ortoedro, en el que todos sus lados son cuadrados.

Si llamamos x al ancho, y a su altura y z a su longitud, se tienen las siguientes fórmulas para el volumen y el área:



El volumen del ortoedro se calcula, al igual que el de cualquier paralelepípedo, multiplicando el área de la base por la altura. Dado que la base es un rectángulo, y la superficie del rectángulo es igual al producto de sus lados, se puede calcular el volumen del ortoedro como:

$$V = x \cdot y \cdot z$$

Para calcular el área lateral del ortoedro se omiten las bases superior e inferior así:

$$A_L = 2x \cdot y + 2y \cdot z$$

También se puede calcular como el producto del perímetro de la base por la altura así:

$$A_L = P_B \cdot h = (2x + 2z) \cdot y$$

El área total del ortoedro es igual a la suma de las respectivas áreas de sus seis caras, que al estar repetidas dos a dos se pueden calcular como:

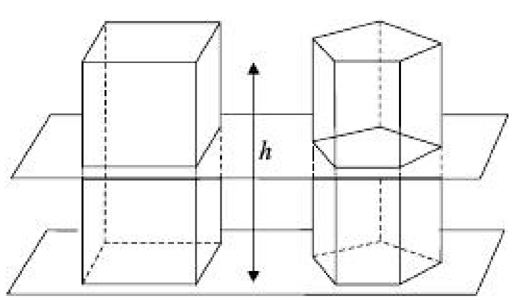
$$A_T = A_L + 2B;\ B = x \cdot z$$

$$A_T = A_L + 2B = 2x \cdot y + 2y \cdot z + 2x \cdot z$$

C. Volumen del prisma

Principio de Cavalieri: *"Si dos cuerpos tienen la misma altura y bases de igual área, y al cortarlos por cualquier plano paralelo a las bases, el área de las secciones es la misma, ambos tienen igual volumen".*

El **volumen de un prisma** de base cualquiera, por el principio de Cavalieri, será igual que el de un ortoedro con la misma sección, es decir, con la misma área de la base.

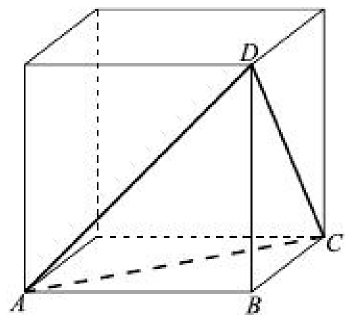


$$V = (\textit{área de la base}) \cdot (\textit{altura}) = B \cdot h$$

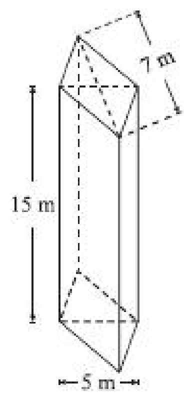
Si el prisma no es recto, su volumen, según el principio de Cavalieri, será el mismo que el del prisma recto con igual sección y altura. La única diferencia es que, en este caso, la altura no coincide con la arista lateral.

3.8. Ejercicios

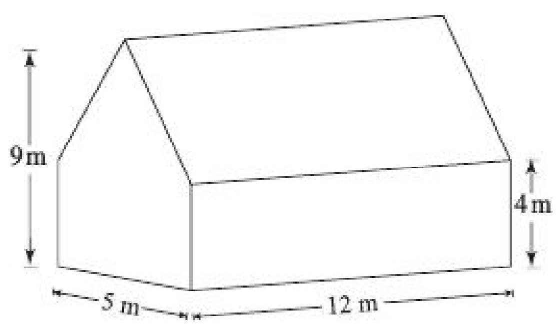
1. La figura es un cubo de 15 m de lado. Hallar el volumen de la pirámide ABCD.



2. Calcular el volumen del prisma recto

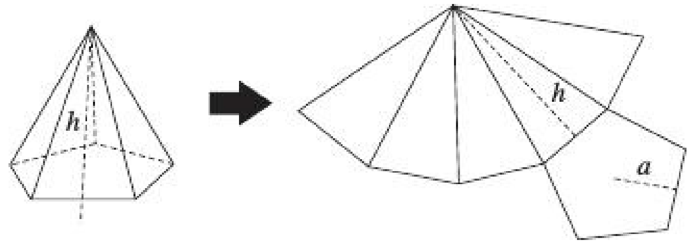


3. Calcular el volumen del sólido.



3.13.3. Áreas y volúmenes de pirámides

Definición: Una ***pirámide*** es un poliedro, que tiene por base un polígono de cualquier número de lados y por caras laterales triángulos que concurren en un mismo punto llamado vértice.



A. Área de una pirámide

El desarrollo de una pirámide recta está formado por el polígono de la base y tantos triángulos isósceles iguales como lados tenga la base. Una pirámide es regular si tiene por base un polígono regular y el pie de la altura *h* coincide con el centro de la base.

Su área lateral es la suma de las áreas de los triángulos, es decir:

$$A_L = \left(\frac{1}{2}h\right) \cdot (suma\ de\ lados\ de\ la\ base)$$

$$A_L = \left(\frac{1}{2}h\right) \cdot (perímetro\ de\ la\ base) = \frac{1}{2}h \cdot P_B$$

Para calcular el área total se suma el área lateral más el área de la base:

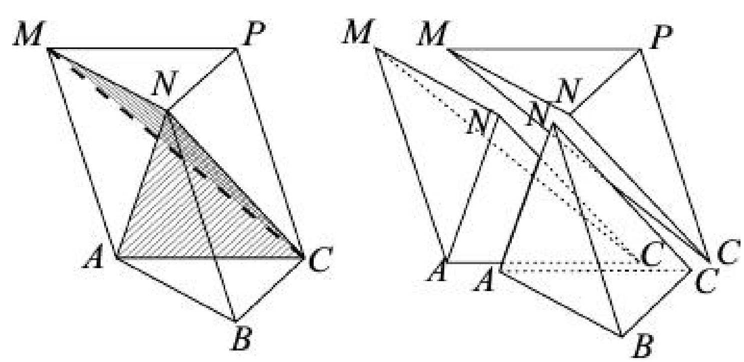
$$A_T = A_L + B$$

$$A_T = \frac{1}{2}h \cdot P_B + B$$

En el caso de que la pirámide no sea recta, al calcular el área lateral debemos tener en cuenta que la altura es distinta para cada cara, luego calculamos el área de cada una por separado.

B. Volumen de la pirámide

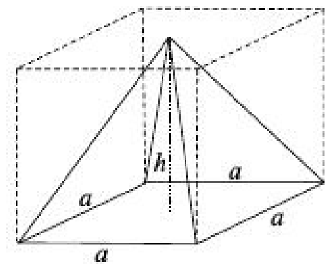
Sea el prisma pentagonal irregular oblicuo *ABCMNP*, trazando los planos *ANC* y *MNC*, el prisma queda formado por tres tetraedros que son: *ABCN*, *ACMN* y *MNPC*



Comparando los tetraedros *ABCN* y *MNPC*, y tomando a *N* como vértice se tiene: *ACMN* ≅ *MNPC*, son congruentes porque tienen como bases los triángulos ΔACM y ΔMCP, los cuales son iguales por ser mitades del paralelogramo *ACMP* y de igual altura; que es la distancia de *N* al plano *ACMP*. Así los tres tetraedros son equivalentes, es decir el volumen de una *pirámide triangular* es un tercio $\left(\frac{1}{3}\right)$ del volumen del prisma.

Sea V el volumen del prisma $ABCMNP$ dado por: $V=B\cdot h$; así el volumen de la pirámide es:

$$V=\frac{1}{3}B\cdot h$$

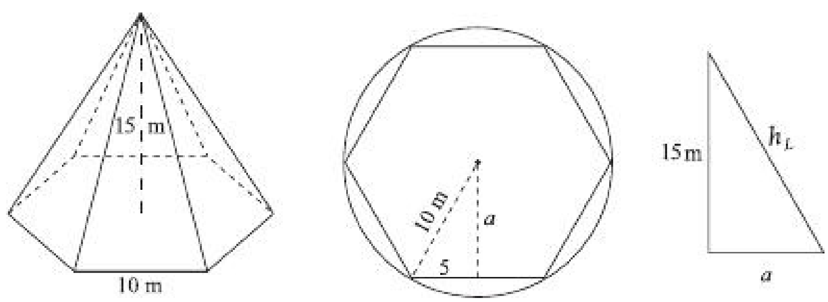


Ejemplo

Una pirámide regular tiene como base un hexágono cuyos lados miden 10 m. y su altura es de 15 m. Hallar el volumen y el área lateral de la pirámide.

Solución

Tratamos la pirámide, su base que es hexagonal y una vista lateral de una de sus caras laterales.



Para calcular el volumen, primero se encuentra el área de la base, que es un hexágono.

Calculamos el perímetro que es $6n = 6(10m) = 60\ m$

La apotema es $a^2=10^2-5^2$; $a=\sqrt{75}$; luego el área de la base es:

$$A=\frac{p.a}{2}=\frac{(60\,m)(\sqrt{75}\,m)}{2}=30\sqrt{75}=150\sqrt{3}\,m^2$$

Luego, el volumen es:

$$V=\frac{1}{3}A.h=\frac{1}{3}\times 150\sqrt{3}\,m^3=50\sqrt{3}\,m^3$$

Para calcular el área lateral de la pirámide, primero se encuentra la altura lateral h_L:

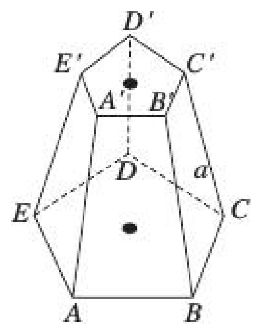
$$h_L^2=(15\,m)^2+a^2\ ;$$
$$h_L^2=225\,m^2+75\,m^2\ ;\ h_L=\sqrt{300}\,m$$

Luego el área lateral es:

$$A_L=\frac{1}{2}h_L\cdot p=\frac{1}{2}\sqrt{300}\,m\times 60\,m=30\sqrt{300}\,m^2=300\sqrt{3}\,m^2$$

C. Tronco de pirámide

El tronco de pirámide es un poliedro comprendido entre la base de la pirámide y un plano que corta a todas las aristas laterales. La distancia entre las bases es la altura del tronco. Un tronco de bases paralelas de una pirámide regular está formado por dos bases, polígonos regulares semejantes, y varias caras laterales que son trapecios isósceles. Las alturas de estos trapecios se llaman apotemas de dichos troncos.



El área lateral de un tronco de pirámide es:

Como las caras laterales del tronco de pirámide son trapecios se tiene:

$$A_L=\frac{(AB+A'B')}{2}\cdot a+\frac{(BC+B'C')}{2}\cdot a+\frac{(CD+C'D')}{2}\cdot a+\frac{(DE+D'E')}{2}\cdot a+\frac{(EA+E'A')}{2}\cdot a$$

$$A_L=\frac{1}{2}a(AB+A'B'+BC+B'C'+CD+C'D'+DE+D'E'+EA+E'A')$$

$$A_L=\frac{1}{2}a[(AB+BC+CD+DE+EA)+(A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+E'A')]$$

$$A_L=\frac{1}{2}a[P_1+P_2]$$

Donde P_1 y P_2 son perímetros de las bases del tronco de pirámide; B_1 y B_2 son las áreas de las bases. Luego el área total del tronco de pirámide es:

$$A_T=A_L+B_1+B_2=$$

$$A_T=\frac{1}{2}a[P_1+P_2]+B_1+B_2$$

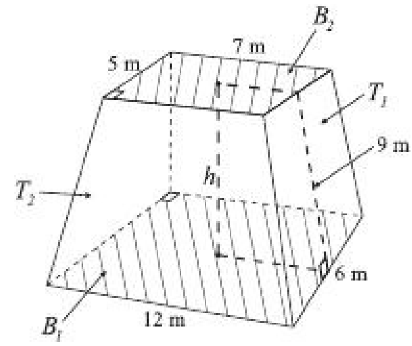
El volumen de un tronco de pirámide, cuyas bases son paralelas y tienen superficies B_1 y B_2 y cuya altura es h se calcula mediante la fórmula:

$$V=\frac{h}{3}\left(B_1+B_2+\sqrt{B_1\cdot B_2}\right)$$

Ejemplo

En la siguiente pirámide truncada calcular:

a. El área superficial total
b. El volumen, si la altura h=8m



Solución:

a) Calculamos primero el área de las bases B_1 y B_2

$B_1 = (12\,m)(6\,m) = 72\,m^2$ y $B_2 = (7\,m)(5\,m) = 35\,m^2$

Ahora calculamos las áreas de los trapecios T_1 y T_2, así:

$$T_1 = \frac{(5\,m + 6\,m)(9\,m)}{2} = \frac{(11\,m)(9\,m)}{2} = \frac{99\,m^2}{2} \text{ y}$$

$$T_2 = \frac{(7\,m + 12\,m)(9\,m)}{2} = \frac{(19\,m)(9\,m)}{2} = \frac{171\,m^2}{2}$$

El área lateral es:

$$A_L = 2T_1 + 2T_2 = 2\left(\frac{99\,m^2}{2}\right) + 2\left(\frac{171\,m^2}{2}\right) = 99\,m^2 + 171\,m^2$$

$A_L = 270\ m^2$, luego el área total A_T superficial es:

$A_T = A_L + B_1 + B_2 = 270\ m^2 + 72m^2 + 35\ m^2 = 377\ m$
2

Recuerde que el área lateral A_L, también se puede calcular por la formula; a=9m; P_1=36; P_2=24m

$$A_L = \frac{1}{2} a\,(P_1 + P_2) = \frac{1}{2}(9\,m)(36\,m + 24\,m) = \frac{1}{2}(9\,m)(60\,m)$$
$$A_. = 270\,m^2$$

b) Para calcular el volumen se tiene: h=8m

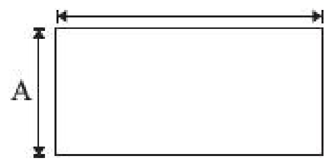
$$V = \frac{h}{3}(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1 \times B_2}) = \frac{8\,m}{3}(72\,m^2 + 35\,m^2 + \sqrt{(72\,m^2)(35\,m^2)})$$
$$V = \frac{8\,m}{3}(107\,m^2 + \sqrt{2520\,m^4}) = \frac{8\,m}{3}(107\,m^2 + \sqrt{2520}\,m^2)$$
$$V = \frac{8\,m}{3}(5371{,}35)\,m^2 \approx 14323{,}61\,m^3$$

3.13.4. Áreas y volúmenes de cilindros

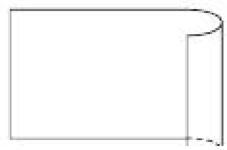
Definición: Una ***superficie cilíndrica*** es la que se genera por una recta llamada generatriz, que gira paralela a sí misma y que interseca a una curva plana fija llamada directriz.

A. Cilindro circular recto

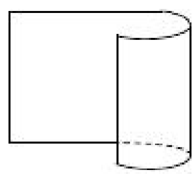
Es un sólido geométrico limitado por una superficie cilíndrica y dos planos paralelos que intersecan a todas las generatrices. También puede considerarse el cilindro como generado por una revolución completa de un rectángulo alrededor de uno de sus lados, como se muestra en la figura.



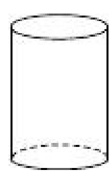
(A) Cartulina



(B) La cartulina comienza a enrollarse



(C) Cartulina semienrollada



(D) Cartulina enrollada en cilindro

El área lateral de un cilindro es el área de su superficie curva excluyendo el área de sus bases. En la figura anterior se ilustra un método experimental para determinar el área lateral de un cilindro circular recto.

B. Área lateral y total de un cilindro

La cartulina de longitud L y ancho A en la figura anterior se enrrolla alrededor del cilindro. La altura del cilindro es A y la circunferencia es L. El área lateral es la misma que el área original de la cartulina $L \cdot A$. Por tanto, el área lateral del cilindro se determina multiplicando su altura por la circunferencia de su base.

Escribiéndolo como fórmula, esto es: $A_L = L \cdot A = 2\pi r \cdot h$

El área total es la suma del área lateral, más dos veces el área de la base, es decir: $A_T = A_L + 2B = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h+r)$

C. Volumen del cilindro

Si se tiene un cilindro de altura *h* y como la base de un cilindro es un círculo, entonces para determinar su volumen se tiene que es el producto del área de la base por su altura.

$$V = (\text{área de la base}) \cdot (\text{altura}) = B \cdot h$$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi r^2 h$$

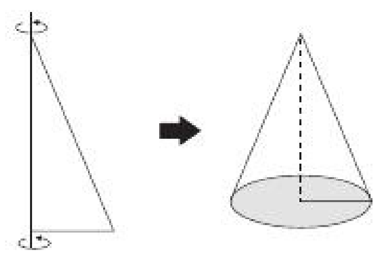
3.13.5. Áreas y volumenes de conos

Definición: Una superficie cónica es la que se genera por un triángulo rectángulo, al girar en torno a uno de sus catetos.

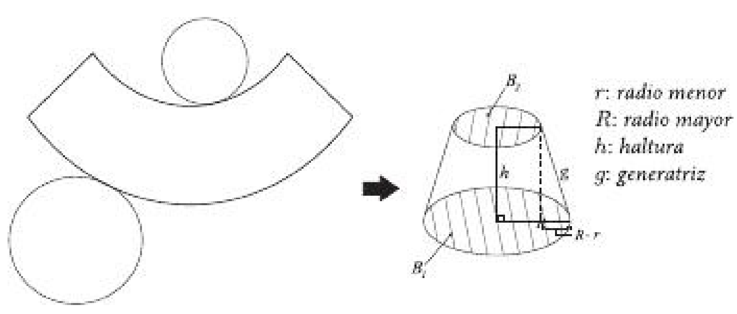
$$A_L = \pi \cdot r \cdot g;\ g \text{ es la generatriz}$$

$$A_T = A_L + B;\ A_T = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$$



3.13.6. Cono truncado



Por el teorema de Pitágoras se tiene que la generatriz es:

$$g^2 = h^2 + (R-r)^2;\ g = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$$

El área lateral del cono truncado es:

$$A_L = \pi (R+r) g$$

El área total es la suma del área lateral A_L más las áreas de las bases B_1 y B_2, así:

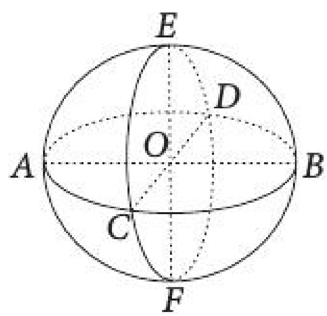
$$B_1=\pi R^2 \text{ y } B_2=\pi r^2$$
$$A_T=\pi[(R+r)g+R^2+r^2]$$

El volumen se calcula mediante la fórmula:

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot h\ (R^2+r^2+R\cdot r)$$

3.13.7. La esfera

Definición: Una ***esfera*** es una figura sólida en la cual todos los puntos de su superficie están a la misma distancia de su centro. En la siguiente figura el centro de la esfera es el punto *O*.



A. Partes de la esfera

i. **Radio.** El radio de una esfera es un segmento de línea recta que une el centro de la esfera con un punto de la superficie. Las líneas *AO, OB, OC, OD, OE* y *OF* en la figura son todos radios.
ii. **Diámetro.** El diámetro de una esfera es una línea recta que une dos puntos de la superficie pasando a través del centro de la esfera. Las líneas *AB, CD* y *EF* en la figura son diámetros.
iii. **Círculo máximo.** Es el círculo que se traza con radio igual al radio de la esfera. En la figura los círculos *AEBF, ACBD* y *CEDF* son círculos máximos.

B. Área de la superficie de la esfera

El área de la superficie de una esfera se calcula mediante la fórmula.

$$A=4\pi r^2$$

La fórmula para el área de la superficie de una esfera, también se puede expresar como el producto de la longitud de su circunferencia por su diámetro, es decir:

$$A = (Longitud\ de\ la\ circuferencia) \cdot (Diámetro)$$
$$A = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$$

C. Volumen de la esfera

El volumen de una esfera cuyo radio es *r* está dado por la fórmula:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

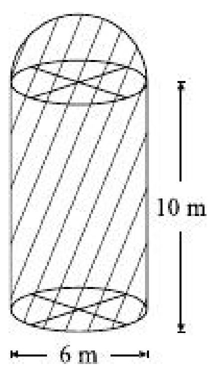
Ejemplo

Calcular el volumen encerrado por la figura.

Solución:

Para calcular el volumen se tiene, h=10m de altura del cilindro y r=3 que es el radio del cilindro que es igual al radio de la semiesfera.

Entonces el volumen sombreado es: Volumen del cilindro más el volumen de la semiesfera



$$V_c = \pi r^2 \cdot h \text{ y } V_{s\,esf} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2}$$

$$V_{sombreado} = V_c + V_{s\,esf}$$

$$V = \pi(3)^2(10) + \frac{2}{3}\pi(3)^3$$

$$V = 90\pi + 18\pi$$

$$V = 108\pi\ m^3$$

Ejemplo

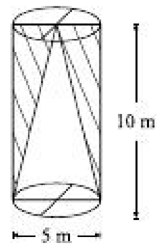
Calcular el volumen sombreado en la figura.

Solución:

Para calcular el voluimen se tiene h=10 altura del cilindro y r=2.5 radio del cilindro que es igual al medio del cono.

La altura del cilindro tambien coincide con la altura del cono.

El Volumen sombreado es: Volumen del cilindro menos el volumen del cono



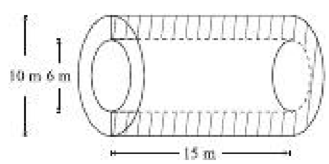
$$V_c=\pi r^2\cdot h$$
$$V_{cono}=\frac{\pi r^3 h}{2}$$
$$V_{sombreado}=V_c-V_{cono}$$
$$V_{cono}=\pi(2.5)^2\cdot(10)-\frac{\pi(2.5)^2\cdot(10)}{3}$$
$$V=\frac{125}{2}\pi-\frac{125}{6}\pi$$
$$V=\frac{375\pi-125\pi}{6}=\frac{250\pi}{6}=\frac{125\pi}{3}m^3$$

Ejemplo

Calcular el volumen sombreado en la figura**.**

Solución:

Para calcular el volumen se tiene h=15m es la altura de los cilindros r=3m es el radio del cilindro interno y R=15m es el radio del cilindro externo.



Entonces el volumen sombreado es: Volumen del cilindro externo menos el volumen del cilindro interno

$$V_e=\pi R^2\cdot h \text{ volumen del cilindro}$$
$$V_i=\pi r^2\cdot h \text{ volumen del cilindro}$$
$$V_{cono}=\frac{\pi r^3 h}{2}$$
$$V_{sombreado}=V_e-V_i$$
$$V_{cono}=\pi(5)^2\cdot(15)-\pi(3)^2\cdot(15)$$
$$V=375\pi-135\pi$$
$$V=240\pi\ m^3$$

3.9. Ejercicios

1. Calcular el volumen de una caja en metros cúbicos, que tiene 500 *cm* de largo, 450 *cm* de ancho y 210 *cm* de alto.
2. Una piscina tiene de largo 12 *m*, de ancho 5.5 *m* y de profundidad 160 *cm*. Se enchapa por dentro a razón de 40 dólares el metro cuadrado.
    a. Cuántos litros de agua se necesitan para llenar la piscina.
    b. Cuál es el costo total para enchapar la piscina.

3. En una bodega de dimensiones 10 *m* de largo, 6 *cm* de ancho y 4 *m* de alto, se almacenan cajas de 20 *dm* de largo, 12 *dm* de ancho y 8 *dm* de alto. ¿Cuántas cajas se pueden almacenar?
4. Un cilindro tiene una altura de la misma longitud que la circunferencia de la base, si su altura mide 200 *cm* calcular el área total y el volumen.
5. Calcular la cantidad de lámina de acero que se necesita para hacer una canoa de forma cilíndrica de 3 *m* de diámetro y 8 *m* de altura.
6. Una cúpula de una iglesia tiene la forma semiesférica de diámetro 30 *m*. Si la restauración tiene un costo de 800 dólares el metro cuadrado m^2, ¿a cuánto ascenderá el costo total de la restauración?
7. Un tanque cilíndrico de 2 *m* de diámetro y 5 *m* de altura se llena de agua. Si la masa del tanque lleno es de 2*kg*, ¿cuál es la masa del tanque vacío?
8. Se realizan 5 gorros de forma cónica con una tela especial. Cuánta tela se requiere, si las dimensiones del gorro son de 0,2 *m* de diámetro y de 0,30 *m* generatriz.
9. Si en un cubo de 30 *cm* de arista se llena de agua, calcular el volumen de agua que queda en el cubo, después de introducir una esfera de 10 *cm* de radio.
10. Calcular el área y el volumen de un tetraedro de 50 *cm* de arista.
11. Si un cubo tiene una arista de 5 *m* calcular:
    a. La medida de la diagonal
    b. El área lateral
    c. El área total
    d. El volumen

12. Si se tiene un prisma de altura *30 cm*, cuya base es un rombo de diagonales 20 *cm* y 25 cm calcular:
    a. El área lateral
    b. El área total
    c. El volumen

13. Si se tiene una pirámide de base cuadrada de 50 *cm* de arista lateral y 30 *cm* de altura calcular:
    a. El área lateral
    b. El área total
    c. El volumen

14. Si en un cono la generatriz mide 12 *cm* y el diámetro de la base 12 *cm* calcular:
    a. El área lateral
    b. El área total
    c. El volumen

15. Si se tiene un tronco de pirámide cuadrangular de aristas básicas 12 *cm* y 18 *cm*, y de arista lateral 25 *cm*, calcular:
    a. El área lateral

b. El área total
c. El volumen

16. Si en un cono la altura mide 2 *m* y el diámetro de la base mide 0,5 *m*, calcular:
    a. El área lateral
    b. El área total
    c. El volumen

17. Si se tiene un tronco de cono cuyos radios miden 15 *cm* y 20 *cm*, y una altura 10 *cm*, calcular:
    a. El área lateral
    b. El área total
    c. El volumen

18. Si se tiene un tronco de cono cuyos radios miden 5 *cm* y 8 *cm* respectivamente y la generatriz mide 20 *cm*, calcular:
    a. El área lateral
    b. El área total
    c. El volumen

19. Si se tiene una esfera inscrita en un cilindro, donde el diámetro ($2r$) de la esfera coincide con la altura (h) del cilindro, calcular el volumen que está entre el cilindro y la esfera.
20. Se tiene una esféra de radio 10 *cm* dentro de un cilindro circular recto, donde el diámetro de la esfera coincide con la altura del cilindro. calcular el volumen que está entre el cilindro y la esfera.

Capítulo 4

Geometría Analítica

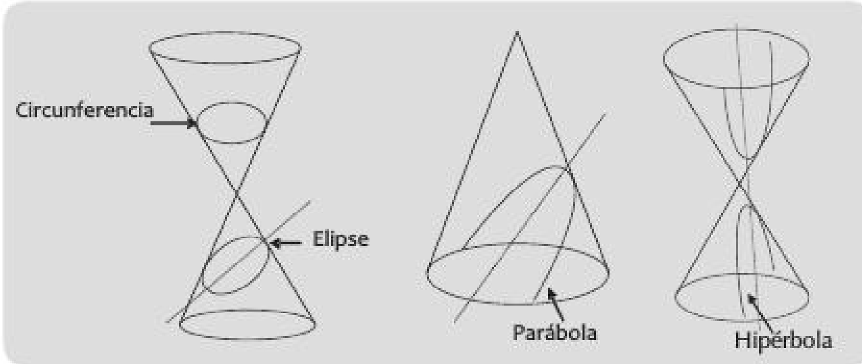
Objetivos

- Identificar la definición, gráficas y elementos característicos de las cónicas: parábolas, elipses e hipérbolas.
- Obtener los elementos geométricos de las cónicas a partir de sus ecuaciones estándar.
- Deducir las ecuaciones estándar de las cónicas a partir de las características geométricas.
- Determinar las características de las cónicas a partir de sus ecuaciones y aplicar estos conceptos a la resolución de problemas.
- Identificar las ecuaciones de segundo grado de las cónicas, manejando la traslación de ejes y su representación gráfica.

Definición: Las **secciones cónicas** o simplemente **cónicas** son curvas que se obtienen de la intersección de planos con la superficie del cono circular recto, denominadas: **circunferencia, parábola, elipse e hipérbola**.

Fueron los griegos cerca del año 350 quienes estudiaron con más pasión este tema, uno de los primeros fue Apolonio de Perga (262-190 a.C.) quien dio estos nombres, en 1609 Kepler comprobó que la órbita de los planetas alrededor del Sol es elíptica, uno de cuyos focos es el Sol y el radio vector que va del Sol a un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

En la actualidad con la ayuda de la computadora puede lograrse una vista de cada una de estas curvas al intersecar un cono circular recto con un plano con diferente ángulo de inclinación, tal como se ilustra a continuación.

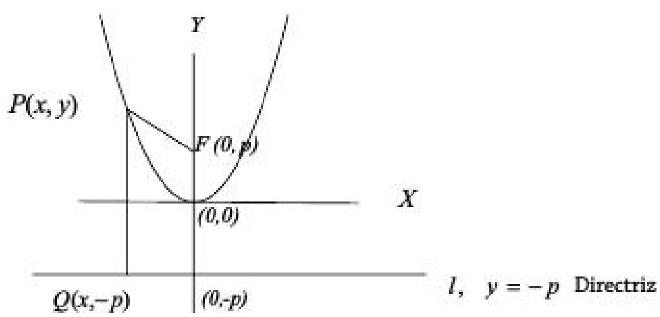


4.1. LA PARÁBOLA

Comenzamos el estudio de las cónicas con la parábola la cual tiene una definición a partir de la cual se deducen ecuaciones llamadas canónicas con las que será fácil identificarla y diferenciarla de las otras cónicas.

Definición: *La parábola es el lugar geométrico dado por los puntos P(x,y) del plano tales que la distancia a un punto fijo es igual a la distancia a una recta fija, el punto fijo no puede estar sobre la recta de la que se habla.*

El punto fijo se llama foco y la recta fija se denomina directriz, llamemos F al foco y l la directriz. La recta sobre la cual está F y perpendicular a l se denomina eje de la parábola, el punto medio sobre el eje entre el foco y la directriz corresponde al vértice de la parábola, consideramos la parábola con Vértice V (0,0), foco F $(0,p)$ y directriz l con ecuación $y=-p$.



Aplicando la definición tenemos: $\overline{QP}=\overline{PF}$

Según la definición de distancia entre dos puntos del plano tenemos,

$$\sqrt{(x-x)^2+(y+p)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}$$

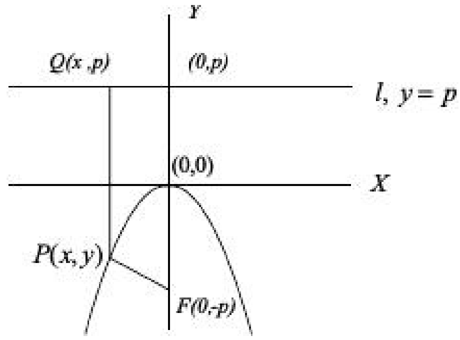
Elevamos al cuadrado en ambos miembros de la igualdad eliminando así los radicales y se obtiene: $(y+p)^2=x^2+(y-p)^2$

Desarrollando los binomios, $y^2+2py+p^2=x^2+y^2-2py+p^2$

Simplificando los términos semejantes obtenemos $4py=x^2$

Lo cual confirma nuestra afirmación anterior.

La ecuación anterior se obtuvo tomando los puntos sobre la parte superior al eje X, es decir, cuando $y \geq 0$, ¿qué pasa si se hace el análisis para puntos $P(x,y)$ con $y<0$? consideramos entonces el vértice sobre (0,0)el foco en $(0,-p)$ y la directriz la recta $y=p$.



Aplicando nuevamente la definición: $\overline{QP} = \overline{PF}$

$$\sqrt{(x-x)^2 + (p-y)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y+p)^2}$$

Siguiendo el proceso similar al caso anterior se llega a $-4\,p\,y = x^2$

De lo cual concluimos que para $p < 0$ la parábola abre hacia la parte inferior del eje X. Del análisis anterior se obtiene el siguiente teorema:

Teorema 1

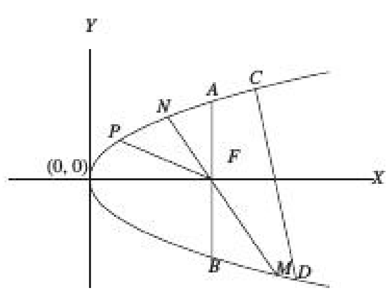
La *ecuación de la parábola con eje Y, vértice en el origen* (0,0) es $4py=x^2$

El foco es el punto $(0,p)$ y la directriz la recta con ecuación $y=-p$, la parábola abre hacia arriba si $p>0$ y hacia abajo si $p<0$.

Si el eje de la parábola es el eje X el vértice el origen (0,0) el foco $(p,0)$ se tiene la ecuación $4px=y^2$

La directriz en este caso tiene por ecuación $x=-p$, si $p>0$ la parábola abre hacia la derecha y si $p<0$ la parábola abre hacia la izquierda.

Otras componentes



AB = Lado recto, la longitud del lado recto es $|4p|$ como en el foco $y=p$ reemplazando en la ecuación $4py=x^2$, se obtiene $4p^2=x^2$, de la cual $x=\pm 2p$ y por tanto el lado recto es $2|\pm 2p|=4p$

CD = Cuerda, recta que une dos puntos de la parábola.

NM = Cuerda focal, recta que une dos puntos de la parábola y pasa por el foco.

PF = radio focal o radio vector

Ejemplo 1

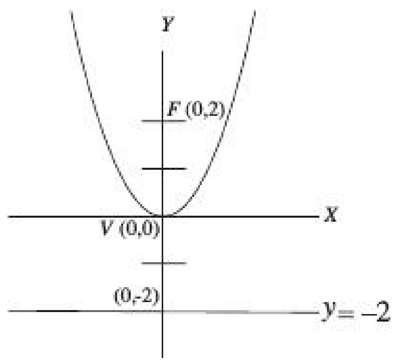
Una parábola cuyo vértice está en el origen tiene como directriz la recta y=–2, halle la ecuación de la parábola, coordenadas del foco, trazar la gráfica y halle la longitud del lado recto.

Solución

Como el vértice de la parábola es el origen (0,0) y la directriz la recta y=–2, significa esto que el foco tiene coordenadas (0,2) es decir, el eje de la parábola es el eje Y, la ecuación es $4py=x^2$

En este caso p=2>0, es decir $4p$=4(2)=8 la ecuación toma la forma $8y=x^2$

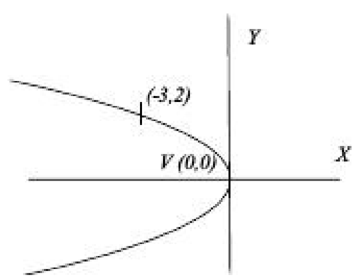
Además, la parábola abre hacia la parte superior del eje Y la gráfica es entonces



La longitud del lado recto es $|4p|=|4(2)|=|8|=8$

Ejemplo 2

Para la parábola que se muestra en la figura hallar la ecuación, coordenadas del foco, ecuación de la directriz y longitud del lado recto.



Solución

Según la grafica el vértice es (0,0) el eje es el eje X se tiene que la ecuación es de la forma $-4px=y^2$

Como el punto (-3, 2) pertenece a la parábola, este punto debe satisfacer la ecuación, es decir:

$$4p(-3)=(2)^2 \Rightarrow -12p=4 \Rightarrow p=-\frac{1}{3}$$

Por tanto, la ecuación es la siguiente:

$$y^2=4\left(-\frac{1}{3}\right)x$$
$$y^2=-\frac{4}{3}x$$

Observamos que $p=-\frac{1}{3}<0$ corresponde a lo afirmado en el Teorema, es decir, como la parábola abre hacia la izquierda $p<0$.

Las coordenadas del foco son $\left(-\frac{1}{3},0\right)$, luego la directriz tiene por ecuación $x=\frac{1}{3}$. La longitud del lado recto es:

$$|4p|=\left|4\left(-\frac{1}{3}\right)\right|=\left|-\frac{4}{3}\right|=\frac{4}{3}$$

4.1. Ejercicios

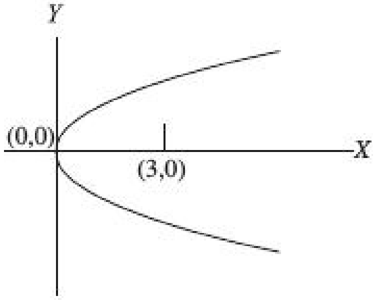
En los ejercicios del 1 al 6 halle las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto para la ecuación dada graficar en cada caso:

1. $12x=y^2$
2. $x^2+8y=0$
3. $y^2+9x=0$
4. $x^2+14y=0$
5. $3y^2+5x=0$
6. $12y^2+12x=0$
7. Hallar la ecuación para la parábola con vértice (0,0) *foco el punto* (p,0) *y eje* X, comprobar que es de la forma $4px=y^2$.
8. Hallar una ecuación para la parábola con vértice el origen y foco el punto (2,0) graficar.
9. Hallar la ecuación de la parábola con vértice el origen y foco (–3,0).
10. Hallar la ecuación de la parábola con vértice (0,0) y foco el punto (0,3).
11. Hallar la ecuación de la parábola con directriz $y–3=0$ y vértice en el origen.
12. Hallar la ecuación de la parábola con directriz $x+3=0$ y vértice en el origen, graficar.
13. Para una parábola con vértice el origen, eje X y pasa por el punto (–2,4), hallar coordenadas del foco, directriz, longitud del lado recto y graficar.
14. Utilizando la definición hallar la ecuación de la parábola en cada caso:
    a. Foco (2,3), directriz $x+2=0$
    b. Foco (3,–5), directriz $y=1$
    c. Vértice (0,3), foco (0,0)

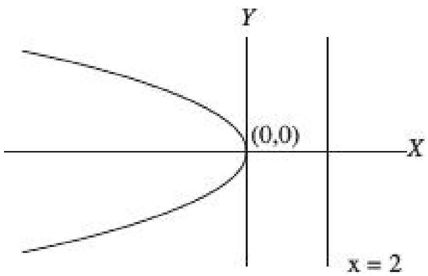
15. Hallar la longitud del radio vector de la parábola $y^2–12x=0$ cuya ordenada es igual a 6.

En los ejercicios 16 a 19 hallar la ecuación de la parábola

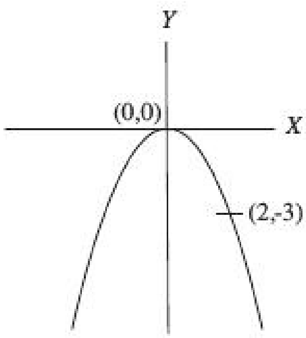
16.



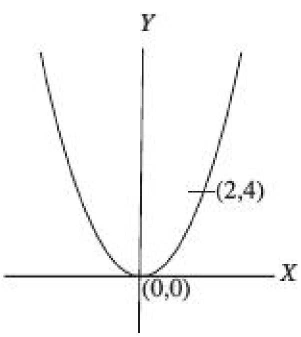
17.



18.



19.



4.1.1. Ecuación de la parábola de vértice (h,k)

En la sección anterior consideramos la ecuación de la parábola con vértice el origen coordenado, sin embargo no es el único caso, puesto que muchas parábolas tendrán como vértice un punto diferente al origen digamos (h,k) y el eje será paralelo a uno de los ejes coordenados.

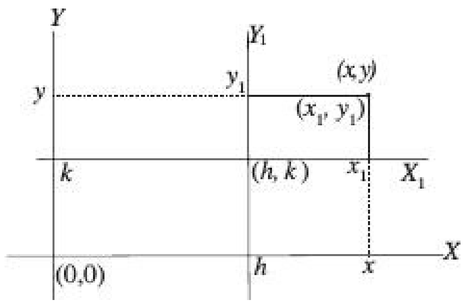
Estas ecuaciones corresponden a una traslación del sistema coordenado X e Y, llamemos X_1 e Y_1 el nuevo sistema con origen (h,k), la ecuación obtenida para vértice (0,0) y eje Y foco $(0,p)$ fue

$$4py=x^2 \tag{1}$$

En nuestro nuevo sistema sería:

$$4py_1 = x_1^2 \tag{2}$$

Pero realmente necesitamos expresarla en el sistema original *X* e *Y* consideramos y analizamos el siguiente diagrama que no es más que una traslación del sistema original al origen (h, k):



Se observa entonces que:

$$x = h + x_1 \Rightarrow x - h = x_1$$

$$y = k + y_1 \Rightarrow y - k = y_1$$

Reemplazando en la ecuación (2) se tiene la ecuación

$$(x–h)^2=4p(y–k)$$

El resultado del análisis anterior conduce al teorema:

Teorema 2

La ecuación de la parábola con vértice el punto (h,k) y eje paralelo al eje X, tiene la forma $(y–k)^2=4p(x–h)$

Siendo $|p|$ la longitud del segmento del eje comprendido entre el foco y el vértice. Si $p>0$, la parábola abre hacia la derecha, si $p<0$ la parábola abre hacia la izquierda. Si el eje es paralelo al eje Y se tiene la ecuación $(x–h)^2=4p(y–k)$

Si $p>0$ abre hacia arriba, si $p<0$ la parábola abre hacia abajo. La longitud del lado recto es $4p$.

Ejemplo

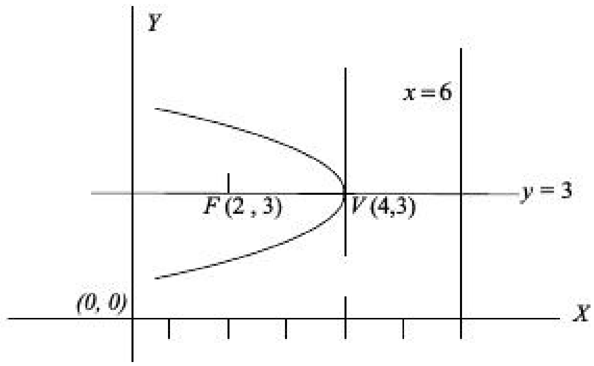
Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto (4,3) y foco el punto (2,3), la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto.

Solución

Como el vértice y el foco de la parábola se ubican sobre su eje, y en este caso la ordenada es constante la recta y=3, se tiene entonces que el eje es paralelo al eje X, y corresponde a la recta y=3, la ecuación correspondiente es entonces, $(y-k)^2=4p(x-h)$.

Como $h=4$, $k=3$ se obtiene entonces$(y-3)^2=4p(x-4)$.

Su gráfica es:



El foco corresponde al punto (2,3) significa que la parábola abre hacia la izquierda además $|p|=|4-2|=2$ y por tanto:

$$(y-3)^2=4(-2)(x-4)$$
$$(y-3)^2=-8(x-4)$$

La longitud del lado recto es entonces $|4p|=|-8|=8$ la directriz pasa entonces por el punto (4+2,3)= (6,3), es decir, tiene como ecuación $x=6$.

4.2. Ejercicios

1. Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto (–2,–3) y foco (0,–3), la ecuación de la directriz la longitud del lado recto y graficar.
2. Hallar la ecuación de la parábola con vértice el punto $\left(3,\frac{5}{2}\right)$ y foco el punto $\left(3,\frac{3}{2}\right)$, la ecuación de la directriz la longitud del lado recto y graficar.
3. Los puntos (–2,3) y (–2,1)corresponden al vértice y foco de una parábola. Hallar la ecuación, directriz, longitud del lado recto y graficar.
4. El vértice de una parábola es el punto (2,3), la longitud del lado recto es 6 y su eje paralelo al eje X, halle la ecuación.
5. El vértice de una parábola es el punto (4,3), eje paralelo al eje X, y pasa por el punto $\left(\frac{7}{2},5\right)$ hallar la ecuación.

4.1.2. Forma general de la ecuación de la parábola

Consideramos nuevamente la ecuación de vértice (h,k), $(y-k)^2=4p(x-h)$ Desarrollando el binomio de la izquierda se obtiene: $y^2-2ky+k^2=4px-4ph$ Igualando a cero se obtiene: $y^2-2ky+k^2-4px+4ph=0$

Haciendo $A=-2k$, $B=-4p$, $C=k^2+4ph$ la anterior ecuación se reduce a $y^2+Ay+Bx+C=0$

La cual se denomina forma general de la parábola, de la misma manera se obtiene la ecuación

$x^2+Ax+By+C=0$

Con estos resultados se establece el teorema:

Teorema 3

La ecuación de la parábola con eje paralelo al eje X, en su forma general es $Ay^2+By+Cx+D=0$

En forma similar la ecuación de la parábola con eje paralelo al eje Y es $Ax^2+Bx+Cy+D=0$

No sobra anotar que en las ecuaciones anteriores $A\neq 0$

Observamos que en el Teorema 3 los coeficientes de los cuadrados son diferentes de uno ya que es lo más usual, es decir, no siempre estos coeficientes corresponden a la unidad por otra parte a partir de la ecuación general se debe llegar a la forma (h,k)completando los cuadrados perfectos y de esta manera se identificará la parábola junto con sus respectivos componentes.

Ejemplo

Demostrar que la ecuación $4y^2-20y-24x+97=0$ corresponde a una parábola, hallar las coordenadas del vértice y del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto.

Solución

Del teorema 3 la ecuación corresponde a una parábola con eje paralelo al eje X, por tanto se debe completar el trinomio cuadrado perfecto en la variable y.

$$4y^2-20y-24x+97=0$$

$$4(y^2-5y)=24x-97$$

$$4\left(y^2-5y+\frac{25}{4}\right)-25=24x-97$$

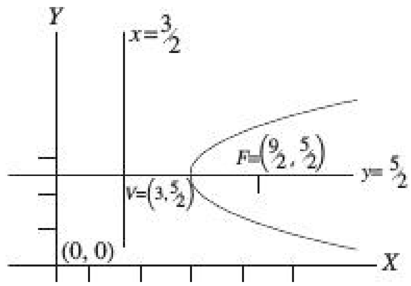
$$4\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=24x-72$$

$$4\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=24(x-3)$$

$$\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=6(x-3)$$

El resultado anterior da como coordenadas del vértice el punto $\left(3,\frac{5}{2}\right)$ además $4p=6\Rightarrow p=\frac{3}{2}$ lo cual quiere decir que la parábola abre hacia la derecha, de tal manera que el foco se encuentra en el punto $\left(3+\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)=\left(\frac{9}{2},\frac{5}{2}\right)$

La directriz pasa entonces por el punto $\left(3-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$ de este resultado concluimos que la ecuación de la directriz es $x=\frac{3}{2}$, la longitud del lado recto es $|4p|=6$.



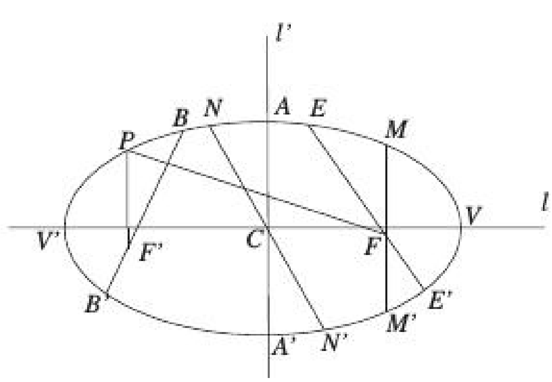
4.3. Ejercicios

Verificar en cada caso si la ecuación corresponde a una parábola, en tal caso hallar coordenadas del vértice, foco, ecuación de la directriz, lado recto y graficar.

1. $x^2+2x+3y-6=0$
2. $2y^2+5y-x+4=0$
3. $4y^2-8y+3x+7=0$
4. $3x^2+6x-5y-10=0$
5. $x^2-4y+12=0$
6. $y^2+6y-7=0$
7. $2x^2+6x-4y=8$
8. $y^2+2y-3x=5$
9. Una parábola tiene por ecuación $(x-3)^2=-3(y+2)$ escribir la ecuación general, hallar la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto.
10. Una parábola tiene por ecuación $(y+2)^2=3(x-1)$ escribir la ecuación general, hallar la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto.

4.2. La elipse

Definición: *es el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ el plano tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos es igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos. Los dos puntos fijos se denominan focos de la elipse.*



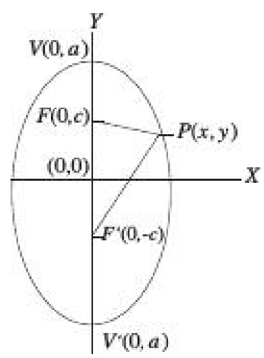
En la figura anterior se muestran F y F´son los focos, *V* y *V´* son los vértices que corresponden a los puntos más alejados del centro C, la recta l corresponde al eje focal es decir sobre ella están ubicados los focos. El segmento de recta *V V´* se denomina eje mayor. El centro C es el punto medio entre los focos y sobre el eje focal. La recta l´ se denomina eje normal y el segmento *A A´* es el eje menor. El segmento *BB´* se denomina una cuerda, es decir, una cuerda es una recta que une dos puntos cualesquiera de la elipse. Un segmento como *EE´* se denomina cuerda focal, la recta *MM´* que es perpendicular a l sobre el foco, se denomina lado recto por tanto se tendrán dos lados rectos. Una recta como *NN´* que pasa por el centro se denomina diámetro. Para un punto cualquiera sobre la elipse los segmentos *F´P* y *FP* se denominan radios vectores de P.

4.2.1. Ecuación de la elipse con centro en el origen

Consideramos la elipse con centro (0,0), eje focal el eje Y, es decir, los focos *F* con coordenadas (0,*c*) y *F'* con coordenadas (0,–c) puesto que el centro es el punto medio entre los focos, *c* es una constante positiva, sea P(*x*,*y*) un punto cualquiera sobre la elipse por definición se satisface .

$$\left|\overline{FP}\right| + \left|\overline{F'P}\right| = 2a \qquad (2)$$

Donde *a* es no negativa y *a* > *c*



Según la figura la ecuación (1) se reduce a

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2}+\sqrt{(x-0)^2+(y+c)^2}=2a$$

La cual podemos escribir $\sqrt{x^2+(y-c)^2}=2a-\sqrt{x^2+(y+c)^2}$

Elevando al cuadrado en ambos miembros:

$$x^2+(y-c)^2=4a^2-4a\sqrt{x^2+(y+c)^2}+x^2+(y+c)^2$$

Desarrollando los binomios y simplificando se obtiene:

$$cy+a^2=a\sqrt{x^2+(y+c)^2}$$

Si se eleva nuevamente al cuadrado en ambos miembros se obtiene

$$c^2y^2+2cya^2+a^4=a^2[x^2+(y+c)^2]$$

Desarrollando los binomios simplificando y agrupando se obtiene

$$-a^2x^2+\left(c^2-a^2\right)y^2=a^2\left(c^2-a^2\right) \tag{2}$$

Puesto que 2a>2c es $a^2>c^2$ es decir $a^2–c^2>0$ este número no negativo lo denominamos b^2, es decir, $a^2–c^2=b^2$ reemplazamos en (2):

$$-a^2x^2-b^2y^2=-a^2b^2$$
$$a^2x^2+b^2y^2=-a^2b^2$$

Dividiendo en ambos miembros por a^2b^2

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Siguiendo un proceso similar para una elipse con focos los puntos (±c,0), vértices los puntos (±a,0), es decir consideramos una elipse con centro el origen y eje focal el eje X, se obtiene la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Excentricidad en la elipse se define la excentricidad como la razón ${}_{a}{}^{c}$ y se representa con la letra *e* , de lo cual:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

Como c<a, la excentricidad de la elipse es menor que la unidad.

De los resultados anteriores se obtiene el teorema:

Teorema 1

La elipse con centro (0,0), vértices los puntos (0, ±a), focos (0, ±c), es decir, el eje es el eje *X*, tiene por ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Si el centro es (0,0), vértices los puntos (0,±a), focos (0±c) y eje focal el eje Y la ecuación es:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

La longitud del lado recto se obtiene así, de la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Despejamos y:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$
$$y^2 = b^2\left(\frac{a^2 - x^2}{a^2}\right)$$

> **Nota**: *En el Teorema anterior las ecuaciones son similares cuando se tienen valores específicos para a y b la mejor forma de identificar el eje de la elipse es tener en cuenta que a > b ⇒ a^2 > b^2 en este orden de ideas, se observa que cuando el eje es X, a 2 divide a x mientras que cuando el eje es Y, a^2 divide a y podemos entonces decir que la variable que aparezca dividida por el coeficiente mayor corresponde al eje de la elipse.*

Puesto que $x = c$ en el foco

$$y^2 = \frac{b^2\left(a^2 - c^2\right)}{a^2}$$
$$y = \pm\sqrt{\frac{b^2\left(b^2\right)}{a^2}} = \pm\frac{b^2}{a}$$

Por tanto, *lado recto* $= 2\left|\frac{b^2}{a}\right| = 2\frac{b^2}{a}$

Ejemplo 1

Dada $4x^2 + 8y^2 = 32$, hallar centro, coordenadas del foco, vértices, graficar y la longitud del lado recto.

Solución

Dividimos por 32 todos los términos de la expresión $4x^2 + 8y^2 = 32$ a fin de lograr una ecuación como las dadas en el Teorema 1

$$\frac{4x^2}{32} + \frac{8y^2}{32} = \frac{32}{32}$$
$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Del resultado anterior concluimos que $a^2 = 8$ *y* $b^2 = 4$, además a^2 divide a x por tanto el eje de la elipse es el eje *X*, centro (0,0), las coordenadas de los vértices son $\left(\pm\sqrt{8}, 0\right)$, para las coordenadas de los focos tenemos

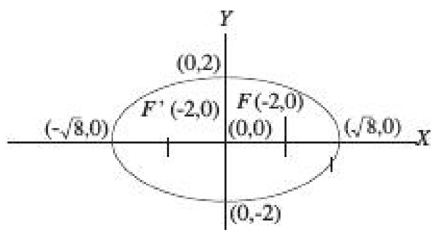
$$c^2+b^2=a^2$$
$$c^2=a^2-b^2$$
$$c^2=8-4=4$$
$$c=\pm 2$$

Los focos están entonces dados por los puntos (–2, 0) y (2, 0).

La gráfica correspondiente es:

Los lados rectos tienen longitud

$$2\frac{b^2}{a}=\frac{2(4)}{\sqrt{8}}=\sqrt{8}$$



Ejemplo 2

Las coordenadas de los focos para una elipse son los puntos (0,–5) y (0,5) la longitud del eje menor es 6, hallar la ecuación, coordenadas de los vértices, longitud del lado recto, longitud del eje mayor y graficar.

Solución

De acuerdo a la información dada los focos se ubican sobre el eje Y, y el centro es (0,0), es claro entonces que c=5, por otra parte la longitud del eje menor es 2b de lo cual se tiene 2b=6⇒b=3, como:

$$a^2=b^2+c^2$$
$$a^2=(3)^2+(5)^2$$
$$a^2=34$$

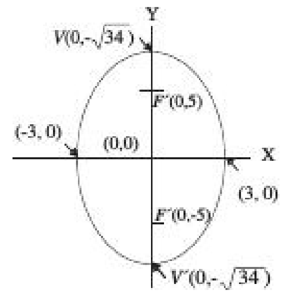
La ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{34}=1$$

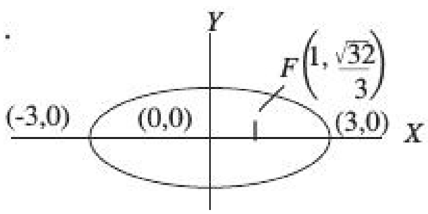
Las coordenadas de los vértices son $(0,-\sqrt{34})$ y $(0,\sqrt{34})$, la longitud de los lados rectos $2\frac{b^2}{a}=2\frac{9}{\sqrt{34}}=\frac{18}{\sqrt{34}}$ la longitud del eje mayor es $2a=2\sqrt{34}$.

Finalmente la gráfica es:



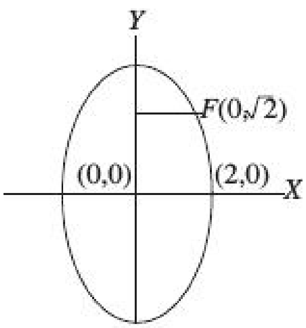
4.4. Ejercicios

1. En cada uno de los ejercicios hallar la ecuación de la elipse.
   a.

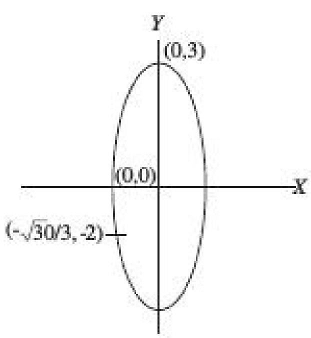


Y

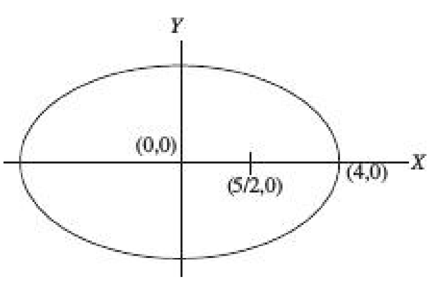
   b.



   c.



   d.



2. Hallar la ecuación de la elipse en cada caso
   a. Longitud del eje mayor 8, focos los puntos (3,0) y (–3,0).
   b. Longitud del eje menor 4, focos los puntos $(0,\sqrt{5})$ y $(0,-\sqrt{5})$.
   c. Vértices los puntos (3,0) y (3,0), longitud del lado recto $\frac{8}{3}$
   d. Vértices los puntos (0,4) y (0,–4) pasa por el punto

3. Utilizando la definición demostrar que la ecuación de la elipse con centro (0,0), focos $(\pm c,0)$ y vértices $(\pm a,0)$ es $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
4. En los siguientes ejercicios sobre el mismo plano graficar las curvas dadas, indicando el punto de intersección. Hallar las coordenadas de estos puntos con procesos algebraicos.
   a.
   $$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$
   $$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$
   b.
   $$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$
   $$y=x$$

5. Hallar las coordenadas de los vértices, focos, las longitudes del eje mayor y menor, la excentricidad y la longitud de cada uno de los lados rectos de la elipse correspondiente. Trazar la gráfica en cada caso.
   a. $9x^2+4y^2=36$
   b. $25x^2+16y^2=400$
   c. $4x^2+14y^2=36$

6. Hallar los radios vectores del punto $\left(3,\frac{7}{4}\right)$ que está sobre la elipse $7x^2+16y^2=12$
7. Halle la ecuación de la elipse para la cual uno de sus vértices es el punto (0, 4) y el eje menor es 6.

4.2.2. Ecuación de la elipse con centro (h,k)

En el análisis hecho para la parábola con vértice (h,k) vimos cómo al hacer una traslación del sistema coordenado con centro (0,0) al centro (h,k) con nuevas coordenadas X_1,Y_1 se obtuvo

$$x_1=x-k$$
$$y_1=y-k$$

De tal manera que en la elipse se procede en forma similar, esto es, la ecuación de la elipse con centro (h,k) y eje X_1 es de la forma

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$$

Sustituyendo los resultados mencionados anteriormente se obtiene:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

De la misma manera se procede para el caso en que el eje es Y_1 las anteriores observaciones nos da como resultado el teorema:

Teorema 2

La elipse con centro (h, k) *y eje focal paralelo al eje* X *tiene por ecuación:*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Si el eje focal es paralelo al eje Y la ecuación es:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Para cada una de las elipses a es la longitud del semieje mayor, b la longitud del semieje menor y c la distancia del centro a cada foco, a,b *y* c se relacionan mediante:

$$a^2=b^2+c^2$$

La longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a}$ y la excentricidad es dada por:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}<1$$

Ejemplo

Los vértices de una elipse son los puntos (7,–3) y (–1,–3) y la longitud del lado recto es 2. Hallar la ecuación de la elipse, las longitudes de sus ejes mayor y menor, las coordenadas de sus focos, la excentricidad y graficar.

Solución

Observamos que en los puntos (7,–3) y (–1,–3) coordenadas de los vértices la ordenada permanece constante –3 mientras que la abscisa tiene una variación de –1 a 7, esto quiere decir que la elipse tiene eje focal paralelo al eje *X*, más exactamente corresponde a la recta y =–3, por otra parte el punto medio de las abscisas es $\frac{7-1}{2}=3$ luego el centro es (3,–3).

De lo anterior a=|3–(–1)|=|7–3|=4, puesto que la longitud del lado recto es 2.

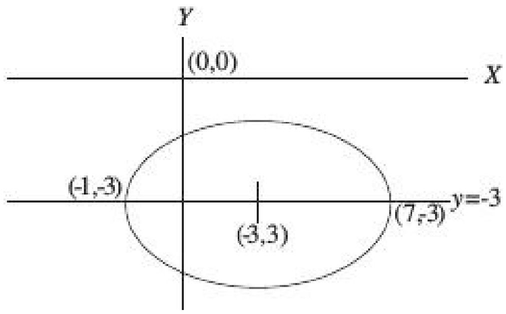
$$\begin{gathered}2=2\,\frac{b^2}{a}\\ a=b^2\\ 4=b^2\\ \pm2=b\end{gathered}$$

La ecuación de la elipse es entonces $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$

Longitud del eje mayor = 2a=2(4)=8

Longitud del eje menor= 2b=2(2)=4

Por otra parte de la relación $a^2=b^2+c^2$ se tiene $c=\pm 2\sqrt{3}$ con lo cual tenemos que los focos tienen coordenadas $(3-2\sqrt{3},-3)$ y $(3+2\sqrt{3},-3)$. La excentricidad es $e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}<1$ finalmente la gráfica correspondiente es:



4.2.3. Ecuación general de la elipse

Consideramos nuevamente la ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Efectuando la suma y desarrollando los binomios se obtiene:

$$b^2(x^2-2hx+h^2)+a^2(y^2-2ky+k^2)=a^2b^2$$
$$b^2x^2-2hb^2x+b^2h^2+a^2y^2-2ka^2y+a^2k^2-a^2b^2=0$$

Haciendo:

$$A=b^2,\ B=a^2,\ C=-2hb^2,\ D=-2ka^2 \text{ y } E=b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2,$$

Se obtiene la ecuación $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$, el mismo resultado se obtiene a partir de la ecuación $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$.

Lo anterior conduce al Teorema 3:

Teorema 3

Si los coeficientes A y B son del mismo signo y $A\neq B$, la ecuación

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0,$$

Representa una elipse, o bien un punto o no representa ningún lugar geométrico.

Es claro que a partir de la ecuación general se obtiene la ecuación con centro (h,k) con un proceso de completar trinomios cuadrados perfectos en la variables x e y.

Ejemplo

La ecuación de una elipse es $x^2+4y^2-6x+16y+21=0$ reducir la ecuación a la forma ordinaria con centro (h,k) y determinar coordenadas del centro, vértices y focos; calcular las longitudes del eje mayor y menor, de cada lado recto y la excentricidad. Graficar.

Solución

A partir de la ecuación dada y completando los trinomios obtenemos la ecuación ordinaria

$x^2+4y^2-6x+16y+21=0$
$(x^2-6x)+(4y^2+16y)=-21$
$(x^2-6x+9)-9+4(y^2+4y+4)-16=-21$
$(x-3)^2+4(y+2)^2=4$

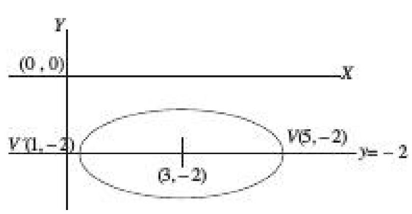
Dividiendo por 4 todos los sumandos se obtiene:

$$\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{1}=1$$

La cual corresponde a una elipse con centro el punto (3,–2) y eje paralelo al eje X, en este caso la recta $y=-2$ se tiene además,

$$a^2=4\Rightarrow a=\pm 2$$
$$b^2=1\Rightarrow b\pm 1$$
$$a^2=c^2+b^2\Rightarrow a^2-b^2=c^2\Rightarrow c=\pm\sqrt{3}$$

La recta $y=-2$ es el eje de la elipse como ya se dijo los puntos correspondientes a los vértices son (3–2,–2) y (3+2,–2) o (1,–2) y (5,–2), las coordenadas de los focos están dadas por los puntos (3– 3,–2) y $(3+\sqrt{3},-2)$, por otra parte longitud del eje mayor $=2a=2(2)4$ longitud del eje menor $=2b=2(1)2$ excentricidad, $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ longitud del lado recto = $\frac{2b^2}{a}=\frac{2(1)}{2}=1$



4.5. Ejercicios

1. Los vértices de una elipse son los puntos (1,1) y (1,7) y su excentricidad es $\frac{1}{3}$. Hallar la ecuación de la elipse, coordenadas del foco y las longitudes del eje mayor y menor, la excentricidad, las longitudes de los lados rectos. Graficar.
2. Los focos de una elipse son los puntos (–2,–4) y (–6,–4) y la longitud del lado recto es 6. Hallar la ecuación de la elipse y la excentricidad. Graficar.
3. Los vértices de una elipse son los puntos (0,–6) y (8,–6) y la longitud de cada lado recto es $\frac{9}{2}$. Hallar la ecuación de la elipse las coordenadas de sus focos y su excentricidad. Graficar.
4. El centro de una elipse es el punto (–4,2) y el vértice y el foco de un mismo lado del centro son los

puntos (–4,–2) y (–4,–1) respectivamente. Hallar la ecuación de la elipse, su excentricidad, la longitud de eje menor y mayor, la longitud de cada lado recto y graficar.

En los ejercicios del 5 al 8 reducir la ecuación a la forma centro (h, k), determinar las coordenadas del foco, vértices, longitud del eje mayor, menor y lados rectos, la excentricidad y graficar.

5. $4x^2+9y^2-8x-32=0$
6. $4x^2+y^2-10y-40x+109=0$
7. $9x^2+4y^2-32y-18x+37=0$
8. $4x^2+y^2+2y-12x+6=0$
9. Hallar las longitudes de los radios vectores del punto (2,1) de la elipse cuya ecuación es $9x^2+y^2-18x-2y+1=0$
10. La ecuación de una familia de elipses es $4x^2+9y^2+ax+by-23=0$ hallar la ecuación de la elipse de la familia que pasa por los puntos (1,1) y (1,–3).
11. Si en la ecuación $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$, $C=D=0$ y $A,B>0$ ¿qué posibilidades se pueden tener? Justificar.

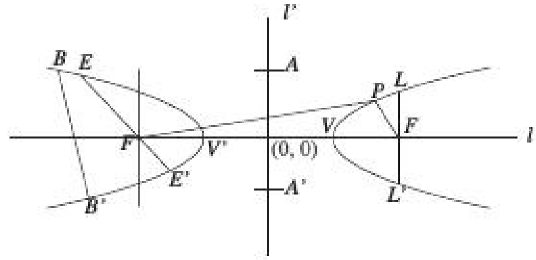
En los ejercicios del 12 al 15 hallar las coordenadas de los focos y vértices en cada caso, la longitud del eje mayor, menor, lados rectos, hallar la excentricidad y graficar.

12.
$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$$
13.
$$\frac{(x+2)^2}{6}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$$
14.
$$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-5)^2}{10}=1$$
15.
$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{6}=1$$

4.3. La hipérbola

Definición: *es el lugar geométrico de todos los puntos P(x,y) del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos es igual a una constante positiva menor que la distancia entre los focos.*

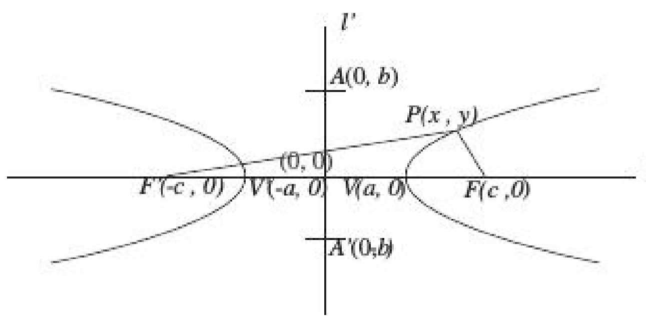
La gráfica siguiente muestra que la hipérbola consta de dos ramas diferentes, ubicadas en forma similar al caso de la elipse es decir sobre los ejes coordenados o rectas paralelas a los mismos (el caso de la rotación no lo estamos considerando).



De la gráfica tenemos las siguientes componentes *F y F' focos*, la recta *l* sobre la cual se encuentran los focos, la denominamos *eje focal*. Sobre esta misma recta se encuentran *V y V'* que se denominan *vértices*, el *centro* es el medio sobre *l* y entre los dos focos, observamos que los vértices en este caso son los cercanos al centro (caso contrario a la elipse donde los vértices son los más alejados del centro). El segmento *VV'*, se denomina *eje transverso* de la hipérbola.

La recta *l'* que es perpendicular a *l* en el centro se denomina *eje normal*, esta recta no corta a la hipérbola sin embargo sobre ella se consideran dos puntos *A y A'* y el segmento *AA'* se denomina *eje conjugado*. El segmento *BB'* se denomina *cuerda*, la cual es una recta que une dos puntos cualesquiera de la hipérbola. El segmento *LL'* se denomina *lado recto*, por tanto se tienen dos lados rectos. Los segmentos *FP y F'P se* denominan *radios vectores* para *P*, donde *P* es un punto cualquiera de la hipérbola.

4.3.1. Ecuación de la hipérbola con centro en (0,0)



Para la hipérbola con centro (0,0) y focos los puntos (–c,0) y (c,0) aplicando la definición se obtiene:

$$\left| \overline{FP} - \overline{F'P} \right| = 2a \tag{1}$$

Donde 2a<2c, al quitar el valor absoluto de la igualdad (1) se obtiene

$$\overline{FP} - \overline{F'P} = 2a \qquad o \qquad \overline{FP} - \overline{F'P} = -2a$$

Donde las distancias son:

$$\overline{FP} = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$$
$$\overline{F'P} = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}$$

Trabajando con cualquiera de las dos anteriores se llega al mismo resultado, así tomando la primera se tiene,

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$$
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Elevando al cuadrado en ambos miembros, desarrollando los binomios y simplificando se obtiene $-cx-a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

Elevando nuevamente al cuadrado en ambos miembros desarrollando los binomios y simplificando se obtiene

$$\left(c^2-a^2\right)x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4 \tag{2}$$
$$\left(c^2-a^2\right)x^2-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right)$$

Como $2a < 2c \Rightarrow a < c \Rightarrow a^2 < c^2 \Rightarrow c - a^2 > 0 \Rightarrow c - a = b^2$ por tanto de (2) se obtiene:

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

Dividiendo cada uno de los sumandos por $a^2 b^2$ resulta

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{3}$$

De la misma manera se puede comprobar que si el centro es (0,0) y los focos los puntos

0,–c) y (0,c) la ecuación resultante es:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

De la ecuación (3) despejando y se obtiene

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

En el foco $x = c$, por tanto

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{c^2-a^2}=\pm\frac{b}{a}\sqrt{b^2}=\pm\frac{b^2}{a}$$

Lo cual quiere decir que la longitud del lado recto es

Longitud del lado recto = $\frac{2b^2}{a}$

Longitud del eje transverso = 2a

Longitud del eje conjugado = 2b

excentricidad, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ como c>a⇒e>1

El análisis anterior, nos conduce al siguiente teorema:

Teorema 1

La ecuación de la hipérbola con eje focal el eje *X*, centro el origen y focos los puntos (–*c*, 0) y (*c*, 0) es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si el eje de la hipérbola es el eje Y, centro el origen y focos (0,–c) y(0,c) la ecuación es

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

a es la longitud del semieje transverso, *b* la longitud del semieje conjugado, *c* la distancia del centro al foco, a, b y c se relacionan mediante $c^2=a^2+b^2$

La longitud de cada uno de los lados rectos es igual a $2\frac{b^2}{a}$ y la excentricidad

$$e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} > 1.$$

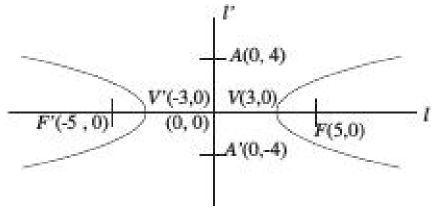
Ejemplo

Los vértices de la hipérbola son los puntos (–3,0) y (3,0) los focos son los puntos (–5,0) y (5,0) hallar la ecuación de la hipérbola, las longitudes del eje transverso, eje conjugado y lados rectos, hallar la excentricidad y graficar.

Solución

Los vértices (–3,0) y (3,0) indican entonces que el centro es (0,0) y el eje de la hipérbola es el eje *X*, además *a*=3 de las coordenadas de los focos concluimos que *c*=5, utilizando la relación $c^2=b^2+a^2 \Rightarrow 25-9 = b^2 \Rightarrow b \pm 4$ La ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$



Longitud del eje transverso = $2a = 2\ (3) = 6$

Longitud del eje conjugado = $2b = 2\ (4) = 8$

Longitud de cada lado recto = $\frac{2b^2}{a} = \frac{2\ (16)}{3} = \frac{32}{3}$

Excentricidad = $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} > 1$

4.6. Ejercicios

1. Deducir mediante la definición que la hipérbola con eje el eje *Y*, centro origen vértices $(0, \pm a)$ y focos $(0, \pm c)$ tiene por ecuación

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

En los ejercicios 2 a 5, para la ecuación de la hipérbola dada, hállense las coordenadas de los vértices, focos, la longitud de los ejes transverso y conjugado, la excentricidad y la longitud de cada lado recto, graficar.

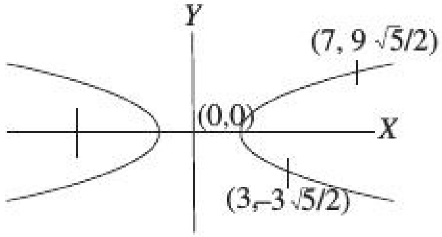
2. $6x^2 – 4y^2 = 24$
3. $x^2 – 9y^2 = 4$
4. $9y^2 – 4x^2 = 36$
5. $5y^2 – 9x^2 = 45$
6. Los vértices de una hipérbola son los puntos (–2,0) y (2,0) y sus focos (–3,0) y (3,0). Hallar la ecuación y su excentricidad.

En los ejercicios 7 a 9 usando la definición de hipérbola, hallar la ecuación a partir de la información dada. Sugerencia: consulte la hiperbola con centro (h,k)

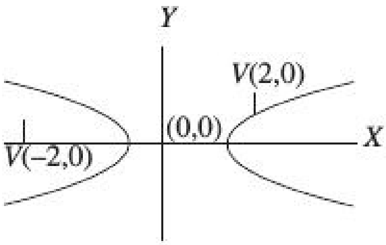
7. Focos (3,–7) y (3, 1), longitud del eje transverso 4
8. Vértices (4, 1) y (4, 5), longitud de cada lado recto 5
9. Vértices (4, 3) y (–2, 3), excentricidad 2
10. Una hipérbola tiene su centro en el origen, su eje conjugado está sobre el eje X, la longitud del lado recto es ⅔ y pasa por el punto (–1, 3). Hallar la ecuación.

En los ejercicios 11 a 14 hallar la ecuación de la hipérbola.

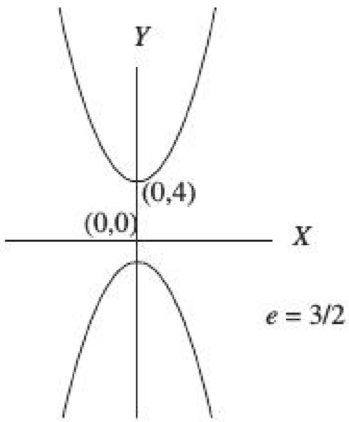
11.



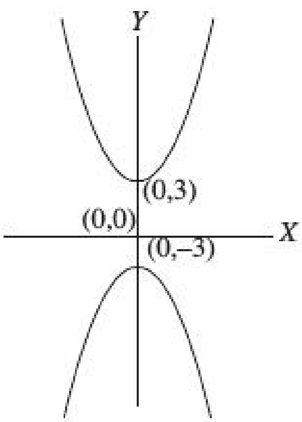
12.



13.



14.



15. Para $k \neq 0$ un número cualquiera, demostrar que la ecuación $4x^2 – 3y^2 = k$ corresponde a una familia de curvas con $e = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

4.3.2. Asíntotas de la hipérbola

Retomando nuevamente la ecuación:

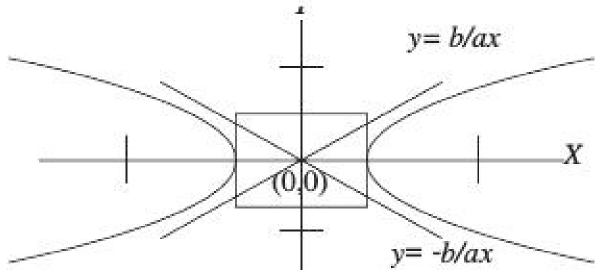
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2 2 Al efectuar la resta se obtiene $b^2\ x - a\ y = a^2\ b^2$, despejando y obtenemos, 2

La cual puede transformase en
$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$
$$y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

Si x toma valores muy grandes $\frac{a^2}{x^2}\to 0$, lo cual conduce a $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Este resultado nos dice que las rectas $y=\pm\frac{a}{b}x$ son asíntotas para la hipérbola o que la hipérbola es asintótica a estas rectas (asíntotas quiere decir que la gráfica se acerca a ellas tanto como se quiera, pero no se cortan):



El análisis anterior conduce al teorema:

Teorema 2

La hipérbola $b^2x^2–a^2y^2=a^2b^2$ *tiene por asíntotas las rectas* $bx - ay = 0$ y $bx + ay = 0$.

Si observamos en el Teorema anterior $b^2x^2–a^2y^2=a^2b^2$ y hacemos $a^2b^2=0$, se obtiene la ecuación $b^2x^2–a^2y^2=0$ que factorizando da como resultado:

$$(bx-ay)(bx+ay)=0$$

Obteniéndose así las ecuaciones $bx–ay=0$ y $bx+ay=0$, que corresponden a las ecuaciones de las asíntotas:

Ejemplo

Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto (6,2) tiene su centro en el origen, su eje transverso esta sobre el eje X, y una de sus asíntotas es la recta $2x–5y=0$.

Solución

Según lo observado anteriormente como una asíntota es $2x–5y=0$, la otra debe ser $2x+5y=0$ de tal manera que $(2x–5y)(2x+5y)=0\Rightarrow 4x^2–25y^2=k$, como la hipérbola pasa por el punto(6,2):

$$4(6)^2-25(2)^2=k\Rightarrow 44=k$$

De los resultados anteriores, la ecuación de la hipérbola es $4x^2–25y^2=44$

1. Demostrar que la hipérbola $b^2y^2–a^2x^2=a^2b^2$ tiene como asíntotas $by–ax=0$ y by+ax=0.
2. Para la hipérbola $9y^2–4x^2=36$ hallar las asíntotas y graficar.
3. Con el ejercicio anterior hallar los puntos dados por los extremos del eje transverso y conjugado, construir un rectángulo del cual se conocerán sus vértices, hallar las ecuaciones de las diagonales y comprobar que corresponden a las asíntotas.
4. Una hipérbola con ecuación $x^2–y^2=a^2$ se denomina hipérbola equilátera, hallar las ecuaciones de las asíntotas y comprobar que una es perpendicular a la otra.
5. Dos hipérbolas se dicen conjugadas si el eje transverso de cada una es idéntico al eje conjugado de la otra, por ejemplo:

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1 \; y \; \frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$ son conjugadas, comprobarlo.

6. Dar por lo menos dos ejemplos de hipérbolas conjugadas.
7. Dar por lo menos dos ejemplos de hipérbolas equiláteras.

4.3.3. Segunda ecuación ordinaria de la hipérbola

Si el centro de la hipérbola es el punto (h,k) según lo estudiado en las cónicas anteriores para la traslación se obtiene:

Teorema 3

La ecuación de la hipérbola con centro (h,k) y eje focal paralelo al eje X es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Si el eje focal es paralelo al eje Y la ecuación es

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

En cada hipérbola, a es la longitud del semieje transverso, b *l*a longitud del semieje conjugado, c la distancia del centro a cada uno de los

focos; a, b y c se relacionan mediante $c^2=b^2+a^2$. La longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a}$ y la excentricidad es

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}>1$$

4.3.4. Forma general de la ecuación de la hipérbola

Si en las ecuaciones del Teorema 3 se desarrollan los binomios y se simplifica encontramos la forma general para la ecuación la cual se da en el siguiente:

Teorema 4

> Si A y B difieren en el signo, la hipérbola tiene por ecuación general
>
> $$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$$
>
> La cual tendrá como eje una recta paralela a los ejes coordenados.

Ejemplo

Verificar si la ecuación $4x^2–9y^2–54y+8x+103=0$ corresponde a una hipérbola.

Solución

Es claro que según el Teorema 4 la ecuación corresponde a una hipérbola, sin embargo, es necesario completar los trinomios cuadrados perfectos a fin de ver si es posible llevar esta ecuación a la forma centro (h,k) de tal manera que procedemos a realizar este proceso:

$$\begin{gathered} 4x^2-9y^2-54y+8x+103=0 \\ \left(4x^2+8x\right)-\left(9y^2+54y\right)=-103 \\ 4(x+1)^2-9(y+3)^2=-180 \end{gathered}$$

Dividiendo todos los sumandos por –180 se obtiene:

$$-\frac{(x+1)^2}{45}+\frac{(y+3)^2}{20}=1$$

Que ordenándola de acuerdo al teorema se tiene:

$$\frac{(y+3)^2}{20}-\frac{(x+1)^2}{45}=1$$

La cual corresponde a una hipérbola con centro en (–1,–3) y eje paralelo al eje Y, además:

$$a^2=20 \Rightarrow a=\pm 2\sqrt{5}$$

$$b^2=45 \Rightarrow b=\pm 3\sqrt{5}$$

De acuerdo a lo anterior las coordenadas de los vértices son entonces $\left(-1,-3+2\sqrt{5}\right)$ y $\left(-1,-3-2\sqrt{5}\right)$. Las coordenadas de los extremos del eje conjugado son $\left(-1-3\sqrt{5},-3\right)$ y $\left(-1+3\sqrt{5},-3\right)$; como $c^2 = b^2 + a^2$ se tiene $c^2=45+20=65 \Rightarrow c=\pm\sqrt{65}$ se obtiene así las coordenadas de los focos $\left(-1,-3+\sqrt{65}\right)$ y $\left(-1,-3-\sqrt{65}\right)$ respectivamente:

Longitud del eje transverso $=2a=2\left(2\sqrt{5}\right)=4\sqrt{5}$

Longitud del eje conjugado $= 2b = 2\left(3\sqrt{5}\right) = 6\sqrt{5}$

Longitud de cada lado recto = $\dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2(45)}{2\sqrt{5}} = \dfrac{45}{\sqrt{5}} = 9\sqrt{5}$

Excentricidad, $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{65}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

Las ecuaciones de las asíntotas se obtienen a partir de la ecuación

$$\frac{(y+3)^2}{20} - \frac{(x+1)^2}{45} = 0$$

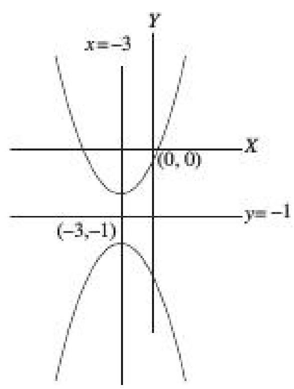
Factorizando se obtiene,

$$\left(\frac{y+3}{\sqrt{20}} - \frac{x+1}{\sqrt{45}}\right)\left(\frac{y+3}{\sqrt{20}} + \frac{x+1}{\sqrt{45}}\right) = 0$$

Igualando cada uno de los factores a cero se obtienen las ecuaciones

$$y = \sqrt{\frac{20}{45}}(x+1) - 3 = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$$

$$y = \sqrt{\frac{20}{45}}(x+1) - 3 \quad = \frac{-2}{3}x - \frac{11}{3}$$



Gráfica correspondiente

4.8. Ejercicios

En los ejercicios del 1 al 4, hallar la ecuación de la hipérbola con base en la información dada.

1. Centro el punto (2,1), el vértice y el foco de un mismo lado son los puntos (4,1) y (5,1) respectivamente.
2. Coordenadas de los vértices los puntos (2,2) y (2,–2) y la longitud del eje conjugado es 6.
3. Coordenadas de los focos los puntos (–1,–2) y (5,–2)y la excentricidad es 2.
4. Coordenadas de los vértices los puntos (–3,–1) y (–3,3) y uno de sus focos el punto (–3,5).

En los ejercicios 5 al 8 hallar, ecuación de la hipérbola, longitudes del eje transverso, conjugado y de cada lado recto, hallar la excentricidad y graficar:

5. $4x^2–8y^2+16y–64=0$
6. $4x^2–6y^2+8x–12y–26=0$
7. $6y^2–5x^2+24y+30x–51=0$
8. $4y^2–8x^2–32y+32x=0$
9. La ecuación de la hipérbola es de la forma $b^2(x–h)^2–a^2(y–k)^2=a^2b^2$ demuestre que los vértices son los puntos $(a+h,k)$ y $(h–a,k)$ y los focos los puntos $(h+c,k)$ y $(h–c,k)$ donde $c=\sqrt{a^2+b^2}$.
10. Para la ecuación de la hipérbola del ejercicio anterior demostrar que las asíntotas tienen por ecuaciones $bx–ay+ak–bh=0$ y $bx+ay–bh–ak=0$.

4.9. Ejercicios adicionales

En los ejercicios del 1 al 6 identificar la cónica respectiva y hallar sus componentes a que diere lugar (longitud lado recto, eje mayor, eje menor, eje conjugado, etc.):

1. $x^2–4y^2+2x+1 =0$
2. $3x^2–6y+12x =3$
3. $9x^2+4y^2+54x+16y+29=0$
4. $2y^2–6y+8x=7$
5. $–4x^2+9y^2+32x+3y–64=0$
6. $4y^2+9x^2+54x–16y+9=0$
7. El centro de una hipérbola es el punto (5,4) y uno de sus focos es (5,8). Si la excentricidad es 2, hallar la ecuación y las longitudes de sus ejes transverso y conjugado.
8. Hallar los puntos de intersección de la recta $2x–9y+12=0$ con las asíntotas de la parábola $4x^2–9y^2=11$.
9. Halle la ecuación de la parábola con vértice el punto (3,5) y foco el punto (3,3).
10. Halle las coordenadas de los focos y vértices, longitudes del eje transverso, conjugado y cada lado recto, hallar la excentricidad y graficar $–9y^2\ 4x^2=36$.
11. Los focos de una elipse son los puntos (8,3) y (2,3), la longitud de su eje menor es 8. Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus vértices y su excentricidad.
12. Hallar coordenadas de los vértices y focos, longitudes del eje mayor, menor y de cada lado recto, la excentricidad y graficar $25x^2+16y^2=400$.
13. Hallar la ecuación de la parábola de vértice el punto (–1,4) eje de la parábola $x+1=0$ y pasa por el punto (–3,3).

En los ejercicios del 14 al 16, hallar los puntos de intersección de las curvas, graficarlas en el mismo plano mostrando los puntos.

14. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1,\qquad \frac{x^2}{4}-y^2=1$
15. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1,\qquad 3y^2=9x$
16. $25x^2+16y^2=400,\qquad y=x+1$

Capítulo 5

Funciones

Objetivos

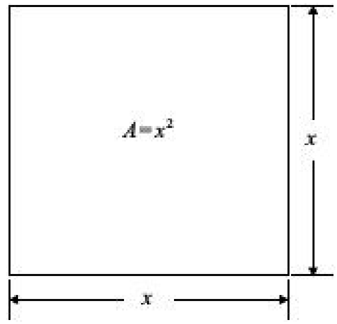
- Graficar y analizar funciones de variable real identificando su dominio y rango.
- Realizar operaciones de álgebra de funciones: suma, producto, cociente y composición.
- Identificar las gráficas y relaciones inversas de funciones reales: polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.
- Resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas aplicando las propiedades de estas funciones trascendentes.
- Adquirir destrezas en la modelación de funciones para la resolución de problemas de aplicación.

5.1. Concepto de función

El concepto de función es uno de los temas más importantes en la matemática, la necesidad de relacionar cantidades que cambian con la variación de otras; nuestro interés consiste en encontrar una forma matemática o un modelo matemático que pueda relacionar las variaciones de dichas cantidades entre sí, es decir cómo cambia una variable al cambiar la otra y se expresan mediante una ecuación.

En el mundo físico existen muchas ecuaciones que relacionan variaciones de variables entre sí, es decir el valor de una de ellas depende el valor de la otra, por ejemplo: los ingresos mensuales de un panadero pueden depender del número de panes que venda, el recorrido o vuelo de un avión dependiendo del tiempo de duración del vuelo, el perímetro de una circunferencia depende del radio r ($P = 2\pi r$), entre otros.

Para tomar como ejemplo concreto el área de un cuadrado, dado su lado como se muestra en la figura:



Tabulando encontramos valores del área del cuadrado dado el valor del lado, nos damos cuenta de que estamos relacionando la variación del área ante la variación del lado del cuadrado. Se puede representar la relación de la siguiente forma:

x: **Lado del cuadrado**	A: **área**
0	$0^2 = 0$
1	$1^2 = 1$
2	$2^2 = 4$
3	$3^2 = 9$
$\vdots$	$\vdots$
x	x^2

Se dice que la relación envía 0 a 0, 1 a 1, 2 a 4, 3 a 9, . . ., x a x^2.

Es decir se pueden representar estos datos en parejas ordenadas (0,0), (1,1), (2,4), (3,9). . ., (x, x^2).

En el ejemplo anterior se ha definido una relación que a cada elemento lo envía a otro elemento que es igual al cuadrado de su valor y que se expresa de la forma:

$$\begin{aligned} f: A &\to B \\ x &\to x^2 \end{aligned}$$

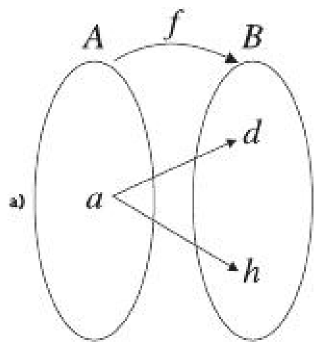
Donde B representa el área del cuadrado y x el lado del cuadrado. De manera general se observa que f envía cualquier elemento en el elemento $f(x) = x^2$.

A *se denomina conjunto de salida*, B *es el conjunto de llegada y* $f(x)$ *representa la imagen de* x *mediante* f. La expresión $y=f(x)$ se lee “y es igual a f de x”, para indicar que el valor que toma y depende del valor asignado al elemento x. De acuerdo al ejemplo anterior se define lo siguiente:

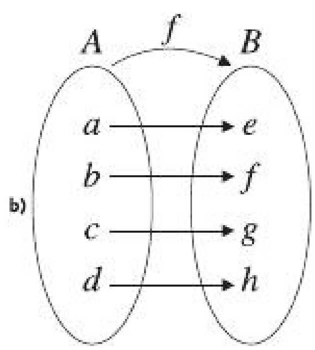
Definición: una *función* f es una regla que asigna a cada elemento x del conjunto A, un único elemento llamado $f(x)$ en el conjunto B.

Ejemplo

Observe los diagramas de Venn para definir cuáles de las siguientes representaciones son funciones.



No es función



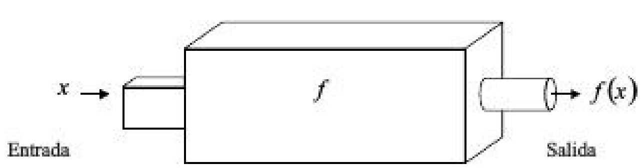
Es función

Solución

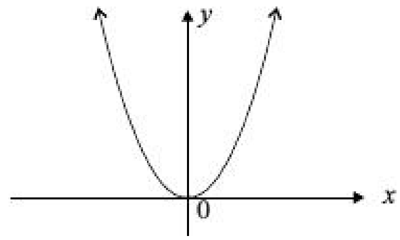
En el ejercicio a) se observa que a tiene dos imágenes que son d y h por lo tanto no es función, no cumple con el principio de función de que cada elemento de A debe tener una sola imagen, mientras que en b) sí es función cada elemento de A tiene una sola imagen.

5.1.1. Dominio e imágenes de una función

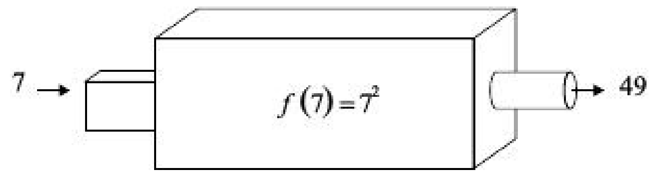
Imaginemos la función como una máquina a la cual se introduce un valor real x y es transformado en $f(x)$ como se muestra en las gráficas:



Si se toma el caso de la función A(x)=x^2 se puede ilustrar gráficamente:



Si se toma el caso particular de x=7, la imagen correspondiente es 49:



Ejemplo 1

Dada la función $f(x)= 2x^2+ x +1$ hallar $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.

Solución

- Si $f(0)= 2(0)^2 + (0)+1=1$
- $f(1)= 2(1)^2 + (1)+1= 4$
- $f(2)= 2(2)^2+ (2)+1=11$

Por lo tanto la imagen de cero es 1, la imagen de uno es 4 y la imagen de dos es 11.

Ejemplo 2

Dada la función $f(x)=4x^2+2x$ hallar $f(0)$, $f\left(\sqrt{3}\right)$, $f(a)$, $f(a+1)$, $f(a)+f(b)$.

Solución

- $f(0)=4(0)^2+2(0)=0$
- $f\left(\sqrt{3}\right)=4\left(\sqrt{3}\right)^2+2\left(\sqrt{3}\right)=4(3)+2\left(\sqrt{3}\right)=12+2\sqrt{3}$
- $f(a)=4(a)^2+2(a)=4(a)^2+2a$
- $f(a+1)=4(a+1)^2+2(a+1)=4(a^2+2a+1)+2a+2$

  $=4a^2+8a+4+2a+2=4a^2+10a+6$
- $f(a)\,f(b)=[4a^2+2a]=[4b^2+2b]$

  $=4a^2+2a+4b^2+2b=4(a^2+b^2)+2(a+b)$

Ejemplo 3

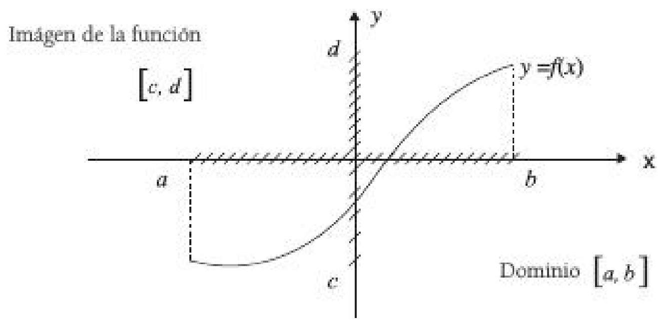
Dada la función $f(x)=\dfrac{\sqrt{3+x}}{1+x}$ calcular $f(1)$ y $f(2)$.

- $f(1)=\dfrac{\sqrt{3+1}}{1+1}=\dfrac{\sqrt{4}}{2}=\dfrac{2}{2}=1$
- $f(2)=\dfrac{\sqrt{3+2}}{1+2}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

Definición: se *llama dominio de la función* $y=f(x)$ al conjunto de valores que se pueden tomar del conjunto de salida para que la función $y=f(x)$ esté bien definida (que $y=f(x)$ tenga imagen) se denota $Dom=\{y\in\Re$ tal que $y=f(x)\}$.

Sellama *imagen de la función* $y=f(x)$ al conjunto de imágenes es decir al conjunto de valores que toma la variable dependiente y se denota: $Im(f)=\{y\in\Re$ tal que $y=f(x)\}$

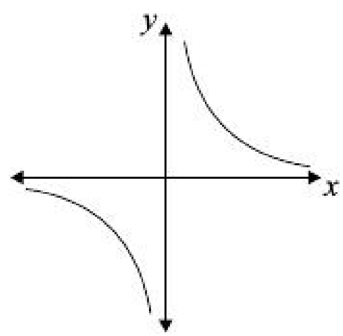
Retomando el ejemplo de la máquina como se observa en la figura:



El conjunto *A* (dominio de *f*) representa el conjunto de valores reales que pueden entrar en la máquina para ser procesados o transformados, mientras que el conjunto *B* (recorrido de *f*) representa el conjunto de valores que entraron en la máquina y fueron procesados operativamente para dar la imagen de $y=f(x)$.

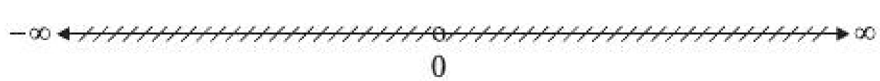
Ejemplo 4

Sea la función $y=\dfrac{1}{x}$



Se observa que el único valor que no puede procesar la máquina es el cero, puesto que $\dfrac{1}{0}$ no existe, por lo tanto cero no tiene imagen.

La pregunta es: ¿Cuáles son los valores que puede tomar *x* para que *f* esté definida? Es fácil, son todos los valores reales diferentes de cero, es decir:



$$Dom(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty).$$

Al observar el conjunto *B* el único valor que no fue procesado por la máquina es cero, por lo tanto la imagen es el conjunto de imágenes, es decir todos los reales diferentes de cero:

$$Im(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty).$$

5.1.2. Casos para hallar el dominio de una función

Caso I. Funciones de la forma $f(x)=\dfrac{h(x)}{g(x)}$ ***con*** $g(x)\neq 0$

El problema consiste en encontrar los valores x donde $g(x)=0$, encontrados dichos valores (si existen) el dominio de la función es:

$$Dom(f) = \Re - \{x\in \textbf{\textit{ tal que }} g(x)=0\}$$

Ejemplo 1

Hallar el dominio de $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+2}$

Solución

Si $x+2=0$, entonces $x= -2$, el único valor que no puede tomar $f(x)$ es $x= -2$, pues el denominador sería cero, entonces el dominio de f es:

$$Dom(f)\ \{x\in\Re \textbf{\textit{ tal que }} x\neq -2\}=(-\infty,+2)\cup(-2+\infty).$$

Ejemplo 2

Hallar el dominio de $f(x)=\dfrac{2x+5}{x^2+9x+20}$

Solución

Resolviendo $x^2+9x+20=0 \Leftrightarrow (x+5)(x+4)=0$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow x+5=0 \vee x+4=0\\ &\Leftrightarrow x=-5 \vee x=-4\end{aligned}$$

Luego el dominio de f es:

$$\begin{aligned}&Dom(f)\ \{x\in\Re \textbf{ tal que } x\neq -4,-5\}\\ &\qquad=(-\infty,-5)\cup(-5,-4)\cup(-4,+\infty).\end{aligned}$$

Ejemplo 3

Hallar el dominio de $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

Solución

Resolviendo $x^2+1=0$, no es posible encontrar un valor real x que satisfaga la ecuación, por lo tanto el dominio son todos los reales:

$$Dom(f)=\Re=(-\infty,\infty).$$

Caso II. Funciones de la forma $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$ ***para*** *n* ***par.***

Para este caso la función está definida para $g(x)\geq 0$.

Ejemplo 1

Hallar el dominio de $f(x)=\sqrt{x+2}$

Solución

La función está definida para $x+2\geq 0$, es decir para $x\geq -2$, luego el dominio es:

$$Dom(f)=[-2,\infty)$$

Ejemplo 2

Hallar el dominio de $f(x)=\sqrt{5-3x}$

Solución

La función está definida para $5-3x\geq 0 \Leftrightarrow -3x\geq -5 \Leftrightarrow 3x\leq 5 \Leftrightarrow x\leq \frac{5}{3}$, es decir el dominio de la función es:

$$Dom(f)=\left(-\infty,\frac{5}{3}\right]$$

Ejemplo 3

Hallar el dominio de $f(x)=\sqrt{x^2+9x+20}$

Solución

La función está definida para $x^2 + 9x + 20 \geq 0$ si $(x + 5)(x + 4)\geq 0$; resolviendo la inecuación en la siguiente tabla tenemos.

	$(-\infty,-5)$	$(-5,-4)$	$(-4,\infty)$
$x+5$	$-$	$+$	$+$
$x+4$	$-$	$-$	$+$
$(x+5)(x+4)$	$+$	$-$	$+$

Los intervalos donde $x^2+9x+20\geq 0$ son los intervalos $(-\infty,-5]$ y $[-4,\infty)$, luego el dominio de la función es:

$$Dom(f)=(-\infty,5]\cup[-4,\infty)$$

Ejemplo 4

Hallar el dominio de $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+2}$

Solución

La función está definida para $x+2>0$ puesto que el denominador no puede ser cero, es decir para $x>-2$, luego el dominio es:

$$Dom(f)=(-2,\infty).$$

Ejemplo 5

Hallar el dominio de $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+2}$

Solución

Para que la función esté bien definida se deben cumplir las siguientes condiciones:

i. $x\geq 0$

ii. $x\neq -2$

Por lo tanto el dominio es: $Dom(f)=[0,\infty)$

Ejemplo 6

Hallar el dominio de $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x}{1-x}}$

Solución

La función está definida para $\frac{2x}{1-x}\geq 0,$ resolviendo la desigualdad mediante la siguiente tabla se tiene:

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$2x$	$-$	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	$-$
$\dfrac{2x}{1-x}$	$-$	$+$	$-$

Así el dominio es: $Dom(f)=[0,1)$

5.1.3. Imagen de una función

La imagen de una función $y=f(x)$ se calcula con base al dominio de la función ya establecido. Por ejemplo en la función $y=5x+300$ el dominio es $(-\infty,\infty)$ y la imagen es $(-\infty,\infty)$; pero si el dominio se restringe a $Dm(f)=[0,\infty)$, entonces la imagen de la función es: $Im(f)=[300,\infty)$

La imagen de una función se determina por la propia fórmula, mientras que el dominio depende de las condiciones para que la función $f(x)$ esté bien definida. A continuación se mostrarán ejemplos para hallar la imagen de algunas funciones donde sea posible expresar x en términos de y.

Ejemplo 1

Hallar la imagen de la función $f(x)=4x-1$

Solución

Expresando x en términos de y se obtiene que:

$$y+1=4x \Leftrightarrow \frac{y+1}{4}=x \Leftrightarrow \frac{y}{4}+\frac{1}{4}=x$$

La expresión resultante es un polinomio que puede tomar cualquier valor real, por lo tanto la imagen de la función es: $Im(f)=(-\infty,\infty)$.

Ejemplo 2

Hallar la imagen de la función $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-1}$

Solución

Expresando x en términos de y se obtiene que:

$$\begin{aligned} y(x-1)&=3x+1\\ yx-y&=3x+1\\ yx-3x&=1+y\\ x(y-3)&=1+y\\ x&=\frac{1+y}{y-3}\end{aligned}$$

A continuación se deben encontrar los valores de y para los cuales $y-3=0$, es decir para $y=3$, luego la imagen de la función es: $Im(f)=(-\infty,3)\cup(3,\infty)$

Ejemplo 3

Hallar la imagen de la función $f(x)=\sqrt{x^2-5}$

Solución

Expresando x en términos de y se obtiene que:

$$\begin{aligned} y&=\sqrt{x^2-5}\\ y^2&=x^2-5\\ x&=\pm\sqrt{y^2+5}\end{aligned}$$

Como $y^2+5\geq 0$, esta expresión es mayor que cero para cualquier valor de y, pero la imagen de una función que proviene de una raíz de índice par no puede ser negativa, entonces la imagen de la función es: $Im(f)=(-\infty,\infty)$.

Ejemplo 4

Hallar la imagen de $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

Solución

$y=\sqrt{x^2+1}$

$y^2 = x^2 +1$, elevando al cuadrado en ambos lados de la igualdad

$y^2-1=x^2$, despejando x en términos de y

$\pm\sqrt{y^2-1}=x$

La imagen de la función se cumple para:

$y^2-1\geq 0$, es decir: $(y+1)(y-1)\geq 0$, resolviendo la inecuación, se tiene:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$y+1$	-	+	+
$y-1$	-	-	+
y^2-1	+	-	+

Por lo tanto la imagen es $Im(f)=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$.

5.1. Ejercicios

. Si $f(x)=x^2+2x+1$ hallar $f(0)$, $f(-1)$, $f(\sqrt{2})$, $f(1+\sqrt{3})$, $f(-x)$ y $f(2x)$

. Si $g(x)=x^2+2x+1$ hallar $g(0)$, $g(2)$, $g(1+h)$

. Si $f(x)=x^2+1$ hallar $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

. Si $f(x)=\frac{x}{x+1}$ hallar $f(0)$, $f(2)$, $f(-1)$, $f(a)+f(b)$, $f(x+1h)$ y $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

. Hallar el dominio de las siguientes funciones:

a. $f(x)=2x+1$

b. $f(x)=3$

c. $g(x)=\frac{1}{x+1}$

d. $h(x)=\frac{2}{x^2+x-6}$

e. $h(x)=\sqrt{x^2+x-6}$

f. $h(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+x-6}}$

g. $t(x)=\frac{x+1}{x^2-1}$

h. $t(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$

i. $h(x)=\sqrt[4]{x^2-1}$

j. $h(x)=\frac{1}{x^2+1}$

k. $\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$

. Hallar las imágenes de las siguientes funciones:

a. $g(x)=2x+1$ si $-1\leq x\leq 1$

b. $g(x)=\frac{2x+1}{x+2}$
c. $h(x)=\sqrt{2x-5}$
d. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$
e. $f(x)=\frac{1}{x^2}$

. Dado que f es una función definida por $f(x)=x^2+3x+1$.
a. $f(0)$
b. $f(3)$
c. $f(h)$
d. $f(3h)$
e. $f(x+h)$, $f(x)+f(h)$

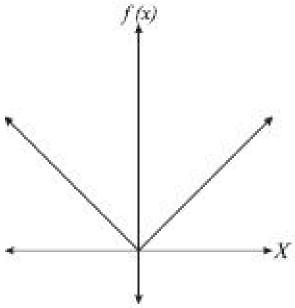
. Sea $f(x)=4x^2-5x+1$, determine $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
. Sea $f(x)=\sqrt{x}$, determine $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
. Hallar el dominio de:
a. $g(x)=\sqrt{x(x-2)}$
b. $h(x)=\sqrt{x^2-9}$
c. $f(x)=\begin{cases} x-1 & si\ x<3 \\ 5 & si\ x=3 \\ 2x+1 & si\ x>3 \end{cases}$

. Dada $f(x)=\frac{3}{x}$ calcule
a. $f(1)$
b. $f(6)$
c. $f(1⁄4)$
d. $f(x-3)$
e. $\frac{f(3)}{f(h)}$
f. $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, h\neq 0$

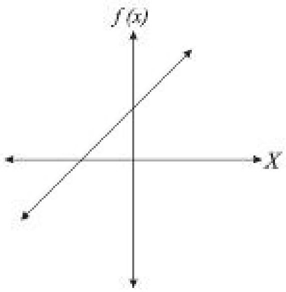
. Encuentre el Dominio e imagen de las siguientes funciones:
a. $f(x)=3x-1$
b. $g(x)=x^2+1$
c. $h(x)=\sqrt{x-1}$
d. $T(x)=\frac{x+1}{x-1}$
e. $h(x)=|x-3|$
f. $h(x)=\begin{cases} -2 & si\ x\leq 3 \\ 2 & si\ x>3 \end{cases}$
g. $h(x)=\begin{cases} -2 & si\ x\leq 3 \\ 2 & si\ x>3 \end{cases}$

. Halle el dominio e imágenes de las siguientes funciones:

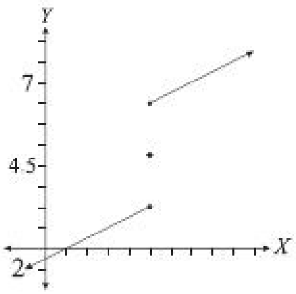
a.



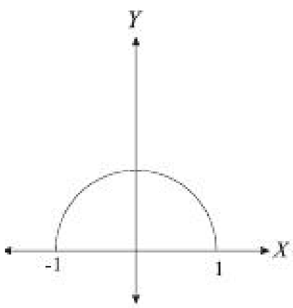
b.



c.

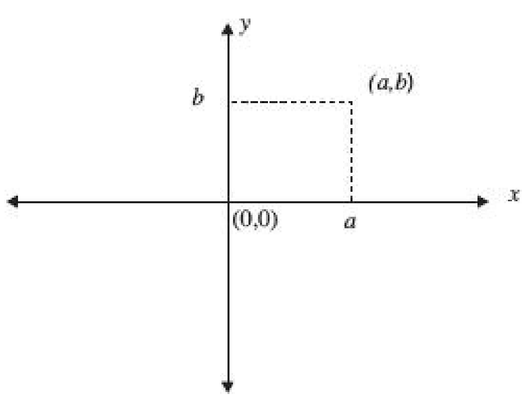


d.



5.1.4. Gráficas de funciones reales

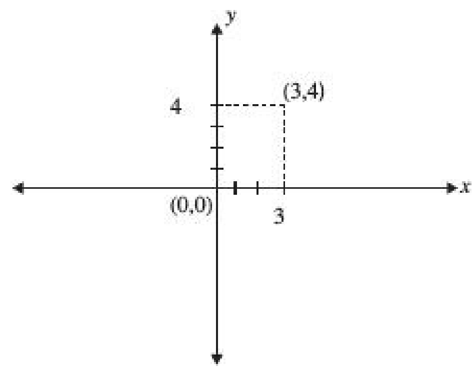
Una manera de observar el comportamiento de una función es graficándola. La estrategia correcta de graficar una función es ubicar las coordenadas (x, y) en un plano cartesiano, donde los ejes coordenados, uno es el eje horizontal o de las x y el otro es el eje vertical o de las y. El punto de intersección de los ejes se llama **origen** y el plano se denomina el **plano cartesiano**.



Una vez establecidos los ejes coordenados, se ubica la pareja ordenada de números reales (a,b) donde a se denomina abcisa y representa la distancia del punto al eje x , mientras que b se denomina la ordenada y representa la distancia del punto al eje y.

Ejemplo

Ubicar (3,4) en el plano cartesiano.



Solución

De acuerdo a los parámetros mencionados anteriormente para ubicar un punto (a,b) en el plano cartesiano, se puede graficar una función $y=f(x)$**.**

Definición: se denomina *gráfica de una función* $y=f(x)$ al conjunto de puntos (x,y) donde $y=f(x)$ Gra $f(f)=\{(x,y)$ tales que $y=f(x), x\in Dm(f)\}$

Ejemplo 1

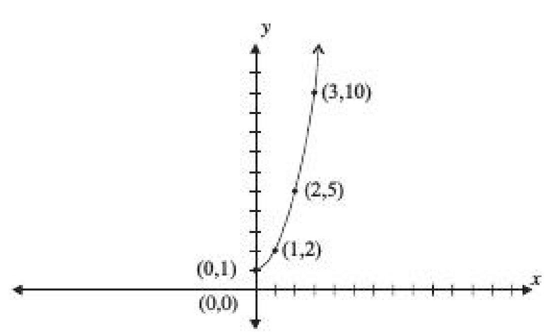
Graficar la función $f(x)=x^2+1$

Solución

Al graficar la función para $x\geq 0$ en los números 0, 1, 2, 3 se obtienen los valores 1, 2, 5, 10; estos valores se pueden tabular en la tabla.

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	2	5	10

Estos valores se pueden representar en un plano cartesiano y unirlos con un trazo continuo.



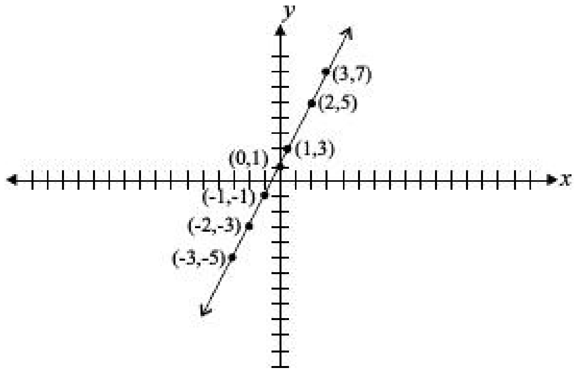
Ejemplo 2

Graficar $y = 2x + 1$

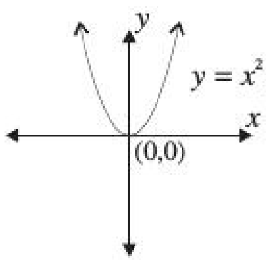
Solución

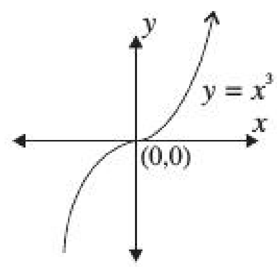
Tabulando se tiene:

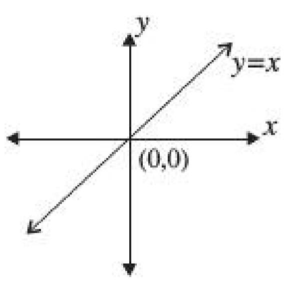
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-5	-3	-1	1	3	5	7

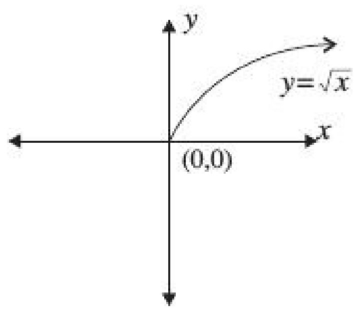


Ilustremos otras gráficas de funciones: $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x$ y $y=\sqrt{x}$









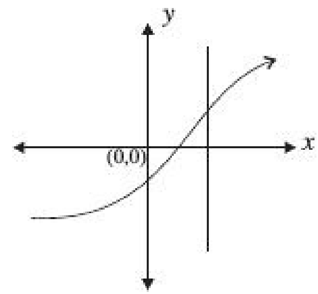
La gráfica de una función ayuda a establecer sus propiedades intuitivamente.

5.1.5. Prueba de la recta vertical

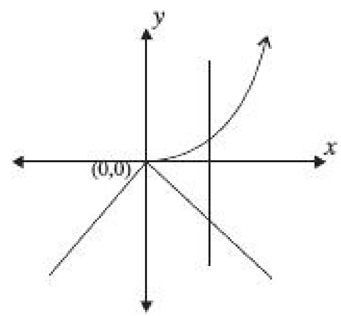
La prueba de la recta vertical es un criterio geométrico que sirve para establecer si una relación es función o no.

> **Definición:** una curva en el plano cartesiano corresponde a la gráfica de una función si y sólo si toda recta vertical que intersecta a la curva en un único punto.

Este criterio sirve para establecer que a cada elemento del conjunto de salida solo le corresponde una única imagen.



Es Función



No es Función

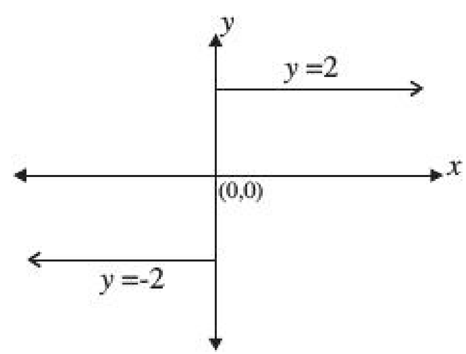
Ejemplo 1

Graficar la función, hallar dominio e imagen:

$$f(x)=\begin{cases}2 & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\\ -2 & \text{si } x<0\end{cases}$$

Solución

a. Para $x<0$ se tiene la función constante $f(x) = -2$, la imagen de $x = 0$ es $f(0) = 0$ y para $x>0$ se tiene la función constante $f(x) = 2$.



b. El dominio de f es $Dm(f) = (-\infty, \infty)$ y la imagen es $Im(f) = \{-2, 0, 2\}$

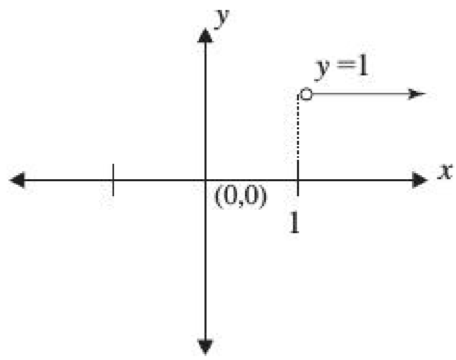
Ejemplo 2

Hallar dominio e imagen y la gráfica de la función definida:

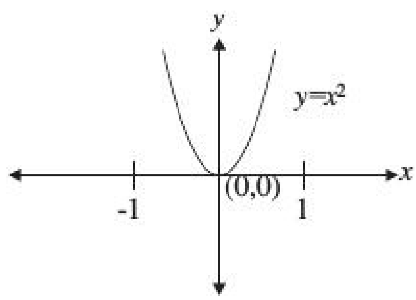
$$f(x)=\begin{cases}1 & si \quad x>1\\ x^2 & si \quad -1\leq x\leq 1\\ 1 & si \quad x<-1\end{cases}$$

Solución

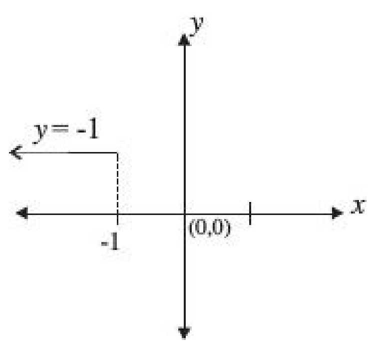
a. Si $x > 1$, se obtiene la función constante $f(x)=1$ y su gráfica es:



b. Si $-1\leq x\leq 1$, se obtiene la gráfica $y = x^2$.

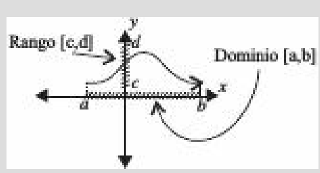


c. Si $x< -1$, se obtiene la gráfica $y = -1$.

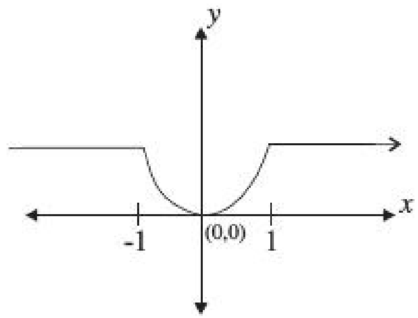


Uniendo las tres gráficas se obtiene que el dominio y la imagen es:

Nota: *Es importante tener en cuenta que el dominio de f es la proyección de f sobre le eje x , mientras que la imagen es la proyección de f sobre el eje y .*



Dm(*f*)=[*a*, *b*] y *im*(*f*)=[*c*, *d*]



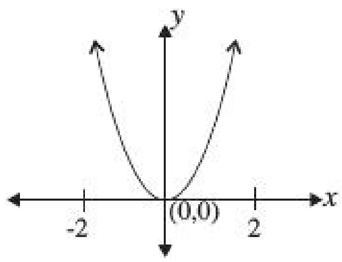
$$Dm(f)=(-\infty,\infty) \text{ e } Im(f)=[0,1]$$

Ejemplo 3

Hallar dominio e imagen y la gráfica de la función $f(x)=x^2$ en el intervalo $[-2, 2]$

Solución

El dominio e imagen de $f(x)=x^2$ en el intervalo $[-2, 2]$ es:

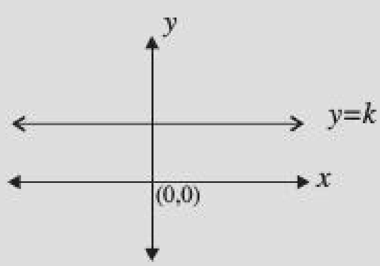


$$Dm(f)=[-2,2] \text{ e } Im(f)=[0,4]$$

5.1.6. Clasificación de funciones

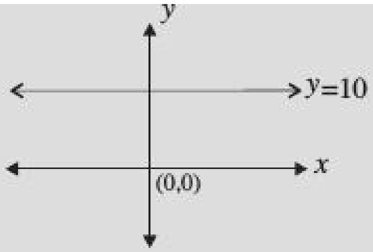
Clasifiquemos algunas funciones que se utilizan usualmente en Cálculo, con su respectiva gráfica, dominio e imagen.

A. Función constante



La ecuación de la forma $f(x)=k$ se llama función constante, para cualquier valor de x su imagen es k.

En particular si $k=10$ la gráfica es, donde el dominio e imagen de f es:



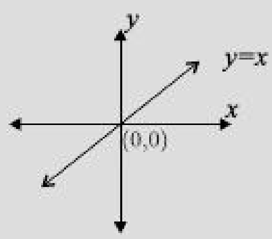
$Dm(f)=(-\infty,\infty)$ e $Im(f)=\{10\}$

B. Función potencia

Una ecuación de la forma $f(x)=x^n$ donde la base es una variable y n una constante se llama función potencia. Tomemos los siguientes casos:

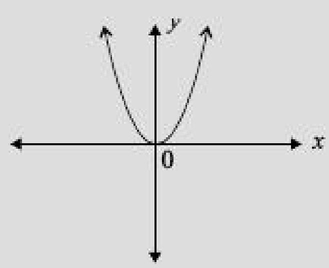
i. Para $n \in Z^+$ Si $n=1$ la función se convierte en $f(x)=x$**,** y se denomina función idéntica; su gráfica es una recta que pasa por el origen donde el dominio e imagen es:

$Dm(f)=(-\infty,\infty)$ e $Im(f)=(-\infty,\infty)$



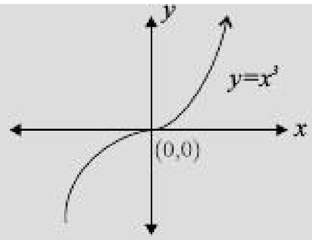
ii. Para $n=2$ la función se convierte en$f(x)=x^2$ y se denomina función cuadrática, donde su dominio e imagen es:

$Dm(f)=(-\infty,\infty)$ e $Im(f)=[0,\infty)$



iii. Si $n=3$ la función se convierte en $f(x)=x^3$, y se denomina función cúbica, donde su dominio e imagen es:

$Dm(f)=(-\infty,\infty)$ e $Im(f)=[-\infty,\infty)$



Generalizando las situaciones anteriores para la función $f\,(x)= x^n$ se puede afirmar lo siguiente:

$$f(x)=\begin{cases} x^n \text{ es función par, si } n \text{ es par} \\ x^n \text{ es función impar, si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Para explicar la afirmación anterior definamos a continuación qué es una función par e impar.

C. Función par

Definición: *Si una función f satisface* $f(-x)=f(x)$, *se dice que la función es par, para todo x del dominio de f.*

Ejemplo 1

Si tomamos el caso para $n=2$ par, la función se convierte en $f(x)=x^2$ que es una función par, porque $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$; por lo tanto $f(-x)=f(x)$.

Ejemplo 2

La función $f(x)=x^4+1$ es par porque $f(-x)=(-x)^4+1=x^4=+1f(x)$.

Por lo tanto $f(-x)=f(x)$, esto significa que la gráfica tiene simetría con respecto al eje y.

D. Función impar

Definición: *Si una función f satisface la condición* $f(-x)= -f(x)$, *es una función impar en todo su Dominio*. Esto significa que la gráfica es simétrica con respecto al origen.

Si se toma $n=3$ impar, obtenemos la función $f(x)=x^3$ que es una función impar porque $f(-x)=(-x)^3= -x^3= -f(x)$.

Por lo tanto $f(-x)= -f(x)$ es una función impar.

Ejemplo 1

Verificar que $f(x)=3x^5+2x^3+5x$ es una función impar.

Solución

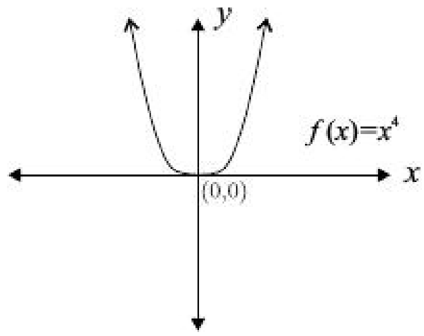
Sea $f(-x)=3(-x)^5+2(-x)^3+5(-x)$

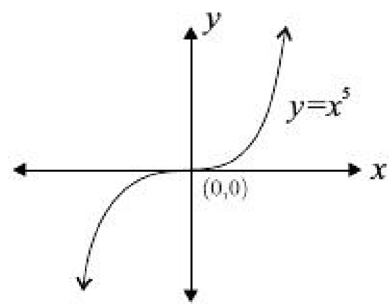
$$\begin{aligned} &=-3(x)^5-2(x)^3-5x \\ &=-(3x^5+2(x)^3+5x) \\ &=-f(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(-x)=-f(x)$.

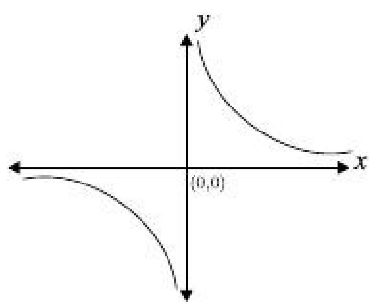
Ejemplo 2

Si tomamos n=4 y n=5 las gráficas correspondientes son:





Retomando el tema de la función potencial $f\,(x)= x^n$ y tomando a $n= -1$ la función se convierte en $f(x)=x^{-1}=\frac{1}{x}$, cuya gráfica es:



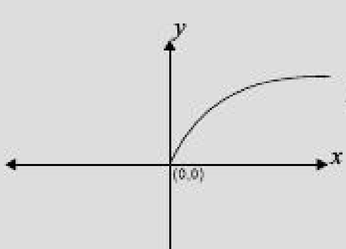
$Dm(f)=(-\infty,\infty)\cup(0,\infty)$ e $Im(f)=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

E. Función raíz

Si $n=\frac{1}{k}$ donde $k\in Z^+$, la función $f(x)=x^n$ para $k\geq 2$ se convierte en

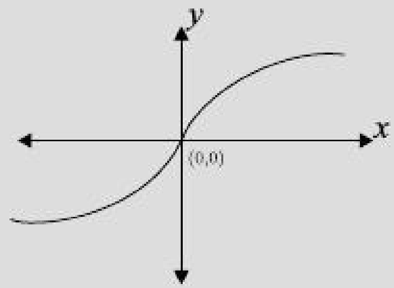
$f(x)=x^{\frac{1}{k}}=\sqrt[k]{x}$

Si k=2, la función se convierte en $f(x)=\sqrt[2]{x}=\sqrt{x}$ que se denomina raíz cuadrada:



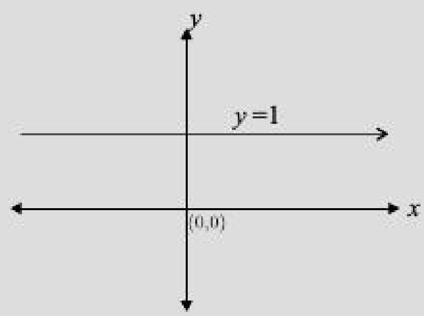
$Dm(f)=[0,\infty)$ e $Im(f)=[0,\infty)$

Para k=3, la función se convierte en $f(x)=\sqrt[3]{x}$ cuya gráfica es:



$Dm(f)=(-\infty,\infty)$ e $Im(f)=(-\infty,\infty)$

F. Función constante $f(x)=1$ Si $k=0$



Si tomamos a $n=0$, la función se convierte en $f(x)=x^0=1$
$Dm(f)=(-\infty,\infty)$ e $Im(f)=\{1\}$

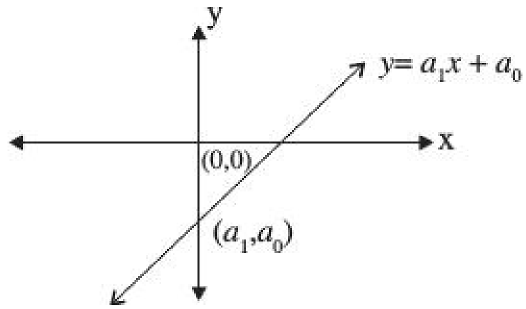
G. Función polinómica

Definición: si una función tiene la forma

$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$ donde $a_n, a_{n-1}, ... a_0$ son constantes, con $a_n \neq 0$, entonces se denomina función polinómica de grado n.

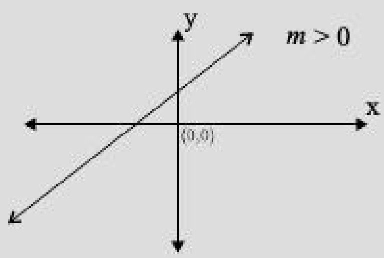
Ejemplo 1

La función $f(x)=2x^3+\sqrt{2}x^2+4x-1$ es un polinomio de grado 3, si n=1 la función se convierte en una función lineal $f(x)=a_1x+a_0$ que es un polinomio de grado uno, donde $a_1=m$ es la pendiente de la recta y a_0 es el punto de corte con el eje y.

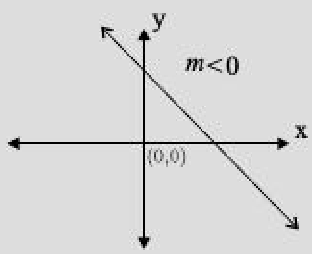


La pendiente $m=a_1$ nos da una idea de cómo trazar la recta; consideremos los siguientes casos:

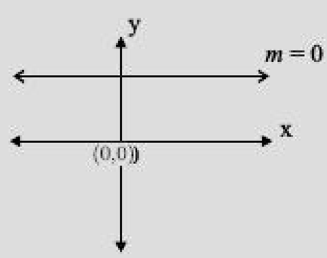
i. Si $m= a_1 > 0$ se tiene una gráfica hacia la derecha con pendiente positiva:



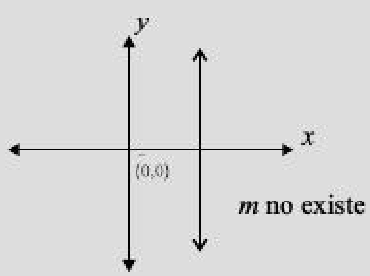
ii. Si $m=a_1<0$ se tiene una gráfica hacia la izquierda con pendiente negativa:



iii. Si $m=a_1=0$ la gráfica es una recta paralela al eje x con pendiente cero 0:



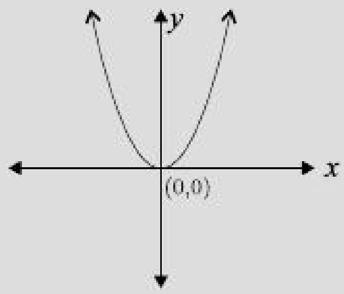
iv. Si la gráfica es una recta paralela al eje y, entonces no existe pendiente:



Si $n=2$ y $a_2\neq 0$ la función se convierte en $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$, y se denomina ***función cuadrática***, y la gráfica se llama una ***parábola***. Consideremos los siguientes casos:

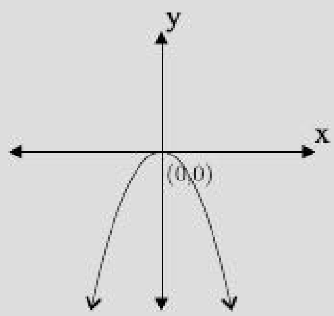
i. Si $a_2>0$, $a_2\neq 0$ la gráfica de la función cuadrática abre hacia: arriba:

figura 1



ii. Si $a_2<0$, y $a_2\neq 0$, la gráfica de la función abre hacia abajo>

figura 2



Definición: el ***vértice de la parábola*** es el punto máximo o mínimo de una parábola, es decir:

Si $a_2>0$, existe en el vértice un punto mínimo en la parábola (figura 1).

Si $a_2<0$, existen el vértice un máximo en la parábola (figura 2).

El vértice se calcula de la siguiente forma:

$$V=\left(\frac{-a_1}{2a_2}, f\left(\frac{-a_1}{2a_2}\right)\right)$$

Ejemplo 1

Graficar $f(x)=x^2+9x+20$

Solución

Sea $a_2=1$, $a_1=9$ y $a_0=20$, calculemos el vértice.

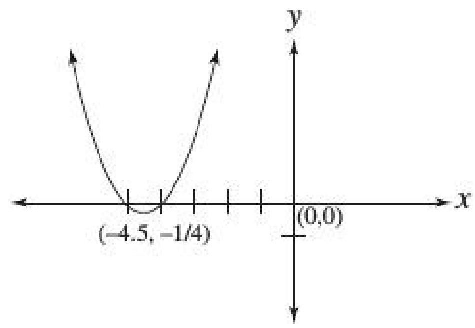
$V=\left(\frac{-9}{2(1)},f\left(\frac{-9}{2}\right)\right)=\left(\frac{-9}{2},f\left(\frac{-9}{2}\right)\right)$

Como $f\left(\frac{-9}{2}\right)=\left(\frac{-9}{2}\right)^2+9f\left(\frac{-9}{2}\right)+20$

$$=\frac{81}{4}-\frac{81}{2}+20$$

$$=\frac{81-162+80}{4}=-\frac{1}{4}$$

Por lo tanto el vértice de la parábola es $\left(-4{,}5,-\frac{1}{4}\right)$, además $a_2=1>0$, la función abre hacia arriba como se muestra en la gráfica.

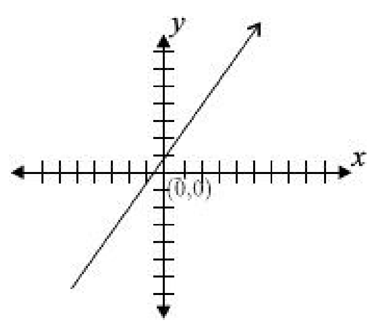


Ejemplo 2

Graficar la función $f(x)=2x+1$

Solución

La pendiente es $m=2$, significa que la gráfica va hacia la derecha y corta al eje y en (0,1).



$Dm(f)=(-\infty,\infty)$ e $Im(f)=(-\infty,\infty)$

H. Función racional

Definición: una función racional es el cociente entre dos funciones, es decir:

$$f(x)=-\frac{g(x)}{h(x)}$$

Donde g y h son polinomios; para $h(x)\neq 0$ se tiene que el dominio son todos los x tales que $h(x)\neq 0$.

Ejemplo

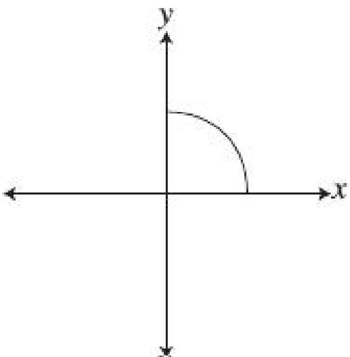
$$f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$$

El dominio de la función es: $Dm(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$, vemos que el único valor que no puede tomar f en el dominio es para $x = -1$.

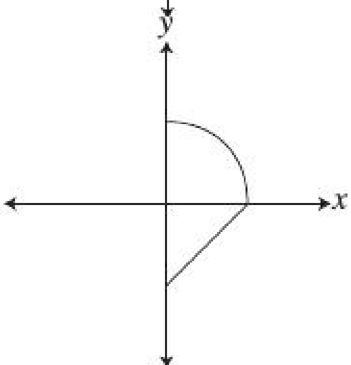
5.2. Ejercicios

. Aplicando la prueba de la recta horizontal, verifique si la relaciónes función o no.

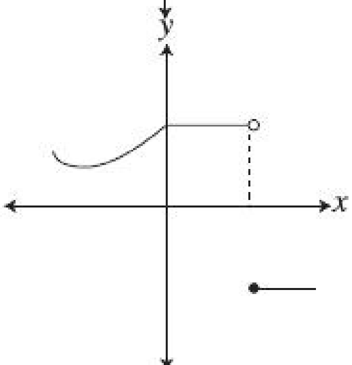
a.



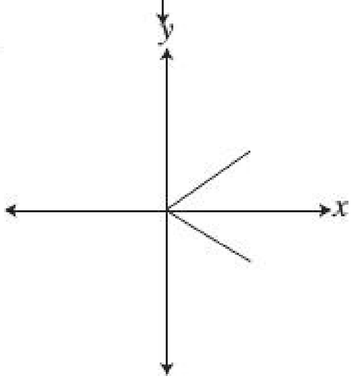
b.

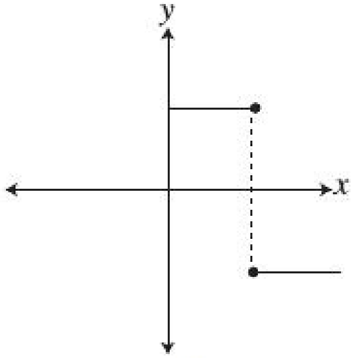


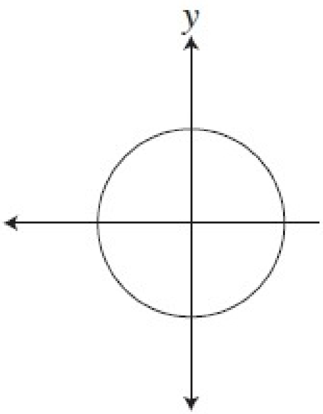
c.



d.



e. 

f. 

. Grafique las siguientes funciones y halle sus dominios

a. $f(x)=x^2+3$

b. $f(x)=-x+1$

c. $f(x)=-x^2-1$

d. $f(x)=\sqrt{x}$

e. $f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x<0 \\ 1-x & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$

f. $f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x\leq -1 \\ x^2 & \text{si} \quad x>-1 \end{cases}$

g. $T(x)=\begin{cases} x+9 & \text{si} \quad x<-3 \\ -2x & \text{si} \quad |x|\leq 3 \\ -6 & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$

h. $h(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x\geq 2 \\ -1 & \text{si} \quad x<2 \end{cases}$

. Graficar las siguientes parabolas encontrando su vertice:

a. $f(x)=x^2+x+11$

b. $g(x)=x^2+2x-1$

c. $h(x)=-x^2+2x-1$

. Clasifique cada función como función potencia, función raiz, polinomio, racional, trigonometrica, función exponencial o función logaritmica:

a. $f(x)=\sqrt[4]{x}$

b. $g(x)=\sqrt{1+x^2}$

c. $g(x)=3x^2+4x+12$

d. $r(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$
e. $h(x)=Sen(2x)$
f. $r(x)=Ln(x)$
g. $y=\dfrac{x+5}{x-1}$
h. $y=x^9$
i. $y=3t^2+4t-\pi$
j. $y=Cos\theta+Sen\theta$

. Verificar si la función es par o impar

1. $y=x^2+1$
2. $y=x^3$
3. $y=Sen\theta$
4. $y=Cosx$
5. $y=|x|$

I. Función algebraica

La función algebraica es aquella que se construye a partir de operaciones algebraicas de funciones como: suma, diferencia, producto y cociente.

5.1.7. Álgebra de funciones

Definición: sean f y g dos funciones y sean D_f y D_g los dominios respectivos de f y g, entonces se define $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ y $^f/_g$ como la suma, producto y cociente de funciones respectivamente.

i. $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$; $Dm(f+g)$: $D_f \cap D_g$
ii. $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$; $Dm(f-g)$: $D_f \cap D_g$
iii. $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$; $Dm(f\cdot g)$: $D_f \cap D_g$
iv. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)};\ Dm\left(\dfrac{f}{g}\right): D_f \cap D_g \text{ con } g(x)\neq 0$

Ejemplo 1

Sea $f(x)=x^2+1$ y $g(x)=\sqrt{x}$

Hallar las funciones algebraicas $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ sus dominios.

Solución

El dominio de $f(x)=x^2+1$ es $Dm(f)=(-\infty,\infty)$ y el dominio de $g(x)=\sqrt{x}$ es $Dm(g)=[0,\infty)$.

- $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(x^2+1)+\sqrt{x}=x^2+1+\sqrt{x}$

  $Dm(f+g)=(-\infty,\infty)\cap[0,\infty)=[0,\infty)$
- $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(x^2+1)-\sqrt{x}=x^2+1-\sqrt{x}$

  $Dm(f-g)=(-\infty,\infty)\cap[0,\infty)=[0,\infty)$
- $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(x^2+1)\cdot\sqrt{x}=\sqrt{x}\cdot x^2+\sqrt{x}$

  $Dm(f\cdot g)=(-\infty,\infty)\cap[0,\infty)=[0,\infty)$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}}$

  $Dm\left(\dfrac{f}{g}\right)=(0,\infty)$

Ejemplo 2

Calcular $(f+g)(2)$, $(f-g)(2)$, $(f\cdot g)(2)$ y $\left(\dfrac{f}{g}\right)(2)$ en el ejemplo anterior.

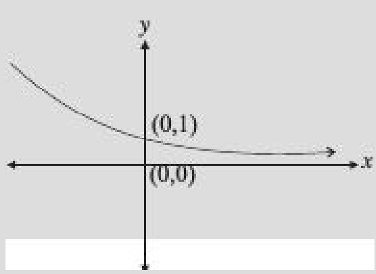
Solución

- $(f+g)(2)=2^2+1+\sqrt{2}=4+1+\sqrt{2}=5+\sqrt{2}$
- $(f-g)(2)=2^2-\sqrt{2}-1=4-\sqrt{2}-1=3-\sqrt{2}$
- $(f\cdot g)(2)=\sqrt{2}\cdot 2^2+\sqrt{2}=4\sqrt{2}+\sqrt{2}$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(2)=\dfrac{2^2+1}{\sqrt{2}}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

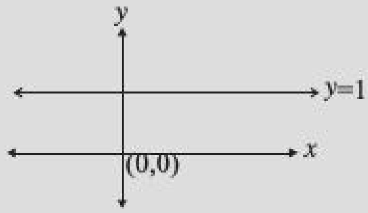
5.1.8. Función exponencial

Definición: la función exponencial tiene la forma $f(x)=a^x$, donde la base es una constante mayor que cero y el exponente es una variable; para esta función se pueden describir tres casos:

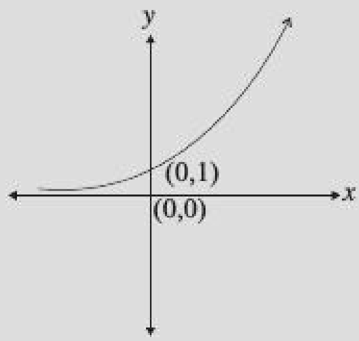
i. Si $0<a<1$; $Dm(f)=(-\infty,\infty)$ e $Im(f)=(0,\infty)$



ii. Si a=1, se tiene que $f(x) = a^x = 1^x = 1$; $Dm(f) = (-\infty, \infty)$ e $Im(f) = \{1\}$



iii. Si $a > 1$; $Dm(f) = (-\infty, \infty)$ e $Im(f) = (0, \infty)$

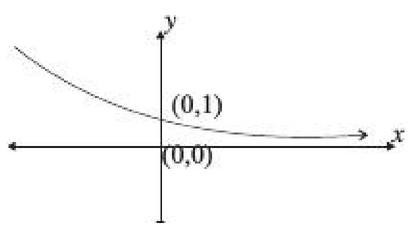


Ejemplo

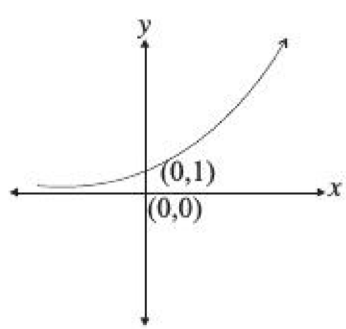
Graficar $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ y $f(x) = 3^x$

Solución

Como $0 < \frac{1}{3} < 1$ la gráfica es:

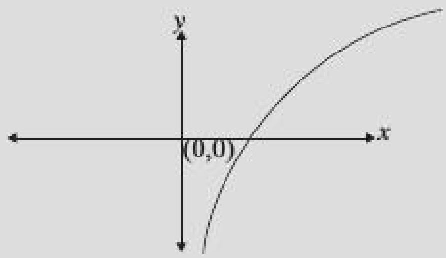


Graficar $f(x) = 3^x$
Como 3>1 la gráfica es:

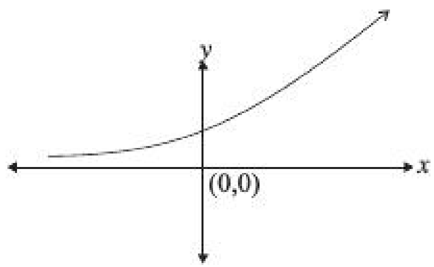


5.1.9. Función logarítmica

Definición: la función logarítmica tiene la forma $f(x)=log_a x$ que se denomina función logarítmica de base a, la gráfica es:

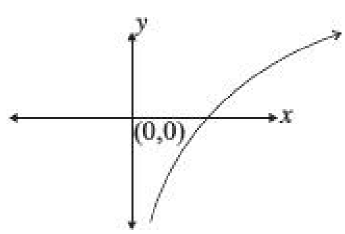


Si tomamos el caso particular de $a=e$ donde e es el número irracional llamado número de Euler, la función exponencial toma la forma $f(x)=e^x$, como $e=2.71>1$. La gráfica de esta función es:



$Dm(f)=(-\infty,\infty)$ e $Im(f)=(0,\infty)$

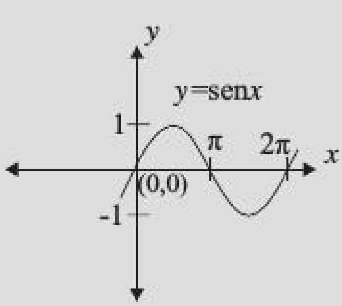
Por otro lado el $log_a x=f(x)$ tomando a $a=e$, la función se convierte en $log_e x=lnx$, el logaritmo en base e es el mismo logaritmo natural y se escribe $f(x)=lnx$ su gráfica es:

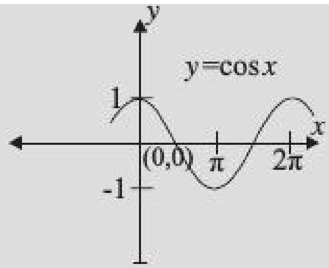


$Dm(f)=(0,\infty)$ e $Im(f)=(-\infty,\infty)$

5.1.10. Funciones trigonométricas

Mencionemos inicialmente las funciones trigonométricas seno y coseno; $f(x)=Senx$ y $f(x)=Cosx$, cuyas gráficas respectivamente son:





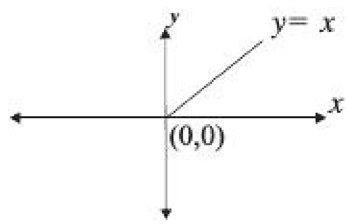
Más adelante se mencionan otros aspectos de estas gráficas.

5.1.11. Función valor absoluto

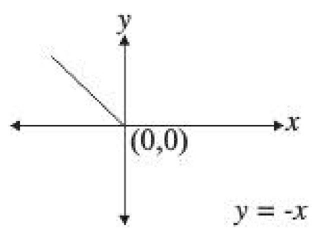
$f(x)=|x|$ recordando la definición de valor absoluto se tiene:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & si\ x\geq 0 \\ -x & si\ x<0 \end{cases}$$

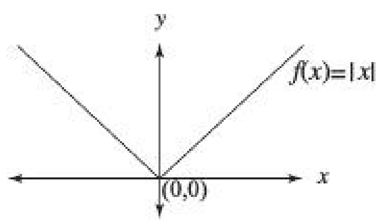
. Si $x\geq=0$, se tiene la función $f(x)=x$



. Si $x<=0$, se tiene la función $f(x)=-x$



Uniendo las dos gráficas se tiene lo siguiente:



$$Dm(f)=(-\infty,\infty) \text{ e } Im(f)=[0,\infty)$$

Nota: *La intención es mostrar inicialmente una lista de funciones con sus respectivas gráficas y clasificarlas, para luego aplicarlas más adelante en el tema de transformación de funciones.*

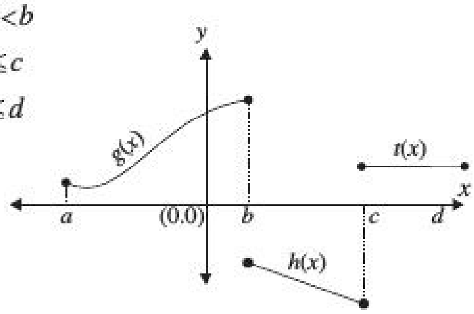
Es una función par porque $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$, así $f(-x) = f(x)$

5.1.12. Función a trozos

Este tipo de función se define por pedazos de funciones definidas en intervalos diferentes.

Ejemplo 1

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & si\ \ a \leq x < b \\ h(x) & si\ \ b \leq x \leq c \\ t(x) & si\ \ c < x \leq d \end{cases}$$



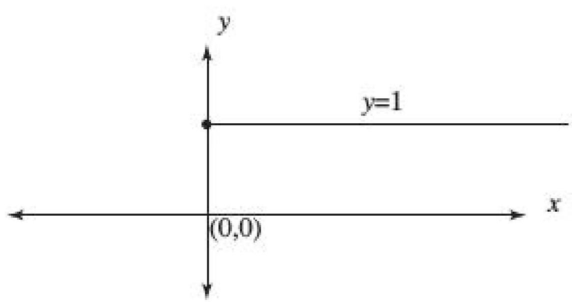
Ejemplo 2

Trazar la gráfica y hallar dominio e imagen de:

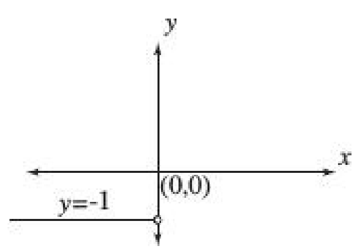
Solución

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ \ x \geq 0 \\ -1 & si\ \ x < 0 \end{cases}$$

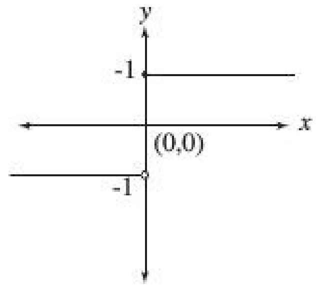
. Para $x \geq 0$ se tiene la función $f(x) = 1$ su gráfica es:



. Para $x < 0$ se tiene la función $f(x) = -1$ su gráfica es:



La gráfica de las dos funciones anteriores en un solo plano es:

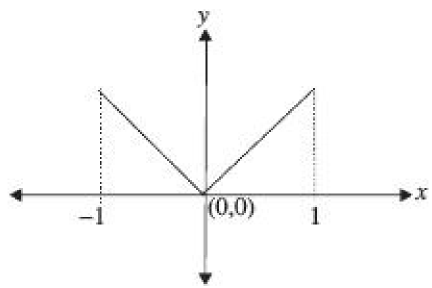


Ejemplo 3

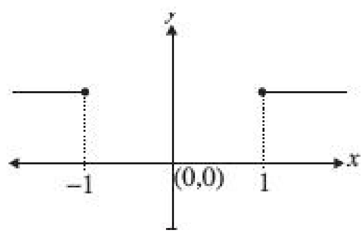
Trazar la gráfica de: $f(x)=\begin{cases} |x| & si \quad -1\leq x\leq 1 \\ 1 & si \quad x>1 \ \ o \ \ x<-1 \end{cases}$

Solución

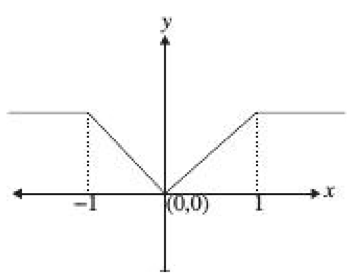
. Si $-1\leq x\leq 1$, se tiene la función valor absoluto $f(x)=|x|$



. Si $x>1$ o $x<-1$, se tiene la función constante $f(x)=1$



Uniendo las dos gráficas en un solo plano cartesiano se tiene:

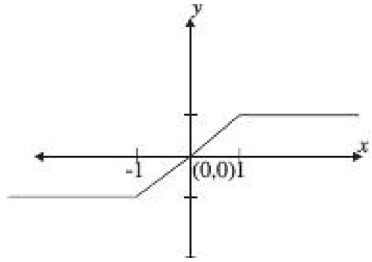


$$Dm(f)=(-\infty,\infty) \text{ e } Im(f)=[0,1]$$

Ejemplo 4

Trazar la gráfica $f(x)=\begin{cases} x & si \ -1\leq x\leq 1 \\ 1 & si \ \ x>1 \\ -1 & si \ \ x<-1 \end{cases}$

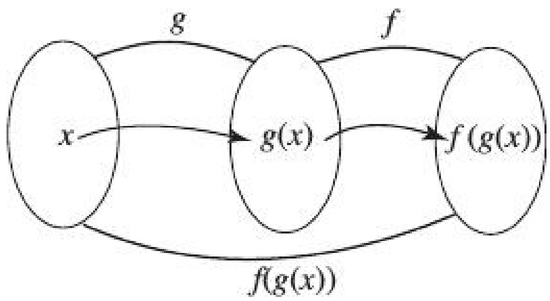
Solución



$Dm(f) = (-\infty, \infty)$ e $Im(f) = [-1,1]$

5.1.13. Función compuesta

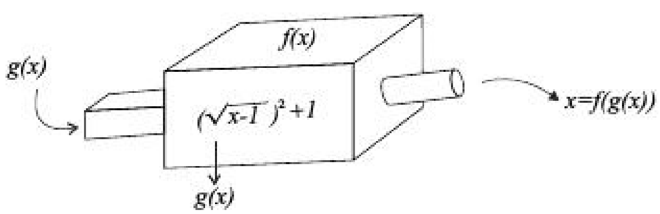
Existe una forma de combinar funciones para obtener una nueva función, llamada composición de funciones.



Definición: *dadas dos funciones f y g la función compuesta de f y g, que se denota* $f \circ g$ *se define como:* $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, *y se lee f compuesta g.*

Ejemplo 1

Si $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \sqrt{x-1}$ recordando el ejemplo de la máquina, la función compuesta se puede interpretar así:



Supongamos que se tienen dos máquinas llamadas $f(x)$ y $g(x)$, cada una de ellas cumple una función diferente, por ejemplo f eleva al cuadrado y suma una unidad; es decir $f(x)^2+1$, mientras que g resta una unidad y extrae la raíz cuadrada. Si se evalúa $x=2$ en dichas funciones se tiene lo siguiente:

$$f(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5 \text{ y } g(2) = \sqrt{2-1} = \sqrt{1} = 1$$

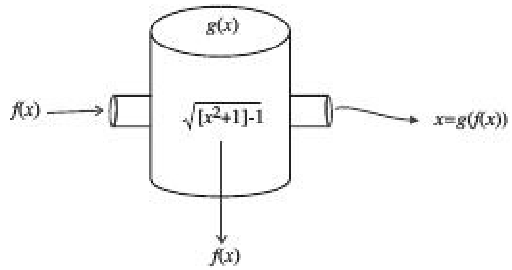
La pregunta es: ¿qué sucede si en vez de evaluar a $x=2$ evaluamos en f a $x=g(x)$?

De esta manera entra $g(x)$ en la máquina $f(x)$ y es evidente que tenemos que preguntar quién es $g(x)$, por lo tanto la máquina realiza la siguiente operación.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = [g(x)]^2 + 1 = \left(\sqrt{x-1}\right)^2 + 1 = (x-1)+1 = x$$

Por lo tanto $(f \circ g)(x) = x$

Supongamos que se hace lo contrario, es decir evaluar a $f(x)$ dentro de $g(x)$.



De esta manera entra $f(x)$ en la máquina $g(x)$, y es evidente que tenemos que preguntar quién es $f(x)$, por lo tanto la máquina realiza la siguiente operación.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)-1} = \sqrt{x^2+1-1} = \sqrt{x^2} = x$$

Ejemplo 2

Si $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ y $g(x) = x^2$ hallar $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, $(f \circ g)(2)$, $(g \circ f)(2)$

Solución

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \dfrac{g(x)+1}{g(x)-1} = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 = \left[\dfrac{x+1}{x-1}\right]^2 = \dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}$
- $(f \circ g)(2) = \dfrac{2^2+1}{2^2-1} = \dfrac{5}{3}$
- $(g \circ f)(2) = \dfrac{2^2+2(2)+1}{2^2-2(2)+1} = \dfrac{9}{1} = 9$

5.3. Taller de repaso

- Graficar las siguientes funciones, con sus dominios e imágenes:

a. $f(x) = x^2 + 1$
b. $f(x) = x^3 - 1$
c. $f(x) = \sqrt{x}$
d. $f(x) = 3$
e. $f(x) = x - 1$
f. $f(x) = x^2 + 2x - 1$
g. $f(x) = x^4$
h. $f(x) = -3$
i. $f(x) = -x^2$

j. $f(x) = |x| + 1$

k. $f(x) = \begin{cases} x+2 & si\ x \le -1 \\ x^2 & si\ x > -1 \end{cases}$

l. $f(x) = \begin{cases} -1 & si\ x < -1 \\ 1 & si\ -1 \le x \le 1 \\ -1 & si\ x > -1 \end{cases}$

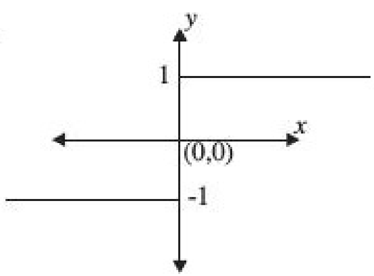
m. $f(x) = \begin{cases} x & si\ x \le 0 \\ x+1 & si\ x > 0 \end{cases}$

n. $f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 3 \\ 1 & si\ x \ge 3 \end{cases}$

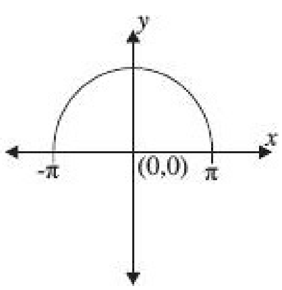
o. $f(x) = \begin{cases} |x| & si\ |x| \le 1 \\ 1 & si\ |x| > 1 \end{cases}$

. Determinar si la curva dada corresponde a la gráfica de una función; si es así obtenga el dominio e imagen.

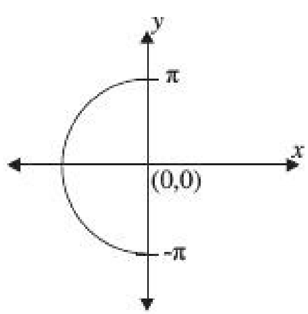
a.



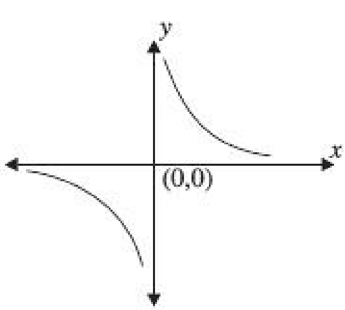
b.



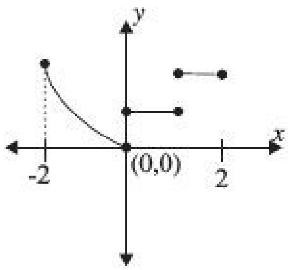
c.



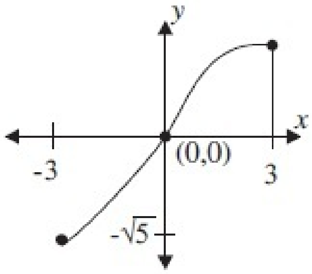
d.



e.



f.



. Clasificar las siguientes funciones:

a. $f(x) = -\pi$
b. $f(x) = x^5$
c. $f(x) = x^{-2}$
d. $f(x) = -x$
e. $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$
f. $f(x) = \sqrt[3]{x}$
g. $f(x) = 3x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 2x - 1$

. Graficar las siguientes rectas:

a. $y = \frac{1}{2}x + 1$
b. $y = -x + 2$
c. $y = 3$
d. $x = -1$
e. $y = 0$
f. $x = 0$

. Calcular los vértices de las parábolas, hallar el máximo y el mínimo intersecciones con los ejes y trazar las gráficas:

a. $f(x) = x^2 + 2x - 1$
b. $f(x) = 3x^2 + 4x - 1$
c. $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

. Verificar si $f(x)$ es par o impar:

a. $\sqrt{1-x^2}$
b. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
c. $f(x) = 2x^5 - 7x^3 + 4x$
d. $f(x) = x^3$

. Si $f(x)=3x^2-1$ y $g(x)=6x^3+1$ hallar:

a. $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$ y $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

b. Hallar los dominios del numeral anterior.

c. Calcular $(f+g)(2)$, $(f-g)(3)$, $(f\cdot g)(5)$ y $\left(\frac{f}{g}\right)(2)$

. Graficar las siguientes funciones:

a. $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$

b. $f(x)=4^x$

c. $f(x)=log_3 x$

d. $f(x)=e^x$

. Encuentre las siguientes composiciones de funciones y sus dominios: $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$ y $g\circ g$.

a. $f(x)=2x+3$, $g(x)=x+1$

b. $f(x)=x^2+1$, $g(x)=\sqrt{x}$

c. $f(x)=\sqrt{x-1}$, $g(x)=x^2$

d. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

. Encuentre $f\circ g\circ h$ si $f(x)=x^2+1$, $g(x)=x-1$ y $h(x)=\sqrt{x}$

. Encuentre $(f\circ g)(1)$, $(g\circ f)(2)$, $(f\circ f)(2)$ $(g\circ g)(3)$ si $f(x)=x^2+1$ y $g(x)=\sqrt{x}$

. Defina las siguientes funciones y determine el dominio de la función resultante:

a. $f+g$

b. $f-g$

c. $f\cdot g$

d. f/g

e. g/f

1. $f(x)=x-1$; $g(x)=x^2+1$
2. $f(x)=\sqrt{x}$; $g(x)=x^2+1$
3. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$; $g(x)=\dfrac{1}{x}$
4. $f(x)=\sqrt{x}$; $g(x)=x^2+1$
5. $f(x)=|x|$; $g(x)=|x+3|$

3. Defina las siguientes funciones y determine el dominio de la función resultante:

a. $f\circ g$

b. $g\circ f$

c. $f\circ f$

d. $g\circ g$

6. $f(x)=x-2$; $g(x)=x+5$

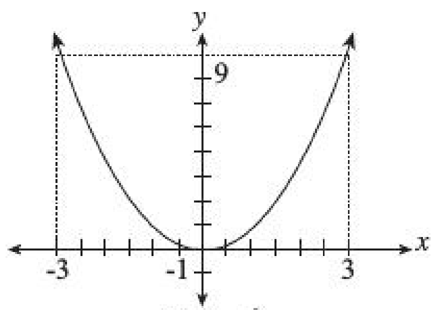
7. $f(x)=3-2x$; $g(x)=6-3x$
8. $f(x)=\sqrt{x-2}$; $g(x)=x^2-2$
9. $f(x)=x^2-1$; $g(x)=1/x$
10. $f(x)=|x|$; $g(x)=|x+12|$

4. Exprese h como composición de las funciones f y g
   a. $h(x)=\sqrt{x^2-1}$
   b. $h(x)=(3+x^2)^6$
   c. $h(x)=\sqrt{|x|+4}$

5.2. Función inyectiva o uno a uno

Algunas funciones cuando se evalúan para distintos números reales en su dominio, la imagen toma el mismo valor, por ejemplo en la gráfica de la función $y=f(x)=x^2$ se tiene que la imagen de -3 y 3 es la misma, es decir; dados dos elementos distintos del dominio $-3 \neq 3$ se tiene que sus imágenes $f(-3)=(-3)^2=9$ y $f(3)=(3)^2=9$ son iguales.

Función Cuadrática



$f(x)=x^2$

Para que una función sea inyectiva o uno a uno se requiere que dados dos elementos del dominio distintos sus imágenes deben tomar también valores distintos y no iguales como en el ejemplo anterior.

5.2.1. Definición de función uno a uno

Definición: *una función f con dominio A y recorrido B es inyectiva o uno a uno si cumple una de las siguientes condiciones:*

i. Dados dos elementos del domino distintos sus respectivas imágenes son distintas, es decir; *Si* $x_1 \neq x_2$ *entonces* $f(x_1) \neq f(x_2)$
ii. Si las imágenes de la función son iguales, entonces los elementos del dominio también son iguales, es decir *Si* $f(x_1) = f(x_2)$ *entonces* $x_1 = x_2$

Por lógica matemática se tiene que las condiciones anteriores son equivalentes, es decir, se cumple la ley del contra-recíproco. Si se tiene una implicación "$p \to q$" su contra-recíproco es "$\sim q \to \sim p$" así:

$$x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2) \leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$$

Ejemplo 1

Verifique con un ejemplo que la función $f(x)=x^2$ no es inyectiva o uno a uno.

Solución

Sean -3 y 3 dos elementos distintos del dominio de f, entonces se tiene que: $-3\neq 3$ y $f(-3)=9=f(3)$, es decir sus imágenes son iguales, así f no es uno a uno. En este ejemplo se aplicó la negación de una implicación; es decir, la negación de " $p \rightarrow q$" es " $p \wedge \approx q$".

Con la condición $f(x_1)=f(x_2)\rightarrow x_1=x_2$ se puede demostrar en forma general si una función f es uno a uno o inyectiva.

Ejemplo 2

Probar que la función $f(x)=2x+11$ es uno a uno.

Solución

Tomemos dos imágenes iguales $f(x_1)=f(x_2)$ y debemos probar que $x_1=x_2$, es decir

$$2x_1+1=2x_2+1 \text{ imágenes de la función}$$

Si $f(x_1)=f(x_2)$ entonces: $2x_1=2x_2$ Sumando -1

$$x_1=x_2 \text{ Multiplicando por } \frac{1}{2}$$

Así la función $f(x_1)=2x+11$ es uno a uno.

Ejemplo 3

Probar que $f(x) = x^2$ no es uno a uno.

Solución

Si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces: $x_1^{\,2} = x_2^{\,2}$ imágenes de la función

$$\sqrt{x_1^{\,2}} = \mp\sqrt{x_2^{\,2}} \text{ Raíz cuadrada}$$

$$x_1 = \mp x_2$$

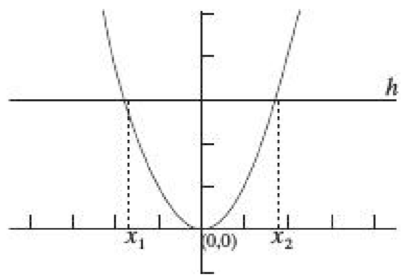
Así se observa que $x_1 = x_2$ o $x_1 = -x_2$. Luego se tiene la misma imagen, es decir $f(x_1) = f(x_2)$ para elementos distintos $x_1 \neq x_2$ del dominio, luego no se cumple la condición que si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x=x_2$, ya que para este ejemplo se tiene que: $f(x_1) = f(x_2)$ y $x_1 \neq x_2$. Por lógica matemática se tiene la negación de una implicación, es decir, la negación de la implicación es " $p \rightarrow q$" es " $p \wedge \approx q$".

También se puede probar que una función f es uno a uno o inyectiva si se conoce la gráfica de la función; este método es trazando cualquier línea horizontal a la gráfica.

5.2.2. Prueba de la recta horizontal

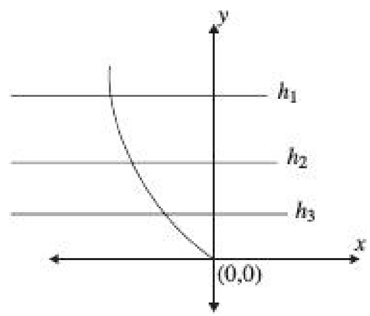
Definición: *una función f es uno a uno o inyectiva si y sólo si cumple que toda recta horizontal (h), corta a la gráfica en un solo punto.*

La función del ejemplo anterior $f(x)=x^2$ su gráfica representa una función que no es uno a uno por el criterio de la recta horizontal (h), ya que la recta horizontal corta más de un punto, en este caso corta dos puntos.



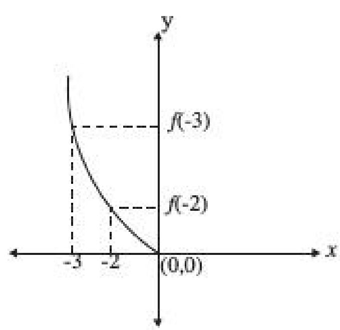
Una vez más se reafirma que $f(x_1) = f(x_2)$ y $x_1 \neq x_2$, así f no es uno a uno.

En el ejemplo anterior el dominio de la función f son los números reales R; si realizamos una restricción del dominio para que la función sea uno a uno así, sea la función $g(x)=x^2$ con dominio en $(-\infty,0)$.



Se observa que al trazar rectas horizontales, solo cortan a la gráfica de la función g en un solo punto, así la función g es uno a uno. Además si tomamos dos elementos del dominio distintos se tiene que: Si $-3\neq-2$ entonces $f(-3)\neq f(-2)$

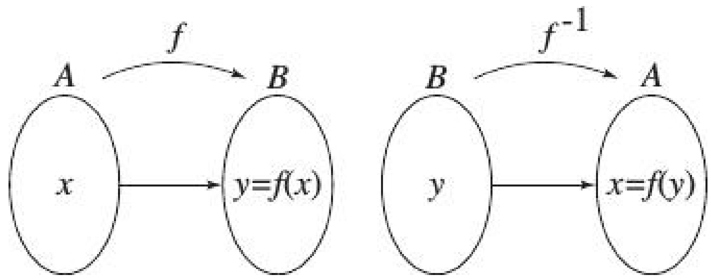
$(-3)^2\neq(-2)^2$
$9\neq4$



Se observa que cumple la condición que si $x_1\neq x_2$ entonces $f(x_1)\neq f(x_2)$, es decir, si tomamos dos elementos del dominio distintos sus imágenes también son distintas.

5.2.3. Función inversa

Sea f una función inyectiva o uno a uno con dominio A e imagen B, es decir $f{:}A\rightarrow B$, se puede definir una función f^{-1} con dominio B y rango A, es decir $f^{-1}{:}B\rightarrow A$, que es la función inversa de f, como se muestra en los siguientes diagramas de flechas.



Definición: *si f es una función uno a uno con dominio A* e *imagen B. Entonces la función* f^{-1} *con dominio B y rango A es la función inversa de f si se cumple*: $y = f(x) \leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

Ejemplo 1

Dada la función $y=f(x)=2x+11$, ya se probó que es uno a uno, luego tiene función inversa f^{-1}. Evaluemos la función f en algunos valores de x de su dominio, sean estos: $x= -2, -1, 0, \frac{1}{2}, 3$.

Solución

La función f tiene el siguiente dominio y rango respectivamente, $Dm(f)=R$ y $Im(f)=R$ es decir

$$
\begin{aligned}
&f : R \to R \\
&x \to y = f(x) = 2x + 1 \\
&-2 \to y = f(-2) = 2(-2) + 1 = -3 \\
&-1 \to y = f(-1) = 2(-1) + 1 = -1 \\
&0 \to y = f(0) = 2(0) + 1 = 1 \\
&\frac{1}{2} \to y = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 2 \\
&3 \to y = f(3) = 2(3) + 1 = 7
\end{aligned}
$$

El objetivo es encontrar una función inversa f^{-1} que invierta el efecto de la función f es decir:

$$
\begin{aligned}
&f^{-1} : R \to R \\
&y \to x = f^{-1}(y) \\
&-3 \to x = f^{-1}(-3) = -2 \\
&-1 \to x = f^{-1}(-1) = -1 \\
&1 \to x = f^{-1}(1) = 0 \\
&2 \to x = f^{-1}(2) = \frac{1}{2} \\
&7 \to x = f^{-1}(7) = 3
\end{aligned}
$$

¿Cómo encontrar la función inversa f^{-1} que permita realizar el proceso anterior?

De la definición de función inversa se tiene: $y=f(x) \leftrightarrow x=f^{-1}(y)$, es decir: $f:A \to B$, toma un x y lo envía en un y, es decir, $x \to y=f(x)$ y $f^{-1}:B \to A$, toma un y y lo envía en un x, es decir $y \to xf^{-1}(y)$.

Se observa que el dominio de f es la imagen de f^{-1} y la imagen de f es el dominio de f^{-1} así:

$Dm(f)=A=Im(f^{-1})$ y $Im(f)=B=Dm(f^{-1})$

Existe un intercambio de variables en el dominio y la imagen de la funciónf, luego para calcular la inversa se tiene: $y=f(x) \leftrightarrow x=f^{-1}(y)$.

Si intercambiamos las variables de *fb* se tiene: $x=f(y) \leftrightarrow y=f^{-1}(x)$, donde

$y=f^{-1}(x)$ es la función inversa de *f*.

Para el ejemplo anterior tenemos:

Sea $y=(x)$

$y=2x+1$, intercambiamos las variables x y y.
$x=2y+1$, se despeja y

$$y=\frac{x-1}{2}$$

Así la función inversa es $y=f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$

Si evaluamos en la función f^{-1} los valores anteriores de las imágenes de *fb* se verifica lo siguiente:

$$y=f^{-1}(-3)=\frac{-3-1}{2}=-2$$

$$y=f^{-1}(-1)=\frac{-1-1}{2}=-1$$

$$y=f^{-1}(1)=\frac{1-1}{2}=0$$

$$y=f^{-1}(2)=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$y=f^{-1}(7)=\frac{7-1}{2}=3$$

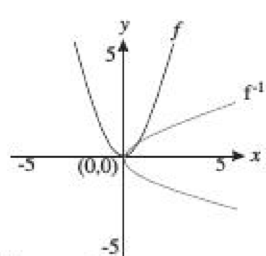
Ejemplo 2

Dada la función $f(x)=x^2$ encontrar:

. Su inversa f^{-1}.
. El dominio e imagen de las funciones f y f^{-1}.
. Graficar en el mismo plano las funciones f y f^{-1}.
. Calcular $f(2)$ y $f^{-1}(4)$.

Solución

Ya se probó que $f(x)=x^2$ no es uno a uno, luego f no tiene inversa; es decir, $f^{-1}(x)$ no es una función por el criterio de la recta vertical que corta a f^{-1} en más de un punto.



(a) $f(x)=x^2$

f^{-1} no es una función

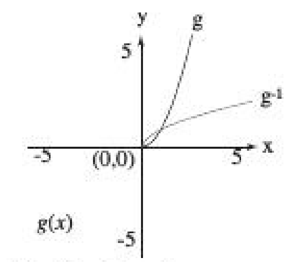
Existen varias formas de restringir el dominio de *f* y obtener una función creciente o decreciente de tal manera que sea una función uno a uno.

. Si restringimos el dominio de $f(x)=x^2$ para $x \geq 0$ se tiene:

$$y=f(x)$$
$$f(x)=x^2$$
$$y=x^2 \text{ Intercambiamos variables}$$
$$x=y^2 \text{ Despejamos } y$$
$$y=\sqrt{x}$$
$$\text{Así, } y=f^{-1}(x)=\sqrt{x}$$

. $Dm(f)=[0,\infty)Im(f^{-1})$ y $Im(f)=[0,\infty)=Dm(f^{-1})$

. Al graficar *f* y f^{-1} en el mismo plano se tiene:



(b) $g(x)=x^2, x>0$

g^{-1} es una función

Se observa que las gráficas de $f=g$ y $f^{-1}=g^{-1}$ son reflexiones una de la otra con respecto a la recta $y=x$; esto sucede en la gráfica de toda función *f* que tenga función inversa f^{-1}.

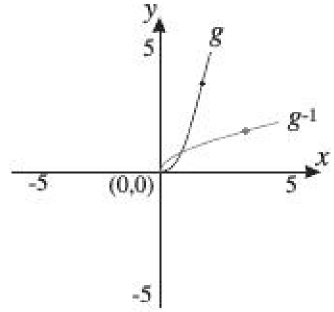
. Al evaluar $x=2$ en $f(x)$ y $x=4$ en $f^{-1}(x)$ se tiene:

$$y=f(x)=x^2$$
$$y=f(2)=(2)^2$$
$$y=4$$

En $f^{-1}(x)$ se tiene:
$$y=f^{-1}(x)=\sqrt{x}$$
$$y=f^{-1}(4)=\sqrt{4}$$
$$y=2$$

Se observa que el punto $(x, y) = (2, 4)$ está en *f* y el punto $(y, x) = (4,2)$ está en f^{-1} es decir $(x, y) \in f \leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$, esta definición es equivalente a decir:

$$y=f(x) \leftrightarrow x=f^{-1}(y)$$
$$4=f(2) \leftrightarrow 2=f^{-1}(4)$$



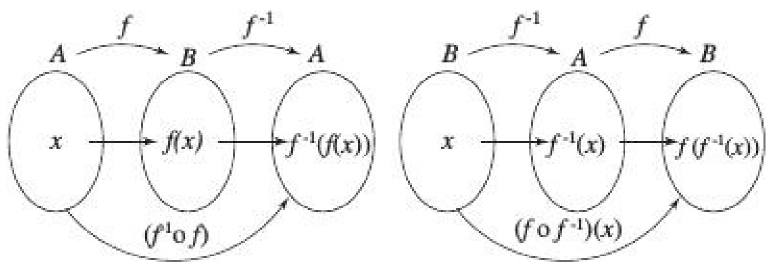
(b) $g(x)=x^2, x>0$

Si ubicamos los puntos $(x, y) = (2, 4)$ y $(y, x) = (4, 2)$ en las gráficas de f y f^{-1}, se observa que estos puntos son simétricos con respecto a la recta $y=x$; esto ayuda a graficar la función f^{-1}.

Definición: *si f es una función uno a uno con $Dm(f)=A$ y $Im(f)=B$ y si f^{-1} es la función inversa de f con $Dm(f^{-1})=B$ y $Im(f^{-1})=A$, se satisface que: f compuesto con f^{-1} es igual* a *x y f^{-1}, compuesto con f es igual a x, es decir:*

. $(f^{-1} \text{ o } f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$, para todo $x \in A$
. $(f \text{ o } f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$, para todo $x \in B$

En los siguientes diagramas de flechas se ilustra lo anterior.



Ejemplo 1

Dadas las funciones $f(x)=2x+1$ y $y=f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$ verificar la definición anterior.

Solución

. $$\begin{aligned}(f^{-1}\circ f) &= f^{-1}(f(x))\\ &= f^{-1}(2x+1)\\ &= \frac{2x+1-1}{2} = x\end{aligned}$$

. $$\begin{aligned}(f\circ f^{-1})(x) &= f(f^{-1}(x))\\ &= f\left(\frac{x-1}{2}\right)\\ &= 2\left(\frac{x-1}{2}\right)+1\\ &= x\end{aligned}$$

Obsérvese que la composición de una función f con su inversa f^{-1} es conmutativa, es decir $(f^{-1}\circ f)(x)=(f\circ f^{-1})(x)$.

Ejemplo 2

Dada la función $(f)(x)=\frac{1+x}{3-1}$ hallar:

. Muestre que f es uno a uno
. Encontrar f^{-1}
. Verificar que $(f^{-1}\circ f)(x)=x$
. Dominio e imagen de f y f^{-1}

Solución

. Sean x_1 y x_2 números reales tales que cumplen:

Si $f(x_1) = f(x_2)$ Entonces $\frac{1+x_1}{3-x_1} = \frac{1+x_2}{3-x_2}$

Entonces $(1+x_1)\ (3-x_2)=(3-x_1)\ (1+x_2)$

Entonces $3-x_2+3x_1-x_1x_2=3+x_2-x_1-x_1x_2$

Entonces $3x_1+x_1=3x_2+x_2$

Entonces $4x_1=4x_2$; así $x_1 = x_2$, luego *f* es uno a uno.

. Sea $y=f(x)=\left(\frac{1+x}{3-y}\right)$, entonces intercambiando variables se tiene

$x=f(x)=\frac{1+x}{3-y}$ y se despeja y.

$$x(3-y) = 1+y$$

$$3x-xy = 1+y$$

$$3x-1 = xy+y$$

$$3x-1 = (x+1)y$$

$$y = \frac{3x-1}{x+1}$$

Así, $y = f^{-1}(x)\,\frac{3x-1}{x+1}$

c) $$\begin{aligned}(f^{-1}\circ f)(x) &= f^{-1}(f(x))\\ &= f^{-1}\left(\frac{3x-1}{x+1}\right)\\ &= \frac{3\left(\frac{1+x}{3-x}\right)-1}{\left(\frac{1+x}{3-x}\right)+1}\\ &= \frac{\frac{3+3x-(3-x)}{3-x}-1}{\frac{1+x+(3-x)}{3-x}-1} = \frac{3+3x-3+x}{1+x+3-x} = \frac{4x}{4} = x\end{aligned}$$

Así $(f^{-1}\circ f)(x)=x$

d) Dominio de f$(x)=\frac{1+x}{3-x}$, es *Dm*(*f*)=R–{3}

Para hallar la imagen se utiliza el resultado de la inversa

$y=f^{-1}(x)=\left(\frac{3x-1}{x+1}\right)$, si intercambiamos las variables *x* y *y* se tiene

que $(x)=\left(\frac{3y-1}{y+1}\right)$ que equivale a despejar *x* en *f* (*x*). Así la imagen

de *f*, es *Im*(*f*)=R–{–1}.

5.4. Ejercicios

. Determine si las siguientes son uno a uno.

a. $y=x^2$

b. $y=x^2$ para $x\geq 0$

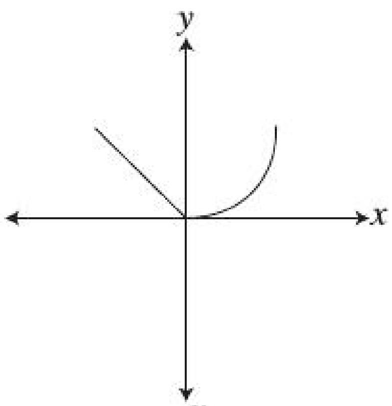
c. $f(x)=3x+1$
d. $h=(x)=x+4$
e. $y=|x|$

. Aplique el criterio de la recta horizontal para determinar si la función es uno a uno.

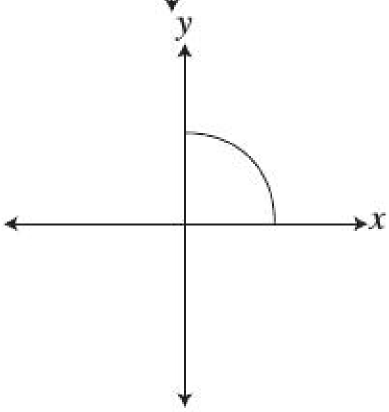
a. $f(x)=4x–3$
b. $f(x)=(x+1)^4$
c. $f(x)=|x|$
d. $h(x)= \frac{3x+4}{x-2}$

. Cual función es uno a uno o no.

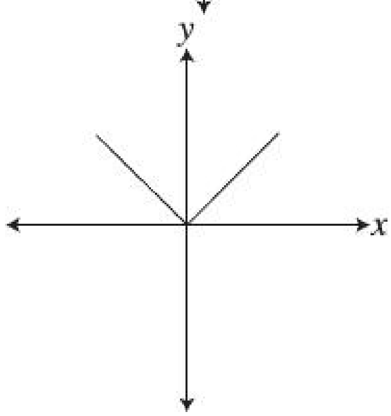
a.

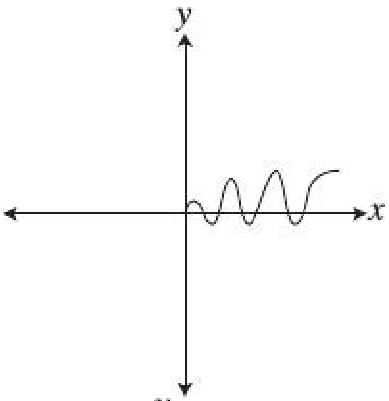


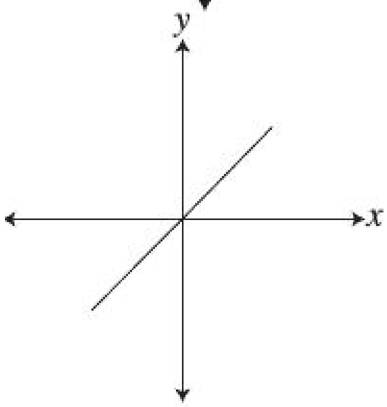
b.

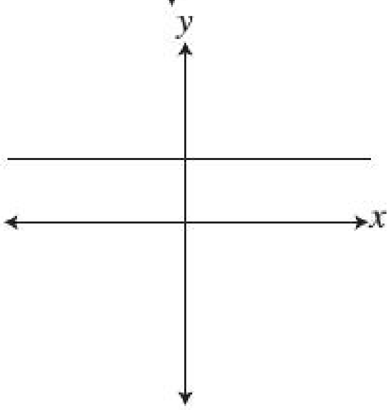


c.



d. 

e. 

f. 

. Para cada una de las funciones siguientes son uno a uno. Por tanto existe $f^{-1}(x)$ para cada una calcula $f^{-1}(x)$

a. $f(x)=x+5$
b. $g(x)=3x$
c. $f(x)=x^3$
d. $h(x)=4x–3$
e. $f(x)=\sqrt[3]{x}$
f. $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$

. Verifique que f y f^{-1} son inversas

a. $f(x)=x^2, x\geq 0;$ y $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$
b. $f(x)=x^3, -2\leq x\leq 2$ y $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ $-8\leq x\leq 8$
c. $f(x)=4x-3,$ y $f^{-1}(x)=\dfrac{x+3}{4}$
d. $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1},$ y $f^{-1}(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$

. Determine si las funciones tienen inversa, si la inversa existe encuentre el dominio e imágen y grafiquela.

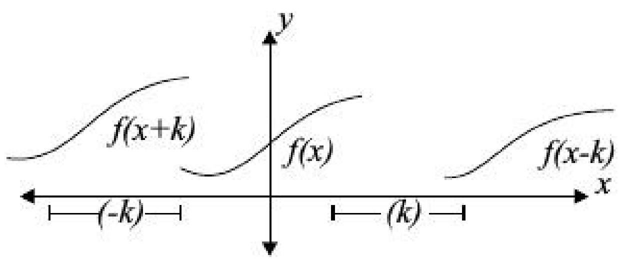
a. $f(x)=5x–7$
b. $g(x)=1–x^2$
c. $f(x)=3x+16$
d. $f(x)=(4–x)^3$
e. $h(x)=\sqrt{2x-6}$
f. $f(x)=|x|+x$
g. $h(x)=(x+12)^4$
h. $m(x)=x^5$ i. $h(x)=|x–2|$

5.3. Transformación de funciones

5.3.1. Traslaciones

A. Traslaciones horizontales

Este tipo de transformación consiste en trasladar una función original $y=f(x)$ horizontalmente a la izquierda o a la derecha k unidades.



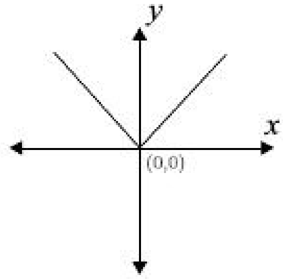
Si suponemos que $k > 0$, para las traslación horizontal se puede observar que la gráfica $y = f(x - k)$ y $y = f(x + k)$ es el resultado de trasladar la gráfica original $y = f(x)$, k unidades a la derecha y a la izquierda respectivamente.

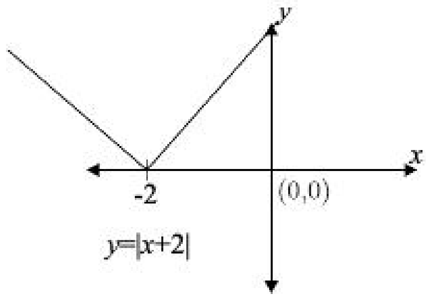
Ejemplo

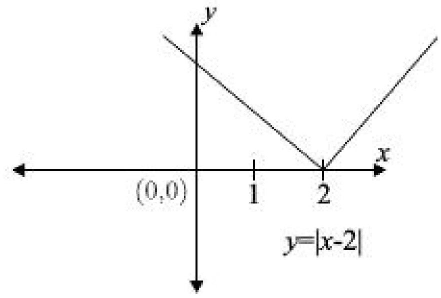
Dada la función $f(x)= |x|$, utilizar las transformaciones para graficar $y = |x + 1|$ y $y= |x + 1|$ $y= |x - 2|$

Solución

La función original es $f(x)= |x|$

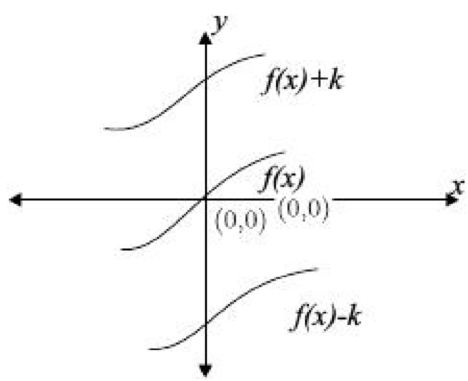






B. Traslaciones verticales

Si suponemos que $k > 0$, para traslaciones verticales al sumar k unidades a $y = f(x)$ la función se traslada k unidades hacia arriba, es decir la función original se transforma en $y = f(x) + k$, y si restamos k unidades a $y = f(x)$ la función se traslada k unidades hacia abajo, es decir la función original se transforma en $y = f(x) - k$.

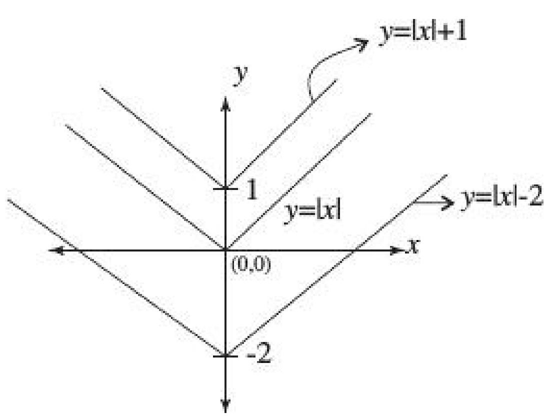


Ejemplo 1

Dada la gráfica $y = |x|$, utilizar las transformaciones para graficar $y = |x| + 1$ y $y = |x| - 2$

Solución

La gráfica original es $y = |x|$.



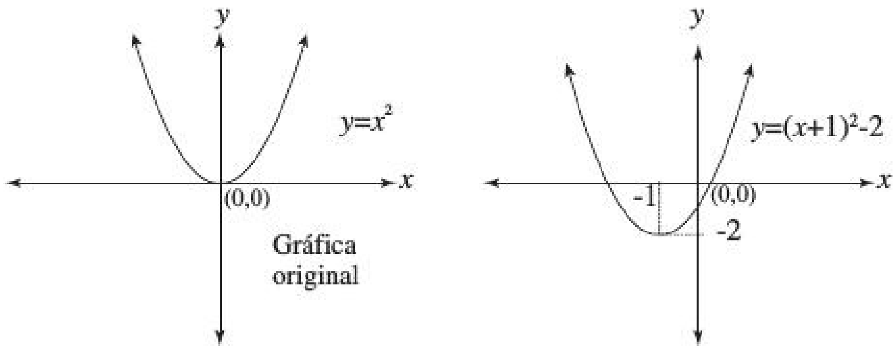
Se puede combinar las dos trasformaciones al mismo tiempo, tanto la horizontal como la vertical.

Ejemplo 2

Graficar $y = (x + 1)^2 - 2$

Solución

En primer lugar se debe identificar la función original, que en este caso es $y = x^2$, existen dos traslaciones: una horizontal, con una unidad de desplazamiento a la izquierda, y dos unidades de desplazamiento hacia abajo.



Ejemplo 3

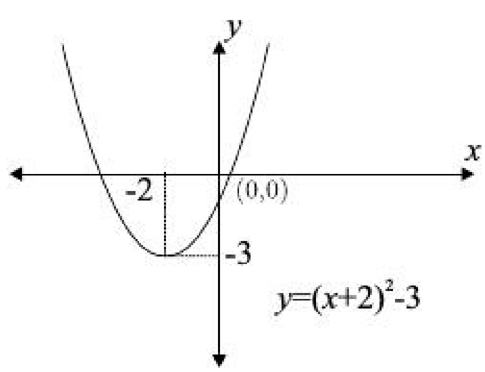
Trazar la gráfica de $y = x^2 + 4x + 1$

Solución

Completando un trinomio cuadrado perfecto, se puede escribir la función de la siguiente forma:

$$y = x^2 + 4x + 1 = \left(x^2 + 4x + 4\right) + 1 - 4 = (x + 2)^2 - 3$$

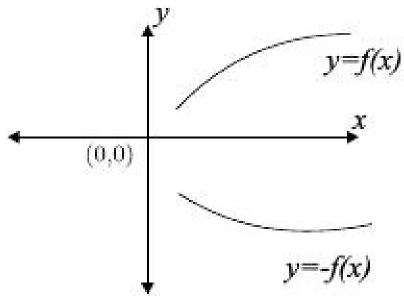
Análogamente al ejemplo anterior esta función resultante proviene de la función original $y = x^2$, y hay que realizar dos transformaciones: desplazarla 2 dos unidades horizontalmente a la izquierda y 3 tres unidades verticalmente hacia abajo, como se muestra en la siguientes gráficas.



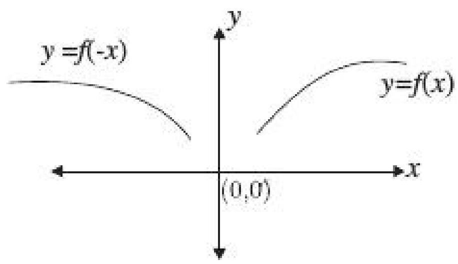
5.3.2. Reflexiones verticales y horizontales

Las reflexiones verticales se realizan sobre el eje y, mientras que las reflexiones horizontales se realizan sobre el eje x.

i. Si $y=-f(x)$, entonces se refleja la gráfica original $y=f(x)$con respecto al eje x.

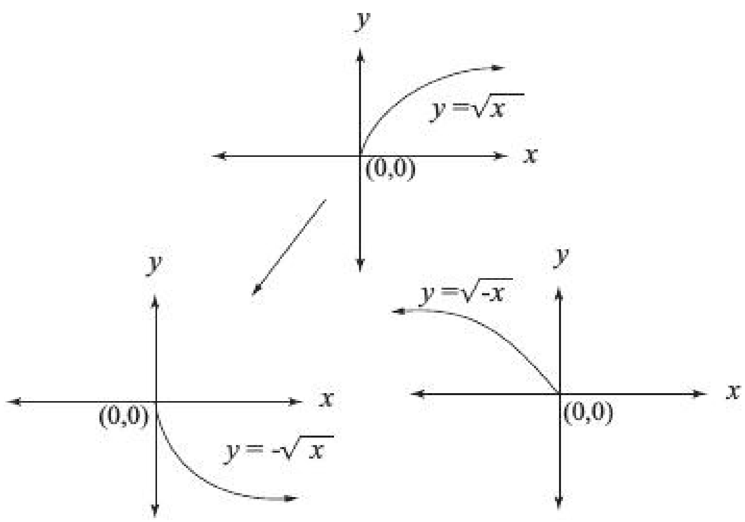


ii. Si $y=f(-x)$, entonces se refleja la gráfica original $y=f(x)$ con respecto al eje y.



Ejemplo

Dada la gráfica $y = \sqrt{x}$, utilizar la reflexión para graficar $y = -\sqrt{x}$ y $y = \sqrt{-x}$



Obsérvese que la gráfica $y=-\sqrt{x}$ es la reflexión de la gráfica original $y=\sqrt{x}$ con respecto al eje x, mientras que la gráfica $y=\sqrt{-x}$ es la reflexión de la gráfica original $y=\sqrt{x}$ sobre el eje y.

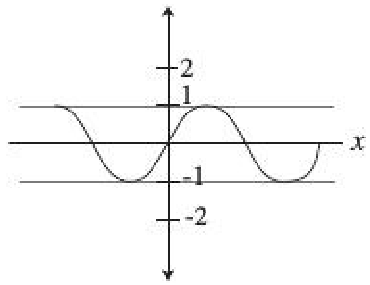
5.3.3 Teoría sobre el alargamiento de vertical y horizontal

Contraccion y alargamiento vertical

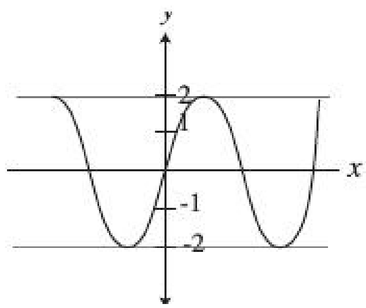
Si multiplicamos una función por una constante $k>1$, observamos que la función $y=kf(x)$ es la gráfica de $y=f(x)$ alargada verticalmente k analogamente si multiplicamos una función, por $\frac{1}{k}$ es decir $y=\frac{1}{k}f(x)$; para $k>1$, esto quiere deicr que la gráfica se contre $y=f(x)$ verticalmente.

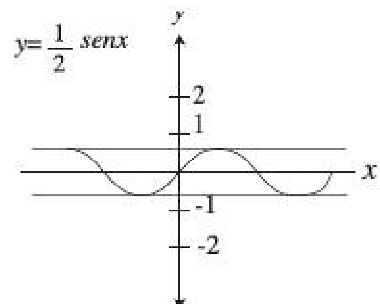
Ejemplo

Tomemos a *y=Senx*



Ahora *y*=2*Senx*



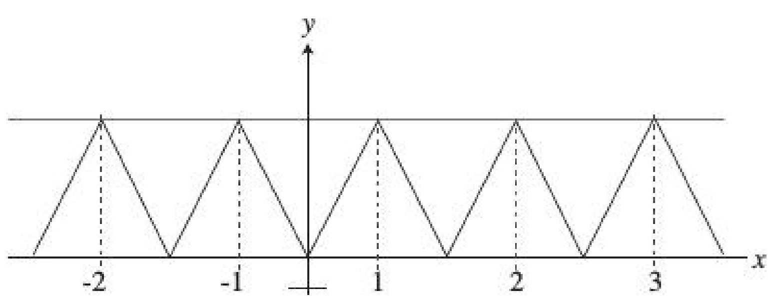


Contraccion y alargamiento horizontal

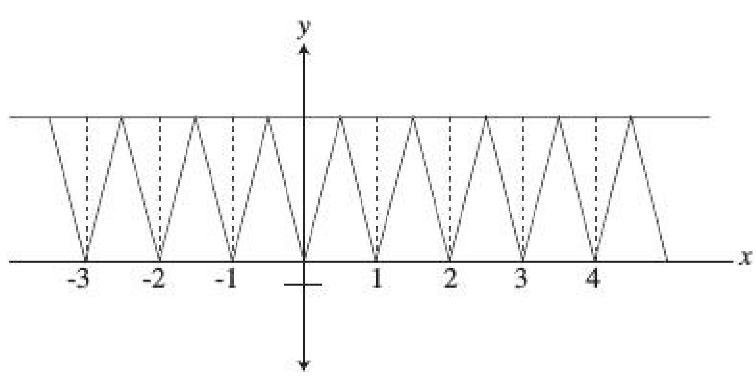
Supongamos que $k>1$, entonces la gráfica $y=f(kx)$ se obtiene de la ecuación $y=f(x)$ reduciendo está horizontalmente un factor k, mientras que la gráfica $y=\left(\frac{x}{k}\right)$ alarga horizontalmente la función original $y=f(x)$.

Ejemplo

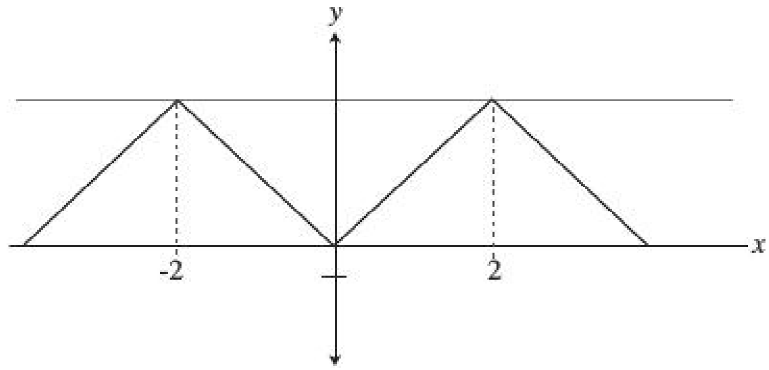
Definamos a $y=f(x)$ de la siguiente manera:



Ahora $y=f(2x)$



Observe que $y=f(2x)$ se contrae en la mitad horizonte, mientras que $y=f\left(\frac{x}{2}\right)$ se alarga horizontalmente en escala dos veces:

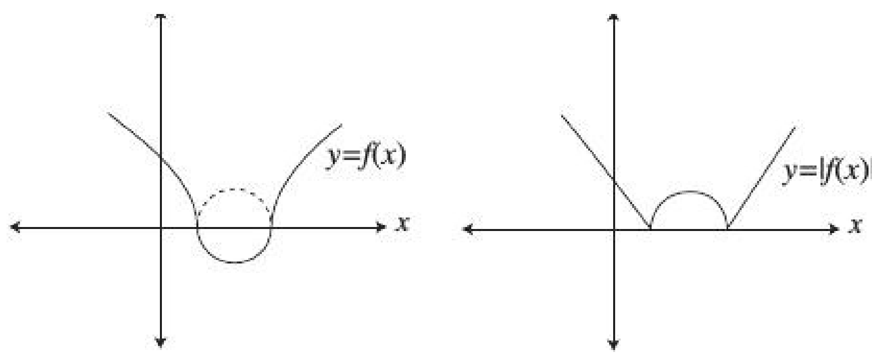


Valor absoluto de una función

Otra transformación importante es tomar el valor absoluto de una función $y=f(x)$, esto equibale a la gráfica que está debajo del eje x se refleja sobre el mismo eje como se observa en la figura

Ejemplo

Definamos a $y=f(x)$ de la siguiente manera

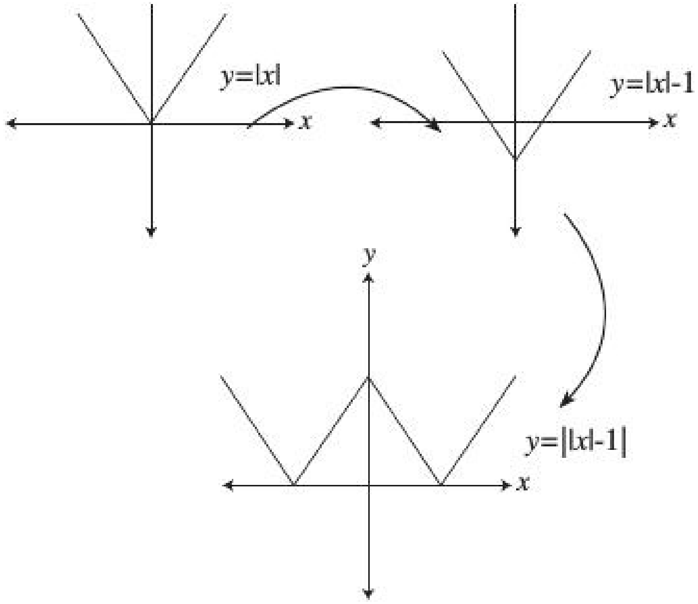


Ejemplo

Graficas $y=\left||x|-1\right|$

Solución

Sea:



Observe que $y=f(zx)$ se contrae en la mitad horizonte, mientras que $y=f\left(\frac{x}{k}\right)$ se alarga horizontalmente en escala dos veces.

5.5. Ejercicios

Graficar las siguientes funciones utilizando las transformadas apropiadas

- $y=(x-1)^2+2$
- $y=-x^2$
- $y=\sqrt{x+1}+2$
- $y=-\sqrt[3]{x}$
- $y=3^x+1$
- y = $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$
- $y=\sqrt[3]{x+1}-1$
- $y=2^{|x|}$
- $y=|Cosx|$
- $y=|Senx|$
- $y=\left||x|-2\right|$
- $y=1-\frac{1}{x-1}$
- $y=\sqrt{|x|}$

Considere los siguientes casos con valor absoluto

- $y=|x^2-3|$
- $y=\left|\left||x|-2\right|-1\right|$

5.4. Funciones racionales y asíntotas

Una función racional tiene la forma $f(x)=\frac{h(x)}{g(x)}$ donde $h(x)$ y $g(x)$ son polinomios que no tienen factor común y además $g(x)\neq 0$

Ejemplo 1

Si $f(x)=\frac{2}{x}$

2: es un polinomio de grado cero 0

x: es un polinomio de grado uno 1

¿Cómo es el dominio de una función racional?

Solución

Consiste en todos los números reales x, excepto en donde para el denominador $g(x)$ sea cero; es decir, el dominio de una función racional es el conjunto de los números reales tales que $g(x)\neq 0$

Ejemplo 2

$h(x)=\frac{3}{x}$, como observamos el único valor que no puede tomar $h(x)$ es cero; luego el dominio de $h(x)$ es:

$Dm(h)=\{x\in\Re \text{ tal que } x\neq 0\}=\Re-\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

Ejemplo 3

$f(x)=\frac{1}{2x+1}$

i) Se iguala el denominador $2x+11=0$ entonces $x=\frac{-1}{2}$, entonces el dominio consiste en todos los reales x excepto $x=\frac{-1}{2}$; es decir:

$Dm(f)=\{x\in\Re \text{ tal que } 2x+1\neq 0\}=\Re-\left\{\frac{-1}{2}\right\}=\left(-\infty,\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2},\infty\right)$

5.4.1. Asíntotas verticales y horizontales

A. Asíntotas verticales

Consiste en una recta vertical $x=$a de la función $y=f(x)$como se muestra en la siguiente figura:

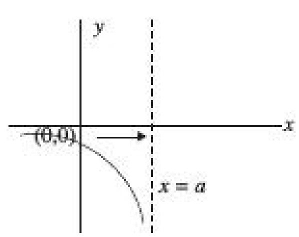


Figura 1

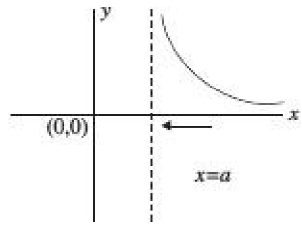


Figura 2

Se puede hacer dos acercamientos a $x = a$, por la derecha y la izquierda de a. Lo anterior se denota:

i. $x \to a^+$ se lee x tiende a a por la derecha.
ii. $x \to a^-$ se lee x tiende a a por la izquierda.

Como observamos en la figura 2 si $x \to a_+$ la gráfica $y = f(x)$ tiende a infinito, es decir:

Si $x \to a_+$ entonces $y=f(x) \to \infty$, mientras que en la figura 1, Si $x \to a^-$entonces $y=f(x) \to -\infty$.

Nota: *En términos generales una asíntota vertical es una línea recta a la que la gráfica de la función* $y = f(x)$ *se aproxima cada vez más.*

B. Asíntotas horizontales

Consiste en una recta horizontal $y=b$ de la función $y=f(x)$, como se muestra en la figura 3.

Como se observa en está figura, cuando x se aproxima a infinito $y=f(x)$ se aproxima cada vez más a la recta horizontal $y=b$, cuando ^{x} se aproxima a menos infinito la gráfica $y=f(x)$ se aproxima cada vez a $y=b$. Lo anterior simbólicamente se denota así:

i. $x \to \infty$ (x tiende a infinito), entonces $y=f(x)$se aproxima a la recta horizontal $y=b$
ii. $x \to -\infty$ (x tiende a menos infinito), entonces $y=f(x)$ se aproxima a la recta horizontal $y=b$. Lo anterior se complementa con la descripción de la siguiente figura.
iii. Si $x \to \infty$ entonces $f(x) \to$ b
Si $x \to -\infty$ entonces $f(x) \to$ b
Si $x \to$ a$^+$entonces $f(x) \to \infty$
Si $x \to a^-$ entonces $f(x) \to -\infty$

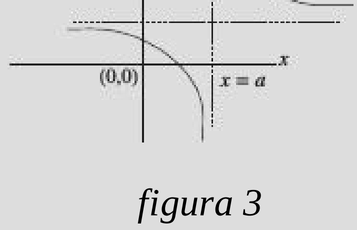


figura 3

5.4.2. Asíntotas de funciones racionales

Las asíntotas verticales se encuentran donde *a* es un cero del denominador. Hallar las asíntotas verticales de $f(x)=\frac{1}{x-1}$

Como se observa, la función no está definida en x=1, por lo tanto existe una asíntota vertical en la recta x =1. Ahora cómo hacer para saber la tendencia de la curva $f(x)$ en la recta x=1.

Acercamos a uno por la derecha, por ejemplo x=1.1 y lo reemplazamos en la función $f(x)=\frac{1}{x-1}$

Si el valor es positivo significa que $f(x)$ se aproxima a más infinito (+∞), si el valor es negativo significa que $f(x)$ se aproxima a menos infinito (+∞), es decir:

$$f(1.1)=\frac{1}{1.1-1}=\frac{1}{0.1}>0$$

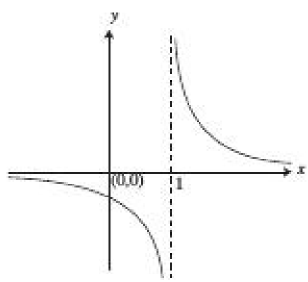
Lo anterior significa que $f(x)$ se aproxima a +∞ cuando $x \to 1^+$, de la misma manera para $x \to 1^-$, escogemos un valor muy cercano a 1 por la izquierda, por ejemplo x=0.9, es decir:

$$f(1.1)=\frac{1}{0.9-1}=\frac{1}{0.1}<0$$

Significa que $f(x)$ se aproxima a menos infinito (–∞), de acuerdo a lo anterior la gráfica de $f(x)$ se muestra en la siguiente figura:

Sea $h(x)$ una función racional de la forma.

$$h(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$



Para obtener las asíntotas horizontales se tiene que tener en cuenta los siguientes tres aspectos.

- Si $n< m$, entonces h tiene asíntota horizontal en $y = 0$
- Si $n = m$, entonces h tiene asíntota horizontal en $y=\frac{a_n}{b_n}$
- Si $n> m$, entonces h no tiene asíntota horizontal.

Ejemplo 1

Halle las asíntotas horizontales de las siguientes funciones:

- $y=\frac{x}{x^2-1}$

. $y=\dfrac{x^3+1}{x^2}$

. $y=\dfrac{3x^2+1}{2x^2-1}$

Solución

. El grado del numerador y denominador son 1 y 2 respectivamente y como 1<2, entonces $y=\frac{x}{x^2-1}$ tiene una asíntota horizontal en y=0.

. El grado del numerador y denominador son 3 y 2 respectivamente y como 3>2, entonces no existe asíntota horizontal para: $y=\frac{x^3+1}{x^2}$.

. El grado del denominador numerador y denominador son iguales a 2, entonces tiene una asíntota horizontal en $y=\frac{3}{2}$

Ejemplo 2

Encuentre las asíntotas horizontales y verticales y luego bosqueje la gráfica de la función, $h(x)=\frac{4x-2}{x-2}$

Solución

a. Asíntota vertical

Existe asíntota vertical en x=2, ya que no está definida la función en ese punto. Reemplazando en la función $f(x)$ un valor muy cercano a x=2 por la derecha y la izquierda ejemplo 1.9 y 2.1

$h(1.9)=\dfrac{4(1.9)-4}{(1.9)-2}=\dfrac{+3.6}{-0.1}<0$, significa que $h(x)\rightarrow-\infty$ Si $x\rightarrow 2^+$

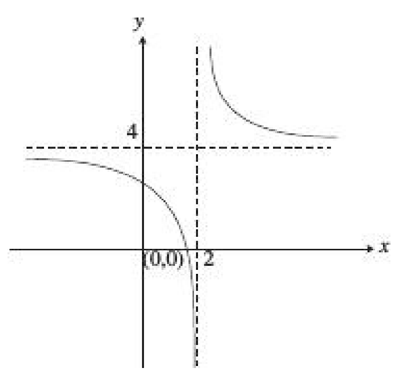
$h(2.1)=\dfrac{4(2.1)-4}{(2.1)-2}=\dfrac{+8.4}{+0.1}>0$, significa que $h(x)\rightarrow-\infty$ Si $x\rightarrow 2-$

b. Asíntota horizontal

Como el grado del numerador y denominador es igual a 2 entonces la función h tiene una asíntota horizontal en $y=\frac{4}{1}$, como se muestra en la siguiente figura. De acuerdo a la gráfica anterior se tiene:

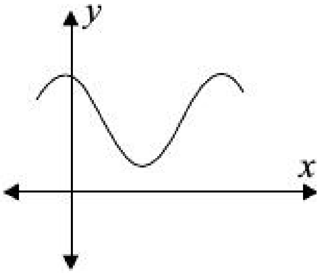
. Si $x\rightarrow+\infty$entonces $h\rightarrow 4$

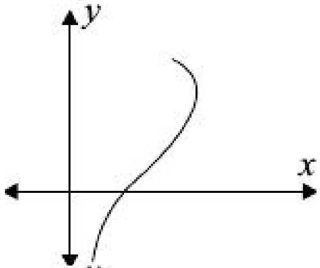
. Si $x\rightarrow-\infty$ entonces $h\rightarrow 4$

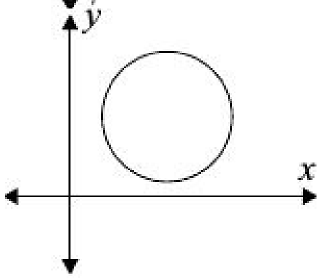


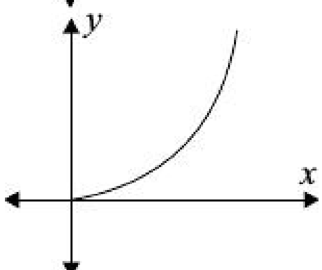
5.6. Ejercicios

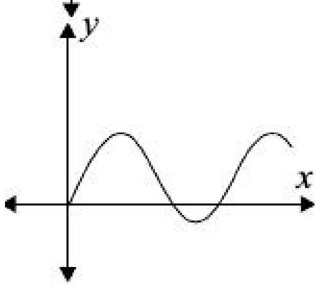
. Con la prueba de la recta horizontal, determinar cuál de las siguientes gráficas es inyectiva.

a. 

b. 

c. 

d. 

e. 

. Halle las funciones inversas de las siguientes funciones, si existen:

a. $y = x^2$ para $x \geq 0$
b. $y = \sqrt{x}$
c. $y = \dfrac{x+1}{x-1}$
d. $y = x + 2$

. Bosqueje la gráfica de las siguientes funciones

a. $y = \sqrt[3]{x+3}$
b. $y = \sqrt[3]{x+3} - 2$
c. $y = (x+1)^2$
d. $y = (x+1)^3$
e. $y = |x+1|$

f. $y=|x-1|+1$
g. $y=-|x+1|$
h. $y=1-x^2$
i. $y=2-|x$
j. $y=(-x)^3$
k. $y=(-x)^2$
l. $y=|-x$
m. $y=1-\sqrt[3]{x}$
n. $y=-|x$ o. $y=1+\frac{1}{x}$

. Dada la función $f(x)=x^2$ encontrar:
a. $f(-x)$
b. $-f(x)$ c. $f(x)+1$
c. $f(x)-1$
d. $f(x+1)$ f. $f(x-1)$
e. $f(x-1)+1$
f. $-f(x-1)-1$

. Encuentre la asíntota vertical y horizontal y bosqueje la gráfica:
a. $y=\frac{x+1}{x-1}$
b. $y=\frac{1}{x}$
c. $y=\frac{2x+1}{x-1}$
d. $y=\frac{x-1}{x+2}$
e. $y=\frac{3x-3}{x+2}$
f. $y=\frac{2}{3x-2}$
g. $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$
h. $y=\frac{2x^2-3}{x-1}$
i. $y=\frac{x^3}{x^3-1}$
j. $y=\frac{x}{4-x^2}$
k. $y=\frac{2x+1}{x-1}$
l. $y=\frac{2x^2+1}{x^2-1}$

5.5. Modelos funcionales

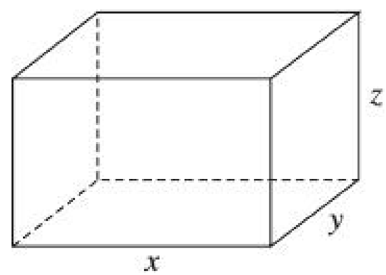
En el cálculo diferencial se utilizan fórmulas que relacionan una, dos o más variables que no siempre están en forma explícita, pueden estar en forma implícita; estas fórmulas también pueden resolverse para determinar de manera explícita una variable en función de las otras variables que están relacionadas y luego expresar la fórmula en términos de una sola variable y así realizar las aplicaciones en los problemas que requieren derivación. Luego es importante que el estudiante desarrolle procesos previos a lo anterior por medio de la construcción de modelos funcionales que relacionan variables.

Ejemplo 1

Exprese el volumen de una caja rectangular con tapa, en función de su largo *x*, si el largo es el doble del ancho *y* y el triple de su altura *z*.

Solución

El volumen de la caja proporciona una función *V*, que esta en función de las variables *x*, *y y z*, es decir $V(x, y, z) = xyz$.



Como $x = 2y$ (largo es el doble del ancho) (1)
$x=3z$ (largo es el triple de la altura) (2)

El objetivo es expresar la función V en términos de una sola variable, en este caso en términos de la variable que representa el largo que es x.

De la expresión (1) se tiene que $y=\frac{x}{2}$ y de la expresión (2) se tiene que $z=\frac{x}{3}$, así la expresión $V(x, y, z)=xyz$ se expresa como:

$V(x, y, z)=xyz$.

Es equivalente a:

$$V(x) = x\,.\,\frac{x}{2}\,.\,\frac{x}{3} = \frac{x^6}{6}, \text{ luego } V(x) = \frac{x^6}{6}$$

Ejemplo 2

Exprese el área superficial de la caja del ejercicio anterior en función de su largo *x*.

Solución

Por geometría el área superficial A_s de la caja es la suma de las áreas de las caras, que son rectángulos, es decir;

$$A_s(x, y, z) = 2xy + 2yz + 2xz$$

El área superficial en función de su largo *x* es:

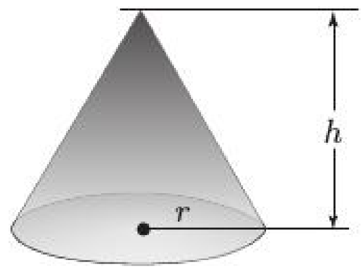
$$A_s(x)= 2x\cdot \frac{x}{2} + 2\cdot \frac{x}{2}\cdot \frac{x}{2} + 2x\cdot \frac{x}{3}$$
$$A_s(x)= x^2\cdot \frac{x^2}{3} + \frac{2}{3}x^2$$
$$A_s(x)= 6\,\frac{2}{3}\,x^2 = 2x^2$$

Ejemplo 3

Exprese el volumen del siguiente cono en función de su altura h, si el radio r del cono es el doble de la altura.

Solución

La fórmula del volumen del cono es una función *V* que depende de dos variables que son el radio *r* y la altura *h*, es decir;



$V(r, h) = \frac{\pi r^2 h}{3}$, como el radio es el doble de la altura $r = 2h$ se tiene que el volumen *V* en función de una sola variable, es decir en función de la variable *h* es:

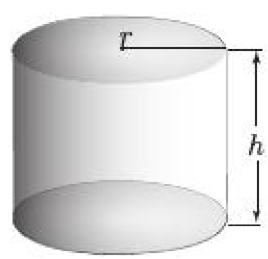
$$V(h) = \frac{\pi (2h)^2 h}{3} = \frac{4\pi h^3}{3}, \text{ así } V(h) = \frac{4\pi h^3}{3}$$

Ejemplo 4

Exprese el área superficial A_s del siguiente cilindro circular recto en función de la altura *h*, si la altura del cilindro es igual al radio *r*.

Solución

El área superficial del cilindro circular recto depende de las variables *r y h*, es decir:



$A_s(r, h) = 2prh + 2pr^2$**,** expresemos A_s en términos de la variable *h***.**

$$A_s(h) = 2\pi r\,h + 2\pi r^2$$
$$A_s(h) = 2\pi h^2 + 2\pi h^2$$
$$A_s(h) = 4\pi h^2$$

Ejemplo 5

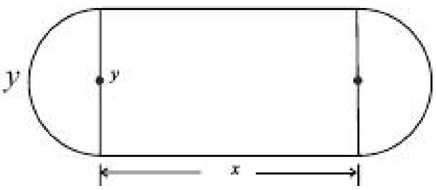
Un terreno tiene la forma de un rectángulo con dos semicírculos como se muestra en la siguiente figura.

Exprese el área del terreno en función de la parte más larga *x*, si la parte recta ancha y del terreno es la mitad de la parte larga.

Solución

El área *A* del terreno está en función de las variables *x y y*, es decir;

$$A(x, y) = \pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 + x \,.\, y$$



Expresando el área en términos de la variable *x* se tiene:

$$A(x) = \pi\left(\frac{\frac{x}{2}}{2}\right)^2 + x \,.\, \frac{x}{2}$$

$$A(x) = \pi\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{x^2}{2}$$

$$A(x) = \pi\,\frac{x^2}{16} + \frac{x^2}{2}$$

$$A(x) = \frac{x^2}{2}\left(\frac{\pi}{8} + 1\right) = A(x)$$

Ejemplo 6

Un triángulo isósceles está inscrito en un semicírculo de diámetro de *x*. Encuentre una función que modele el área que está por fuera del triángulo y dentro del semicírculo en términos de la altura del triángulo isósceles.

Solución

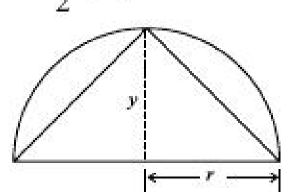
El área del semicírculo es $A_{sc} = \frac{\pi r2}{2}$ y el área del triángulo es $A_{\triangle} = \frac{xy}{2}$, donde *y* es la altura *y x* es la base del triángulo. De acuerdo a la figura la altura del triángulo coincide con el radio *r* del semicírculo, es decir *y*=*r*, *y* la base del triángulo es el diámetro *x*=2r, así el área a determinar está inicialmente en función de las variables *x y y*.

$$A_{sc}(x, y) = \frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} - \frac{xy}{2}$$

$$A_{sc}(r) = \frac{\pi r^2}{2} - \frac{2r \,.\, r}{2}, \text{ como } r = \frac{x}{2} \text{ y } \quad y = r$$

$$A_{sc}(r) = \frac{\pi r^2}{2} - r^2$$

$$A_{sc}(r) = \frac{r^2}{2}(\pi - 2)$$

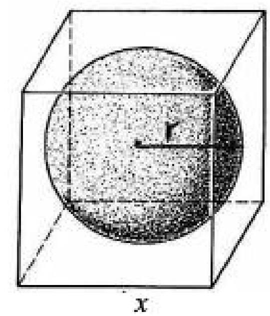


Ejemplo 7

Una esfera de radio r está dentro de una caja cúbica, como se muestra en la figura. Si el diámetro de la esfera coincide con la medida de un lado de la caja, encuentre una función que modele el volumen que está por fuera de la esfera y dentro de la caja cúbica, en términos de un lado *x*, de la caja.

Solución

El volumen de la esfera es $V_{ef}=\frac{4}{3}\pi r^2$ y un lado de lacaja es *x*, el cual coincide con el diámetro de esfera, la es decir $x=2r$, donde $r={}^{x}/_{2}$. Además el volumen de la caja cúbica es $V(x)=x^3$; luego la función inicialmente que modela el volumen pedido depende de las variables *x y r* así:



V(*x*,*r*)= Volumen de la caja – Volumen de la esfera.

$$V(x,r)=x^3-\frac{4}{3}\pi r^3$$, el volumen en términos de la variable x es:

$$V=x^3-\frac{4}{3}\pi r^3\left(\frac{x}{2}\right)^3$$

$$V=x^3-\frac{4}{3}\pi r^3\left(\frac{x^3}{8}\right)$$

$$V=x^3-\frac{\pi r^3}{6}$$

$$V=x^3\left(1-\frac{\pi}{6}\right)$$

Ejemplo 8

Encuentre una función que modele el área A_{Δ} de un triángulo equilátero, en términos de un lado del triángulo.

Solución

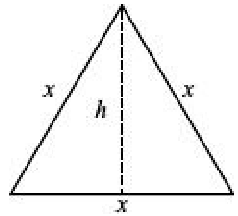
El área de un triángulo es $\frac{base\,.\,altura}{2}$, sea labase $b=x$ y la altura h

$h^2=x^2-\left(\frac{x}{4}\right)^2$, aplicandoteoremadePitágoras

$h^2=x^2-\frac{x^2}{4}$, realizando operaciones

$h^2=\frac{4x^2-x^2}{4}$, sumado

$h^2=\frac{3x^2}{4}$, hallando la raíz cuadrada



$h^2 = \frac{\sqrt{3}x}{4}$

El área del triángulo inicialmente es una función que depende de las variables *b* y *h* así: $A_{\triangle}(b,h) = \frac{b \cdot h}{2}$, reemplazando *b* y *h* por las expresiones anteriores se tiene el área en función de la variable *x*.

$A(x) = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2}}{2}$ $\quad$ $A(x) = \frac{\sqrt{3}x^2}{2}$

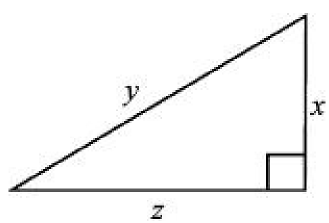
Ejemplo 9

En un triángulo rectángulo un cateto mide el triple que el otro cateto *x*. Encuentre una función que modele el perímetro del triángulo rectángulo en función del cateto más pequeño.

Solución

El perímetro del triángulo rectángulo es una función *P* que depende de las variables *x*, *y* y *z*, es decir *P*(*x*,*y*,z)=*x*+*y*+*z*, donde *z*=3*x*; para hallar y en términos de *x* se tiene:

$$y^2 = x^2 + (3x)^2$$
$$y^2 = x^2 + 9x^2$$
$$y^2 = 10x^2, \text{ es decir } y = \sqrt{10}x$$

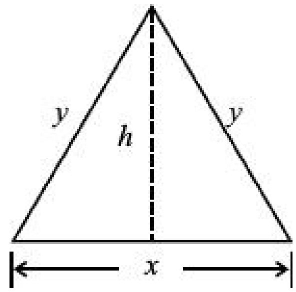


Así el la función que modela el perímetro en función de *x* es:

$$P(x) = x + \sqrt{10}\,x + 3x$$
$$P(x) = 4x + \sqrt{10}\,x$$

Ejemplo 10

Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 10 cm. Encuentre una función que modele el área A_{Δ} del triángulo isósceles en términos de la longitud de su base x.



Solución

El perímetro del triángulo depende de las variables *x* y *y*, es decir; $P(x,y)=x+2y=10$

Así, $2y=10-x$, despejando la variable y se tiene:

$y = 5 - \frac{x}{2}$

El área del triángulo depende de las variables *x* y *h*, es decir:

$$A(x,h) = \frac{x \cdot h}{2}$$

Para hallar h en términos de *x* se aplica el Teorema de Pitágoras así:

$$h = \sqrt{y^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$h = \sqrt{\left(5 - \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$h = \sqrt{25 - 5x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{4}}$$

$$h = \sqrt{25 - 5x}$$

Luego el área del triángulo isósceles en función de *x* es:

$$A(x) = \frac{x \cdot \sqrt{25 - 5x}}{2}$$

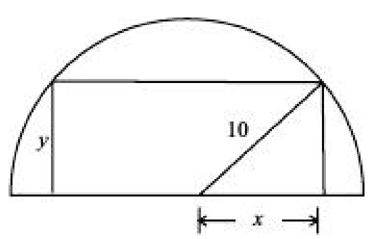
$$A(x) = \frac{x\sqrt{25 - 5x}}{2}$$

Ejemplo 11

Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de radio 10cm. Encuentre una función que modele el perímetro P del rectángulo en términos de su altura *y*.

Solución

El perímetro del rectángulo inicialmente es una función que depende de las variables *x* y *y*, es decir; $P(x, y) = 4x + 2y$



Para hallar *x* en términos de la variable y se aplica el teorema de Pitágoras así:

$$10^2 = x^2 + y^2$$

$$x^2 = 10^2 - y^2$$

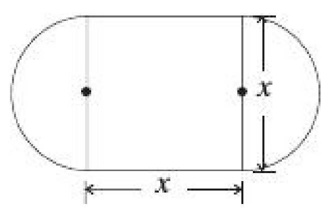
$$x = \sqrt{100 - y^2}$$

Así, la función que modela el perímetro del rectángulo en función de *y* es:

$$P(y) = 4\sqrt{100 - y^2} + 2y$$

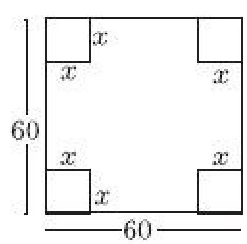
5.7. Ejercicios

. Exprese el volumen de una caja rectangular con tapa en función del largo *x*, si el largo es el triple del ancho y el cuádruple de su altura *z*.
. Exprese el área superficial de la caja del ejercicio 1 en función de su largo *x*, sin tapa.
. Exprese el volumen de un cono en función de su altura *h*, si el radio *r* del cono es el cuádruple de su altura.
. Exprese el área superficial A_s de un cilindro circular recto en función de la altura *h*, si la altura del cilindro es doble del radio.
. Una pista atlética tiene forma de un cuadrado con dos semicírculos como se muestra en la siguiente figura:

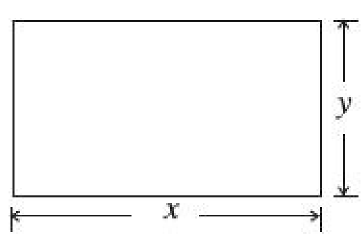


Exprese el área del terreno en función del lado del cuadrado.

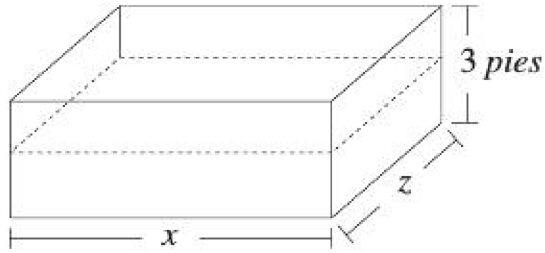
. A partir de una pieza cuadrada de 60 x 60 *cm*, elaborar una caja, cortando cuadrados idénticos de área x^2 de cada esquina y volteando hacia arriba los lados (ver figura). Exprese el volumen V de la caja en función de *x*:



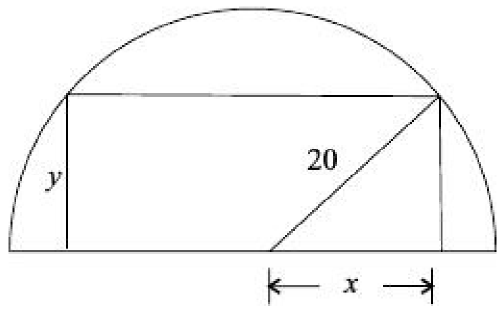
. El perímetro de un lote rectangular es de 1000 *m*. Exprese el área del lote en función del largo.



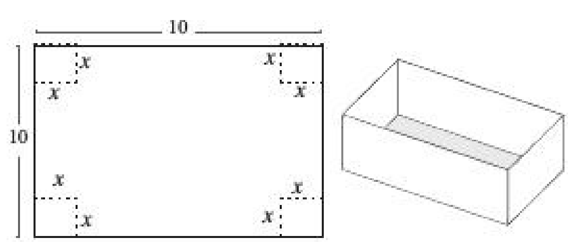
. Un acuario de 3 *pies* de altura ha de contener un volumen de 12 $pies^2$. Aquí x denota la longitud de la base y z el ancho. Expresar z en función de x.



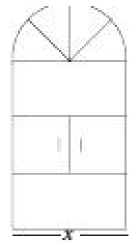
. Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de radio 20 *cm*. Encuentre una función que modele el perímetro P del rectángulo en términos de x



. La suma de dos números es 100. Si se define a x como número mayor y y número menor, encuentre una función que exprese el producto de los dos números en función del número mayor.
. El producto de dos números es 100. Si se define a x como número mayor y y número menor, encuentre una función que exprese la suma de los dos números en función del número menor.
. Un rectangulo tiene un área $30cm^2$ exprese su perimetro como función de la longuitud de uno de los lados.
. Exprese el área del triángulo equilatero como función de la longuitud de uno de sus lados.
. Exprese el área superficial de un cubo en función de lado x.
. Una caja rectangular abierta, con volumen de $40cm^3$, tiene una base cuadrada. Exprese el área superficial de la caja como función de la longitud de uno de los lados de la base.
. Un envase cerrado cilindrico tiene un volumen de $50pulg^3$. Exprese una funciónde área de la superficie total del envase como una función del radio de la base.
. El volumen de un gas a presión constante es directamente proporcional a la temperatura absoluta, con una temperatura de 170^0 . El gas ocupa $180cm^3$. Exprese el volumen como una función de la temperatura.
. Debe construirse una caja con su parte superior abierta a partir de un trozo rectangular de carton que tiene las dimensiones de 6*cms* por 10*cms*, recortando cuadrados iguales de lado x en cada una de las esquinas y, a continuación, doblando los lados como se ilustra en la figura. Exprese el volumen V de la caja como función de x:



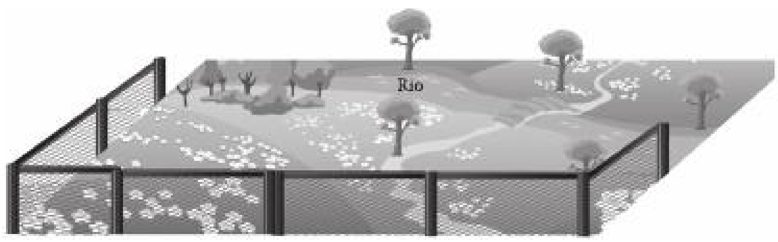
. Una ventana normanda tiene forma de un rectángulo coronado por un semicirculo, si el perímetro de la ventana es de 25 pies. Exprese el área A de ella como función del lado x de la misma:



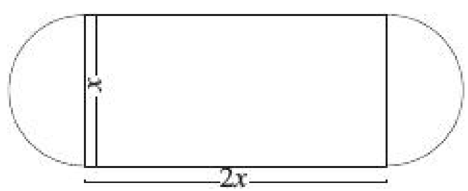
. La nómina de pago diario de una cuadrilla es directamente proporcional el número de trabajadores, a una cuadrilla de 20 la nómina es de $500.000. Exprese la nómina de pago diario como una función del número de trabajadores.

. Un campo de forma rectangular le colocaron 300*mts*. de cerca. Encuentre una función que exprese el área del terreno en función de sus longuitud.

. Realice el ejercicio 21. connsiderando ahora que un lado del terreno esta sobre la orilla de un rio. por lo que tiene límite natural, y el materia para la cerca se empleara en los otros tres lados.

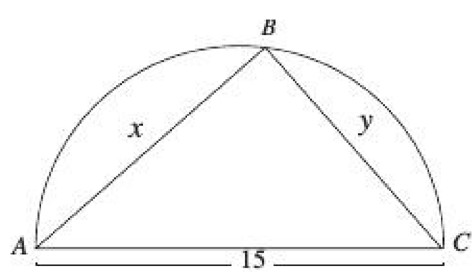


. Un campo deportivo tiene de forma un rectángulo con dos semicirculos, si el ancho es la mitad del largo exprese el área del campo en función del ancho.

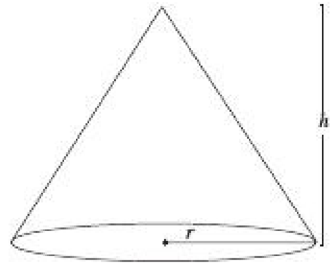


. Un rectángulo tiene 40 *mts* de perímetro. Expresa el área del rectángulo en función de la longuitud de uno de sus lados.

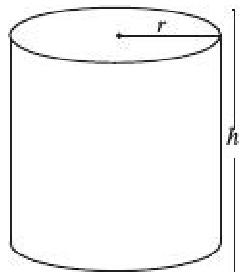
. Exprese el área del triángulo ABC como en función de x:



. Exprese el volumen del cono en función de su altura h, si el radio del cono es el doble de su altura:



. Exprese el área superficial A_s, del cilindro circular recto en función de la altura *h*. Si la altura es igual al radio:



. Una editorial produce textos escolares, la editorial estima que el costo unitario es de $50.000 y producir cada texto cuesta $10.000 y cobra $12.000 por la venta de cada uno.

a. exprese el costo *C* en función del número de textos producidos y vendidos.
b. exprese el ingreso en función del número de textos producidos y vendidos.

. La suma de dos números es 120, exprese el producto de los números en función del número mayor. (si *x* es mayor que y).
. El producto de dos números es 1200, exprese la suma en función de uno de ellos.

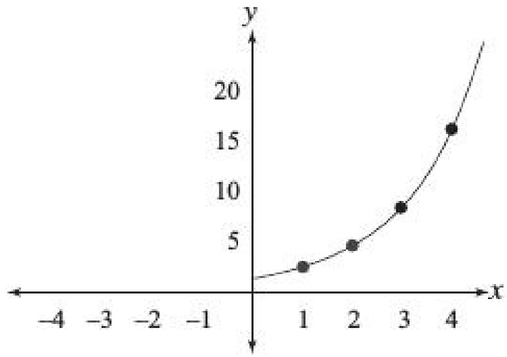
5.6. Función exponencial y logarítmica

En este capítulo se abordarán las funciones exponenciales y logarítmicas las cuales no se pueden expresar en forma algebraica, como las funciones desarrolladas en el capítulo anterior que son algebraicas. Estas funciones exponenciales y logarítmicas reciben el nombre de trascendentes, es decir que no se pueden definir solo en términos de operaciones básicas y potencias racionales.

5.6.1. Funciones exponenciales

Sean las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=2^x$, estas funciones tienen una base elevada a un exponente. Para la función $f(x)=x^2$ la base es la variable *x* y el exponente un número real; pero para la función $g(x)=2^x$, la base es un número real y el exponente una variable. Comparando las funciones anteriores *f* y *g* estas tienen intercambiada la base y el exponente. La función $g(x)=2^x$ es un ejemplo de función exponencial con base 2.

En la siguiente figura se muestra un bosquejo de la gráfica de la función $g(x)=2^x$ con *x* racional, donde el dominio son los números racionales mayores que cero, es decir: $x \in (0, \infty)$.



Con el fin de ampliar el dominio x de la función g a todos los números reales es necesario definir el exponente x irracional, es decir; si $g(x)=2^x$, para $x \in \mathrm{I}$ irracionales. Evaluemos algunos números irracionales en la función g, sean estos:

$$x=\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \cdots$$

Sus imágenes son:

$$g(\sqrt{2})=2^{\sqrt{2}};\ g(\sqrt{3})=2^{\sqrt{3}};\ g(\sqrt{\pi})=2^{\sqrt{\pi}};\ g(\sqrt{e})=2^{\sqrt{e}};$$

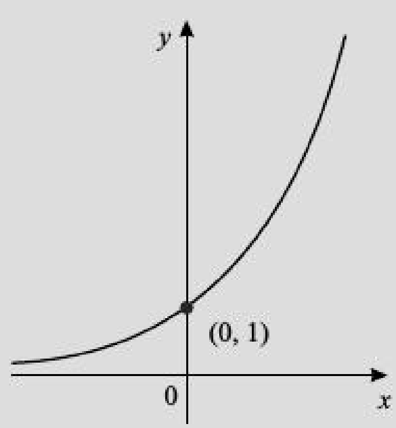
$$g\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=2^{\frac{-\sqrt{2}}{2}};\ldots$$

Así el dominio de $g(x)=2^x$ se amplía a todos los números x que pertenecen a los reales R, así se tiene la siguiente definición.

Definición: *sean* k *y a números reales constantes. Una función exponencial con base* a*, se define para todos los números reales* x *por*: $f(x)=ka^x$, para $k\neq0$ y $a=1$, $a>0$. Si $x=0$ se tiene que el valor inicial de la función f es k, es decir: $f(0)=ka^0=k=(1)=k$

5.6.2. Gráfica de la función exponencial

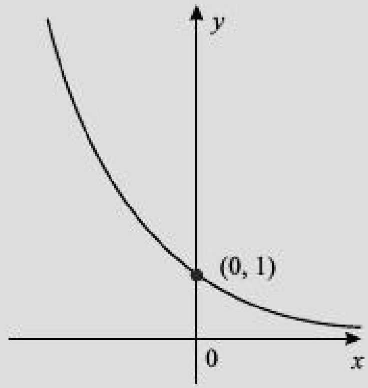
i. Si $f(x) = k\,a^x$; para $a>1$ y $k=1$ la gráfica es:



El dominio y rango de la función es:

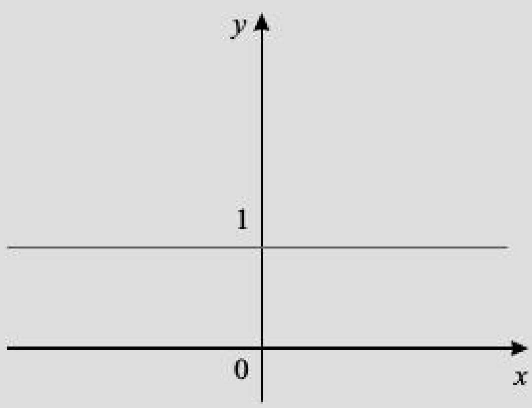
$$Dm(f)=R(-\infty,\infty)$$
$$Im(f)=R^{+}(0,\infty)$$

ii. Si $f(x)=ka^{x}$; para $0<a<1$ y $k=1$ la gráfica es:



El dominio y la imagen son la misma de la función anterior.

1. Si $f(x)=ka^{x}$; para $a=1$ y $k=1$ la gráfica es:



El dominio y la imagen de la función es:

$Dm(f)=R=(-\infty,\infty)$
$Im(f)=\{1\}$

Ejemplo

Dadas las funciones $f(x)=2^{x}$ y $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ hallar:

. Elabore una tabla de datos para cada función para los valores: $x=-3,-2,-1,0,1,2,3$

. Evaluar en las funciones f y g los valores $x=\sqrt{2},\pi,\sqrt{5},-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

. Trace la gráfica de cada función en el mismo plano.

Solución

a. Tomemos valores enteros *x* para facilitar la tabulación, pero recordemos que el dominio se extendió al conjunto de los números reales.

x	$f(x)=2^x$	$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$
–3	$\frac{1}{8}$	8
–2	$\frac{1}{4}$	4
–1	$\frac{1}{2}$	2
0	1	1
1	2	$\frac{1}{2}$
2	4	$\frac{1}{4}$
3	8	$\frac{1}{8}$

b. Al evaluar en las funciones *f* y *g* los valores $x=\sqrt{2},\pi,\sqrt{5},-\frac{\sqrt{3}}{2}$ se tiene:

$$f(\sqrt{2})=2^{\sqrt{2}}\approx 2{,}665144143$$

$$f(\pi)=2^{\pi}\approx 8{,}824977827$$

$$f(\sqrt{5})=2^{\sqrt{5}}\approx 4{,}711113133$$

$$f\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)=2^{\frac{-\sqrt{3}}{2}}\approx 0{,}548656307$$

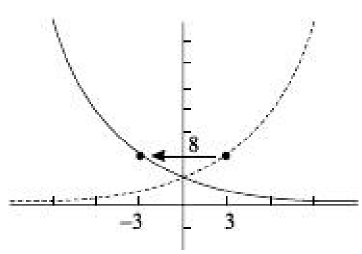
$$g(\sqrt{2})=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\approx 0{,}375214227$$

$$g(\pi)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\pi}\approx 0{,}113314732$$

$$g(\sqrt{5})=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{5}}\approx 0{,}212264059$$

$$g\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-\sqrt{3}}{2}}\approx 1{,}822634655$$

c. Se observa que las imágenes de las funciones



$f(x)=2^x$ y $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ son las mismas para

x=3 y x=–3

respectivamente, es decir:

$f(3)=2^3=8$ y $g(-3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=8.$

En la figura se observa que existe una simetría de las gráficas con respecto al eje *Y*, luego *f(x)* debe ser igual a g(x), veamos:

$$f(x)=2^x=\frac{1}{2^{-x}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}=g(-x),\ \text{donde}\ g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

5.6.3. Función exponencial natural

Es una función exponencial con base *e*, se define para todos los números reales *x* por: $f(x) = k\,e^x$; para $k \neq 0$ y $e \in R$

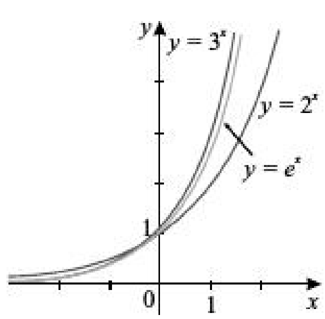
El número e es el número de Euler, que representa la base natural de las funciones exponenciales. Si k=1 se tiene que $f(x)=e^x$, es la función exponencial natural que usualmente se utiliza.

La base natural *e* es un número irracional que se utiliza frecuentemente en el cálculo. En los cursos de cálculo se muestra que si en la siguiente expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ se reemplaza *n* por valores muy grandes, la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ se aproxima al número e el cual es aproximadamente e≈2,718281828····; la gráfica de la función exponencial natural $f(x)=e^x$ tiene la misma forma de la gráfica de la función exponencial $f(x) = a^x$, aunque los puntos en el plano son distintos; ya que $2 < e < 3$.

La gráfica de la función exponencial se muestra en la siguiente figura y su dominio e imagen son:

Df:(–∞,∞)
$Im(f)$:(0,–∞)

Es decir: $f{:}R\rightarrow R^+$
$x\rightarrow y=f(x)=e^x$



5.8. Ejercicios

. Trace las graficas de las siguientes funciones

a. $y=3^x$
b. $y=10^x$

c. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

d. $y=2^x$

e. $y=2^{-x}$

f. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

g. $y=-3^x$

h. $y=3^{-x}$

i. $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x$

. Empleando las transformaciones de funciones grafique las siguientes funciones:

a. $y=e^x+1$

b. $y=2^{-x}+1$

c. $y=10^x+2$

d. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$

e. $y=(0.2)^x+1$

f. $y=3^{|x|}$

g. $y=3^{|x|}+1$

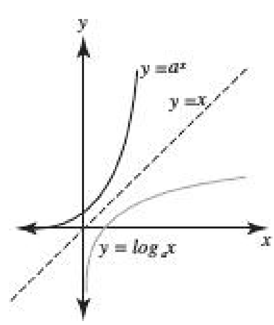
h. $y=|3^x-2|$

i. $y=-\left(\frac{1}{4}\right)^x$

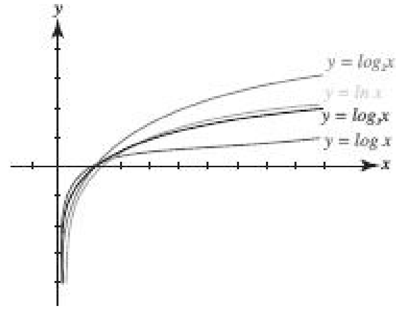
5.6.4. Función logarítmica con base *a*

La función logaritmo con base *a*, se denota Log_a, y se define: $y = Log_a x$, para todo x Î R^+ y a ¹ 1

La función logarítmica $y = Log_a x$ es la función inversa de la función exponencial con base a $y = a^x$, es decir; si reflejamos la gráfica de la función $f(x) = a^x$ a través de la recta $y = x$, se obtiene su función inversa que es $y = Log_a x$. A continuación se muestran las gráficas de las funciones exponenciales $f(x) = a^x$ y logarítmica $y = Log_a x$ en el mismo plano.



Luego la gráfica de la función logarítmica con base *a* con dominio x>0 e imagen todos los números reales, se ilustra a continuación:



En la gráfica de la función logarítmica $y = \text{Log}_a x$, se observa lo siguiente:

$y = Log_a x = 0$, si $x = 1$

$y = Log_a x > 0$, si $x > 1$

$y = Log_a x < 0$, si $0 < x < 1$

$y = Log_a x = 0$, no está definido si $x < 0$

5.6.5. Relación entre la función exponencial y logarítmica

Como la función logarítmica $y = Log_a x$ es la inversa de la función exponencial $y = a^x$ se tiene:

Sea $f(x) = a^x$ y $f^{-1}(x) = Log_a x$, entonces se debe cumplir lo siguiente:

i. $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$
ii. $(f \circ f^{-1})(x) = f^{-1}(f^{-1}(x)) = x$

Así:

i. $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(a^x) = \text{Log}_a a^x = x$, para $x \in R$
ii. $(f \circ f^{-1})(x) = f^{-1}(\text{Log}_a x) = \text{a}^{\text{Logax}} = \text{x}$, para $x \in R^+$

Si se desea deducir algebraicamente la inversa de cada una de las funciones anteriores se tiene:

Sea $y = f(x) = a^x$ la deducción algebraica de su función inversa es: si $y = a^x$

cambiando las variables se tiene: $x = a^y$, aplicado Log_a en ambos lados

$$Log_a x = Log_a a^y$$
$$Log_a x = y$$

Así, $y = f^{-1}(x) = Log_a x$ es la función inversa de $y = f(x) = a^x$.

Similarmente la deducción algebraica de la función inversa de $y = f^{-1}(x) = Log_a x$ es:

Si $y = Log_a x$, cambiando las variables se tiene: $y = Log_a y$, elevando a la base a en ambos lados:

$$a^x = a^{Log_a x}$$
$$a^x = y$$

Así, $y = f^{-1}(x) = a^x$ es la función inversa de $y = f(x) = Log_a x$.

De las deducciones algebraicas anteriores se tiene:

$$Log_a x = y \leftrightarrow a^y = x$$

La equivalencia anterior es la definición de $Log_a x$ para $x > 0$ y $x \in R$ y es una herramienta que se utilizará para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas más adelante.

Ejemplo 1

Ilustremos la definición anterior con los siguientes ejemplos:

. $Log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$.

. $Log_3 1 = 0$ porque $3^0 = 1$.

. $Log\left(\frac{1}{64}\right) = -6$ porque $2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$

. $Log_9\ 3 = \frac{1}{2}$ porque $9^{\frac{1}{2}} = 3$

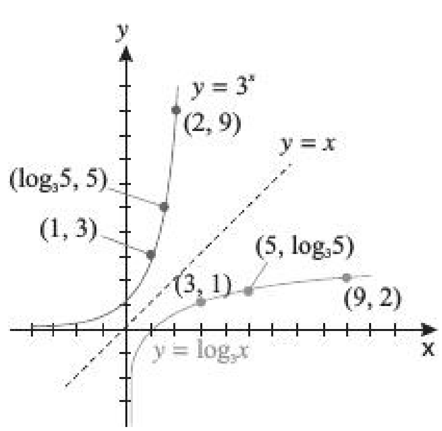
Ejemplo 2

Trazar la gráfica de la función logarítmica $y=f(x)=3^x$ y su función inversa.

Solución

De la definición anterior se tiene: $x=Log_3 y$, por medio de esta definición se construye la siguiente tabla de datos:

$y = 3^x$	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^0	3^1	3^2	3^3
	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
$Log_3 y$	–3	–2	–1	0	1	2	3



De la gráfica anterior se tiene lo siguiente:

$$2 = 3^x \leftrightarrow x = Log_3 2$$
$$1 = 3^x \leftrightarrow x = Log_3 1$$
$$1 = 3^0 \leftrightarrow 0 = Log_3 1$$

5.6.6. Logaritmos comunes

Los logaritmos con base 10 se llaman logaritmos naturales y se denotan $Log_{10}x$ para su uso se denotan omitiendo la base 10, así:

$$Log_{10}x = Log\, x, \text{ para } x \in R^+$$

En los logaritmos comunes se cumplen las propiedades de logaritmo con base *a*.

$Log_{10}1=0 \leftrightarrow 10^0=1$

$Log_{10}1=1 \leftrightarrow 10^1=10$

$Log_{10}1^x=x \leftrightarrow 10^x=10^x$

$10^{Log}10^{10x}=x \leftrightarrow Log_{10}x=Log_{10}x$

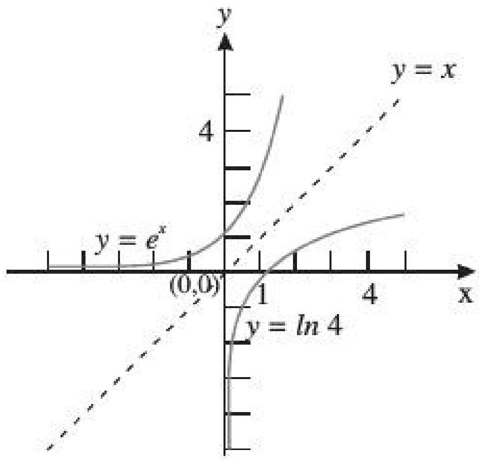
Definición: una función logarítmica con base *e* se denomina ***función logarítmica natural*** y se denota *Ln (x)*, que es la abreviación de $Log_e x$, es decir, $Log_e x = Ln\,(x)$ para todo $x \in R^+$.

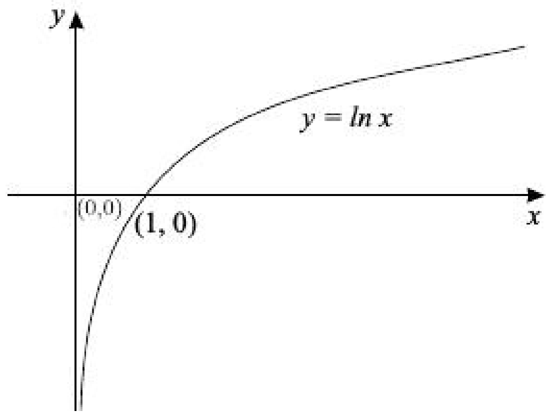
5.6.7. Gráficas de la función exponencial natural y logaritmo natural

Realicemos las siguientes tablas de datos para graficar en el mismo plano las funciones anteriores.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = f(x) = e^x$	e^{-3}	e^{-2}	e^{-1}	e^0	e^1	e^2	e^3

x	e^{-3}	e^{-2}	e^{-1}	e^0	e^1	e^2	e^3
$y = f^{-1}(x) = Ln(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3





Se observa que la función logaritmo natural $y = Ln(x)$ es la inversa de la función exponencial $y=e^x$, es decir:

$$y=Ln(x)=\leftrightarrow e^y=x$$

De la gráfica se observa lo siguiente:

$$1=Ln(e)\leftrightarrow e^1=e$$
$$-1=Ln(e^{-1})\leftrightarrow e^{-1}=\frac{1}{e}$$
$$0=Ln(1)\leftrightarrow e^0=-1$$

Como $y=e^x$ y y=Ln(x) son funciones inversas, se debe cumplir que la composición entre ellas es la función x; sea $f(x)=e^x$ y $f^{-1}(x)=Ln(x)$ se tiene:

i. $(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(e^x)x$, para$x\in R$
ii. $(f\circ f^{-1})(x)=f(f^{-1}(x))=xf(f^{-1}(x))=f(Lnx)=e^{Ln(x)}=x$, para$x\in R^+$

5.6.8. Propiedades de los logaritmos

Sea $a\neq 0$ y sea x, y y z números reales cualesquiera con $x>0$ y $y>0$

i. $Log_a(x\cdot y)=Log_a x+Log_a y$

Prueba

Sea $Log_a x=M$ y $Log_a y=N$

Si escribimos las expresiones anteriores en forma exponencial tenemos: $a^M=x$ y $a^N=y$

De esta manera se tiene:

$$Log_a(x\cdot y)=Log_a(a^M\cdot a^N)=Log_a a^{M+N}=M+N=Log_a x+Log_a y$$

Así $Log_a(x\cdot y)=Log_a x+Log_a y$

Ejemplo 1

Evaluar la siguiente expresión: $\mathrm{Log}_4 2+\mathrm{Log}_4 2$

Solución

$Log_4 2+Log_4 2=Log_a(2\times 2)=Log_4 4=1$

i. $Log_a\left(\frac{x}{y}\right)=Log_a x-Log_a y$

Prueba

Así,

$$Log_a(x)=Log_a\left(\frac{x}{y}\cdot y\right)=Log_a\left(\frac{x}{y}\right)+Log_a(y)$$
$$Log_a(x)-Log_a(y)=Log_a\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$Log_a\left(\frac{x}{y}\right)=Log_a(x)-Log_a(y)$$

Ejemplo 2

Evaluar la siguiente expresión: $Log_3 27–Log_3 9$

Solución

$$\boldsymbol{Log_3 27-Log_3 9=Log_3\left(\frac{27}{9}\right)=Log_3 3=1}$$

iii. $Log_a x^z=zLog_a x$

Prueba: sea $Log_a\, x = M$, expresado en forma exponencial es $a^M = x$, en efecto se tiene:

$$Log_a x^z=Log_a(a^M)^z=Log_a a^{Mz}=zM=zLog_a x$$

Así, $Log_a x^z=zLog_a x$

Ejemplo 3

Evaluar $Log_3 27$

Solución

$$Log_3 \sqrt{27} = Log_3 (27)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2} Log_3 27 \quad \text{Propiedad 3}$$
$$= \frac{1}{2} Log_3 3^3 \quad \text{Propiedad de los exponentes}$$
$$= \frac{3}{2} Log_3 3 \quad \text{Propiedad 3}$$
$$= \frac{3}{2} \quad \text{Por que } Log_3 3 = 1$$

Ejemplo 4

Expandir el logaritmo $Log_3 (x^2 \cdot y^7)$

Solución

$Log_3 (x^2 \cdot y^7) = Log_3 x^2 + Log_3 y^7$ Propiedad 1

$$= 2Log_3 x + 7Log_3 y \quad \text{Propiedad 3}$$

Ejemplo 5

Expandir el logaritmo $Log_2 \sqrt[3]{\frac{x^2 y}{zN}}$

Solución

$$Log_2 \sqrt[3]{\frac{x^2 y}{zN}} = Log_2 \left(\frac{x^2 y}{zN}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{Propiedad de radicación}$$
$$= \frac{1}{2} Log_2 \left(\frac{x^2 y}{zN}\right) \quad \text{Propiedad 3}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left[Log_2 (x^2 y) - Log_2 (zN)\right] \quad \text{Propiedad 2}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left[Log_2 x^2 + Log_2 y - Log_2 z - Log_2 N\right] \quad \text{Propiedad 1}$$
$$= Log_2 x + \frac{1}{2} Log_2 y - \frac{1}{2} Log_2 z - \frac{1}{2} Log_2 N$$

Ejemplo 6

Expresar en un solo logaritmo $4Log\,x + \frac{1}{3} Log\,(x+2)$

Solución

$$4Log x+\frac{1}{3}Log(x+2)=Log x^4+Log(x+2)^{\frac{1}{3}} \quad \text{Propiedad 3}$$

$$=Log x^4\cdot(x+2)^{\frac{1}{3}} \quad \text{Propiedad 1}$$

Ejemplo 7

Expresar en un solo logaritmo $3Lnx+\frac{1}{2}Ln(y)-Ln(z^2)$

Solución

$$3Lnx+\frac{1}{2}Ln(y)-Ln(z^2)=Lnx^3+Lny^{\frac{1}{2}}-Lnz^2 \quad \text{Propiedad 3}$$

$$=Ln\left(x^3y^{\frac{1}{2}}\right)-Ln(z^2) \quad \text{Propiedad 1}$$

$$=Ln\left(\frac{x^3y^{\frac{1}{2}}}{z^2}\right) \quad \text{Propiedad 2}$$

5.6.9. Cambio de base

En algunas ocasiones es útil cambiar el logaritmo de una base a otra base. Supongamos que se da $Log_a\, x$ y se quiere calcular $Log_b\, x$. En efecto sea $y = Log_b\, x$ en forma exponencial es $b^y = x$, luego:

$$Log_a\,(b^y)= Log_a\, x$$

Tomando Log_a en ambos lados $y=\frac{Log_a x}{Log_a b}$, despejando y De esta manera podemos formular el cambio de base así: $Log_b x=\frac{Log_a x}{Log_a b}$ y

Ahora tenemos dos casos particulares.

i) Si a=x, la fórmula anterior se convierte en:

$Log_b\, a=\frac{Log_a a}{Log_a b}=\frac{1}{Log_a b}$

Entonces, $Log_b a=\frac{1}{Log_a b}$

Si tomamos $a = e$ en la fórmula de cambio de base, se obtiene:

$$Log_b x=\frac{Log_e x}{Log_e b}=\frac{Lnx}{Lnb}, \text{entonces} \quad Log_b x=\frac{Lnx}{Lnb}$$

Ejemplo

Evaluar $Log_3 2$

Solución

Se puede expresar en términos de logaritmos naturales

$$Log_3 2 = \frac{Ln2}{Ln3}$$

Nota: *No hay manera de calcular el logaritmo de una suma o diferencia, por ejemplo:*

$$Log_a(x+y) \neq Log_a x + Log_a y$$

$$Log_a\left(\frac{x}{y}\right) \neq \frac{Log_a x}{Log_a y}$$

$$(Log_a x)^n \neq n\,Log_a x$$

5.9. Ejercicios

. Escribir las siguientes expresiones en notación exponencial:

a. $Log_2 32=5$
b. $Log_x b=4$
c. $Log_3\left(\frac{1}{9}\right)=1$
d. $Log_{25} 5=m$
e. $Log_2(m+n)=y$
f. $Log_{(m+n)} B=3$
g. $Log_2 x=(a+b)$
h. $Log_2 x=\left(\frac{1}{3}\right)$

. Escribir las siguientes expresiones en notación logaritmica.

a. 3°=1
b. $4^{-2}=\left(\frac{1}{16}\right)$
c. $8^{2/3}=4$
d. $10^5=100.000$
e. $a^{10}=b$
f. $p^x=t$
g. $a^{m+n}=w$
h. $e^x=b$
i. $10^0=1$

. Utilizar las propiedades de los logaritmos para desarrollar las siguientes expresiones.

a. $Log_a\,(4x)$
b. $Log_3\,(x(x+2))$
c. $Log\sqrt{x}$
d. $Log\left(x^2\sqrt{y}\right)$
e. $Log_3\sqrt[3]{x^2+1}$
f. $Log\left(\frac{z^2}{b^7\sqrt{c}}\right)$
g. $Log\left(\frac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-3}}\right)$
h. $Log\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{z}}}$
i. $Ln\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}y^2}{zN}\right)$
j. $Ln\left(\frac{x(x-1)^2}{4y}\right)$

. Expresar en un solo logaritmo:
a. $Log_5\,6 + Log_5\,5$
b. $Ln(a+b) - Ln(a-b)$
c. c. $Log_5\,x^2 + Log_5\,y - Log_5\,(x-1)$
d. $\frac{1}{3}Log(x+1) - \frac{1}{2}\cdot\left[Log(x+2) - Log\left(x^4-2x+1\right)\right]$

. Utilizar la fórmula del cambio de base para calcular los siguientes logaritmos:
a. $Log_2\,3$
b. $Log_3\,2$
c. $Log_4 125$

. Simplificar las siguientes expresiones utilizando las propiedades de logaritmos:
a. $b^{Log_b 3}$
b. $b^{2Log_b 2}$
c. $10^{3Log_{10} 2}$
d. $Log_5\frac{5}{8} + Log_5\frac{1}{5}$
e. $Ln\left(\frac{3}{2}\right) + Ln\left(\frac{1}{5}\right) - Ln\left(\frac{8}{5}\right)$
f. $Log_a(c^2 - cd) - Log_a(2c - 2d)$
g. $Log_5(125)^4$
h. $Log_5[(81)\times(243)]$
i. $Log_{32}2$

5.7. Ecuaciones exponenciales

En esta sección se resuelven algunos ejemplos de ecuaciones exponenciales y logarítmicas, aplicando sus propiedades y posteriormente se muestran ejemplos de aplicaciones.

Definición: una *ecuación exponencial* es una ecuación donde el exponente es una variable.

Ejemplo 1

Si tenemos la ecuación $3^x=9$, la pregunta es: cuál es el valor de x que se pueda tomar para que al elevar a 3, el resultado seará 9.

Solución

Sea $3^x=9$

$Ln(3^x)=Ln(9)$ Aplicando logaritmo natural en ambos lados

$xLn(3)=Ln(9)$ Aplicando propiedad de los logaritmos $Log_a z^x=xLog_a z$

$$x=\frac{Ln(9)}{Ln(3)}=2$$

Ejemplo 2

Resolver la ecuación $2^x=32$

Solución

$2^x=32$, expresemos cada miembro de la ecuación en términos de la base 2

$2^x=2^5$, propiedades de los exponentes

$x=5$, ya que $a^x=a^y$ equivale a $x=y$

Ejemplo 3

Resolver la ecuación $2^x=9$

Solución

En esta ecuación no es fácil expresar cada miembro de la ecuación en términos de la misma base, entonces se realiza lo siguiente:

$2^x=9$, aplicando Log en ambos lados

$Log(2^x)=Log(9)$, propiedades de los logaritmos

$xLog(2)=Log(9)$

$$x = \frac{Log(9)}{Log(2)} = \frac{0{,}9542}{0{,}9542} \approx 3{,}17$$

Ejemplo 4

Resolver la ecuación del ejemplo anterior aplicando logaritmo natural en ambos lados.

Solución

$2^x=9$, aplicando *Ln* en ambos lados

$Ln(2^x)=Ln(9)$, propiedades de los logaritmos

$xLn(2)=Ln(9)$

$$x = \frac{Ln(9)}{Ln(2)} = \frac{2{,}1972}{0{,}6993} \approx 3{,}17$$

Se observa que se obtiene el mismo resultado.

Ejemplo 5

Resolver la ecuación $2^{x+3}=12$

Solución

$2^{x+3}=12$

$Ln(2^{x+3})=Ln(12)$, logaritmo natural en ambos lados

$(x+3)Ln(2)=Ln(12)$, propiedades de logaritmos

$xLn(2)+xLn(3)=Ln(12)$, distributiva para el producto

$xLn(2)=-3Ln(2)+Ln(12)$

$$x = \frac{Ln(12)-3Ln(2)}{Ln(2)} \approx 0{,}5849$$

De acuerdo a los dos ejemplos anteriores nos podemos en fijar que los ejemplos se resuelven teniendo en cuenta los siguientes pasos:

i. Aplicar logaritmo natural a la ecuación dada.
ii. Despejar *x*.

Ejemplo 6

Resolver la ecuación $30\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{2}}=8$

Solución

$$30\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{2}}=8$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{2}}=\frac{8}{30}, \text{simplificar}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{2}}=\frac{4}{15}$$

$$Ln\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{2}}=Ln\left(\frac{4}{15}\right)$$

$$\frac{x}{2}Ln\left(\frac{1}{3}\right)=Ln\left(\frac{4}{15}\right)$$

$$x=\frac{2\,Ln\left(\frac{4}{15}\right)}{Ln\left(\frac{1}{3}\right)}\approx 2{,}4062$$

Ejemplo 7

Resolver la ecuación $3e^{2x}=3$

Solución

En primer lugar se deja solo el exponente de la parte izquierda de la ecuación dividiendo entre 3.

$e^{2x}=1$

Ahora se aplica el primer paso
$2xLn(e)=Ln(1)$ Propiedad de logaritmo
$2x(1)=0$

Por lo tanto la solución de la ecuación es: $2x=0$; así $x=0$

Ejemplo 8

Resolver la ecuación: $x^2 3^x-3^x=0$

Solución

$x^2 3^x-3^x=0$

$(x^2-1)\ 3^x=0$

$(x^2-1)=0$ ó $3^x=0$

$(x+1)\ (x-1)=0$ ó $3^x=0$

$(x+1)=0$ ó $(x-1)=0$ ó $3^x=0$

$x=-1$ ó $x=1$ ó $Ln(3^x)=Ln(0)$**,** pero $Ln(x)$ tiene sentido si $x>0$; entonces las soluciones de la ecuación son $x = -1$ y $x = 1$.

Ejemplo 9

2 Resolver la ecuación $x\, e^x + 9xe^x + 20e^x = 0$

Solución

$2\, x\, e^x + 9xe^x + 20e^x = 0$

$e^x\, (x^2 + 9x + 20) = 0$ Factorizando e^x

$e^x\, (x + 5)\cdot\, (x + 4) = 0$

Entonces, $e^x = 0$ ó $x + 5 = 0$ ó $x + 4 = 0$

En primer lugar $e^x = 0$ no tiene solución porque $x = Ln(0)$ no existe.

Ahora $x + 5 = 0$ y $x + 4 = 0$ conducen a las soluciones $x = -5$ ó $x = -4$

Ejemplo 10

Resolver la ecuación $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

Solución

Primero se factoriza para aislar el término exponencial:

$(e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0$ Ley de los exponentes

$(e^x - 2)\cdot\, (e^x - 1) = 0$ Factorizando

Así, $e^x - 2 = 0$ ó $e^x - 1 = 0$

Luego, $e^x = 2$ ó $e^x = 1$

Ahora en la ecuación $e^x = 2$, aplicando logaritmo natural en ambos lados se tiene:

$Ln(e^x) = Ln(2)$

$xLn(e) = Ln(2)$, entonces $x = \dfrac{Ln(2)}{Ln(e)} = \dfrac{0.693}{1} = 0.693$

Análogamente para la ecuación $e^x = 1$ conduce a la solución $x = Ln(1) = 0$

Ejemplo 11

Resolver la ecuación $\dfrac{4^x - 4^{-x}}{2} = 3$

Solución

$\dfrac{4^x - 4^{-x}}{2} = 3$, multiplicando por 2 en ambos lados

$4^x - 4^{-x} = 6_x$, definición de $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$4^x = \frac{1}{4^x} = 6$

$\frac{4^{2x} - 1}{4^x} = 6$

$4^{2x} - 1 = 6(4^x)$

$4^{2x} - 6(4^x) - 1 = 0$

$(4^x)^2 - 6(4^x) - 1 = 0$

Si realizamos la sustitución $z = 4^x$ se tiene una ecuación cuadrática así:

$$z = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$z = \frac{6 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{10}}{2} = 3 \pm \sqrt{10}$$

La solución debe ser en términos de la variable x, luego como $z = 4^x$ se tiene:

$$4^x = 3 \pm \sqrt{10}$$

Una solución es:

$4^x = 3 \pm \sqrt{10}$

$x \; Ln(4) = Ln(3 \pm \sqrt{10})$

$x = \frac{Ln(3 \pm \sqrt{10})}{Ln(4)} \approx 1{,}3117$

La otra posibilidad:

$4^x = 3 - \sqrt{10}$, al aplicarle logaritmo no tiene sentido la expresión

$Ln(3 - \sqrt{10})$, porque $3 - \sqrt{10} < 0$

Luego la única solución de la ecuación $\frac{4^x - 4^{-x}}{2} = 3$ es $x = 1{,}3117$

5.10. Ejercicios

. Resuelva la ecuación exponencial dada

a. $e^{2x+3} = 1$

b. $3^{x+3}=81$
c. $2^{x+2}=4^{x-1}$
d. $e^{x}+e^{-x}=2$
e. $e^{2x}-2e^{x}-3=0$
f. $e^{2x}-2e^{-2x}-1=0$
g. $e^{3x}-3e^{2x}+4e^{x}-4=0$
h. $e^{2x}+9e^{x}+20=0$
i. $5^{x}=7^{x+1}$
j. $3^{x}-3^{-x}=4$
k. $e^{2x}-5e^{x}-36=0$
l. $3^{x^2-2}=\sqrt[3]{243}$

5.8. Ecuaciones logarítmicas

Definición: una ***ecuación logarítmica*** es aquella que tiene una variable dentro del logaritmo.

Ejemplo 1

Resolver $Log_3\,(x+1)=6$

Solución

El primer paso es escribir la ecuación dada en forma exponencial, es decir:

$x+1=3^6$, despejando x se tiene:

$\mathbf{x}=3^6=1$

$x=728$

Es importante tener en cuenta los siguientes pasos:

i. Aislar los términos que tengan logaritmos a un lado de la ecuación
ii. Escribir la ecuación en un solo logaritmo
iii. Escribir la ecuación en forma exponencial
iv. Despejar la variable x

Ejemplo 2

Resolver la ecuación $2-\mathrm{Ln}(3-x)=0$

Solución

$2–\text{Ln}(3–x)=0$

$Ln(3–x)=2$

$3–x=e^2$ Forma exponencial

$x=3–e^2$

Ejemplo 3

Resolver la ecuación $Log\ x = 1 - Log(x - 3)$

Solución

$Log\ x = 1 - Log\ (x - 3)$
$Log\ x + Log\ (x - 3) = 1$
$Log\ x(x - 3) = 1$ Propiedad de logaritmo
$x(x - 3) = 10^1$ Forma exponencial
$x^2 - 3x - 10 = 0$ Forma cuadrática
$(x - 5)\cdot (x + 2) = 0$ Factorizando

Luego la solución es:

$x - 5 = 0$ ó $x + 2 = 0$
$x = 5$ ó $x = -2$

Ejemplo 4

Resolver la ecuación $Log_5\ (x + 1) = 2 + Log_5\ (x - 1)$

Solución

$Log_5(x+1) = 2+Log_5(x-1)$
$Log_5(x+1) = Log_5(x-1)=2$

$Log_5\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=2$ Propiedad de logaritmo

$\frac{x+1}{x-1}=5^2$ Forma exponencial

$(x + 1)= 25(x - 1)$

$x + 1= 25x - 25$

$- 24x = - 26$

$x=\frac{26}{24}=1.083$

. Resuelva la ecuación logaritmica dada

a. $Log x - Log(x-2) = Log 2$
b. $Log x + Log(x-1) = Log 6$
c. $Ln 12 - Ln(x-1) = Ln(x-2)$
d. $Log(x-2) + Log(x-1) = Log 6$
e. $Log(2x-3) = 1 - Log(x-2)$
f. $Ln x + Ln(x+3) = Ln 18$
g. $Log_a(2x-1) + Log_a x = Log_a(x+4)$
h. $Log(x+3) = 2$
i. $Log_2(x+4) - Log_2(x-3) = Log_2 3$

5.9. Aplicaciones a las ecuaciones logarítmicas y exponenciales

5.9.1. Interés compuesto

Supongamos que una persona quiere invertir un capital P a una tasa de interés r en t años, donde n es el número de veces que el interés se compone por año. Para estos problemas de interés se utiliza la siguiente fórmula:

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Donde:

$A(t)$: Cantidad de capital recaudado después de t años

P : Capital inicial invertido

r: Tasa de interés por año

t: número de años

n: pagos anuales

Ejemplo

Se invierten 10.000 dólares a una tasa de interés del 10%. Calcule el capital recaudado después de 2 años si el interés se compone:

. Anualmente
. Semestralmente

Solución

. Tomando $n=1$ se tiene:

$$A(t) = 10.000\left(1 + \frac{0.10}{1}\right)^{1(2)} = 12.000$$

El capital que se recaudó al cabo de dos años es 12.100 dólares.

. Tomando n= 2 se tiene:

$$A(t)=10\,000\left(1+\frac{0.10}{2}\right)^{2(2)}=10\,000(1+0.05)^{4}=12.15$$

5.9.2. Interés compuesto continuo

Para este tipo de interés utilizamos la fórmula $A(t)=Pe^{rt}$

Donde:

$A(t)$: Cantidad de capital recaudado después de t años
P: Capital inicial invertido
r: Tasa de interés por año
t: Tiempo en años

Ejemplo 1

Calcular la cantidad de capital recaudado en dos años, si se invierten 5000 dólares a una tasa de interés del 3% por año.

Solución

Sea:
P= 5 000 Capital inicial
r= 0.03 Tasa de interés
t=2 Años

Reemplazando en la fórmula se tiene:

$A(t)$= 5000e $^{(0.03)(2)}$= 5000e $^{0.06}$ = 5309 Dólares.

Ejemplo 2

Se invierte la suma de 10 000 dólares a una tasa de interés del 2% por año. Calcule el tiempo requerido para que el capital se triplique si el tiempo es:

. Semestral
. Compuesto continuo

Solución

a. Sea
P= 10 000 Capital inicial
r=0.02 Tasa de interés
$A(t)$=30 000
n=2, por ser semestral
Utilizando la fórmula $A(t)=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ se tiene:

$$A(t)=10.000\left(1+\frac{0.02}{2}\right)^{2t}=30.000$$

$(1.01)^{2t}=3$

$Ln(1.0)^{2t}=Ln(3)$

Aplicando logaritmos a ambos lados obtenemos lo siguiente:

$$t=\frac{Ln(3)}{2Ln(1.01)}=54.77 \text{ Años}$$

b. Forma continua
Sea:

$$P=10\,000 \text{ Capital inicial}$$
$$r=0.02 \text{ Tasa de interés}$$
$$A(t)=30\,000$$

Solución

Utilizando la formula compuesta continua $A(t)=Pe^{rt}$ se tiene:

$$10.000\ e^{(0.02)(t)}=30.000$$
$$e^{(0.02\,t)}=3$$
$$Ln(e^{0.02\,t})=Ln3$$
$$t=\frac{Ln3}{0.02}=54.93 \text{ años}$$

5.9.3. Crecimiento exponencial

Este modelo se utiliza para poder establecer a futuro qué cantidad de población crece en condiciones normales a través del tiempo, por ejemplo la población de un país o población bacteriana. El modelo que se utiliza es:

$N(t)= n_0e^r\ t$

$N(t)$ = Cantidad de población a futuro.

n_0 = Población inicial.

r = Tasa de crecimiento.

t = Tiempo.

Ejemplo 1

Un cultivo inicial de bacterias es de 12.000, la tasa de crecimiento es de 50% por hora.

. Encuentre una función que modele esta situación.
. Qué cantidad de bacterias hay después de 5 horas

Solución

Tomando n_0 =12.000 y r= 0.5

La función a modelar es $N(t)$=12.000e donde t está representada en horas.

. De acuerdo a la ecuación anterior, la población bacteriana después de 5 horas es: $N(t)=12.000e^{0.5(5)}=146.189{,}92$

Ejemplo 2

En el problema anterior supongamos que se duplicó la población bacteriana. ¿Cuál es el tiempo requerido?

Solución

n_0 =12000
$N(t)$ = 24.000
t = ?
r = 0.5

Reemplazando en la función a modelar $N(t)=12.000e^{0.5t}$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
24.000 &= 12.000e^{0.5t} \\
h &= e^{0.5t} \\
Ln(2) &= Ln(e^{.5t}) \\
Ln(2) &= 0.5tLn(e^{.5t}) \\
t &= \frac{Ln(2)}{0.5} = 1.38 \text{ horas}
\end{aligned}
$$

Significa que para que se dupliquen las bacterias a una tasa de crecimiento del 50%, el tiempo requerido es 1.38 horas.

5.12. Ejercicios

. Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

a. $5^x = 3$
b. $e^x = 2$
c. $3^{x-1} = 1$
d. $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 1\,000$

. Encontrar la solución exacta utilizando logaritmos:

a. $3^{x+4} = 2^{1+2x}$
b. $2^{-x} = 8$
c. c. $2^{-x} = 5$
d. $2^{3x-1} = \frac{1}{2}$
e. $2^{5-x} = 6$
f. $2^{5x+3} = 2^{2x+1}$

g. $8^{9x+1} = 2^{7x-1}$

. Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a. Ln(2+x)2

b. $Log_2 (x^2 - x - 2)= 2$

c. $Logx = 1- Log(x - 3)$

d. Ln(x–1)+Ln(x+2)=1

e. $Log(x - 4)= 3$

f. $Log_4 (x +1)= 2 + Log_4 (3x - 2)$

g. $Log(x+1)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

5.13. Problemas

. Se invierten 5 000 dólares en una cuenta de ahorros con un interés compuesto continuamente a una tasa del 10% por año:

a. En cuánto tiempo el crecimiento de la inversión será de 40. 000 dólares en la cuenta.

b. Cuánto tiempo tardará en duplicarse la inversión.

. Plantee una fórmula de interés compuesto para determinar cuánto tiempo tardará en triplicarse una inversión a una tasa del 5% por año compuesto semestralmente.

. Despeje la variable t , de la fórmula de interés compuesto:

$$A(t)=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

. Una persona invierte 12 000 dólares en una cuenta de ahorros que paga el 7% de interés anual capitalizable trimestralmente:

a. Encuentre la cantidad después de 2 años.

b. Cuánto tiempo tardará en triplicarse la inversión.

. En cuánto tiempo se duplica una inversión de 20. 000 dólares a un interés de 7.5% anual capitalizable de forma continua.

. Una población de conejos crece a una tasa del 9% por año. Se estima que la población en el año 2005 fue de 12 000:

a. Encuentre una función que modele la situación anterior en t años.

b. Estime la población para el año 2009.

. Un cultivo inicial de bacterias es de 80 000, después de una hora crece a 85 000:

a. Encuentre la función que modele la situación anterior.

b. Encuentre el número de bacterias después de tres horas.

. Si h_0 es la diferencia de temperatura inicial entre un objeto y su medio ambiente, y la temperatura del medio ambiente es T_s, entonces la temperatura en un tiempo t es $T(t)=Ts+h_0e^{-kt}$, donde k es una constante positiva:

a. Despejar la variable *tiempo* en el modelo de temperatura.

. La actual de cierta ciudad es de 2´500.000 habitantes y crece anualmente en 8%. Calcular la población en:

a. 1 año
b. 2 años
c. 10 años
d. n años.

. En cuantos años se duplica la población *P* si crece anualmente en un 10%

. En que % anual crecera una población de 5´000.000 si se estima que en 5 años es de 7´000.000.

. Halle el valor futuro de 1´000.000 colocando a una taza de interes del 3% mensual durante un año si el interes es:

a. Simple
b. Compuesto

. Una deuda de 10 millones que se debe pagar dentro de 10 meses, se conviene pagar hoy (anticipadamente) Con una taza de descuento de 2.5% mensual. Calcual el valor anticipado de la deuda si el interes es:

a. Simple
b. Compuesto

. Un prestamo de 10´000.000 se conviene pactar en un solo pago dentro de 1 año a una taza de interes del 3.2% mensual. Cual es el valor por pagar.

. Una población que hoy es de 1´000.000 de habitantes tiene un crecimiento continuo de 7% anual. Cual sera la población en 5 años. ¿En cuantos años se duplicara?

. ¿Que taza de crecimiento anual continuo tiene una población que se duplica en 15 años?

. Una especie en vía de extinción disminuye en 10% anual. En cuantos años la población actual se reducirá:

a. A la mitad
b. Al 30%

Capítulo 6

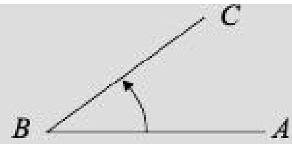
Trigonometría

Objetivos

- Identificar los ángulos notables en el círculo unitario y sus sistemas de medición con sus respectivas conversiones.
- Resolver problemas aplicativos que conducen a triángulos rectángulos y no rectángulos.
- Identificar y probar las identidades trigonométricas fundamentales.
- Graficar las funciones trigonométricas de: seno, coseno, tangente y sus respectivas funciones inversas.
- Utilizar las funciones trigonométricas inversas para la solución de ecuaciones trigonométricas.

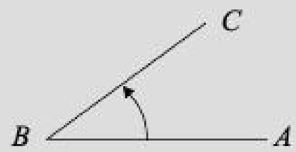
6.1. Ángulos

Ángulo plano: *ABC* está formado por dos semirrectas *AB* y *BC*. El punto *B* es la intersección de las semirrectas y se llama vértice del ángulo.

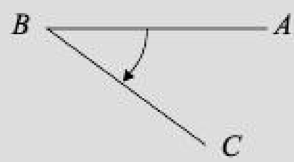


Un ángulo se genera mediante un giro (en un plano), de una semirrecta desde una posición inicial *AB* hasta la posición Terminal *BC*, por lo tanto a *AB* y *BC* se le denomina, lado inicial y terminal respectivamente.

Ángulo positivo: un ángulo es positivo si el sentido de giro es contrario a las manecillas del reloj:



Ángulo negativo: un ángulo es negativo si su giro está en sentido de las manecillas del reloj:



6.1.1. Medida de un ángulo

La medida de un ángulo depende de qué tanto se abra o rote uno de sus lados alrededor del vértice hasta que coincida con el lado inicial. Los ángulos se pueden medir en grados o radianes (abreviado como *rad*) por ejemplo el ángulo determinado por una vuelta completa tiene 360° (grados) mientras que en radianes equivale a 2π *rad*.

Por lo tanto media vuelta en grados es 180° (grados) equivalente en radianes a π *rad*, es decir:

$$\pi\, rad = 180^{\circ} \text{ y } 1\, rad = \frac{180^{\circ}}{\pi} \approx 57.3^{\circ} \text{ y } 1^{\circ} = \frac{\pi}{180} rad \approx 0.017\, rad$$

Ejemplo 1

Encontrar la medida en radianes de 45°.

Solución

Aplicando la regla de tres simple se tiene:

Grados radianes

180° ⇔ π

45° ⇔ **x**

Obtenemos que $x = \frac{45^{\circ} \cdot \pi}{180^{\circ}} = \frac{\pi}{4}$ *rad*. Luego 45° equivale a $\frac{\pi}{4}$ *rad*

Ejemplo 2

Expresar $\frac{3\pi}{2}$ *rad* en grados

Solución

Grados		radianes
180°	⇔	π
x	⇔	$\frac{3\pi}{2}$

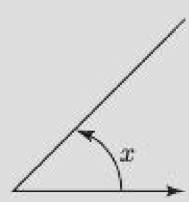
Despejando $x = \frac{\frac{3\pi}{2} \cdot 180^{\circ}}{\pi} = 270^{\circ}$. Luego $\frac{3\pi}{2}$ *rad* equivale a 270°.

En la siguiente tabla se muestran las equivalencias de radianes y grados de algunos ángulos notables:

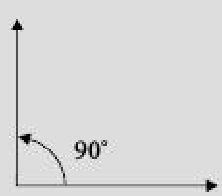
Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

6.1.2. Tipos de ángulos según su medida

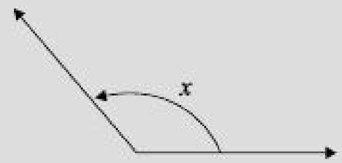
Ángulo agudo: es un ángulo que mide menos de 90°, es decir; $x < 90^{\circ}$



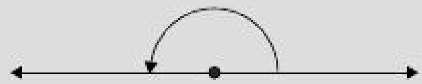
Ángulo recto: es un ángulo que mide exactamente 90°.



Ángulo obtuso: es un ángulo que mide más de 90°, es decir; $x > 90^{\circ}$



Ángulo llano: es el ángulo que mide exactamente 180°

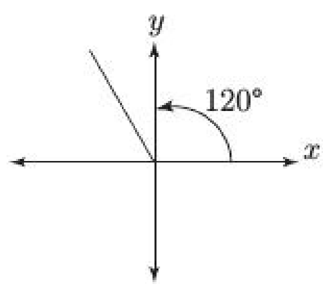


Ejemplo 1

Trace el ángulo de 120°.

Solución

Como $120^{\circ} = \frac{360^{\circ}}{3}$, significa que **120°** corresponde a un tercio de una rotación completa en sentido de las manecillas del reloj.

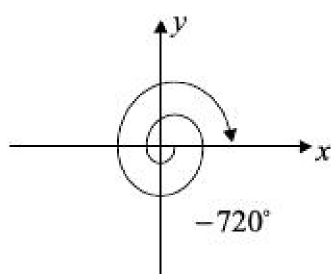


Ejemplo 2

Trace el ángulo de –720°.

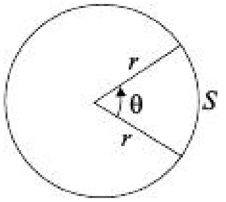
Solución

Este ángulo equivale a dos rotaciones completas en sentido de las manecillas del reloj:



6.1.3. Longitud de arco

En la figura 1 se muestra un sector circular con ángulo central θ y radio r, se subtiende un arco S.



Como la longitud del arco S es proporcional al ángulo θ y sabemos que el círculo tiene perímetro 2πr el ángulo central es 2π, se tiene la siguiente proporción: $\frac{\theta}{2\pi}=\frac{S}{2\pi}$, si se despeja θ y *S* se obtiene que $\theta=\frac{S}{r}$ y S=θr

Las ecuaciones anteriores son válidas solamente cuando θ está expresado en radianes.

Ejemplo

Cuál es la longitud de arco determinada por un ángulo central $\frac{\pi}{4}$ en una circunferencia de radio 12 cm.

Solución

S=r θ =12·$\frac{\pi}{4}$=3πcm

6.1. Ejercicios

1. Convertir de grados a radianes:
    a. 150°
    b. 210°
    c. –315°
    d. 36°

2. Convierta de radianes a grados:
    a. $\frac{3\pi}{4}$
    b. $\frac{8\pi}{3}$
    c. $\frac{-3\pi}{4}$
    d. $\frac{5\pi}{12}$

3. Dibujar los siguientes ángulos y clasificarlos de acuerdo a sus características:
    a. 150°
    b. 120°
    c. 45°
    d. -120°
    e. -30°
    f. 270°
    g. $\frac{7\pi}{3}$
    h. $\frac{-3\pi}{4}$
    i. $\frac{11\pi}{4}$
    j. $\frac{5\pi}{3}$

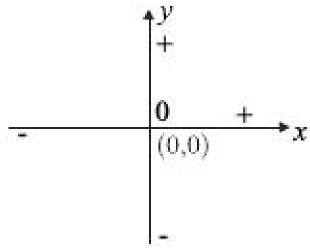
k. $\frac{-2\pi}{4}$

l. $\frac{7\pi}{4}$

4. Encuentre la longitud de un arco circular subtendido por un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ rad si el radio del círculo es de 6 *cm*.
5. Si el círculo tiene 5 *cm* de radio, ¿cuál es el ángulo subtendido en el centro del círculo por un arco de 1 *cm* de longitud?
6. Determine el radio de un sector circular con un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ y un arco de 3 *cm* de longitud.
7. ¿Cuál es la longitud de un arco determinado por un ángulo central de $\frac{\pi}{6}$ en una circunferencia de 6 *cms*. de radio?
8. Si una circunferencia tiene 10 *cms*. de radio. ¿Cuál es el ángulo subtenido en el centro de la circunferencia por un arco de 2 *cms*. de longuitud?
9. Determine el radio de un sector circular con un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ y un arco de 2 *cm* de longitud.
10. ¿Cual es la longitud de un arco determinado por un ángulo central de $\frac{\pi}{2}$ en una circunferencia de 4 *cm* de radio?
11. Una circunferencia tiene 20 cms de radio. ¿Cuál es el ángulo subtendido en el centro de la circunferencia por un arco de 4 cms de longitud.
12. Determine el radio de un sector circular con un ángulo de $\frac{3\pi}{4}$ y un arco de 10 *cms*. de longitud.
13. ¿Cual es la longitud de un arco determinado por un ángulo central de π y una circunferencia de 4 *cm* de radio?
14. Determine el radio de un sector circular con un ángulo π y un arco de 5 *cms*. de longitud.
15. Clasifique los siguientes ángulos.
    a. $-\pi$
    b. $\frac{\pi}{4}$
    c. $\frac{-\pi}{4}$
    d. 230°
    e. $\frac{9\pi}{4}$
    f. 135°
    g. $\frac{7\pi}{4}$
    h. –315°
    i. 36°
    j. 210°
    k. 150°

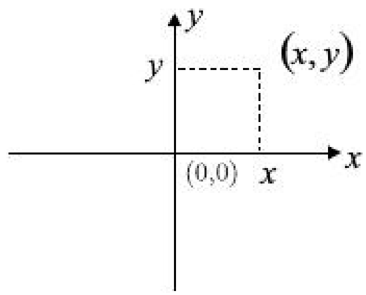
6.2. Coordenadas rectangulares

Consiste en dos rectas numéricas, una vertical y otra horizontal cuya intersección se llama origen.

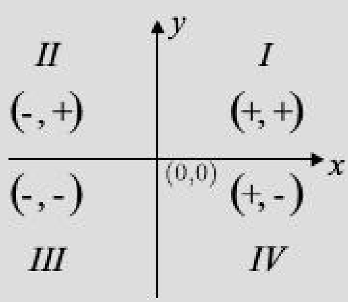


Usualmente se toma el sentido positivo de cada eje hacia la derecha del eje *x* y hacia arriba del eje *y*; como se muestra en la figura.

Cualquier punto *P* ubicado en el plano cartesiano denotado por *P*(*x*, *y*) donde *x* e *y* se le denomina la abcisa *x* y la ordenada *y* respectivamente.

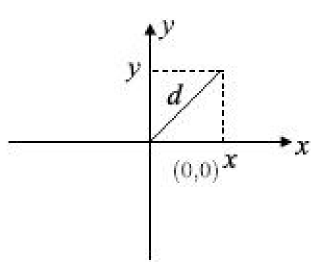


Los ejes cartesianos dividen el plano cartesiano en cuatro partes llamadas cuadrantes *I*, *II*, *III* y *IV*. En la siguiente figura se muestran los cuadrantes numerados y los signos correspondientes a las coordenadas de un punto en cada uno de los cuadrantes.



6.2.1. Distancia de un punto al origen

La distancia no dirigida de un punto *P(x,y)* al origen llamada d está dada por $d=\sqrt{x^2+y^2}$



Ejemplo

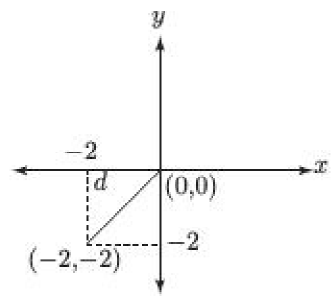
Localizar los siguientes puntos en el sistema de coordenadas rectangulares y encontrar el valor de d.

a. (–2,2) b. (–3,4) c. (1,2)

Solución

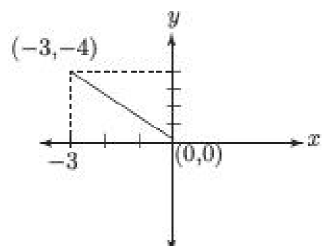
a. El punto aparece en el tercer cuadrante y su distancia d es:

$$d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$



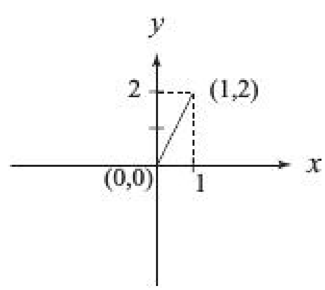
b El punto (–3,4) está ubicado en el segundo cuadrante y el valor de d es:

$$d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-3)^2+(4)^2}=\sqrt{25}=5$$



c. El punto (1,2) aparece en el primer cuadrante y el valor de su distancia es:

$$d=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$



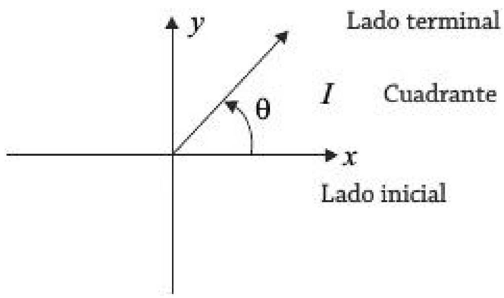
6.2. Ejercicio

1. Localizar los siguientes puntos en el sistema de coordenadas rectangulares y encontrar el valor de la distancia al origen.
   a. (1,1)
   b. (1,–1)
   c. (2,4)
   d. (3,–6)

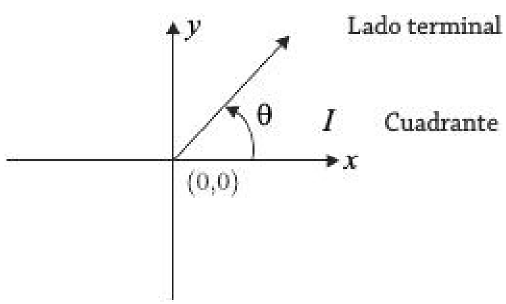
e. $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
f. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
g. $(-1,0)$
h. $(-3,-2)$
i. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

6.2.2. Ángulos en posición normal

Un ángulo está en posición normal en un sistema de coordenadas cartesianas cuando su vértice coincide con el origen y su lado inicial con el semi-eje positivo de las *x*, como se muestra en la siguiente figura.



Un ángulo pertenece al primer cuadrante cuando, colocado en posición normal, su lado terminal está en dicho cuadrante.



Ejemplo 1

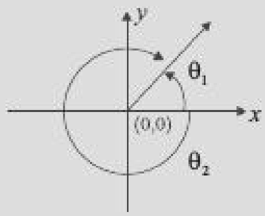
Los ángulos de 45°, 30°, 60° y –300° son ángulos del primer cuadrante.Las definiciones para los demás cuadrantes son semejantes.

Ejemplo 2

150°, es un ángulo del segundo cuadrante, 300° es un ángulo del cuarto cuadrante y –120° es un ángulo del tercer cuadrante.

6.2.3. Ángulos coterminales

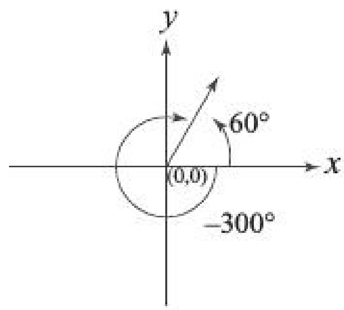
Ángulos *coterminales* son los ángulos que puestos en posición normal tienen lados terminales coincidentes.



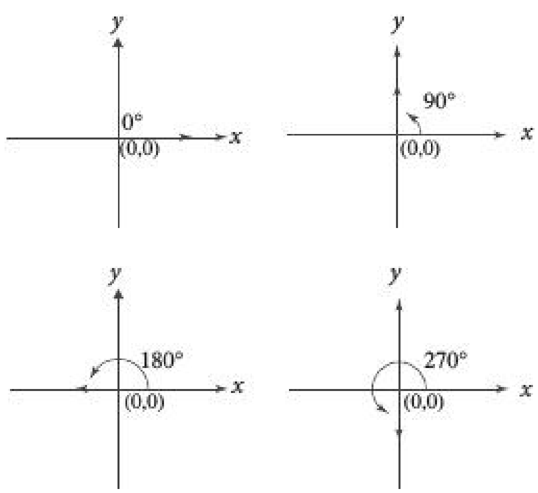
θ_1 y θ_2 son ángulos coterminales.

Ejemplo

Los ángulos –300° y 60° son ángulos coterminales.

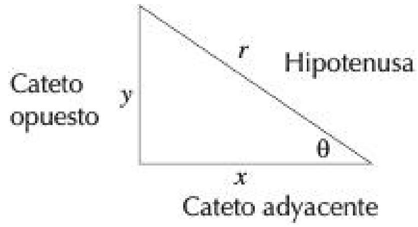


Nota: *Los ángulos 0°, 90°, 180°, 270° y todos sus ángulos coterminales reciben el nombre de ángulos cuadrangulares.*



6.3. Funciones trigonométricas

En primer lugar recordemos los elementos de un triángulo rectángulo como se muestra.



En el triángulo anterior se tiene:

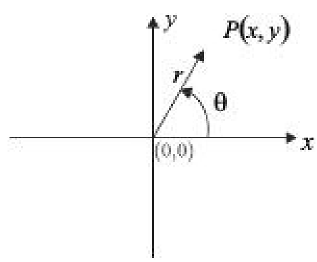
y: Cateto opuesto al ángulo θ, lo abreviamos (op)
x: Cateto adyacente al ángulo θ, lo abreviamos (ady)
r: Hipotenusa (hip)

Para un ángulo θ se definen seis funciones trigonométricas como cocientes de las longitudes del triángulo rectángulo mencionadas anteriormente.

$Sen\theta=\frac{op}{hip}$	$Csc\theta=\frac{hip}{op}$
$Cos\theta=\frac{ady}{hip}$	$Sec\theta=\frac{hip}{ady}$
$Tan\theta=\frac{op}{ady}$	$Cot\theta=\frac{ady}{hip}$

Para un ángulo cualquiera θ en posición normal se denota por $P(x,y)$ a cualquier punto del lado terminal de θ y se representa con r a la distancia $|OP|$ como se muestra en la siguiente figura.

Entonces las seis funciones trigonométricas definidas anteriormente se pueden escribir así:

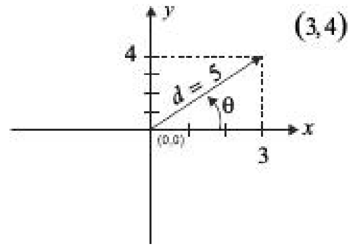


$$Sen\theta=\frac{y}{r} \qquad Csc\theta=\frac{r}{y}$$
$$Cos\theta=\frac{x}{r} \qquad Sec\theta=\frac{r}{x}$$
$$Tan\theta=\frac{y}{x} \qquad Cot\theta=\frac{x}{y}$$

Como la división por cero no está definida, entonces $Tan\theta$ y $Sec\theta$ no están definidas cuando $x=0$, mientras que $Csc\theta$ y $Cot\theta$ no están definidas cuando y=0, además las definiciones anteriores tienen sentido cuando θ es un ángulo agudo.

Ejemplo 1

Calcular las funciones trigonométricas del ángulo θ, en el punto $P(3,4)$



Solución

En primer lugar se calcula el valor de la distancia $d=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$ y aplicando las definiciones anteriores, las funciones trigonométricas son:

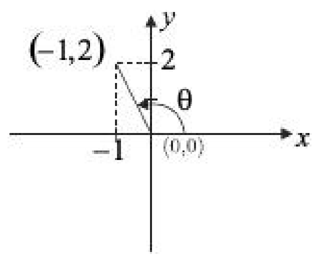
$$Sen\theta=\frac{4}{5} \qquad Csc\theta=\frac{5}{4}$$

$$Cos\theta=\frac{3}{5} \qquad Sec\theta=\frac{5}{3}$$

$$Tan\theta=\frac{4}{3} \qquad Cot\theta=\frac{3}{4}$$

Ejemplo 2

Calcular las funciones trigonométricas del ángulo θ, si el punto es $P(1,2)$



Solución

Primero calculamos $d=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$, por lo tanto las funciones trigonométricas son:

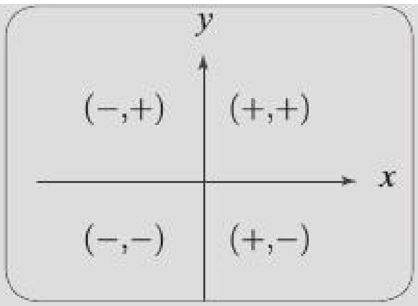
$$Sen\theta=\frac{2}{\sqrt{5}} \qquad Csc\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$Cos\theta=\frac{-1}{\sqrt{5}} \qquad Sec\theta=-\sqrt{5}$$

$$Tan\theta=\frac{2}{-1} \qquad Cot\theta=-2$$

6.3.1. Signos de las funciones trigonométricas

Considerando que la distancia de $P(x,y)$ al origen es siempre mayor que cero, observamos que los signos de las funciones trigonométricas en los distintos cuadrantes son:

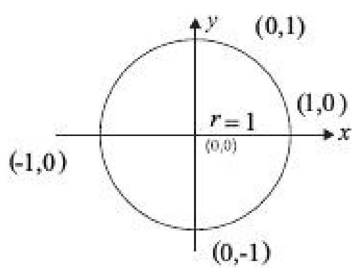


Lo anterior se resume en el siguiente cuadro.

	I	II	III	IV
$Sen\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$
$Cos\theta$	$+$	$-$	$-$	$+$
$Tan\theta$	$+$	$-$	$+$	$-$
$Cot\theta$	$+$	$-$	$+$	$-$
$Sec\theta$	$+$	$-$	$-$	$+$
$Csc\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$

6.3.2. Funciones trigonométricas de los ángulos cuadrangulares

Consiste en que el lado terminal de un ángulo coincide con uno de sus ejes, es decir tiene por coordenadas x=0, y≠0 ó x≠0, y=0. En ambos casos sucede que dos de las funciones trigonométricas no están definidas; para entender mejor esta situación se construye el siguiente círculo unitario:



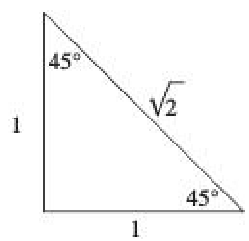
De la gráfica anterior se observa que en el ángulo cero (θ=0) la coordenada es (1,0), es decir x=1 y y=0; como y=0 no se puede definir la función cotangente y cosecante porque $Cot(0)=\frac{1}{0}=\infty$ y $Csc(0)=\frac{1}{0}=\infty$. Los valores trigonométricos se resumen en la siguiente tabla:

Ángulo	$Sen\theta$	$Cos\theta$	$Tan\theta$	$Cot\theta$	$Sec\theta$	$Csc\theta$
0°	0	1	0	∞	1	∞
90°	1	0	∞	0	∞	1
180°	0	-1	0	∞	-1	∞
270°	-1	0	∞	0	∞	-1

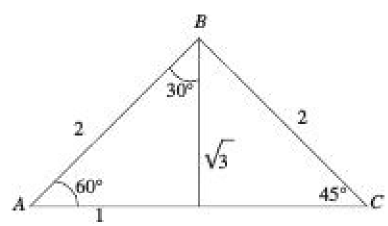
6.3. Ejercicios

1. Si θ es el ángulo agudo y $Cos\theta = \frac{4}{5}$, calcular los valores de las otras cinco funciones trigonométricas.
2. Determinar los valores de las funciones trigonométricas del ángulo θ (el menor de los ángulos positivos en posición normal).
   a. P(3,4)
   b. P(–3,4)
   c. P(–1,–3)

3. Encontrar los valores de $Cos\theta$ y $Tan\theta$ si $Sen\theta = \frac{8}{17}$ y θ pertenencen al primer cuadrante.
4. Encontrar los valores de $Sen\theta$ y $Tan\theta$ si $Cos\theta = \frac{5}{6}$.
5. Encontrar los valores de $Sen\theta$ y $Cos\theta$ dado $Tan\theta = \frac{3}{4}$.
6. Encontrar $Sen\theta$, si $Cos\theta = \frac{-4}{5}$ y $Tan\theta$ es positiva.
7. Encontrar los valores de las otras funciones trigonométricas de θ, si $Sen\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $Cos\theta = \frac{-1}{2}$
8. Encontrar los valores de las funciones trigonométricas del ángulo agudo θ, dada la $Sen\theta = \frac{3}{7}$.
9. Encontrar los valores de las funciones trigonométricas del ángulo agudo θ, dada la $Sen\theta = \frac{3}{2}$.
10. Si A es ángulo agudo y $Sen A = \frac{2x}{3}$ determinar los valores de las otras funciones.
11. Si A es ángulo agudo y $TanA = x$, determine los valores de las otras funciones.
12. Encontrar los valores trigonometricos del ángulo $\theta = 45°$ de acuerdo la figura.



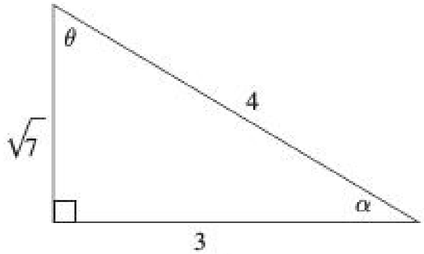
13. Encontrar los valores trigonometricos del ángulo 30° y 60° de acuerdo la figura.



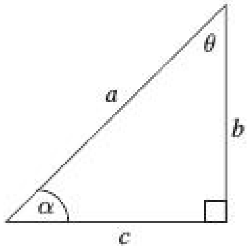
14. Encuentre los valores de los otras funciones trigonometricas dada la función
   a. $Sen\theta = \frac{3}{5}$
   b. $Sec\theta = \frac{10}{6}$
   c. $Tan\theta = \frac{21}{20}$

15. Encuentre los valores de las seis funciones trigonometricas para θ y α según la figura.

a.

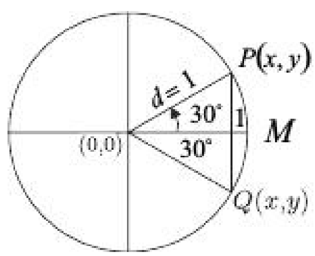


b.



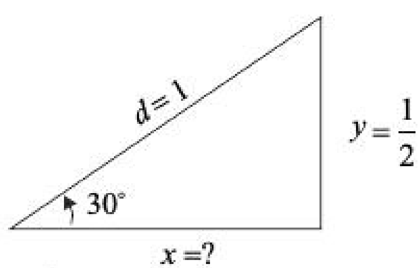
6.3.3. Triángulos y funciones trigonométricas de 30°, 45° y 60°

A. Cálculo de las funciones trigonométricas de 30°



El objetivo es saber cuál es el valor de las coordenadas *P*(*x*,*y*) cuando el ángulo es de 30°.

Si observamos la figura anterior_ tenemos un triángulo equilátero de lado uno (1), es decir las distancias $\overline{OP}=\overline{PQ}=\overline{QO}=1$, note que la distancia $\overline{PQ}$ es igual a uno, además la distancia $\overline{PM}$ es la mitad de la distancia $\overline{PQ}$, por lo tanto la distancia $\overline{PM}$ es igual a $\frac{1}{2}$, luego la coordenada y es igual a $\frac{1}{2}\left(y=\frac{1}{2}\right)$ y para calcular la coordenada *x* solo es suficiente aplicar el teorema de Pitágoras:



$$x^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$$

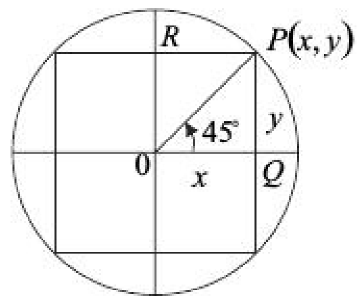
$$x^2=1-\frac{1}{4}$$

$$x^2=\frac{3}{4}, \text{ es decir } x=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por lo tanto la coordenada $(x,y)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)=(Cos30°, Sen30°)$

Así $Cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $Sen30°=\frac{1}{2}$.

B. Ángulo de 45°



En al figura anterior se ha construido un círculo unitario, donde el ángulo de 45° ubica un cuadrado *ORPQ* en el primer cuadrante; se observa que la coordenada x es igual a la coordenada $y(x=y)$, utilizamos el Teorema de Pitágoras para saber el valor de las coordenadas *x e y*:

$x^2 + y^2 = 1$, como $x = y$, entonces $x^2 + x^2 = 1$, es decir; $2x^2=1$

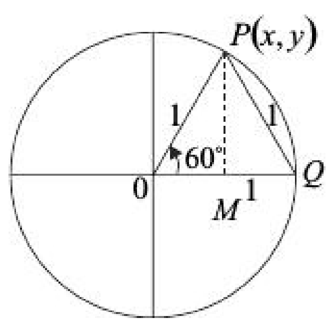
$$x^2=\frac{1}{2}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Así se concluye que $(x,y)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=(Cos45°, Sen45°)$

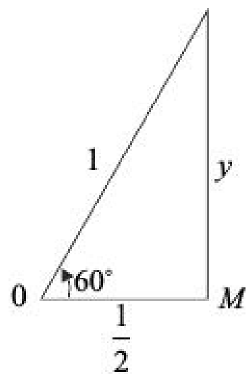
Por lo tanto $Cos45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $Sen45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. Ángulo de 60°



De manera similar tomamos un círculo unitario, donde se construye un triángulo equiláter *OPQ* de longitud de lado uno, es decir en valor absoluto se tiene: $|OP|=|PQ|=|QO|=1$ y los ángulos son de 60° cada uno:

Como se muestra en la figura el lado $\overline{OQ}$ mide 1 (uno), por lo tanto $\overline{OM}$ mide $\frac{1}{2}$, así se deduce que la coordenada x vale $\frac{1}{2}$. Para hallar el valor de la coordenada y se toma el triángulo *OPM* y aplicando el teorema de Pitágoras se tiene:



$x^2 + y^2 = 1$, como $x = \frac{1}{2}$, entonces $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1$ es decir:

$$y^2 = 1 - \frac{1}{4}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como y está en el primer cuadrante y es mayor que cero su valor es $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, es decir:

$$(x, y) = (Cos60°, Sen60°) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Por lo tanto $Cos60° = \frac{1}{2}$ y $Sen60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

6.4. IDENTIDADES FUNDAMENTALES

Una identidad trigonométrica es una relación entre funciones trigonométricas. A continuación se describen algunas identidades fundamentales y luego con las mismas se deducen los valores de: secante, cosecante, tangente y cotangente para los ángulos de 30°, 45° y 60°.

Identidades recíprocas

$$Csc\theta = \frac{1}{Sen\theta} \qquad Sec\theta = \frac{1}{Cos\theta} \qquad Cot\theta = \frac{1}{Tan\theta}$$

Identidades de tangente y cotangente

$$Tan\theta = \frac{Sen\theta}{Cos\theta} \qquad \text{y} \qquad Cot\theta = \frac{Cos\theta}{Sen\theta}$$

Demostremos una identidad recíproca:

$$Cot\theta = \frac{1}{Tan\theta} = \frac{1}{\frac{Sen\theta}{Cos\theta}} = \frac{Cos\theta}{Sen\theta}$$

Por lo tanto $Cot\theta = \dfrac{Cos\theta}{Sen\theta}$

A continuación, se calculan los valores trigonométricos de secante, cosecante, tangente y cotangente para los ángulos de 30°, 45° y 60°.

a. $Csc60^{\circ} = \dfrac{1}{Sen60^{\circ}} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

b. $Sec60^{\circ} = \dfrac{1}{Cos60^{\circ}} = \dfrac{1}{\frac{1}{\ }} = 2$

c. $Tan60^{\circ} = \dfrac{Sen60^{\circ}}{Cos60^{\circ}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

d. $Cot60^{\circ} = \dfrac{Cos60^{\circ}}{Sen60^{\circ}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Para el ángulo de 45° se tiene:

a. $Csc45^{\circ} = \dfrac{1}{Sen45^{\circ}} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

b. $Sec45^{\circ} = \dfrac{1}{Cos45^{\circ}} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

c. $Tan45^{\circ} = \dfrac{Sen45^{\circ}}{Cos45^{\circ}} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$

d. $Cot45^{\circ} = \dfrac{Cos45^{\circ}}{Sen45^{\circ}} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$

Para el ángulo de 30° los cálculos son de manera similar:

a. $Csc30^{\circ} = 2$

b. $Sec30^{\circ} = {}^{2}\ 3\ 3$

c. c) $Tan30^{\circ} = 3$
d. $Cot30^{\circ} = 3$

En la siguiente tabla se resumen los valores trigonométricos de los ángulos de 30°, 45° y 60:

Funciones	**30°**	**45°**	**60°**
Sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Funciones	**30°**	**45°**	**60°**
Tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
Cot	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
Sec	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
Csc	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

6.4. Ejercicios

1. Localizar los siguientes puntos en coordenadas rectangulares y hallar el valor de su distancia:
   a. (7,6)
   b. (–7,–5)
   c. (2,–2)
   d. (–3,3)
   e. (–1,–1)
   f. $(\sqrt{3},2)$
   g. (0,–2)
   h. (8,–2)
   i. (4,–2)

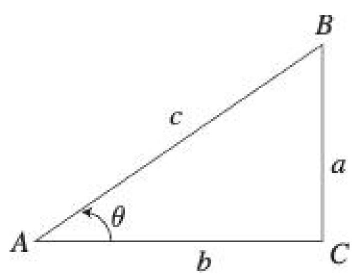
2. Dibujar los siguientes ángulos en posición normal:
   a. –30°
   b. –45°
   c. –50°
   d. 135°
   e. 272°
   f. –90°
   g. –60°

h. 225°

3. Encuentre el ángulo entre 0 y 2π radianes que sea coterminal al ángulo dado.
   a. $\frac{-2\pi}{3}$
   b. $\frac{\pi}{3}$
   c. $-\frac{5\pi}{3}$
   d. $\frac{-3\pi}{2}$

4. Encuentre el ángulo entre 0 y 360° que sea coterminal con el ángulo dado:
   a. 45°
   b. –60°
   c. 120°
   d. –150°
   e. 270°
   f. 48°
   g. 765°
   h. 330°

5. Si Sen $\theta=\frac{1}{2}$ y $Cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, encuentre los valores de las otras cuatro relaciones trigonométricas.
6. Encuentre el valor de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ para los lados indicados del triángulo *ABC*.



a. c=3.5 y b=2.1
b. c=1.4 y b=2.3
c. a=7 y b=8
d. a=5 y b=13
e. a=2.4 y b=2.8
f. a=3 y b=4

7. Sea θ un ángulo de un triángulo rectángulo con la función trigonométrica dada, encuentre los valores de las otras funciones trigonométricas:
   a. $Csc\theta=\frac{15}{12}$
   b. $Csc\theta=\frac{29}{30}$
   c. $Sec\theta=\frac{5}{3}$
   d. $Sen\theta=\frac{3}{5}$
   e. $Csc\theta=\frac{8}{17}$

f. $Tan\theta = \frac{21}{20}$

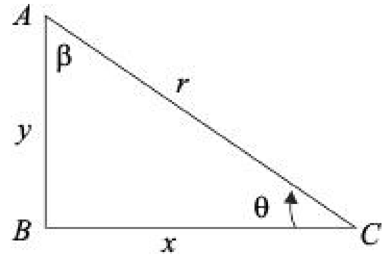
8. Decir si son correctos o no “los signos” de las siguientes funciones:
   a. $Sec300° = -2$
   b. $Tan120° = \frac{\sqrt{3}}{3}$
   c. $Tan60° = \sqrt{3}$
   d. $Sen30° = \frac{1}{2}$
   e. $Cot210° = \sqrt{3}$
   f. $Csc135° = -\sqrt{2}$

9. Calcular los valores de las expresiones siguientes:
   a. $Sen45° \cdot Cos45°$
   b. $Cos60° + Sen60°$
   c. $Cos^2 60° + Sen^2 60°$
   d. $2Sen^2 30 + 3Sen^2 60°$
   e. $4Cos60° + 5Csc30°$
   f. $6Tan60° + 2Csc45°$
   g. $\frac{Tan^2 60° - Sen^2 60°}{Csc^2 30° \cdot Csc^2 30°}$
   h. $\frac{Cos^2 60° - Cos30°}{Csc^2 30° \cdot Sen^2 30°}$
   i. $\frac{Sen30° - Cos45°}{Tan60°}$
   j. $Sen30° + Tan45°$
   k. $Cot45° + Cos60°$
   l. $\frac{Tan60° - Tan60°}{1 + Tan60° \cdot Tan30°}$
   m. $Sen30° + Cos60° + Cos30° Sen60°$

10. Verifique la expresión utilizando las identidades fundamentales
   a. $Sen\theta \cdot Sec\theta = Tan\theta$
   b. $\frac{Sen\theta}{Cos\theta} + \frac{Cos\theta}{Sec\theta} = 1$
   c. $\frac{1 - Senx}{Cosx} + \frac{Cosx}{1 - Senx}$

6.5. Relaciones trigonométricas

En el siguiente triángulo *ABC* se pueden definir las seis funciones trigonométricastanto para el ángulo θ, como para el ángulo β:



$Sen\theta=\frac{y}{r}$	$Sen\beta=\frac{x}{r}$
$Cos\theta=\frac{x}{r}$	$Cos\beta=\frac{y}{r}$
$Tan\theta=\frac{y}{x}$	$Tan\beta=\frac{x}{y}$
$Cot\theta=\frac{x}{y}$	$Cot\beta=\frac{y}{x}$
$Sec\theta=\frac{r}{x}$	$Sec\beta=\frac{r}{y}$
$Csc\theta=\frac{r}{y}$	$Csc\beta=\frac{r}{x}$

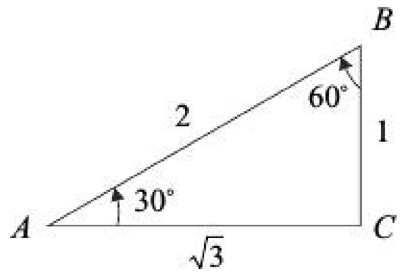
Observando la tabla anterior se pueden encontrar las siguientes relaciones de igualdad:

$Sen\beta = Cos\theta$	$Cos\beta = Sen\theta$	$Tan\beta = Cot\theta$
$Cot\beta = Tan\theta$	$Sec\beta = Csc\theta$	$Csc\beta = Sec\theta$

Ejemplo

Hallar las seis funciones trigonométricas para los ángulos dados.

Solución



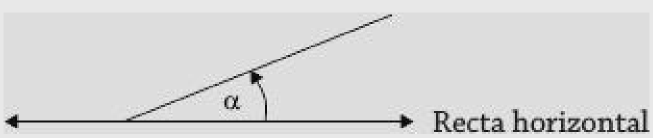
Si observamos el triángulo rectángulo *ABC*, según las definiciones anteriores tenemos:

$Sen30^\circ = \frac{1}{2} = Cos60^\circ$	$Csc30^\circ = 2 = Sec60^\circ$
$Sen60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = Cos30^\circ$	$Csc60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3} = Sec30^\circ$
$Tan30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = Cot60^\circ$	$Cot30^\circ = \sqrt{3} = Tan60^\circ$

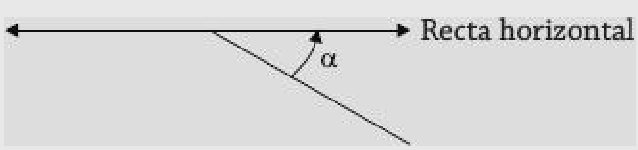
6.6. Resolución de triángulos

Las funciones trigonométricas se utilizan en algunas ocasiones para medir distanciasque directamente no se pueden medir, por ejemplo en Topografía, Física e IngenieríaCivil, etc. Antes de abordar algunas aplicaciones de dichas funciones, se describenciertos aspectos y conceptos relacionados con las aplicaciones.

Ángulo de elevación: es el ángulo que se toma por encima de una línea horizontal:

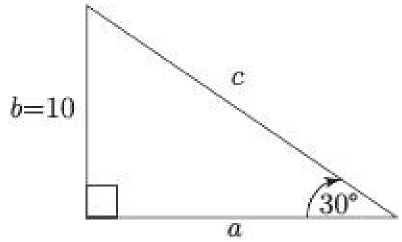


***Ángulo de depresión*:** es el ángulo que se toma por debajo de la línea horizontal:



Ejemplo 1

Resolver el siguiente triángulo.



Solución

Con referencia al triángulo anterior se tiene:

a. $Tan30° = \frac{10}{a}$; $\quad aTan30° = 10$;

$$a = \frac{10}{Tan30°} = \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}$$

b. Para hallar el valor de c, se utiliza la función seno.

$$Sen30° = \frac{10}{c};\ cSen30 = 10;\quad c = \frac{10}{Sen30°} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20$$

Para hallar *c* también se puede utilizar la función cosecante.

$$Csc30^\circ = \frac{c}{10};\qquad 10Csc30 = c;\qquad c = 10(2) = 20$$

Además el otro ángulo se calcula conociendo que la suma de los ángulos interioresde un triángulo es 180°.

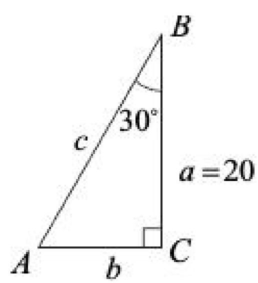
$90° + 30° + \beta = 180°$; $\beta = 180° - 90° - 30°$ así $\beta = 60$

a. Para calcular el área del triángulo:

$$A = \frac{ab}{2} = \frac{(10)(10\sqrt{3})}{2} = 50\sqrt{3}$$

Ejemplo 2

Resolver el triángulo *ABC* si *B*= 30° y *a* = 20 como se muestra en la siguiente figura.



a. Para calcular el ángulo A se tiene: 180°=30°+90°+A; 180°–30°–90°=A es decir, A=60°
b. Para calcular el lado c se toma como referencia el ángulo A=60° ó el ángulo B=30°. Si tomamos el ángulo de B=30° se tiene:

$$Cos30^\circ = \frac{20}{c}, \text{ entonces, } c = \frac{20}{Cos30^\circ} = \frac{20}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{40}{\sqrt{3}} = \frac{40\sqrt{3}}{3}$$

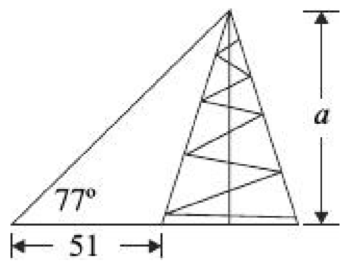
a. Para calcular el valor de *b* se utiliza la función tangente, es decir:

$$Tan30° = \frac{b}{20}; \quad b = 20Tan30° = 20\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{20}{3}\sqrt{3} \approx 11{,}54$$

6.7. Aplicaciones a triángulos rectángulos

Ejemplo 1

Un observador está parado a **51 *m*** de la base de una torre, como se muestra en al figura;el ángulo de elevación hasta la cima de la torre es de **77°**. ¿Cuál es la altura dela torre?



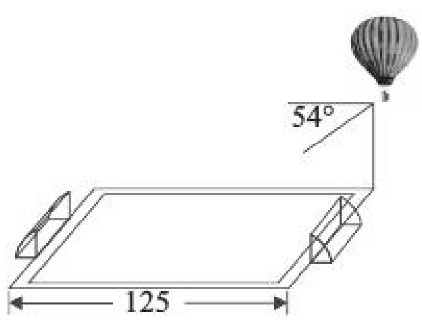
Como se observa en la figura, se ha trazado un triángulo rectángulo, la altura dela torre está identificada como a, de modo que se puede utilizar la función tangente.

Solución

$Tan77° = \frac{a}{51}$; a=(Tan77°)51=(4,3314)51≈220,51mts

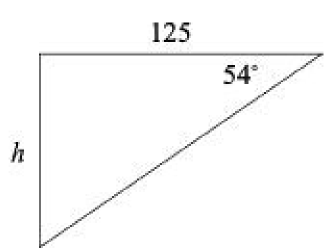
Ejemplo 2

Dos personas están a bordo de un globo que se eleva con el aire caliente. Una deellas puede observar desde la gongula del globo cuando pasa por el extremo de uncampo de fútbol, como se muestra en la figura. El ángulo de depresión hasta el otroextremo del terreno es de 54°. Esta persona sabe que la longitud del campo, incluyendolos extremos, mide 125 yardas. ¿A qué altura pasa el globo sobre el terreno de fútbol?



Solución

El triángulo que se forma es el siguiente:



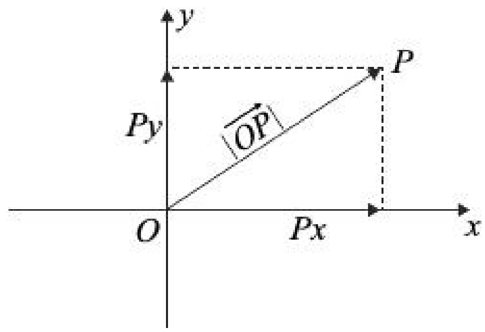
El problema se puede resolver utilizando la función tangente así:

$Tan\ 54° = \frac{h}{125}$;

h = (Tan 54°) 125 = (1,3763) 125 ≈ 172,03 *yardas*

6.7.1. Aplicaciones usando vectores

Si P es cualquier punto en el plano de coordenadas y origen O, entonces $\overrightarrow{OP}$ (*vectorOP*) se denomina vector de posición, como se muestra en la figura:



El vector $\overrightarrow{OP}$ tiene dos componentes llamadas P_x (*componente en x*) y P_y (*componenteen y*), estas componentes se pueden determinar utilizando las funciones trigonométricas:

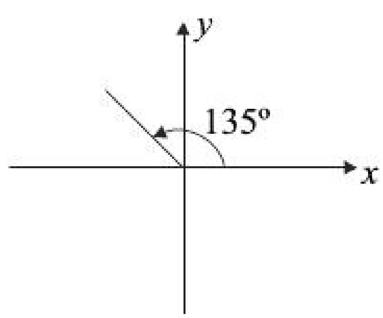
Cos q = $\frac{P_x}{\left|\overrightarrow{OP}\right|}$, entonces $P_x = \left|\overrightarrow{OP}\right|$ Cos q

Sen q = $\frac{P_y}{\left|\overrightarrow{OP}\right|}$, entonces $P_y = \left|\overrightarrow{OP}\right|$ Sen q

Donde $\left|\overrightarrow{OP}\right|$ es la magnitud del vector $\overrightarrow{OP}$, es decir; $\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{(P_x)^2 + (P_y)^2}$

Ejemplo 1

Considereelvectorposicióncomosemuestraenlafigura,dondeθ=135°y $\left|\overrightarrow{OP}\right| = 2\sqrt{2}$.



Hallar las componentes P_x y P_y del vector.

Solución

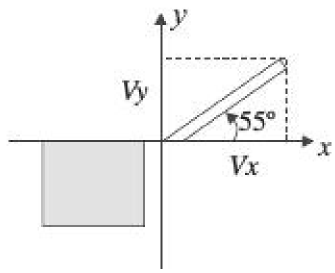
En primer lugar se calcula la magnitud del vector, las componentes son:

$$P_x = 2\sqrt{2}\ Cos(135°) = 2\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = -2$$

$$P_y = 2\sqrt{2}\ Sen(135°) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2$$

Ejemplo 2

Un cable que sostiene una torre de radio ejerce una fuerza de 800 *N* (*Newton*) aun ángulo de **55°** con la horizontal, como se muestra en la figura.



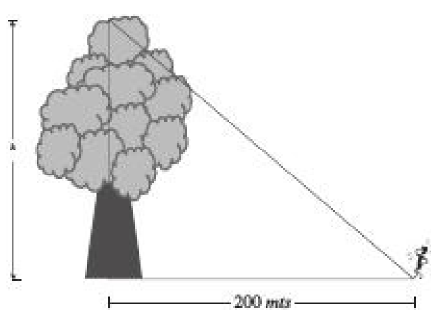
Solución

En el diagrama anterior se muestra el diagrama vectorial; si el cable se presentacomo un vector V entonces las componentes horizontal y vertical V_x y V_y con θ=55°son:

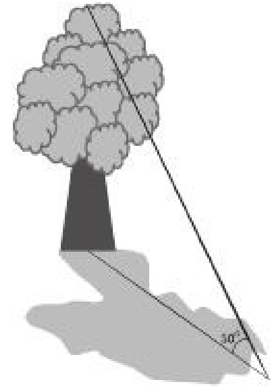
$$V_y = (800)\ \text{Sen}(55°) = (800)\ (0{,}8191) \approx 655{,}28$$
$$V_x = (800)\ \text{Cos}(55°) = (800)\ (0{,}5735) \approx 458{,}8$$

6.5. Ejercicios

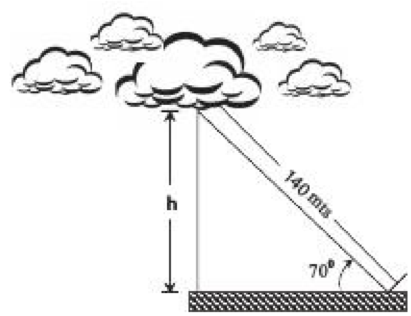
1. Una persona está a 25 metros de la base de un árbol, observa que el ángulo entre el suelo y la parte superior del árbol es de 60°. ¿Cuál es la altura del árbol?



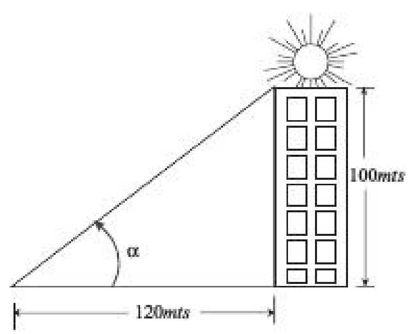
2. Un hombre recorre 500 mts a lo largo de un camino que tiene una inclinación de 20° respecto a la horizontal. ¿Qué altura alcanza respecto al punto de partida?
3. Un árbol proyecta una sombra de 19 mts. de largo. Si el ángulo que se forma desde la punta de la sombra hasta el punto más alto del árbol es de 50°, ¿cuál es la altura del árbol?



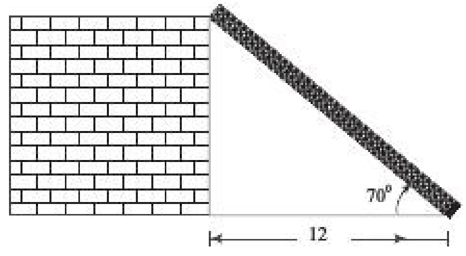
4. Un truco para medir la altura de las nubes durante la noche consiste en proyectar un haz de luz luminoso vertical que produce un lunar sobre ellas La marca se observa a 140 mts. de distancia. El ángulo de elevación es de 70°. Calcule la altura de las nubes:



5. Un Edificio de 100mts de altura proyecta una sombra de 120mts de longitud. Encontrar el ángulo de elevación del Sol.

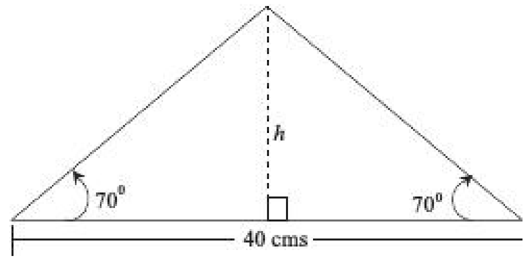


6. ¿Cuál es la longitud de la sombra proyeectada por un edificio de 150mts de altura cuando el sol se ha elevado 20° sobre el horizonte?
7. Una escalera de mano está apoyada contra una pared de un edificio, de modo que del pie de la escalera el edificio hay 12 unidades ¿A qué altura del suelo se encuentra el extremo superior de la escalera, y cuál es la longitud de la misma, si forma un ángulo de 70°?



8. Encontrar la longitud de la cuerda subtenida por un ángulo central de 150° en una circunferencia de radio 20cms?

9. Encontrar el perimetro y el área de un triangulo Isóceles cuya base mide 40cms si los ángulos de la base mide 70°



6.8. Triángulos oblicuángulos

Los ejemplos de solución de triángulos que se han realizado hasta el momento sontriángulos rectángulos, donde se utilizan relaciones trigonométricas; pero los triángulosno necesariamente en las aplicaciones son triángulos rectángulos. Los triángulosque no tienen ángulos rectos se les denominan triángulos oblicuángulos con dos clasificacionesa su vez que son triángulos obtusos y acutángulos.

Triángulo obtuso: el ángulo *B* es obtuso. (*figura 1*)

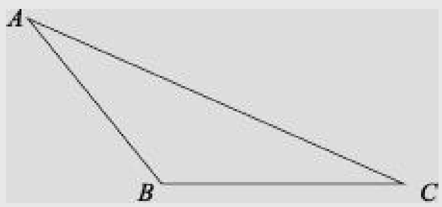


figura 1

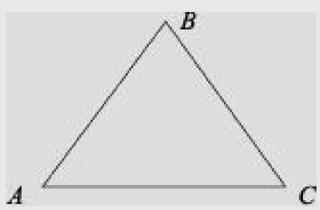


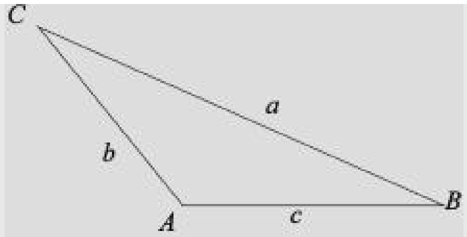
figura 2

Triángulo agudo: todos los ángulos *A, B* y *C* son agudos. (*figura 2*)

Las relaciones trigonométricas no se pueden aplicar directamente para este tipo detriángulos y para resolverlos se requiere aplicar las leyes de senos y cosenos.

6.8.1. Ley de senos

La ley de los senos es una proporción continua y estable, si el triángulo *ABC* tiene lados opuestos *a*, *b*, *c* y ángulos opuestos *A*,*B*,*C* entonces:



$$\frac{a}{Sen\,A}=\frac{b}{Sen\,B}=\frac{c}{Sen\,C}$$

Esta ley se puede utilizar para dos casos:

i. ***Caso I* (*LLA*)**: se conocen dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos.
ii. ***Caso II* (*AAL*):** se conocen dos ángulos y un lado.

Ejemplo 1

Caso I (LLA)

Resolver el siguiente triángulo dados los siguientes elementos: a=14,2, b=15,3 yB=97°.

Solución

Esto significa que debemos encontrar el tercer lado y los otros dos ángulos. El siguientecuadro muestra los elementos que tenemos y los que se deben encontrar:

Lados	Ángulos
a = 14,2	A
b = 15,3	B = 97°
c	C

Como los elementos conocidos son los lados b, a a y el ángulo B, entonces se utilizala razón $\frac{b}{SenB}$ y como el otro elemento conocido es a, se utiliza la razón $\frac{a}{SenA}$, así por laley de los senos tenemos:

$$\frac{a}{SenA}=\frac{b}{SenB}=;\frac{14{,}2}{SenA}=\frac{15{,}3}{Sen97°}$$

$$SenA=\frac{(14{,}2)(Sen97°)}{15{,}3}=\frac{(14{,}2)(0{,}9925)}{15{,}3}=0{,}9211$$

Así el valor del ángulo A es: $A = Sen^{-1}\,0{,}9211 = 67{,}08°$

Con la información anterior se puede hallar el valor del ángulo C así:

$$A + B + C = 180°; \qquad C = 180° - (A+B);$$
$$C = 180° - (67{,}08° + 97°)$$
$$C = 180° - 164{,}08° = 15{,}92°$$

Para encontrar el valor de *c* se tiene:

$$\frac{b}{Sen B} = \frac{c}{Sen C} =; \ \frac{15{,}3}{97°} = \frac{c}{Sen, 15{,}92°}$$

$$c = \frac{(Sen 15{,}92°)(15{,}3)}{Sen 97°} = \frac{(14{,}2)(0{,}2742)}{0{,}925} \approx 4{,}2$$

Ejemplo 2

Caso II (AAL)
Resolver el siguiente triángulo dados los siguientes datos de la tabla:

Lados	**Ángulos**
a	*A* = 19,4°
b	*B* = 85,3°
c = 22,1	*C*

Se trata de un triángulo que satisface las condiciones (*AAL*).

Como $A + B + C = 180°$**,** se puede hallar el valor del ángulo *C* así:

$$19{,}4° + 85{,}3 + C = 180°$$
$$C = 180° - (19{,}4° + 85{,}3) = 75{,}3°$$

Ahora se puede aplicar la ley de los senos para hallar *b,* así:

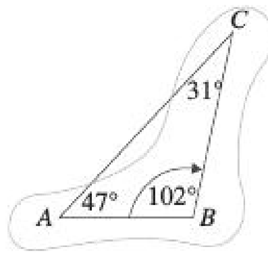
$$\frac{b}{Sen B} = \frac{c}{Sen C}$$
$$\frac{b}{Sen 85{,}3°} = \frac{22{,}1}{Sen 75{,}3°}$$
$$b = \frac{(Sen 85{,}3°)(22{,}1)}{Sen 75°{,}3} = \frac{(0{,}9966)(22{,}1)}{0{,}9622} \approx 22{,}77$$

Para determinar el lado *a* se tiene:

$$\frac{\alpha}{Sen A} = \frac{c}{Sen C}$$
$$\frac{\alpha}{Sen 19{,}4°} = \frac{22{,}1}{Sen 75{,}3°}$$
$$\alpha = \frac{(Sen 19{,}4°)(22{,}1)}{Sen 75°{,}3} = \frac{(0{,}321)(22{,}1)}{0{,}9622} \approx 7{,}58$$

Ejemplo 3

En la figura se muestran los ángulos entre los tres huecos que hay en una escuadrade un sillón de un carro. Si *AB*=15.6 cm, determinar las distancias *AC* y *BC*.



Solución

En primer lugar calculamos el ángulo *C*. 47°+102°+*C*=180°; *C*=180°–(47°+102°)=180°–49°=31°

Ahora encontramos la distancia *AC* así:

$$\frac{AC}{SenB} = \frac{A}{SenC}; \quad \frac{AC}{Sen102°} = \frac{15,6}{Sen31°};$$

$$AC = \frac{15,6(Sen102°)}{Sen31°} = \frac{(15,6)(0,9781)}{0,5150}$$

$$AC = \frac{(Sen15,92°)(15,3)}{Sen75,3°} = \frac{(14,2)(22,2742)}{0,925} = 29,62$$

Para determinar la distancia *BC* se tiene:

$$\frac{BC}{SenA} = \frac{AB}{SenC}; \quad \frac{BC}{Sen47°} = \frac{15,6}{Sen31°};$$

$$BC = \frac{15,6(Sen102°)}{Sen31°} = \frac{(15,6)(0,7313)}{0,5150} = 22,15$$

$$AC = \frac{(Sen15,92°)(15,3)}{Sen75,3°} = \frac{(14,2)(22,2742)}{0,925} = 29,62$$

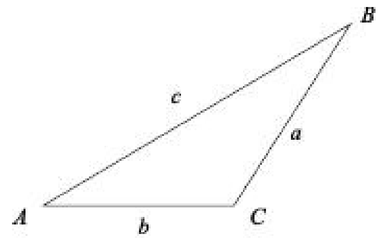
6.8.2. Ley de cosenos

Existen otros casos para resolver triángulos oblicuángulos.

i. ***Caso* III (*LAL*):** cuando se conoce la medida de dos lados y el ángulo entre ellos.
ii. ***Caso* IV (*LLL*):** cuando se conoce la medida de los tres lados.

Para resolver III y IV se utiliza la ley del coseno:

Si el triángulo *ABC* es un triángulo con lados de longitudes *a*, *b* y *c* y ángulos opuestos*A*, *B* y *C*, entonces en la ley de los cosenos se cumple:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bcCosA$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2acCosB$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abCosC$$

Ejemplo 1

Resolver el triángulo dados los elementos de la siguiente tabla:

Lados	Ángulos
$a = 9{,}3$	A
$b = 16{,}3$	B
c	$C = 42{,}3°$

Solución

Este tipo de problema es del caso *III (LAL)*, debido a que se conoce la medida delángulo *C*, utilizamos la ley del coseno para encontrar la longitud *c* .

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abCosC$$
$$c^2 = (9{,}3)^2 + (16{,}3)^2 - 2(9{,}3)(16{,}3)Cos42{,}3^\circ$$
$$c^2 = 352{,}18 - 303{,}18\,(0{,}7396) = 224{,}23$$
$$\text{Así; } c = \sqrt{224{,}23} \approx 14{,}97$$

Ejemplo 2

Si $a = 29{,}43$; b=16,37; $c = 38{,}62$, entonces encuentre la medida de los tres ángulos.

Solución

Aplicamos la ley del coseno para calcular el ángulo *B*:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2acCosB$

$$CosB = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(29{,}43)^2 + (38{,}62)^2 - (16{,}37)^2}{2(29{,}43)(39{,}62)} = \frac{2089{,}65}{2332{,}03} = 0{,}8960$$

Así, el ángulo es: $B = Sen^{-1}(0{,}8969) = 26{,}36^{\circ}$

Para calcular el ángulo A se tiene:

$$CosA = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(16{,}37)^2+(38{,}62)^2-(29{,}43)^2}{2(16{,}37)(38{,}62)} = \frac{893{,}35}{1264{,}41} = 0{,}7065$$

Así, el ángulo es: $A = Sen^{-1}(0{,}7065) = 45{,}04^{\circ}$

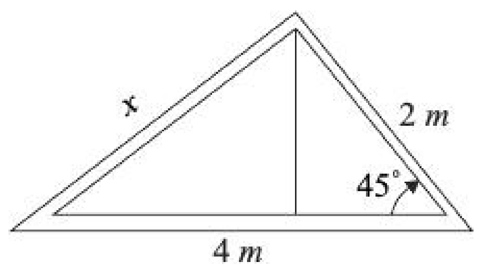
Para calcular el ángulo C se tiene:

$A + B + C = 180^{\circ}$;

$C = 180^{\circ} - (45{,}04^{\circ} + 26{,}36^{\circ}) = 180^{\circ} - 71{,}4^{\circ} = 108{,}6^{\circ}$

Ejemplo 3

Encontrar la longitud representada por x, de la armadura metálica para un puenteque se representa por la siguiente figura triangular:



Solución

Empleando la ley de los cosenos en el caso III (*LAL*) se tiene:

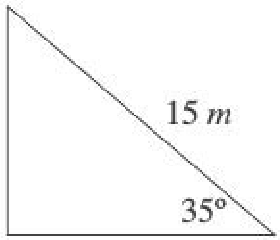
$$x^2 = 2^2 + 4^2 - 2(2)(4)Cos45^{\circ}$$

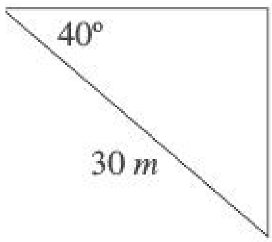
$$x = \sqrt{4+16-16\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \sqrt{20-8\sqrt{2}} = \sqrt{8{,}6862} \approx 2{,}94$$

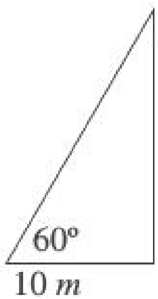
6.6. Ejercicios

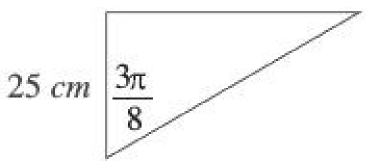
1. Resuelva los siguientes triángulos rectángulos:
    a. $B = 67^{\circ}$ y $c = 32{,}4$
    b. $A = 43^{\circ}$ y $b = 34{,}6$
    c. $B = 12{,}7^{\circ}$ y $a = 19{,}4$
    d. $A = 16{,}5^{\circ}$ y $a = 7{,}3$
    e. $A = 60^{\circ}$ y $c = 18$
    f. $a = 9$ y $b = 15$
    g. $b = 9{,}3$ y $c = 18$

2. Resolver los siguientes triángulos:

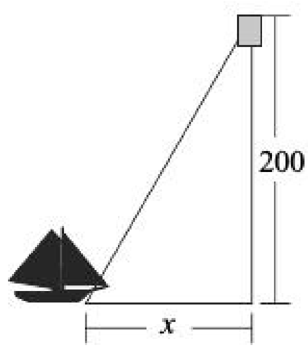
a.


b.


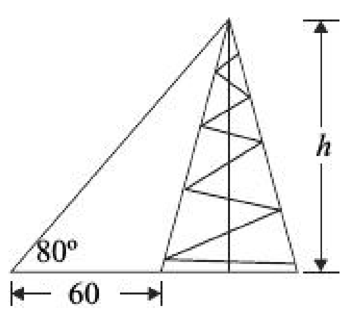
c.


d.


3. Desde la cima de un faro el ángulo de depresión hacia la línea de flotación de un barco es de 22°. Si el faro mide 200 *pies* de altura, ¿a qué distancia está el barco de la base del faro?

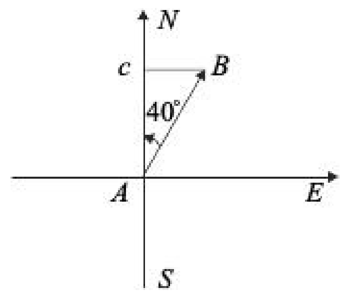


4. Una persona está parada a 60 m de la base de una torre, el ángulo de elevación hasta la cima de la torre es de 80°, ¿cuál es la altura de la torre?

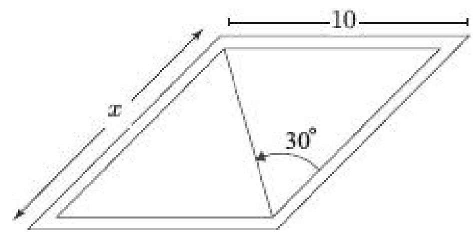


5. Un bote de motor navega durante 4*horas* a razón de 80 $\frac{km}{h}$ en dirección 40° *NE* (Norte-este). ¿Qué

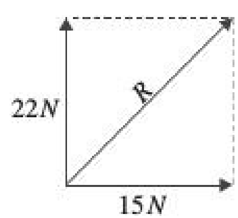
distancia hacia el norte y qué distancia hacia el este ha recorrido?



6. Un ingeniero civil marca la esquina en un ángulo recto de una piscina rectangular; al observar diagonalmente la esquina opuesta de la piscina la línea de visión debe moverse a un ángulo de 30°, como se muestra en la figura. Si la longitud del lado corto de la piscina es de 10 *m*, ¿cuál es la longitud del lado largo?

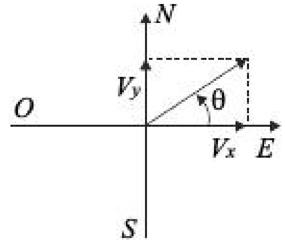


7. Dos fuerzas de 22 *Newton* y 15 *Newton* actúan sobre un cuerpo en dirección mutuamente perpendiculares. ¿Cuál es la magnitud resultante de estas fuerzas y cuánto mide el ángulo formado por la resultante de estas fuerzas con la fuerza menor?



8. Descomponga en sus componentes horizontal y vertical un vector de 15 *unidades* de longitud a un ángulo de 120°.

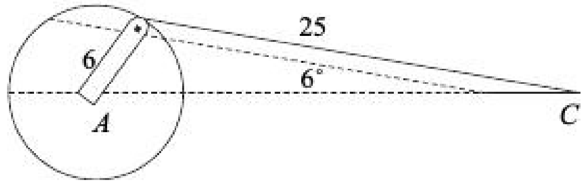
9. Un piloto dirige un avión hacia el este a una velocidad de $400\frac{km}{h}$ Si el viento sopla hacia el norte a 50 $\frac{km}{h,}$, encuentre la velocidad y la dirección del avión.



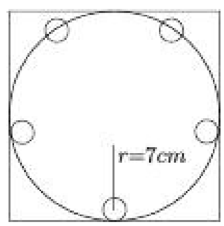
10. Resuelva cada triángulo utilizando la ley del seno o del coseno con los elementos que se proporcionan, cuando sea posible:
    a. a=19,7 b=20 B=78,4°
    b. a=121,4 A=19,7° c=63,4
    c. b=19,4 c=12,5 C=35,6°

d. a=10,4 b=5,2 c=30°
e. a=105,4 B=68,2° c=4,91
f. a=14,2 b=15,3 c=97°
g. A=19,4° B=85,3° c=22,1
h. a=25 A=35° B=68°

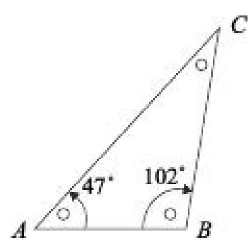
11. El eje AB de un motor mide 6 cm de longitud y la barra de conexión $\overline{BC}$ mide 25 cm de largo. Encuentre el tamaño del ángulo $\angle BAC$, cuando la medida del ángulo $\angle CBA$ es de 6°:



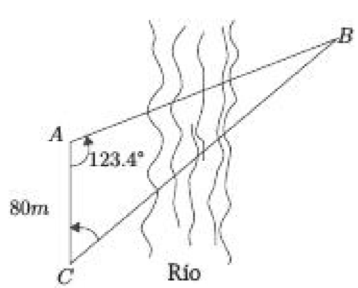
12. Entre los puntos A y B, situados en los lados opuestos de una montaña, se excava un túnel. Se elige un punto C a 500 m de A y 550 m de B. Si el $\angle BAC$ mide 44°, encuentre la longitud del túnel.
13. En una placa metálica se perforan orificios en cinco puntos equidistantes alrededor de un círculo de radio r = 7 cm. Encuentre la distancia que hay entre los orificios adyacentes:



14. En la siguiente figura se muestra una placa metálica en forma triangular, se abren tres orificios en los vértices para fortalecer la unión de un puente metálico. Si AB=15,6 cm, determinar las otras medidas AC y BC de la placa:

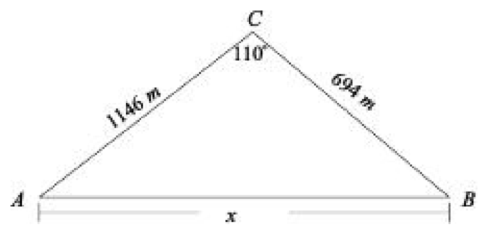


15. Un ingeniero eléctrico quiere tender un cable a través de un río, entre dos torres A y B de comunicación. El ingeniero fija un punto de posición C del mismo lado del río donde está la torre A. La distancia de la torre$A$ al punto de fijación C es de 80 m y $\angle BCA$=123,4° y $\angle ACB$=42,1°. ¿Cuál es la distancia de la torre A a la torre B?

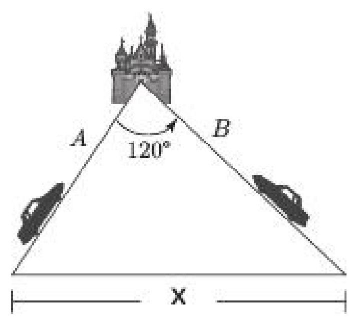


16. Resolver los siguientes triángulos utilizando la ley de coseno.
   a. a=34 b=40 c=28
   b. a=41 b=19,5 c=28
   c. a=25 b=31,51 c=28
   d. a=33 b=51,47 c=29,25
   e. a=10,7 b=14,7 c=9,3
   f. A=68° b=6 c=10
   g. A=16,25° b=29,43 c=36,52
   h. A=63,92 b=92,44° c=78,41
   i. a=7,53° b=37,64 c=42,63

17. Se piensa tender un cable para dos torres de comunicación A y B, un topógrafo mide con un teodolito y encuentra que la distancia BC es de 694 m y la distancia AC es de 1146 m y el ángulo $\angle$BAC mide 110°. ¿Cuál es la distancia de la torre A a la torre B?

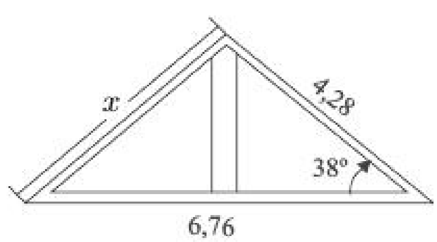


18. Dos automóviles salen de una misma ciudad con velocidades de $85\frac{km}{h}$ y $100\frac{km}{h}$ respectivamente en carreteras de línea recta, donde el ángulo entre ellos es de 120°. ¿A qué distancias se encuentran los automóviles a las cuatro horas de viaje?

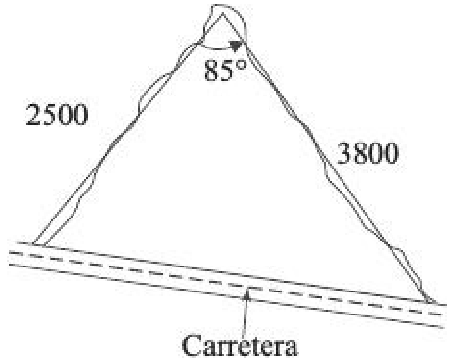


Distancia de los automóviles

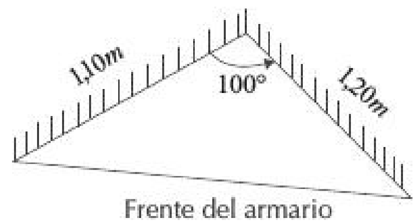
19. Encuentre la longitud representada por x, de la armadura metálica que se muestra en la figura.



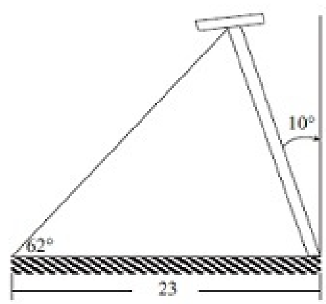
20. Un ingeniero civil debe construir una carretera en línea recta sobre una colina, la cima de la colina forma un ángulo de 85° con los costados, un costado de la colina mide 2 500 m y el otro 3 800 m, ¿cuál es la longitud de la carretera?



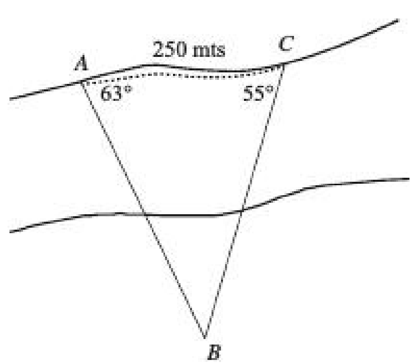
21. Dos paredes forman un ángulo de 100°, las cuales se componen de los lados de un closet esquinero. Si los lados del closet a lo largo de cada pared miden 1,10m y 1,20m, ¿cuál es la longitud del frente del closet?



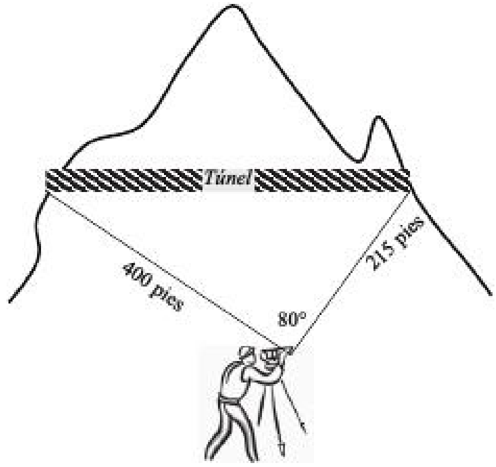
22. Cuando el ángulo de elevación del sol es 62° un poste de la luz inclinado 10° en dirección opuesta al sol, proyecta una sombra de 23 pies de longitud del suelo. Calcule la longitud del poste.



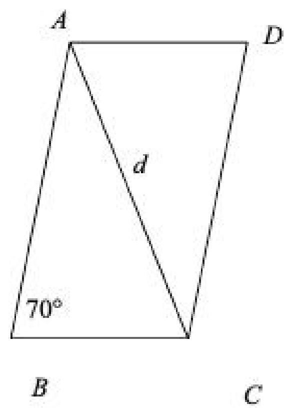
23. Para hallar la distancia entre los puntos *A* y *B* opuestos de un río, un topógrafo traza un segmento de la recta *AC* de 250 metros a lo largo del río. Si las medidas de los ángulos $\angle BAC$ y $\angle ACB$ sean 63° y 55°, respectivamente. Calcule la distancia *BC*.



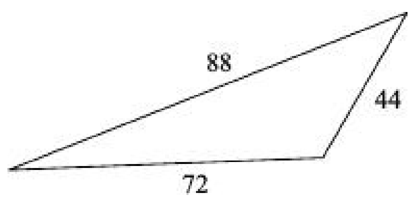
24. Se quiere construir un túnel en una montaña. Para calcular su longitud un topógrafo hace mediciones mediante un teolito. Utilice los datos del topógrafo para aproximar la longitud del túnel.



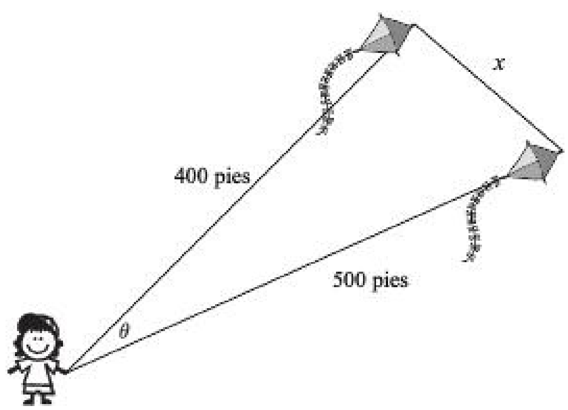
25. Un paralelogramo tiene lados de longitud 60 cm y 140 cm y uno de sus ángulos mide 70°. Calcular la longitud de la diagonal.



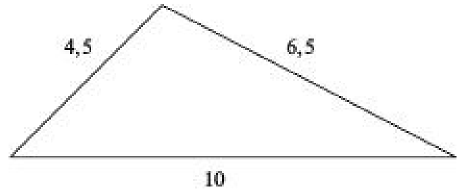
26. Un campo triangular tiene lados de longitud 44, 72 y 88 yardas. Encuentre el ángulo más pequeño.



27. Un niño vuela dos cometas al mismo tiempo, una cometa tiene 400 pies de cuerda, mientras que la otra tiene 500 pies. El ángulo de abertura de las dos cometas es de 35° ¿cuál es la distancia entre las cometas?



28. Observe la siguiente figura



a. Encuentre el ángulo opuesto al lado más pequeño.
b. Encuentre el área del triángulo.

6.9. Identidades trigonométricas

Definición: una identidad es una ecuación válida para todos los reales.

Ejemplo

Si tomamos la ecuación $\frac{Tanx}{Senx}=Secx$, es una identidad porque:

$$\frac{Tanx}{Senx}=\frac{\frac{Senx}{Cosx}}{\frac{Senx}{1}}=\frac{Senx}{SenxCosx}=\frac{1}{Cosx}=Secx$$

Es una identidad que se cumple para todos los valores x, con Senx≠0. Las identidades se pueden clasificar en: Pitagóricas, de cociente, recíprocas e identidades impares y pares.

6.9.1 Identidades pitagóricas

La primera identidad pitagórica es: $Cos^2 x + Sen^2 x = 1$ (1)

Despejando $Cos^2 x$ y $Sen^2 x$ en la expresión anterior se tiene:

$$Cos^2 x = 1 - Sen^2 x \quad (2) \text{ y } \quad Senx^2 x = 1 - Cos^2 x \qquad (3)$$

Las identidades anteriores sirven para expresar identidades o expresiones trigonométricassolo en términos de coseno o seno.

Dividiendo la ecuación (1) sobre $Sen^2 x$ se tiene:

$$\frac{Cos^2 x}{Sen^2 x}+\frac{Sen^2 x}{Sen^2 x}=\frac{1}{Sen^2 x}, \text{ entonces, } Cot^2 x+1=Csc^2 x \quad (4)$$

Análogamente si se divide la ecuación (1) entre $Cos^2 x$, la identidad queda:

$$\frac{Cos^2x}{Cos^2x}+\frac{Sen^2x}{Cos^2x}=\frac{1}{Cos^2x}, \text{ entonces, } 1+Tant^2x=Sec^2x \quad (5)$$

6.9.2 Identidades de fundamentales y pruebas de identidades

Identidades de cociente

i. $Tanx=\dfrac{Senx}{Cosx}$
ii. $Cotx=\dfrac{Cosx}{senx}$

Identidades recíprocas

i. $Secx=\dfrac{1}{Cosx}$
ii. $Cscx=\dfrac{1}{senx}$
iii. $Tanx=\dfrac{1}{Cotx}$

Identidades pares e impares

i. $Sen(-x)=-Senx$
ii. $Cos(-x)=Cosx$
iii. $an(-x)=-Tanx$
iv. $Csc(-x)=-Cosx$
v. $Sec(-x)=Secx$
vi. $Cot(-x)=-Cotx$

Las identidades anteriores sirven para simplificar otras identidades.

Ejemplo 1

Probar que $\dfrac{Cosx}{Cotx}=Senx$

Prueba: tomando el lado izquierdo para deducir la expresión de la derecha se tiene:

$$\frac{Cosx}{Cotx}=\frac{Cosx}{\frac{Cosx}{Senx}}, \text{ por identidad de cociente}$$

$$=\frac{CosxSenx}{Cosx}, \text{ medios y extremos}$$
$$=Senx$$

Ejemplo 2

Probar que *Secx*− *Cosx* = *Senx* ·*Tanx*

$$\text{Prueba: sea } Secx-Cosx=\frac{1}{Cosx}-\frac{Cosx}{1}, \text{ por identidad recíproca}$$

$$=\frac{1-Cos^2x}{Cosx}, \text{ por suma de expresiones}$$

$$=\frac{Sen^2x}{Cosx}, \text{ por identidad pitagórica}$$

$$=Senx\cdot\left(\frac{Senx}{Cosx}\right), \text{ por identidad de cociente}$$

$$=Senx\cdot Tanx, \text{ por simplificación}$$

Ejemplo 3

Probar que *Cscx*· *Secx*= *Cotx* +*Tanx*

Prueba

La prueba de esta identidad se realizará en el sentido de derecha a izquierda.

Sea $Cotx+Tanx=\frac{Cosx}{Senx}+\frac{Senx}{Cosx}$, por identidad de cociente

$$=\frac{Cos^2x+Sen^2x}{Senx\cdot Cosx}, \text{sumando expresiones}$$

$$=\frac{1}{Senx\cdot Cosx}, \text{ identidad pitagórica}$$

$$=\left(\frac{1}{Senx}\right)\cdot\left(\frac{1}{Cosx}\right), \text{ identidad recíproca}$$

$$=Cscx\cdot Secx \text{ a}$$

Ejemplo 4

Probar que $\dfrac{1}{Tanx+Cotx}=Senx\cdot Cosx$

Prueba: sea $\dfrac{1}{Tanx+Cotx}=\dfrac{1}{\dfrac{Senx}{Cosx}+\dfrac{Cosx}{Senx}}$, identidad de cociente

$=\dfrac{1}{\dfrac{Sen^2x+Cos^2x}{Cosx\cdot Senx}}$, sumando expresiones

$=\dfrac{1}{\dfrac{1}{Senx\cdot Cosx}}$, identidad pitagórica

$=Senx\cdot Cosx$

Ejemplo 5

Probar que $\dfrac{Senx+Cosx}{Senx}=1+\dfrac{1}{Tanx}$

Prueba: sea $\dfrac{Senx+Cosx}{Senx}=\dfrac{Senx}{Senx}+\dfrac{Cosx}{Senx}$, fracciones parciales

$=1+Cotx$, identidad de cociente

$=1+\dfrac{1}{Tanx}$, identidad recíproca

6.9.3. Fórmulas de suma y diferencia de dos ángulos

En esta sección se estudiará algunas identidades correspondientes a suma y diferenciade dos ángulos. Estas identidades son importantes en el estudio de: la mecánica ondulatoria,el cálculo, la teoría de circuitos y en otras áreas técnicas.

Inicialmente se desea saber el procedimiento para calcular *Sen*(x+y) y *Cos*(x+y) cuando$x$ y y son mayores que cero.

Figura 1

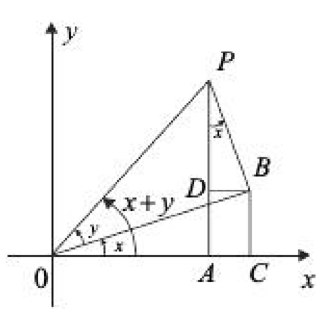
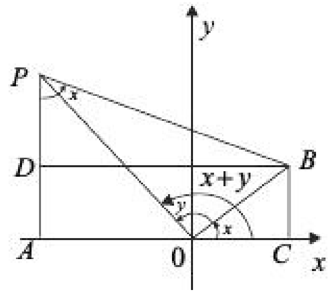


Figura 2



Sean x y y dos ángulos positivos agudos tales que $x+y<90°$ (figura 1) y que $x+y>90°$(figura 2). Para construir estas figuras colóquese el ángulo x en posición normaly después colóquese el ángulo y de tal manera que su vértice caiga en 0 y que sulado inicial coincida con el lado final del ángulo x, sea P un punto cualquiera dellado final del ángulo $x+y$. Trácese los segmentos $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{BD}$ de tal manera que $\overline{PA}$ sea perpendiculara $\overline{OX}$ y $\overline{BD}$ perpendicular a $\overline{AP}$. Entonces $\angle APB=x$ porque sus lados correspondientes $\overline{OA}$ y $\overline{AP}$; $\overline{OB}$ y $\overline{BP}$ son perpendiculares.

$$\text{Así,}\quad Sen(x+y)=\frac{\overline{AP}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{AD}+\overline{DP}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{CB}+\overline{DP}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{CB}}{\overline{OP}}+\frac{\overline{DP}}{\overline{OP}}$$

$$=\frac{\overline{CB}\cdot\overline{OB}}{\overline{OB}\cdot\overline{OP}}+\frac{\overline{DP}\cdot\overline{BP}}{\overline{BP}\cdot\overline{OP}}$$

$$=Sen\,x\cdot Cos\,y+Cos\,x\cdot Sen\,y$$

Para $Cos(x+y)$ se tiene:

$$Cos(x+y)=\frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{OC}-\overline{AC}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{OC}-\overline{DB}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{OC}}{\overline{OP}}-\frac{\overline{DB}}{\overline{OP}}$$

$$=\frac{\overline{OC}\cdot\overline{OB}}{\overline{OB}\cdot\overline{OP}}-\frac{\overline{DB}\cdot\overline{BP}}{\overline{BP}\cdot\overline{OP}}$$

$$=Cosx\cdot Cosy-Senx\cdot Seny$$

Y así quedan demostradas las fórmulas de seno y coseno de sumas y diferencias deángulos.

Por lo tanto, se tiene que las fórmulas de suma y diferencia de ángulos son:

$Sen(x+y)=Senx\cdot Cosy+Seny\cdot Cosx$
$Sen(x-y)=Senx\cdot Cosy-Seny\cdot Cosx$
$Cos(x+y)=Cosx\cdot Cosy-Senx\cdot Seny$
$Cos(x-y)=Cosx\cdot Cosy+Senx\cdot Seny$

Ejemplo 1

Calcule *Sen* (150°)

Solución

Utilizando la fórmula de *Sen* ($x+y$) expresado a 150° como suma de dos ángulos de90° + 60° se obtiene:

Sen (150°) = *Sen* (90° + 60°)

$$= Sen90^\circ \cdot Cos60^\circ + Sen60^\circ \cdot Cos90^\circ$$

$$= (1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot(0) = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto $Sen\left(150^\circ\right) = \frac{1}{2}$

Ejemplo 2

Calcule $Cos(120^\circ)$

Solución

Podemos expresar el ángulo de 120° como suma de dos ángulos, es decir 120°=90°+30°y utilizar la fórmula $Cos(x+y)$ así:

$$Cos\ (120^\circ) = Cos\ (90^\circ + 30^\circ)$$

$$= Cos90^\circ \cdot Cos30^\circ - Sen90^\circ \cdot Sen30^\circ$$

$$= (0)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto $Cos\left(120^\circ\right) = -\frac{1}{2}$

Ejemplo 3

Calcule Sen(15°)

Solución

Se puede expresar 15° = 45°–30° y utilizar la fórmula $Sen(x-y)$ para obtener:

$$Sen\left(15^\circ\right) = Sen\left(45^\circ - 30^\circ\right)$$

$$= Sen45^\circ \cdot Cos30^\circ - Cos45^\circ \cdot Sen30^\circ$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Por lo tanto $Sen\left(15^\circ\right) = \approx 0{,}2588$

Ejemplo 4

Hallar $Cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

Solución

Como $\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}$, entonces se tiene que:

$$Cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=Cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$$

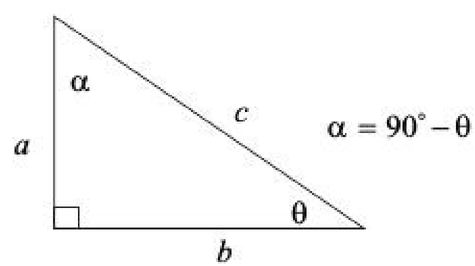
$$=Cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot Cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-Sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot Cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

Por lo tanto $Cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)\approx -0,2588$

6.9.4. Identidades de confusión

Vamos a utilizar las fórmulas de suma y diferencia de dos ángulos para deducir lasidentidades de confusión. En primer lugar tomemos el triángulo rectángulo como semuestra en la siguiente figura.



Como la suma de los ángulos interiores en un triángulo es de 180° se tiene: $\alpha + \theta + \beta = 180^\circ$, entonces $\alpha = 180^\circ - 90^\circ - \theta$, así $\alpha = 90^\circ - \theta$

De acuerdo a lo anterior se puede afirmar que:

i. $Sen\theta = \dfrac{a}{c} = Cos(90^\circ - \theta)$
ii. $Cos\theta = \dfrac{b}{c} = Sen(90^\circ - \theta)$
iii. $Tan\theta = \dfrac{a}{b} = Cot(90^\circ - \theta)$

Ejemplo 1

Probar que $Cos(90° - \theta) = Sen\theta$

Prueba

$Cos(90°–\theta) = Cos90° \cdot Cos90° – Sen90° \cdot Sen\theta$, por la fórmula del coseno $=(0)Cos\theta – (1) \cdot Sen\theta = Sen\theta$

Ejemplo 2

Probar que $Sen(90°–\theta) = Cos\theta$

Prueba

$$Sen(90°-\theta)=Sen90° \cdot Cos\theta - Sen\theta \cdot Cos90°, \text{ fórmula del seno}$$
$$=(1)Cos\theta - Sen\theta \cdot (0) = Cos\theta$$

Ejemplo 3

Probar que $Tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=Cot\theta$

Prueba Sea $Tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{Sen\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{Cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\dfrac{Cos\theta}{Sen\theta}=Cot\theta$

6.9.5. Fórmulas de suma y diferencia para la tangente

i. $Tan(x+y)=\dfrac{Tanx+Tany}{1-Tanx \cdot Tany}$

ii. $Tan(x-y)=\dfrac{Tanx-Tany}{1+Tanx \cdot Tany}$

Probemos (**i**)

$$\text{Sea}\quad Tan(x+y)=\frac{Tanx+Tany}{1-Tanx\cdot Tany}$$

$$=\frac{Sen(x+y)}{Cos(x+y)},\ \text{identidad de cociente}$$

$$=\frac{Senx\cdot Cosy+Seny\cdot Cosx}{Cosx\cdot Cosy-Senx\cdot Seny}\quad \text{identidad de suma y diferencia de ángulos}$$

$$=\frac{\dfrac{Senx\cdot Cosy}{Cosx\cdot Cosy}+\dfrac{Seny\cdot Cosx}{Cosx\cdot Cosy}}{\dfrac{Cosx\cdot Cosy}{Cosx\cdot Cosy}+\dfrac{Senx\cdot Seny}{Cosx\cdot Cosy}}\quad \text{dividiendo entre } Cosx\cdot Cosy\neq 0$$

$$=\frac{Tanx+Tany}{1-Tanx\cdot Tany}$$

De manera similar se prueba que $Tan(x-y)=\dfrac{Tanx-Tany}{1+Tanx\cdot Tany}$

Ejemplo 1

Calcular *Tan*(15°)

$$Tan(15°)=Tan(45°-30°)=\frac{Tan45°-Tan30°}{1+Tan45°-Tan30°}$$

$$=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+(1)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}=\frac{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

$$=\frac{(3-\sqrt{3})\cdot(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})\cdot(3-\sqrt{3})}\text{, racionalizando}$$

$$=\frac{9-6\sqrt{3}+3}{9-3}$$

$$=\frac{12-6\sqrt{3}}{6}=\frac{6\left(2-6\sqrt{3}\right)}{6}=2-\sqrt{3}$$

$$Tan(15°)=2-\sqrt{3}$$

Otra forma de hacer el ejercicio es:

$Tan(15°)=Tan(60°+45°)=\dfrac{Tan60°-Tan45°}{1+Tan0°-Tan45°}$, fórmula de la suma para la tangente

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{1+(\sqrt{3})(1)}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1},\ \text{valores trigonométricos}$$

$$=\frac{(3-\sqrt{3})\cdot(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})\cdot(3-\sqrt{3})},\ \text{racionalizando}$$

$$=\frac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1}=\frac{4-2\sqrt{3})}{2}=\frac{2\left(2\sqrt{3}\right)}{2}=2-\sqrt{3}$$

Ejemplo 2

Encontrar $Tan(105°)$

Solución

Se puede expresar $105^{\circ} = 45^{\circ} + 60^{\circ}$ y utilizar la siguiente fórmula:

$$Tan(105^{\circ}) = Tan(45^{\circ}+60^{\circ}) = \frac{Tan45^{\circ}+Tan60^{\circ}}{1-Tan45^{\circ}\cdot Tan60^{\circ}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(1+\sqrt{3})\cdot(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})\cdot(1+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{3+2\sqrt{3}+1}{1-3} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} = \frac{2(2+\sqrt{3})}{-2} = -2-\sqrt{3}$$

Ejemplo 3

Probar que $Tan(x+\pi) = Tanx$

Prueba

$$Tan(x+\pi) = \frac{Tanx+Tan\pi}{1-Tanx\cdot Tan\pi}$$

$$= \frac{Tanx+0}{1-Tanx\cdot(0)} = Tanx$$

6.9.6. Fórmulas de ángulo doble y de ángulo medio

Para deducir las fórmulas de $Cos(2x)$, $Sen(2x)$ y $Tan(2x)$ se utilizan las fórmulasde seno, coseno y tangente de suma de dos ángulos:

i. $Cos(2x) = Cos(x+x)$

$= Cosx\cdot Cosx - Senx\cdot Senx$, fórmula de suma para coseno

$= Cos^2x - Sen^2x$

Así, $Cos(2x) = Cos^2x - Sen^2x$

ii. De manera análoga se tiene: $Sen(2x) = Sen(x+x)$

$= Senx\cdot Cosx + Senx\cdot Cosx$

$= 2Sen\cdot Cosx$

Luego, $Sen(2x) = 2Sen\cdot Cosx$

iii. i) Para $Tan(2x)$ se tiene: $Tan(x+x)$

$$= \frac{Tanx - Tanx}{1 + Tanx - Tanx}$$

$$= \frac{2Tanx}{1 + Tan^2 x}$$

Así, $Tan(2x) = \dfrac{2Tanx}{1 + Tan^2 x}$

Ejemplo 1

Verificar que $Cos(90^\circ) = 0$

Solución

$$Cos(90^\circ) = Cos(2(45^\circ))$$

$$= Cos^2 45^\circ - Sen^2 45^\circ$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0, \text{ así } Cos(90^\circ) = 0$$

Ejemplo 2

Verificar que $Sen(90^\circ) = 1$

Solución

$$Sen(90^\circ) = Sen(2(45^\circ))$$

$$= 2Sen45 \cdot Cos45^\circ$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2(2)}{4} = 1$$

Luego, $Sen(90^\circ) = 1$

Ejemplo 3

Calcular $Cos(120°)$

Solución

$$Cos(120^\circ) = Cos((2(60^\circ))$$

$$= Cos^2 60^\circ - Sen^2 60^\circ$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= -\frac{1}{2}$$

Luego, $Cos(120^\circ) = -\dfrac{1}{2}$

Ejemplo 4

Calcular $Sen(60^{\circ})$

Solución

$$Sen(60^{\circ}) = Sen(2(30^{\circ}))$$
$$= 2Sen30 \cdot Cos30^{\circ}$$
$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Luego, $Sen(60^{\circ}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

A. Fórmulas de ángulo medio

Las identidades de ángulo medio son:

a. $$Sen^2 x = \frac{1 - Cos(2x)}{2}$$

b. $$Cos^2 x = \frac{1 + Cos(2x)}{2}$$

c. $$Tan^2 x = \frac{1 - Cos(2x)}{1 + Cos(2x)}$$

Pruebas

i. Como, $Cos(2x) = Cos^2 x - Sen^2 x$

$$= (1 - Sen^2 x) - Sen^2 x$$
$$= 1 - 2Sen^2 x$$

Así, $Cos(2x) = 1 - 2Sen^2 x$ y despejando $Sen^2 x$ se tiene:

$$Sen^2 x = \frac{1 - Cos(2x)}{2}$$

ii. Como $Cos(2x) = Cos^2x - Sen^2x$

$$= Cos^2x - (1 - Cos^2x)$$

$$= 2Cos^2x - 1$$

Así, $Cos(2x) = 2Cos^2x - 1$ y despejando Cos^2x se tiene:

$$Cos^2x = \frac{Cos(2x)+1}{2}$$

iii. $Tan^2(2x) = \dfrac{Sen^2x}{Cos^2x}$, definición de tangente

$$= \frac{\frac{1-Cos(2x)}{2}}{\frac{1+Cos(2x)}{2}}, \text{ fórmula de ángulo doble para seno y coseno}$$

$$= \frac{1-Cos(2x)}{1+Cos(2x)}, \text{ simplificando}$$

Así, $Tan^2(2x) = \dfrac{1-Cos(2x)}{1+Cos(2x)}$

Si en las fórmulas anteriores de ángulo medio, se sustituye x por $x = \frac{u}{2}$, entonces se obtienen las siguientes fórmulas:

i. $Sen\left(\dfrac{u}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1-Cosu}{2}}$

ii. $Cos\left(\dfrac{u}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1+Cosu}{2}}$

iii. $Tan\left(\dfrac{u}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1-Cosu}{1+Cosu}}$

Ejemplo

Calcular $Cos(22,5°)$

Solución

$$Cos(22{,}5^\circ)=Cos\left(\frac{45}{2}\right)$$
$$=\pm\sqrt{\frac{1+Cos45^\circ}{2}}$$
$$=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\approx 0{,}9238$$

6.9.7. Identidades alternas para la tangente de un ángulo medio

i. $Tan\left(\frac{u}{2}\right)=\frac{1-Cosu}{Senu}$

ii. $Tan\left(\frac{u}{2}\right)=\frac{Senu}{1+Cosu}$

Ejemplo

Encontrar el valor exacto de $Tan(22{,}5^\circ)$

Solución

$$Tan(22{,}5^\circ)=Tan\left(\frac{45^\circ}{2}\right)$$
$$=\frac{Sen45^\circ}{1+Cos45^\circ}$$
$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})\cdot(2-\sqrt{2})}=\frac{2\sqrt{2}-2}{4-2}=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{2}=\sqrt{2}-1\approx 0{,}4142$$

Luego el valor exacto de $Tan(22{,}5^\circ)=\sqrt{2}-1$

6.9.8. Fórmulas de producto y suma

Estas identidades llamadas fórmulas para suma y producto se emplean para expresaralgunos productos de senos y cosenos, como suma de senos y cosenos; estas identidadesson una herramienta potente que se utiliza para simplificar cálculos tediosos enlos cursos avanzados de cálculo, como en el tema de series de Fourier.

Productos de senos y cosenos

i. $Senx \cdot Cosy = \frac{1}{2}[Sen(x+y) + Sen(x-y)]$
ii. $Cosx \cdot Seny = \frac{1}{2}[Sen(x+y) - Sen(x-y)]$
iii. $Cosx \cdot Cosy = \frac{1}{2}[Cos(x+y) + Cos(x-y)]$
iv. $Senx \cdot Seny = -\frac{1}{2}[Cos(x+y) - Cos(x-y)]$

Probemos algunas identidades de producto suma:

Ejemplo 1

Probar la identidad $Cosx \cdot Sen = \frac{1}{2}[Sen(x+y) - Sen(x-y)]$

Prueba: la prueba de la identidad anterior se realizará en el sentido de derechaa izquierda.

$$\frac{1}{2}[Sen(x+y)-Sen(x-y)] = \frac{1}{2}[Senx \cdot Cosy + Seny \cdot Cosx - (Senx \cdot Cosy - Seny)]$$

$$= \frac{1}{2}[Senx \cdot Cosy + Seny \cdot Cosx - Senx \cdot Cosy + Seny \cdot Cosx]$$

$$= \frac{1}{2}[2Senx \cdot Cosy] = Cosx \cdot Seny$$

Así, $Cosx \cdot Seny = \frac{1}{2}[Sen(x+y) - Sen(x-y)]$

Ejemplo 2

Probar la identidad $Senx \cdot Seny = -\frac{1}{2}[Cos(x+y) - Cos(x-y)]$

Solución

$= -\frac{1}{2}[Cosx \cdot Cosy - Senx \cdot Seny - Cosx \cdot Cosy - Senx \cdot Seny]$

$= -\frac{1}{2}[-2Senx \cdot Seny] = Senx \cdot Seny$

Así, $Senx \cdot Seny = -\frac{1}{2}[Cos(x+y) - Cos(x-y)]$

Ejemplo 3

Utilizar la identidad ii) para calcular $Cos70° \cdot Sen50°$

Solución

$$Cos70° \cdot Sen50° = \frac{1}{2}[Sen(70°+50°) - Sen(70°-50)]$$

$$= \frac{1}{2}[Sen(120°) - Sen(20°)] \approx 0,2620$$

Ejemplo 4

Probar que $Sen45°\cdot Cos15° = \frac{1}{4}(\sqrt{3}+1)$

Solución

Utilizando la identidad i. se tiene:

$$Sen45°\cdot Cos15° \qquad = \frac{1}{2}[Sen(45°+50°) - Sen(45°-50°)]$$

$$= \frac{1}{2}[Sen(60°) + Sen(30°)]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\sqrt{3}+1\right] \approx 0{,}6830$$

6.9.9. Identidades de suma y diferencia de senos y cosenos

Estas identidades se utilizan para expresar sumas y diferencias de senos y cosenoscomo producto de senos y cosenos.

i. $Senx + Seny = 2Sen\frac{1}{2}(x+y)\cdot Cos\frac{1}{2}(x-y)$

ii. $Senx - Seny = 2Cos\frac{1}{2}(x+y)\cdot Sen\frac{1}{2}(x-y)$

iii. $Cosx + Cosy = 2Cos\frac{1}{2}(x+y)\cdot Cos\frac{1}{2}(x-y)$

iv. $Cosx - Cosy = -2Sen\frac{1}{2}(x+y)\cdot Sen\frac{1}{2}(x-y)$

Ejemplo 1

Utilizando la identidad i) probar que $Sen(105^{\circ}) + Sen(15^{\circ}) = 6\ 2$

Prueba:

$$Sen(105^{\circ}) + Sen(15^{\circ}) = 2Sen\frac{1}{2}(105^{\circ}+15^{\circ})\cdot Cos\frac{1}{2}(105^{\circ}-15^{\circ})$$

$$= 2Sen\frac{1}{2}(120^{\circ})\cdot Cos\frac{1}{2}(90^{\circ})$$

$$= 2Sen(60^{\circ})\cdot Cos(45^{\circ})$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Así, $Sen(105^{\circ}) + Sen(15^{\circ}) = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Ejemplo 2

$$\text{Probar que } \frac{Senx-Seny}{Senx+Seny}=\frac{Tan\frac{1}{2}(x-y)}{Tan\frac{1}{2}(x+y)}$$

Prueba

$$\text{Sea } \frac{Senx-Seny}{Senx+Seny}=\frac{2Cos\frac{1}{2}(x+y)\cdot Sen\frac{1}{2}(x-y)}{2Sen\frac{1}{2}(x+y)\cdot Cos\frac{1}{2}(x-y)},$$

por identidades i. y ii.

$$=\frac{2Cos\frac{1}{2}(x+y)}{2Sen\frac{1}{2}(x+y)}\cdot\frac{Sen\frac{1}{2}(x-y)}{Cos\frac{1}{2}(x-y)}$$

$$=Cot\frac{1}{2}(x+y)\cdot Tan\frac{1}{2}(x-y), \text{ identidad recíproca}$$

$$=\left[\frac{1}{Tan\frac{1}{2}(x+y)}\right]\cdot Tan\frac{1}{2}(x-y)$$

$$=\frac{Tan\frac{1}{2}(x-y)}{Tan\frac{1}{2}(x+y)}$$

$$\text{Así, } \frac{Senx-Seny}{Senx+Seny}=\frac{Tan\frac{1}{2}(x-y)}{Tan\frac{1}{2}(x+y)}$$

6.7. Ejercicios

Verificar las siguientes identidades:

1. $Sec^2\theta\cdot Csc^2\theta=Sec^2\theta+Csc^2\theta$
2. $Sec^4\theta-Sec^2\theta=Tan^4\theta+Tan^2\theta$
3. $2Cscx=\frac{Senx}{1+Cosx}+\frac{1+Cosx}{Senx}$
4. $\frac{Senx-Cscx}{Secx+Cosx}+\frac{Tan-1}{Tan+1}$
5. $\frac{Tanx-Senx}{Sen^3x}+\frac{Sec}{1+Cosx}$
6. $Senx\cdot Secx=Tanx$
7. $(1-Sec^2A)\cdot(1-Tan^2A)=1$
8. $(1-Cos\theta)\cdot(1+Sec\theta)Cot\theta=Sen\theta$
9. $Csc^2x(1-Cos^2x)=1$

10. $SenACosA(TanA+CotA)=1$
11. $Tan\theta \cdot Sen\theta + Csc\theta = Sec\theta$
12. $\frac{Senx+Tanx}{Cotx+Cscx}=SenxTanx$
13. $Cos^2\theta+Sen^2\theta=1$
14. Demostrar:
    a. $Tan(x+y)=\frac{Tanx+Tany}{1-Tanx\cdot Tany}$
    b. $Sen(x+y)-Sen(x-y)=2CosxSenx$
    c. $Cos(x+y)+Cos(x-y)=2CosxCosx$
    d. $Tan(45°-\theta)=\frac{1-Tan\theta}{1+Tan\theta}$
    e. $Tan\theta\cdot Sen2\theta=2Sen^2\theta$
    f. $Cot\theta\cdot Sen2=1+Cos2$
    g. $Cos2\theta=\frac{1-Tan^2\theta}{1+Tan^2\theta}$

15. Expresar como suma y diferncia:
    a. $Sen40°Cos30°$
    b. $Cos110°Sen55°$
    c. $Cos50°Cos35°$
    d. $Sen55°Sen40°$

16. Expresar como producto
    a. $Sen50°+Sen40°$
    b. $Sen70°-Sen20°$
    c. $Cos55°+Cos25°$
    d. $Cos35°+Cos75°$

17. Demostrar quue: $2Sen40°Cos15°=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$
18. Haciendo uso de las formulas de suma y diferencia de dos ángulos colocar:
    a. $Cos(135°)$
    b. $Sen(120°)$
    c. $Cos(150°)$
    d. $Tan(120°)$
    e. $Cos(270°)$
    f. $Sen(270°)$
    g. $Sen(15°)$
    h. $Cos(15°)$
    i. $Tan(15°)$

19. Utilice las formulas del ángulo medio para determinar los valores:
    a. $Sen(15°)$
    b. $Cos(15°)$
    c. $Tan(15°)$

20. Exprese como suma el producto:

a. $Sen(4x)Sen(3x)$
b. $Cos(x)Sen(2x)$
c. $Sen(3x)Sen(x)$
d. $Sen(ax)Cos(bx)$

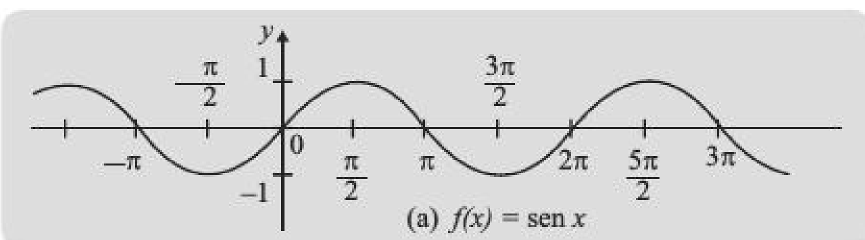
21. Exprese la suma como producto:
  a. $Sen(4x)+Sen(3x)$
  b. $Sen(6x)+Sen(2x)$
  c. $Cos(x)+Cos(2x)$
  d. $Sen(8t)-Sen(2t)$

22. Demostrar las siguientes identidades:
  a. $Cos(\pi/2-x)=Senx$
  b. $Sen(\pi/2-x)=Cosx$
  c. $Tan(\pi/2-x)=Cotx$
  d. $Cos(x-\pi)=-Cosx$
  e. $Sen(x-\pi)=-Senx$
  f. $Sen(x+\pi)=-Senx$
  g. $Sen(x+\pi/2)=Cosx$
  h. $Cos(\pi+x)=-Cosx$
  i. $Co1(x+\pi/2)=-Senx$

6.10. Gráficas de funciones trigonométricas

A continuación se van a estudiar las seis gráficas de las funciones trigonométricascon algunas de sus características tales como: el dominio, la imagen, las abscisasen x, la ordenada y el periodo.

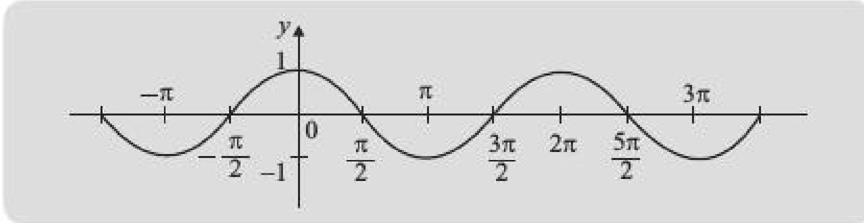
Función seno



(a) $f(x)$ = sen x

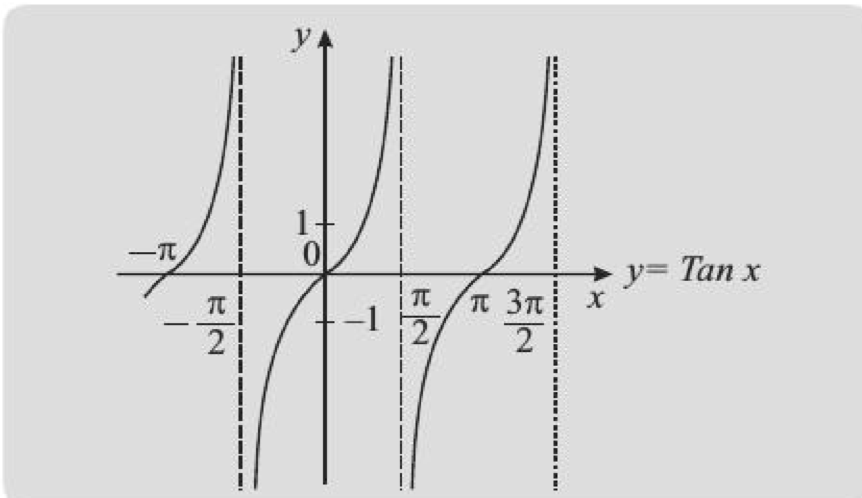
La función f(x)=$Senx$, su dominio son todos lo números reales, la imagen es el intervalocerrado [–1,1], su periodo es 2π; esto significa que cada 2π radianes la funciónse repite, es una función impar porque $f(-x)=-f(x)$ para todo x que pertenece a sudominio.

Función coseno



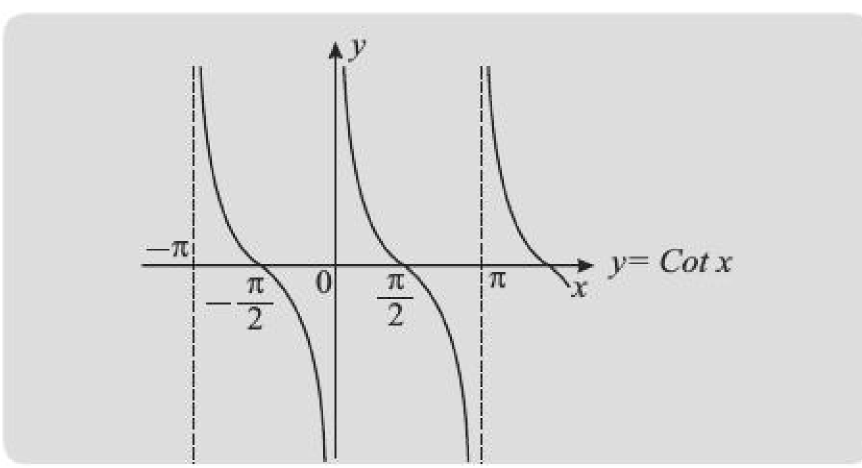
La función $f\,(x)= Cosx$, su dominio son todos los números reales, la imagen es elintervalo cerrado $[-1,1]$, su periodo es 2π; esto significa que cada 2π radianes lafunción se repite, es una función par porque $f\,(-x)= f\,(x)$ para todo x que pertenecea su dominio.

Función tangente



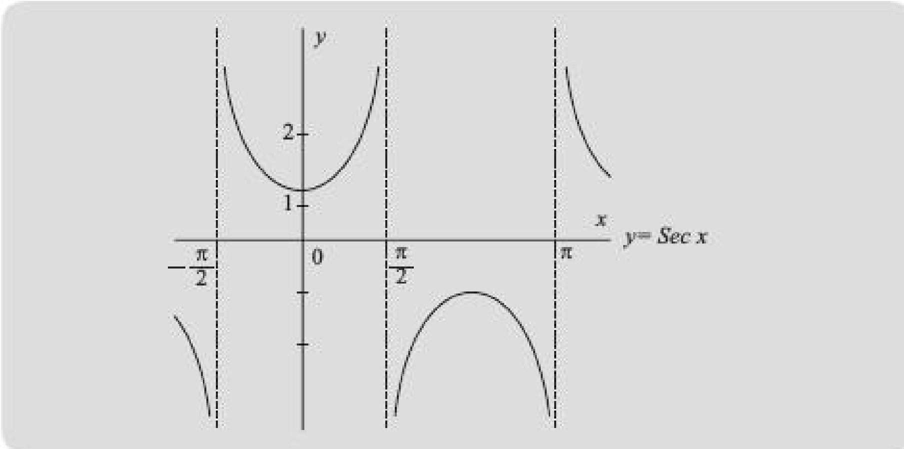
La función $f(x)=Tanx$, su dominio son todos los números reales diferentes de $\frac{\pi}{2}+\pi n$ paralos enteros ($n\in Z$); tiene asíntotas verticales en $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,$ para $n\in Z$ y el recorrido son todoslos números reales, su periodo es π y es una función impar.

Función cotangente



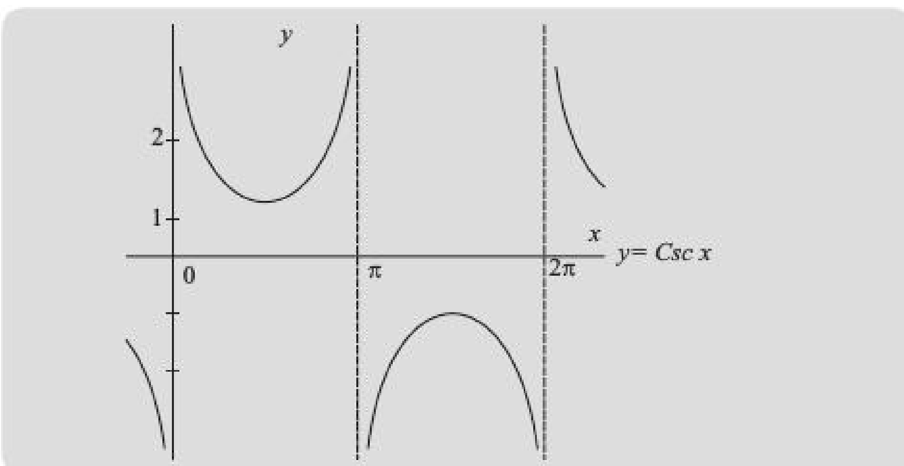
La función $f\,(x)= Cotx$, su dominio son todos los números reales diferentes de $\pi\, n$para n que pertenece a los enteros ($n\in Z$); tiene asíntotas verticales en $x=\pi\, n$,para $n\in Z$ y la imagen de todos los números reales, su periodo es π y es una funciónimpar.

Función secante



La función $f(x)=Sec x$, tiene como dominio los números reales diferentes de $\frac{\pi}{2}+\pi n$ para $n$que pertenece a los enteros ($n \in Z$); tiene asíntotas verticales en $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, para $n \in Z$ y la imagenes el intervalo $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$, su periodo es 2π y es una función par.

Función cosecante

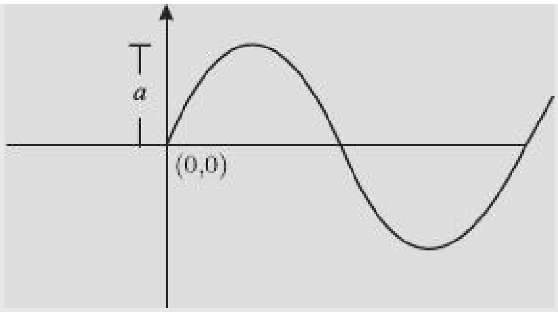


La función $f(x)= Csc x$, tiene como dominio los números reales diferentes de πn para$n$ que pertenece a los enteros ($n \in Z$); tiene asíntotas verticales en $x = \pi n$, para$n \in Z$ y la imagen es el intervalo $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$, su periodo es 2π y es una función impar.

6.10.1. Variaciones de las gráficas de seno y coseno

Consideremos las funciones de seno y coseno de la forma $f(x)= a\,Sen(bx + c)$ y $f(x)= a Cos(bx + c)$. Los modelos matemáticos anteriores nos pueden reportar informaciónmuy importante acerca de la amplitud, periodo, desplazamiento fase, con el fin deaplicarlos a fenómenos de movimiento ondulatorio, vibraciones, es decir todo lo quetiene que ver con movimientos oscilatorios o armónicos. Como ya se mencionó anteriormentelas variaciones que se van a estudiar en dichas funciones son: amplitud, periodicidad,desplazamiento fase y desplazamiento vertical.

i) ***Amplitud***



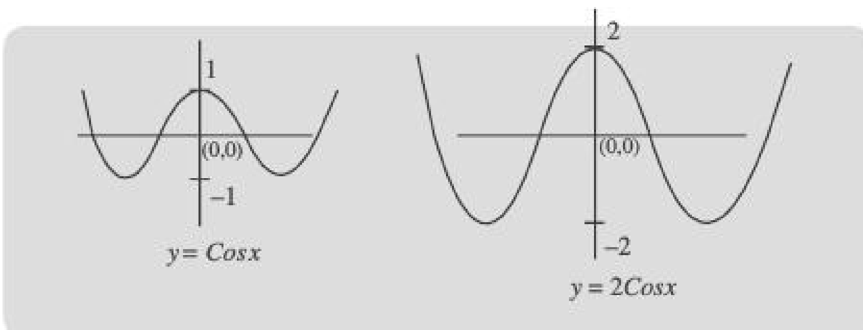
Es la máxima ordenada que puede presentar la función seno o coseno y se representa por el valor absoluto de a, es decir $|a|$. Esta situación se representa mediante la modelación $y = aSenx$ y $y = aCosx$.

Ejemplo

Hallar la amplitud de $y = 2Cosx$

Solución

Siguiendo el modelo $y = aCosx$ se tiene que la amplitud de la función es 2, estosignifica que se duplica la coordenada de y, como se muestra en la siguiente figura.



ii) ***Periodo***

El periodo se puede asociar con la longitud de onda e interpretarlo como si la función seno o coseno repitiera sus valores iniciando en $bx=2\pi$ ó $x=\frac{2\pi}{b}$; lo cual significa que la finción $y=Sen(bx)$ ó $y=Cos(bx)$ tiene un periodo de $\frac{2\pi}{b}$, es decir la función se repite cada $p=\frac{2\pi}{b}$ unidades.

Ejemplo

Hallar el periodo de $y=Cos(5x)$

Solución

Como el valor de b es 5, se tiene que el periodo es:

$p=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{5}$, es decir la gráfica se repite cada $\frac{2\pi}{5}$

iii) *Fase*

Si formulamos las funciones $y=aSen(bx+c)$ y $y=aCos(bx+c)$ expresadas como $y=aSen\left[\left(b(x+\frac{c}{b}\right)\right]$ y $y=aCos\left[\left(b(x+\frac{c}{b}\right)\right]$, significa que $\frac{|c|}{b}$ las funciones seno o coseno se desplazan horizontalmente una distancia ; ahora dependiendo si c es mayor o menor que cero, la gráfica se desplaza hacia la derecha o hacia la izquierda, es decir:

a. Si $c<0$ la gráfica de la función se traslada horizontalmente a la izquierda.

b. Si $c>0$ la gráfica de la función se traslada horizontalmente a la derecha.

El número $-\frac{c}{b}$ se denomina *desplazamiento fase de la función*.

Ejemplo

Determine amplitud, periodo y fase de $y=3Sen\left(2x-\frac{5}{2}\pi\right)$

Solución

Sea $a = 3$, $b= 2$ y $c=-\frac{5}{2}\pi$, entonces:

i. Amplitud

$$|a|=|3|=3$$

ii. Periodo

$p=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$, luego la gráfica se repite cada π unidades.

iii. Desplazamiento fase

$-\frac{c}{b}=-\frac{\left(-\frac{5}{2}\pi\right)}{2}=\frac{5}{4}\pi$, como $c=-\frac{5}{2}\pi$ es menor que cero, significa que la gráfica $y=3Sen\left(2x-\frac{5}{4}\pi\right)$ se desplaza $\frac{5}{4}\pi$ unidades a la derecha.

iv) *Desplazamiento vertical*

Supongamos que tenemos las funciones:

i. $y = aCos(bx + c)+ k$
ii. $y = aSen(bx + c)+ k$

La pregunta es: ¿qué efecto realiza la constante k?

El efecto de la constante k, es desplazar las gráficas de las funciones anteriores verticalmente k unidades.

i. Si $k>0$ la gráfica se desplaza k unidades hacia arriba

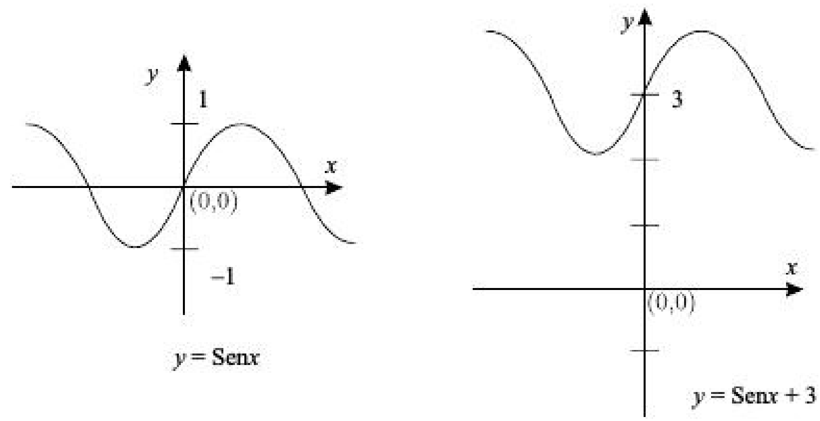
ii. Si k<0 la gráfica se desplaza k unidades hacia abajo

Ejemplo

Graficar la función $y=Senx+3$

Solución

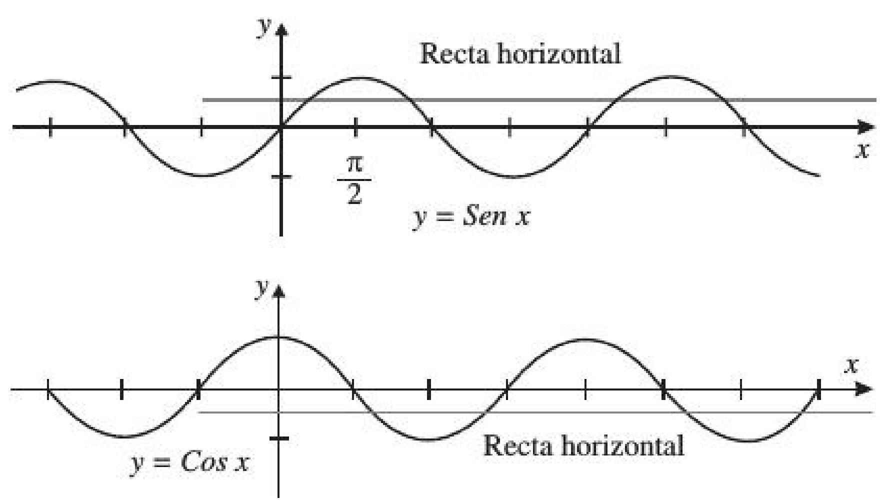
Es importante observar que $y=Senx+3\neq Senx(x+y)$. En la figura siguiente se muestracomo la función *Senx* se desplaza 3 unidades hacia arriba.



6.11. Funciones trigonométricas inversas

En esta sección debemos aplicar los conceptos vistos en el capítulo de funcionesacerca de función inyectiva y función inversa.

En primer lugar para definir las funciones trigonométricas inversas tenemos una dificultadya que las funciones trigonométricas no son inyectivas, por lo tanto no tendríanfunción inversa. Por ejemplo, si aplicamos la prueba de la recta horizontal en lafunción seno o coseno observamos que la recta corta a la gráfica en más de un punto,lo cual significa que estas funciones no son inyectivas.

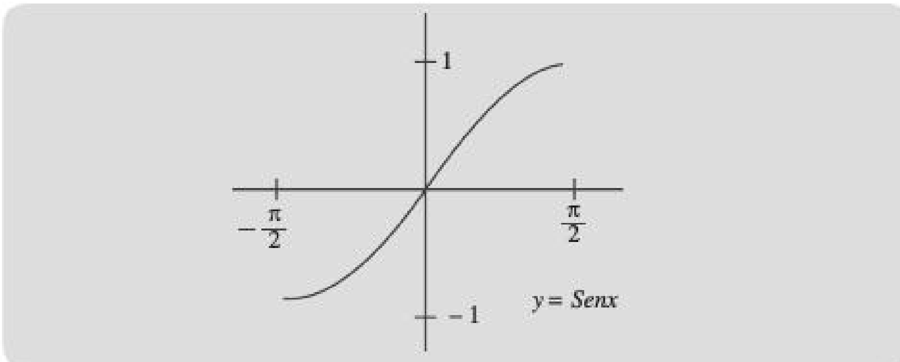


La pregunta es: ¿Cuál es la solución a este problema? La solución consiste en restringirlos dominios de las funciones trigonométricas, de manera que estas funciones trigonométricasresulten ser inyectivas.

De acuerdo a lo anterior en la función $y=Senx$ restringimos su dominio a los x quepertenecen a los números reales tales que $-\frac{\pi}{2} \leq x - \frac{\pi}{2}$, de esta manera la función cumple la condiciónde ser inyectiva y aceptaría tener función inversa.

La inversa de la función seno limitada en su dominio *f*, existe y se nota con el símboloSen^{-1} o *arcsen*, que se denomina *función arcoseno*.

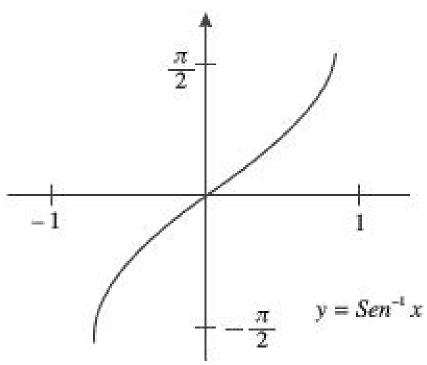
6.11.1. Función arcoseno



Usando la definición de función inversa dada en el capítulo de funciones se tiene:$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$, así la función inversa de seno es: $Sen^{-1}(x)=y \Leftrightarrow Sen(y)=x$, con

$$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \text{ y dominio } -1 \leq x \leq 1.$$

En la siguiente figura se muestra la gráfica de la función arcoseno:



Ejemplo 1

Evaluar $Sen^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Solución

Como $Sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\frac{\pi}{4}$ se encuentra entre $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, aplicando la definición de función inversa se tendría que $Sen^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

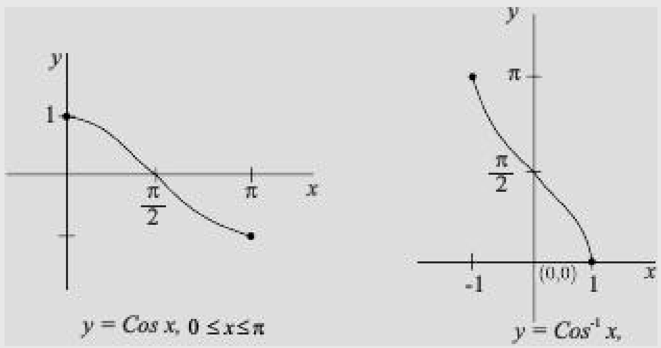
Las ecuaciones de cancelación de la función y su inversa se escriben:

Nota: *es importante tener en cuenta que Sen–1(x) no significa* $\frac{1}{Senx}$ *luego*

$Sen^{-1}(x) \neq \frac{1}{Senx}$.

$$Sen^{-1}(Senx)=x, \text{ para } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$
$$Sen(Sen^{-1}x)=x, \text{ para } -1 \leq x \leq 1$$

De manera similar estudiamos la función coseno, si restringimos el dominio de lafunción $y=Cosx$ a los números reales x tales que $0 \leq x \leq \pi$, para que sea inyectiva y tengainversa $Cos^{-1}x$ ó función arcocoseno, se nota $Cos^{-1}=arcos$.



Se define:

$Cos^{-1}(x)= y \Leftrightarrow Cos(y)= x$, con $0 \leq y \leq \pi$ y dominio $-1 \leq x \leq 1$

Las ecuaciones de cancelación de la función coseno y su inversa son:

$Cos^{-1}(Cosx) = x$, para $0 \leq x \leq \pi$

$Cos(Cos^{-1}x) = x$, para $-1 \leq x \leq 1$

Observamos que la función inversa del coseno (Cos^{-1}) tiene dominio en $[-1,1]$ ysu recorrido es $[0,\pi]$.

Ejemplo 2

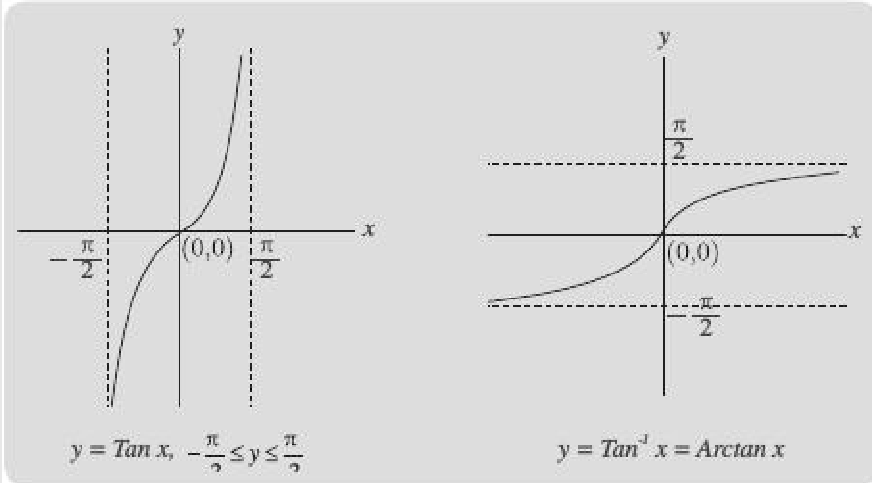
Calcular $Cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Solución

Como $Cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\frac{\pi}{4} \in [0,\pi]$, entonces $Cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$

6.11.2 Función arcotangente

La función $y=Tan$ es inyectiva si restringimos su dominio al intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, de esta maneraexiste la función inversa de la función tangente y se define como:

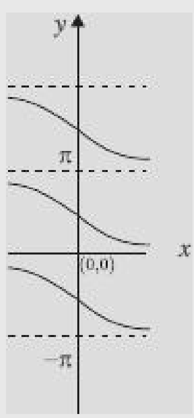


$Tan^{-1}(x) = y \Leftrightarrow Tan(y) = x$, con $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$

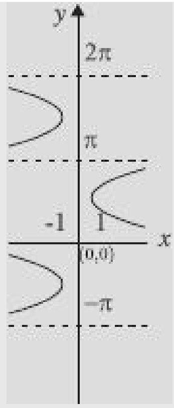
Las funciones trigonométricas inversas restantes se resumen a continuación:

1. $y = Csc^{-1}x$, *con* $(|x| \geq 1) \Leftrightarrow Csc\,y = x$, $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$
2. $y = Sec^{-1}x$, *con* $(|x| \geq 1) \Leftrightarrow Sec\,y = x$, $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$
3. $y = Cot^{-1}x$, *con* $(x \in R) \Leftrightarrow Cot\,y = x$ y $y \in (0, \pi)$

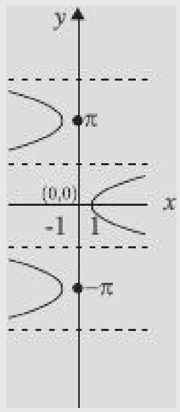
Es importante hacer claridad que los intervalos para las definiciones de $y = Csc^{-1}x$y $y = Sec^{-1}x$ no son universalmente aceptados, ya que algunos autores utilizan $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ en ladefinición de $y = Sec^{-1}x$
.



y = Arc Cot x



y = Arc Csc x



y = Arc Sec x

6.12. Ecuaciones trigonométricas

Definición: las ecuaciones que contienen funciones trigonométricas de ángulos desconocidos reciben el nombre de:

iii. Identidad: cuando son válidas para todos los valores de los ángulos desconocidos en los que están definidas las funciones.
iv. Ecuación: cuando son válidos únicamente para determinados valores de los ángulos desconocidos.

Ejemplo

$Tan^2\ x\ +1=\ Sec^2\ x$, es una identidad porque esta ecuación es válida para todos losángulos x que pertenecen a los reales.

Para Senx=0 esta ecuación es válida solo para un número finito de soluciones, para$x=k\pi$ con $k\in Z$, por lo tanto no es identidad.

También es válido presentar la solución de una forma más general así: $x=0+2k\pi$, $x=\pi+2k\pi$para $k\in Z$.

No existe un método único para resolver ecuaciones trigonométricas, pero se puedendar algunas pautas importantes.

i. La ecuación puede descomponerse en factores.

Ejemplo

Resolver la ecuación $Cos^2x+Cosx–2=0$

Solución

Al resolver $Cos^2x+Cosx–2=0$, se descompone en factores de la forma, $(Cosx+2)\cdot(Cosx–1)=0$de modo que: $Cosx+2=0$ o $Cosx–1=0$, así $Cosx=–2$ o $Cosx=1$

Para $Cosx=–2$ no existe solución; de $Cosx=1$ las soluciones son $x=0+2k\pi$, para $k\in Z$.

ii. Las distintas funciones que aparecen en la ecuación se pueden expresar en términosde una sola función.

Ejemplo

Resolver la ecuación $2Tan^2x+Sec^2x=2$

Solución

$$
\begin{aligned}
2Tan^2x+Sec^2x=2 \; &\Leftrightarrow 2Tan^2x+(1+Tan^2x)=2 \\
&\Leftrightarrow 3Tan^2x=1 \\
&\Leftrightarrow Tan^2x=\frac{1}{3} \\
&\Leftrightarrow Tan^2x=\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm=\frac{\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}
$$

Luego las soluciones son:

$$
\text{a. Si } Tanx=\frac{\sqrt{3}}{3}\text{, entonces }\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \\ x=\dfrac{7}{6}\pi+2k\pi \end{cases}
$$

$$
\text{b. Si } Tanx=-\frac{\sqrt{3}}{3}\text{, entonces}\begin{cases} x=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi \\ x=\dfrac{11}{6}\pi+2k\pi \end{cases}
$$

iii. Cuando ambos miembros de la ecuación se elevan al cuadrado:

Ejemplo

Resolver la ecuación $Cosx-\sqrt{3}Senx=1$

Solución

$$Cosx-\sqrt{3}Senx=1 \Leftrightarrow Cosx-1=\sqrt{3}\,Senx$$

$$\Leftrightarrow (Cosx-1)^2=\left(\sqrt{3}Senx\right)^2 \text{, elevando al cuadrado}$$

$$\Leftrightarrow Cos^2x-2Cosx+1=3Sen^2x \text{, desarrollo de álgebra}$$

$$\Leftrightarrow Cos^2x-2Cosx+1=3\left(1-Cos^2x\right) \text{, identidad}$$

$$\Leftrightarrow Cos^2x-2Cosx+1=3-3Cos^2x \text{, operaciones}$$

$$\Leftrightarrow 4Cos^2x-2Cosx-2=0$$

Factorizando se tiene:

$$\Leftrightarrow 4Cos^2x-2Cosx-2=0$$

$$\Leftrightarrow (2Cosx)^2-(2Cosx)-2=0 \text{, factorizando}$$

$$\Leftrightarrow (2Cosx-2)\cdot(2Cosx+1)=0$$

Luego las soluciones son:

a) 2 $x=\frac{4}{3}\pi+2k\pi, k\in Z$ *Cosx* +1= 0; $Cosx=-\frac{1}{2}$ esta ecuación es válida para

b) $2Cosx-2=0$; $Cosx=1$ esta ecuación es válida para $x=0+2k\pi$, $k\in Z$

6.8 Ejercicios

1. Probar las siguientes identidades
   a. $Senx\cdot Secx=Tanx$
   b. $(1-Cosx)(1+Secx)\cdot Cotx=Senx$
   c. $\frac{Senx}{Cscx}+\frac{Cscx}{Secx}=1$
   d. $\frac{Senx+Cosx}{Senx}=1+\frac{1}{Tanx}$
   e. $\frac{Cosx}{Cotx}=Senx$
   f. $\frac{Tanx}{Senx}=Secx$
   g. $\frac{Cscx}{Cotx}=Senx$
   h. $Secx\cdot(1-Sen^2x)=Cosx$
   i. $\frac{1}{1-Sen^2x}=1+Tan^2x$
   j. $Csc^2x\cdot(1-Cos^2x)=x$
   k. $\frac{Senx+Tanx}{Cotx+Cscx}=Senx\cdot Tanx$
   l. $Senx\cdot Secx=Cotx=1$
   m. $Senx+Cosx=Cosx\cdot(1+Tanx)$
   n. $Sec^2x\cdot Csc^2x=Sec^2x+Csc^2x$
   o. $(2rSenx\cdot \mathrm{Sec}x)^2+r^2\cdot(\mathrm{Cos}^2x-Sen^2x)=r^2$
   p. $(1-Sen^2x)\cdot(1+Tan^2Secx)=3$

1. Calcular aplicando las fórmulas de las funciones trigonométricas de la suma y diferencia:
   a. $Sen(105°)$
   b. $Cos(105°)$
   c. $Tan(105°)$
   d. $Cot(105°)$
   e. $Tan(75°)$
   f. $Sec(75°)$
   g. $Sen(15°)$
   h. $Cos(15°)$
   i. $Tan(15°)$
   j. $Sec(15°)$

2. Probar que:
   a. $Sen(45°+x)-Sen(45°-x)=\sqrt{2}Senx$
   b. $Sen(30°+x)+Cos(60°+x)=Cosx$

3. Expresar como suma o diferencia de senos o de cosenos cada uno de los siguientes productos.
   a. $Sen35°\cdot Cos25°$
   b. $Sen25°\cdot Cos25°$
   c. $Cos50°\cdot Cos75°$
   d. $Sen4\cdot Cos2$
   e. $Sen\frac{x}{2}\cdot Cos\frac{3x}{2}$
   f. $Sen5\cdot Sen4°$

4. Probar que $2Sen45°\cdot Cos15°=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$
5. Expresar como producto:
   a. $Sen35°+Sen25°$
   b. $Sen35°–Sen25°$
   c. $Cos8x+Cos2x$
   d. $Sen(45°+x)–Sen(45°–x)$
   e. $Cos40°+Cos20°$

6. Demostrar que $\frac{Cos50°-Cos40°}{Cos35°-Cos25°}=\sqrt{2}$
7. Hallar la amplitud, periodo y desplazamiento fase:
   a. $y=2Sen\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$
   b. $y=3Cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$
   c. $y=4Cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$
   d. $y=-4Sen(5x+600°)$
   e. $y=\frac{1}{2}Sen(\pi x+1)+\frac{3}{2}$
   f. $y=3Sen(6x+510°)-2,5$
   g. $y=4Sen(3x-4)-\frac{7}{2}$

9. Encuentre el valor exacto de:

a. $Cos^{-1}(-1)$
b. $Tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$
c. $Sen^{-1}(1)$
d. $Sen^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
e. $Tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
f. $Cos\left(Sen^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
g. $Sen^{-1}\left(Sen\frac{5\pi}{4}\right)$

10. Pruebe que $Cos\left(Sen^{-1}(x)\right)=\sqrt{1-x^2}$, para $-1\leq x\leq 1$
11. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas y dar las soluciones en forma general.
   a. $Senx= Sen30^{\circ}$
   b. $Cos(30 - x)= Cosx$
   c. $2Senx=1$
   d. $3Cos^2 x + Sen^2 x = 3$
   e. $Cosx + 2Sen^2 x =1$
   f. $Senx=\frac{\sqrt{3}}{2}$
   g. $Cos^2x=\frac{1}{2}$
   h. $Senx \cdot Cosx = 0$
   i. $(Tanx -1)\cdot (2Senx+1)= 0$
   j. $2Sen^2 x - Senx-1= 0$
   k. $Cosx-\sqrt{3}Senx=1$
   l. $2Cosx =1- Senx$
   m. $Tan2x + 2Senx= 0$
   n. $Sen2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$
   o. $Tan3x =1$
   p. $Cos\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Respuestas

Capítulo 1

1.1 Ejercicios

1. a. $\frac{37}{6}$

b. $\frac{23}{6}$

c. $\frac{67}{10}$

d. $\frac{80}{21}$

e. 6

f. $-\frac{37}{5}$

3. a. $\frac{48}{25}$

b. $\frac{52}{11}$

c. $\frac{3}{4}$

d. $\frac{1}{24}$

e. $\frac{521}{12}$

f. $\frac{23}{10}$

g. $\frac{4673}{280}$

5. $\frac{28}{27}$

7. $\frac{100}{9}\text{días} = 11\ \frac{1}{9}\ \text{días}$

1.2 Ejercicios

1. a. $\frac{100}{2401}$

b. $\frac{187}{1540}$

c. $\frac{64}{27}$

d. $\frac{9}{4}$

e.– $\frac{-27}{8}$

g. $\frac{1}{2^{20/3}y^{3/2}}$ i. 5 500

3. a. 1.8×10^{15}pies

b. 4.5×10^{10}años

c. 3.476×10^{6}metros

5. a. $-y^{15}$

b. $\frac{1}{a^3}$

c. $\frac{8}{x^2}$

d. $\frac{a^6}{b^2}$

e. x^{12}

f. $\frac{a^2}{125}$

g. $\frac{y^8}{x^2}$

h. a^3b^2

i. $\frac{16}{625}$

j. 1

k. $-y^{15}$

l. x^4

m. $2a^3+5a$

n. xy^3

o. x^2-x^3

p. $\frac{729x^4y^4}{(x^2+x^2)^2}$

q. $\frac{1}{b+a}$

r. $\frac{y^2+1}{y^2}$

s. $\frac{x^2y^2}{y^2+x^2}$

t. $\frac{-x^4}{20}$

u. $\frac{3-2a^2}{12a^6}$

v. $\frac{8}{x^6}$

1.3 Ejercicios

1. a. $\sqrt{30}$

   b. $\sqrt{\frac{15}{2}}$

   c. –5

   d. $3ab^2z\sqrt[3]{3az}$

   e. *xyz*

   f. 1

   g. $\frac{\sqrt{2}}{x^2}$

   h. $\frac{\sqrt{z^3+15z^2+10z}}{z}$

   j. $\frac{4x^3y\sqrt[3]{2y}}{z^2}$

3. a. $5\sqrt{5}$

   b. 4

   c. –3

   d. $\frac{1}{5^{8/5}}$

   e. $\frac{9}{2^{8/3}}$

f. $\frac{5}{4}$

g. $\frac{10^{3/2}}{27}$

h. $n=\frac{5}{3}$

i. 100

5. a. F

b. F

c. F

d. V

e. V

f. F

1.4 Ejercicios

1. a. $8\sqrt{3}-2\sqrt[4]{8}+40$

b. $\frac{\sqrt{5}-25}{5}$

c. $27\sqrt{5}-25$

d. $4\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{2}$

e. $9\sqrt{6}$

f. $\frac{-23}{8}$

g. $3x^3\sqrt[3]{3x}-3x^2\sqrt[3]{x}+5\sqrt[3]{x}$

h. $a^2b^3c^4\sqrt{ac}+abc^3\sqrt{ac}$

i. $\frac{9\pm 8}{3}$

j. $\frac{-18\pm 10}{5}$

k. $\frac{8-11\sqrt{2}}{4}$

m. $\left(\frac{6}{3-4\sqrt[6]{8}}\right)^2$

o. $\frac{121}{20}$

p. $\sqrt[4]{150}$

1.5 Ejercicios

1. a. $\sqrt{70}$

   b. 3

   c. 4

   d. $b\sqrt[30]{b}$

   e. –22

   f. $74+12\sqrt{30}$

   g. $4+\sqrt{14}$

   h $\frac{7-2\sqrt{10}}{9}$

   i. –22

   j. $\sqrt{5}+3\sqrt{305}$

3. a. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

   b. $\frac{3\sqrt{x-5}}{x-5}$

   c. $\sqrt{3}$

   d. $\frac{z(\sqrt{z}+\sqrt{x})}{z-x}$

   e. $\frac{6\sqrt[3]{100}}{65}$

   f. $\frac{7(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3}$

   g. $\sqrt[3]{25}$

   h. $\frac{(y-\sqrt{y^2-16})^2}{16}$

i. $\frac{-5(1+\sqrt{3})}{2}$

j. $\sqrt[3]{x^2}$

k. $\sqrt[5]{27}$

l. $\frac{\sqrt{7}}{7}$

m. $\frac{15(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{4}$

n. $\frac{(3+\sqrt{5})\cdot\sqrt[5]{(3-\sqrt{5})^2}}{4}$

1.6 Ejercicios

1. a. –1

c. –8–14*i*

e. $\frac{-8-7i}{10}$

g. $\frac{6-8i}{5}$

3. a. $\frac{7-2\sqrt{10}}{9}$

c. $\frac{-8+i}{6}$

1.7 Ejercicios

1. $9x^3y+\frac{5}{3}x^{\frac{1}{2}}y^2-4xy^3+\frac{18}{5}$

3. $\frac{-8}{3}z^3n-\frac{7}{6}z^2n^2-4zn^3+\frac{7}{4}$

5. $2x^3 - 2x^2m + xm - 2m^3 + 4$

7. $-2p^3+\frac{17}{2}q^2+2q+4$

9. $\frac{-9}{2}\sqrt{p}+\frac{21}{2}p-\frac{5}{2}$

11. $-6x^3 + 11x^2 - 1$

13. $-6x^3+x2-7x-15$

15. $-\frac{5}{2}y^2+\frac{10}{3}xy^2+\frac{1}{3}xy+y+4$

17. $2x^3-3x^2+1$

19. $6x-3$

21. $9x^2+6x+1$ *mts*^{2}, 169 *mts*^{2}

23. $\frac{12x^2+9x}{2}\ mts^2$, $645\ mts^2$

25. $\frac{2x^2+9x+9}{2}\ mts^2$, $52\ mts^2$

27. $2x^2+3x+5$ *residuo* 18

29. $-x^3-4x^2-2x-5$ *residuo* $8x+3$

31. m^4+5m^2+25

33. a. $2x+y$

c. $x^2+4x+16$

d. $25-5y+y^2$

f. $16+8y+4y^2+2y^3+y^4$

35. $\frac{V_1R_2R_3+V_2R_1R_3+V_3R_1R_2}{R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2}$

1.8 Ejercicios

1. $((3m-5n)+6)((3m-5n)-6)$

3. $\left(\frac{x}{2}-\frac{4}{m}\right)\left(\frac{x^2}{4}+\frac{2x}{m}+\frac{16}{m^2}\right)$

5. $(y^2+9)(y^2+4)$

7. $\left(\left(\frac{x}{2}-1\right)+4\right)\left(\left(\frac{x}{2}-1\right)+9\right)$

9. $(3(x+1)+10)((x+1)-1)$

11. $(y+1)^{\frac{3}{2}}(2y(y+1)-3)$

13. $3x(x+3)(x+2)$

15. $(3x-2)((x+1)+1)((x+1)-1)$

17. $\left(\frac{3}{y}-x^2\right)\left(\frac{9}{y^2}+\frac{3x^2}{y}+x^4\right)$

19. $2(senx+2)(senx+1)$

21. $z^2(z+3)^2$

23. $\left(\left(\frac{x}{3}-1\right)+\frac{3}{5}y\right)\left(\left(\frac{x}{3}-1\right)-\frac{3}{5}y\right)$

25. $\left(\frac{x}{2}-10\right)\left(\frac{x^2}{4}+5x+100\right)$

27. $\left(\left(\sqrt{x}+\frac{1}{3}\right)+4\right)\left(\left(\sqrt{x}+\frac{1}{3}\right)+5\right)$

29. $\left(\frac{1}{n}-\frac{9}{4x^2}\right)\left(\frac{1}{n^2}+\frac{3^2}{4nx^2}+\left(\frac{3}{2x}\right)^4\right)$

31. $4(y+3)^{1/2}((y+3)-3)$

33. $\ln x(2y-5)$

35. $5^{2x}(y+z)$

37. $(sen\omega - \cos\omega)(1+sen\omega\cos\omega)$

39. $[(y+3)+(e^x+1)][(y+3)-(e^x+1)]$

41. a. $\pi(R-r)(R-r)$

b. $\pi(6-2)(6+2)=32\pi$

1.9 Ejercicios

1. $\frac{a+2b}{x^2y}$

3. $\frac{y+2}{y+8}$

5. $\frac{3x+5}{5x}$

7. $\frac{x+4}{x}$

9. $\frac{3}{5x}$

11. $\frac{x+2}{x}$

13. $\frac{2(x+2)}{x-2}$

15. $\frac{m-5}{m-2}$

17. $\frac{x(3x+5)}{2(x^2-1)}$

19. $\frac{z^2(z+4)}{(z+2)^2(z-4)}$

21. $\frac{(x-2)(2x+1)}{(3x-2)(x+3)}$

23. $\frac{2x^2+6x-15}{6x^2}$

25. $\frac{x^3+4x^2-3x+3}{3x(x-1)}$

27. $\frac{x^2+x-3}{x(x+3)^2}$

29. $\frac{x^2+7x-3}{(2x-1)(x+1)}$

31. $\frac{3x-1}{x(x-1)}$

33. $\frac{3x+1}{x-2}$

35. $\frac{1}{n+m}$

37. $\frac{x^2-2}{(x+1)^2}$

39. $\frac{5x+1}{x-4}$

41. $\dfrac{-1}{1-x}$

43. $\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}$

45. a. Perímetro $=\dfrac{2(2x^3+2x^2+6x+3)}{(x+1)(x^2+2)}$, área= $\frac{2x+1}{x^2+2}$

47. $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

49. $\sqrt{x}-\sqrt{y}$

51. $\dfrac{-3}{4(\sqrt{2}+\sqrt{5})}$

53. $-5(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

55. $\dfrac{-1}{m^2(m+1)^{\frac{1}{2}}}$

57. 2–*y*

59. $\dfrac{1}{\left(y-\sqrt{y^2-1}\right)^2\sqrt{y^2-1}}$

1.10 Ejercicios

1. *x*=–2

3. $x=\dfrac{-7}{3}$

5. $x=\dfrac{3}{4}$

7. x–4

9. $x=\dfrac{1}{4}$

11. $x=-\dfrac{3}{2}$

13. x=–1

15. $x=-\dfrac{7}{6}$

17. $x = -\frac{1}{3}$

19. $x = \frac{11}{3}$

21. $a = -\frac{4}{7}$

23. b=2

25. $h = \frac{3V}{\pi r^2}$

27. $b_2 = \frac{2A - hb_1}{h}$

29. $R_3 = \frac{R R_1 R_2}{R_1 R_2 - R R_2 - R R_1}$

31. 200 *mts*. y 400 *mts*.

33. 22,22 *min*

35. x=2

37. $x = \frac{409}{18}$

39. $x = \frac{5}{16}$

41. 4 000 *mts*.

43. 10 *cm*.

45. $L = \frac{30}{7}$ *pies.*

1.11 Ejercicios

1. $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \; x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

3. $x_1 = \frac{3+\sqrt{15}}{3}, \; x_2 = \frac{3-\sqrt{15}}{3}$

5. $x_1 = 4$, $x_2 = 8$

7. $n_1 = 3, \; n_2 = -\frac{3}{2}$

9. $x_1 = 2+\sqrt{3},\ x_2 = 2-\sqrt{3}$

11. $x_1 = \dfrac{9+12i}{25},\ x_2 = \dfrac{9-12i}{25}$

13. $x_1 = \dfrac{-5+\sqrt{61}}{6},\ x_2 = \dfrac{-5-\sqrt{61}}{6}$

15. $x_1 = \dfrac{7-3\sqrt{5}}{2},\ x_2 = \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$

17. $x_1 = \dfrac{5+\sqrt{21}}{2},\ x_2 = \dfrac{5-\sqrt{21}}{2}$

19. $x_1 = \dfrac{11+\sqrt{61}}{6},\ x_2 = \dfrac{11-\sqrt{61}}{6}$

21. $x=1$

23. $k=\pm 2$

25. $x^2 - \dfrac{1}{35}x - \dfrac{12}{35} = 0$

27. $x^2+3x-4=0$

29. $t=5seg$, $t=3seg$,

31. Lado base 1,6 *metros*, $V=5{,}12\ m^3$

33. 8 y 10

35. $x = -1+\sqrt{161}$

37. $x_1=1+2i$, $x_2=1-2i$

39. $x_1 = \dfrac{5+\sqrt{55}}{3},\qquad x_2 = \dfrac{5-\sqrt{55}}{3}$

$x=2$

41. $x_1=4$, $x_2=8$ 43.

47. Base $2\sqrt{\frac{10}{3}}$, altura $\frac{20}{3}$

49. ancho 30 metros, largo 40 metros

51. Ceros: 0, ±2, ±3

53. ceros: 0 ± 1, ±3

55. ceros: 1, 1, –1,–2, $\frac{1}{5}$

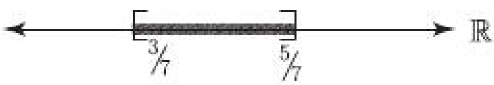
57. Ceros: $-4\pm\sqrt{5}$

59. ceros: $1\pm\frac{1}{\sqrt{5}}i$

61. Ceros: –1, –1, 2

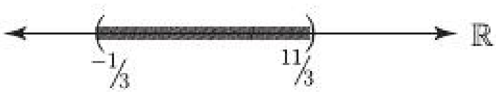
1.12 Ejercicios

1. $\left[\frac{1}{3},\infty\right)=\{x\in\mathbb{R}|x\geq\frac{1}{3}\}$ 

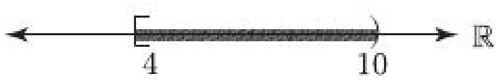
3. $\left[\frac{3}{7},\frac{5}{7}\right]=\{x\in\mathbb{R}|\frac{3}{7}\leq x\leq\frac{5}{7}\}$ 

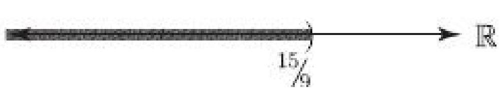
5. $\left(-\infty,2\right)=\{x\in\mathbb{R}|x<2\}$ 

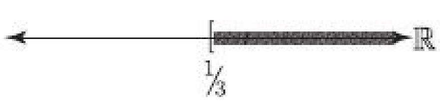
7. $\left[0,\frac{8}{5}\right]=\{x\in\mathbb{R}|0\leq x\leq\frac{8}{5}\}$ 

9. $\left(-\frac{1}{3},\frac{11}{3}\right)=\{x\in\mathbb{R}|-\frac{1}{3}<x<\frac{11}{3}\}$ 

11. $\left(-\infty,2\right]=\{x\in\mathbb{R}|x\leq2\}$ 

13. $\left[4,10\right)=\{x\in\mathbb{R}|4\leq x<10\}$ 

15. $\left(-\infty,\frac{15}{9}\right)=\{x\in\mathbb{R}|x<\frac{15}{9}\}$ 

17. $\left[\frac{1}{3},\infty\right)=\{x\in\mathbb{R}|x\geq\frac{1}{3}\}$ 

19. $\left[\frac{3}{2},\infty\right)=\{x\in\mathbb{R}|x\geq\frac{3}{2}\}$ 

21. $\left[59,77\right]=\{x\in\mathbb{R}|59\leq F\leq77\}$ 

1.13 Ejercicios

1. $(-\infty, 0]\cup[1, \infty)$

3. $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\cup\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

5. $[-1, 78, 0)\cup[0, 28, \infty)$

7. $[-\infty, 0, 40)\cup[3, 09, \infty)$

9. $\left[-4, \frac{1}{2}\right]$

11. Para todo valor real de *k*.

13. Para *k* en el intervalo (–2,2).

15. Para *k* en el intervalo (0,4).

1.14 Ejercicios

1. $\left[-1, 5/3\right]$

3. [3,5

5. $\left(-\infty, -\frac{14}{5}\right]\cup\left[\frac{26}{5}, \infty\right)$

7. $(-\infty, 0)\cup\left(0, \frac{1}{3}\right)\cup(1, \infty)$

9. [–1,5]

1.15 Ejercicios

1. $x=\frac{19}{4}$

3. $x_1=\frac{5+\sqrt{21}}{2}$, $x_2=\frac{5-\sqrt{21}}{2}$

5. $x_1=0$, $x_2=6$

7. $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=3$

9. $x_1=\frac{15+\sqrt{115}}{10}$, $x_2=\frac{15-\sqrt{115}}{10}$

11. $\frac{-4}{3} \le x \le 2$

13. $(-\infty, -1] \cup [0, 1]$

15. $(-\infty, -3] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$

17. $\left[-\frac{7}{2}, 1\right]$

19. $(-\infty,-2{,}66] \cup [5{,}16,\infty)$

21. $2\sqrt{15}, 4\sqrt{15}$

23. a. $k = \pm 4\sqrt{2}$

b. $\left(-\infty, -\sqrt{32}\right) \cup \left(\sqrt{32}, \infty\right)$

c. $\left(-\sqrt{32}, \sqrt{32}\right)$

25. 25 000 000 al 10%, 10 000 000 al 12%

27. a. $x^2 - x - 12 = 0$

c. $x^2 + 9 = 0$

Capítulo 2

2.1 Ejercicios

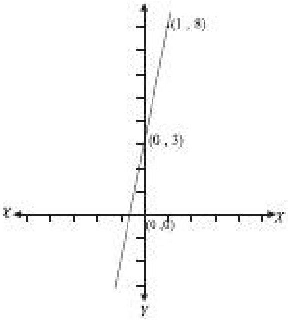
3. $y=4$

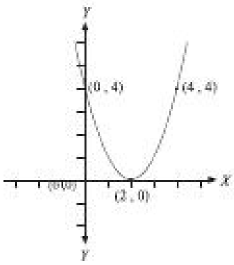
5. Respecto al origen.

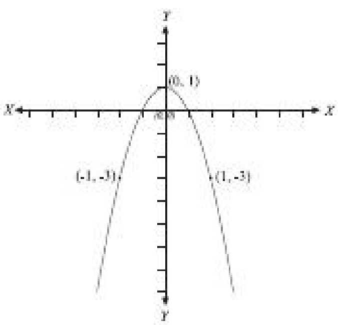
7. No hay.

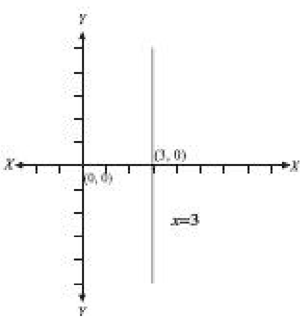
9. No hay.

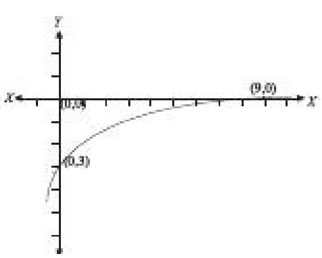
11. Cumple las tres simetrías

13. 

15. 

17. 

19. 

21. 

23. $\left(\frac{7}{4},0\right)$

25. (0, 0)

27. no hay

29. (±3,0) (0±, 2)

31. $x=-3,11$

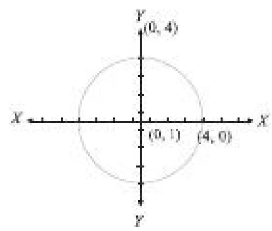
33. $\sqrt{74}$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

35. $\sqrt{34}$, $\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

37. $7\sqrt{2}$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

2.2 Ejercicios

1. $r=4$, $D=8$, longitud $=8\pi$, $A=16\pi$



3. $(x-3)^2+(y-3)^2=9$, longitud $=6\pi$, área$=9\pi$

5. $(x-2)^2+(y-2)^2=4$

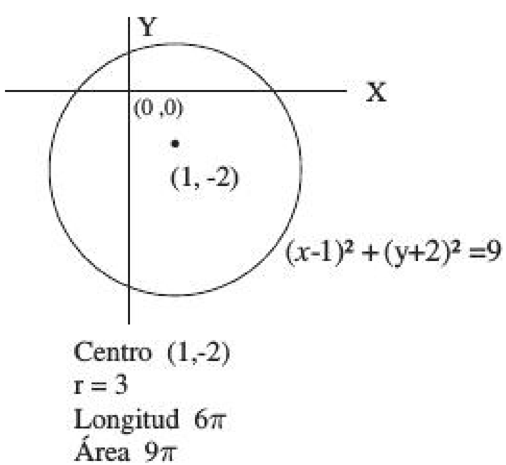
7. $(x-3)^2+(y+1)^2=10$ 9. $9\pi-\pi=8\pi$

11. $(x+1)^2+(y+2)^2=34$, longitud $=2\sqrt{34}\pi$ *cm*, área$=34\pi$ cm^2

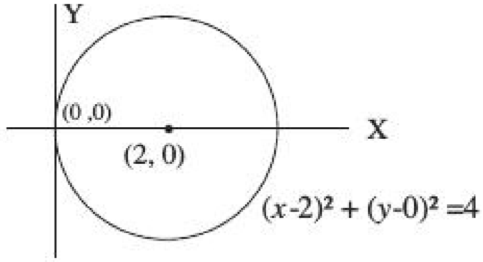
13. $(x-3)^2+(y-4)^2=9$

2.3 Ejercicios

1.

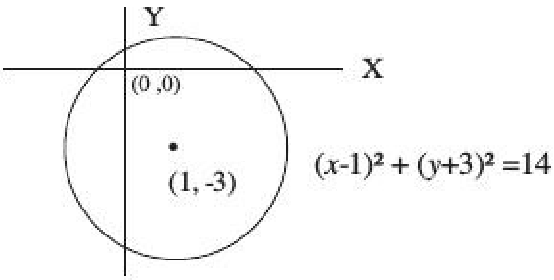


3.



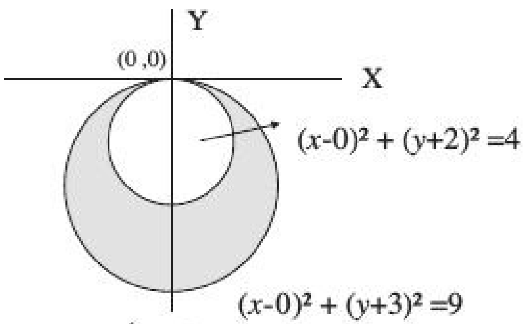
Centro (2, 0)
r = 2
Longitud 4π
Área 4π

5.



Centro (1, -3)
r = $\sqrt{14}$
Longitud $2\sqrt{14}\pi$
Área 14π

7.



Área 5π

2.4 Ejercicios

1. $y = -x - 1$

3. $y = 3$ 5. $x = -2$

7. $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{9-\sqrt{3}}{3}$

9. $x = 0$ (eje X)

1 1. $y = 2x + 5$

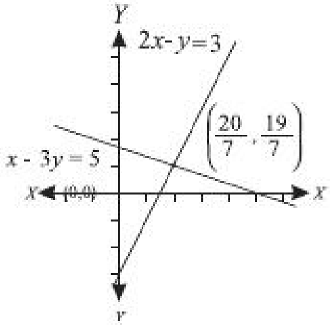
13. a. $k = \frac{-15}{4}$

b. $k = -\frac{8}{3}$

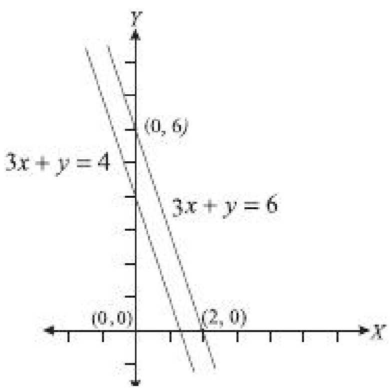
15. $P = 5 + \sqrt{13},\ \ A = 3$

2.5 Ejercicios

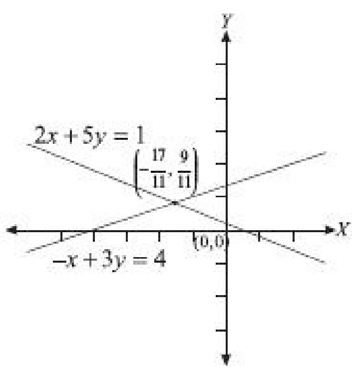
1.



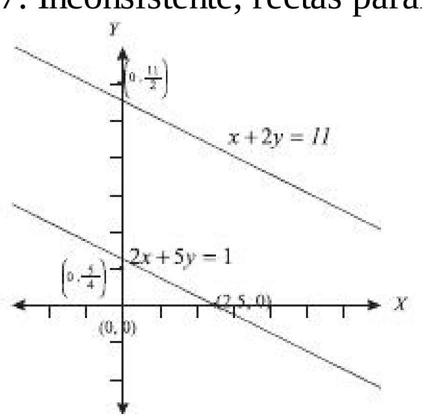
3.



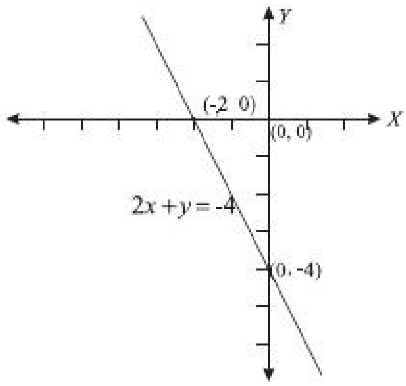
5.



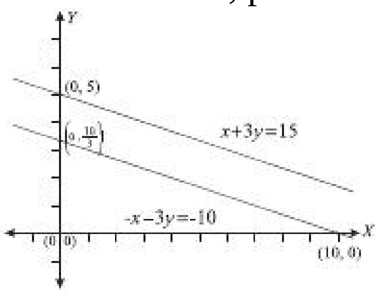
7. Inconsistente, rectas paralelas.



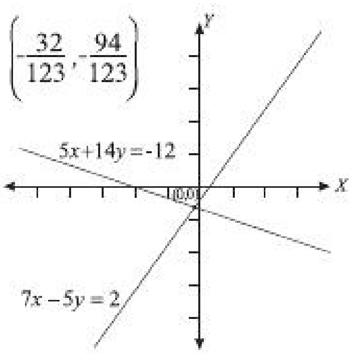
9. Coincidentes.



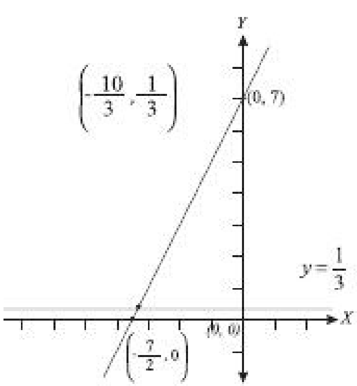
11. Inconsistentes, paralelas.



13.



15.



17. $\frac{1}{3}(1)-\frac{2}{5}(1)=-\frac{1}{15}\Rightarrow-\frac{1}{15}=-\frac{1}{15}$ $\quad -1+\frac{1}{2}(1)=-\frac{1}{2}\Rightarrow-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$

19. (x,2x–5), particulares $(0,-5),(1,-3),(-1,-7),\left(\frac{1}{2},-4\right),\left(\frac{-1}{21},-6\right)$

21. Los dos números son 20 y 30

23. Vendió 40 a $5 000 y 60 unidades a $10 000

2.6 Ejercicios

1. $\left(\pm\sqrt{2}, 2\right)$

3. (0,0) (1,1)

5. No hay cortes.

7. $\left(\frac{9}{2}, \pm\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

9. $\left(\pm\frac{6}{\sqrt{13}}, \pm\frac{6}{\sqrt{13}}\right)$

11. (1,2) (–2,–1)

2.7 Ejercicios adicionales

1. $k = \pm\sqrt{2}$

3. $x=\frac{25}{22}, x=\frac{65}{44}$

5. a. A todas

b. A todas

c. A todas

d. Respecto al origen e. Ninguna

f. Ninguna

7. a. $\sqrt{97}$

b. $\sqrt{74}$,

c. $\sqrt{170}$

9. a. 1

b. $\sqrt{3}$

c. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

d. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

11. centro(–1,0), $r=\sqrt{2,}$, $S=2\sqrt{2}\,\pi$, área 2π

13. centro(1,–3), $r=\sqrt{11}$, $S=2\sqrt{11}\pi$, área 11π

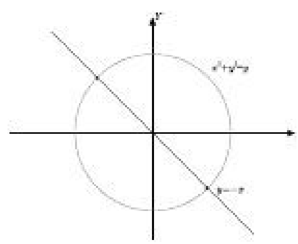
15. $y=-\sqrt{3}\ x$

17. $\left(\sqrt{2,}\ -\sqrt{2,}\right)\ \left(-\sqrt{2,}\ \sqrt{2,}\right)$

19. a. $y=3$

b. $y=\frac{6}{5}x-\frac{9}{5}$

c. $x=2$,

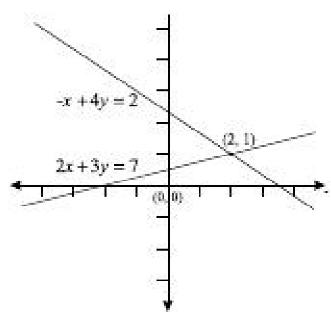


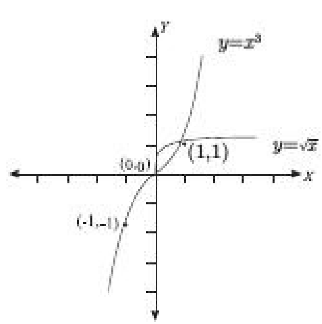
d. $y=\sqrt{3x+3}\ -2\sqrt{3}$

21. (1,1), $r=\sqrt{13}$, $S=2\sqrt{13}\pi, A=13\pi$

23. (2,1),

25. (0,0),(1,1), y





27. $x^2+y^2=6,\ y=\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{6}{\sqrt{5}}$

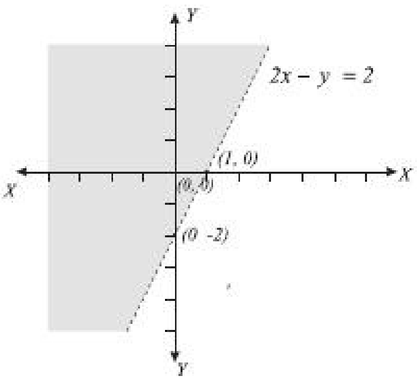
31. Tiene todas las simetrías

33. a. Paralelos si $k = \frac{1 \pm 2\sqrt{15}}{4}$

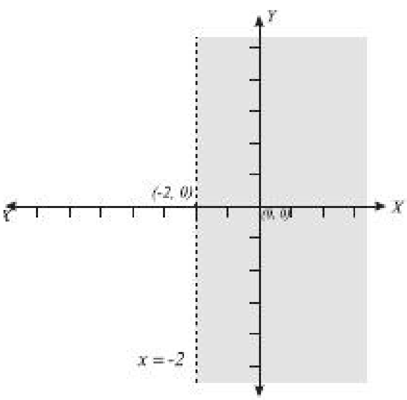
b. Perpenticulares si $k = \frac{5}{4}$

35. Mayor distancia de (3,–4) a (0,0) valor 5.

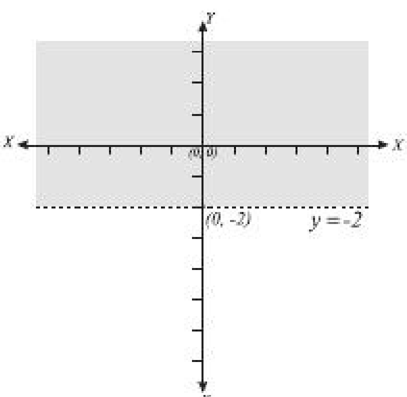
37.



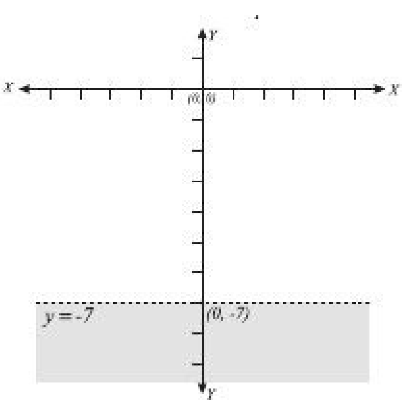
39.



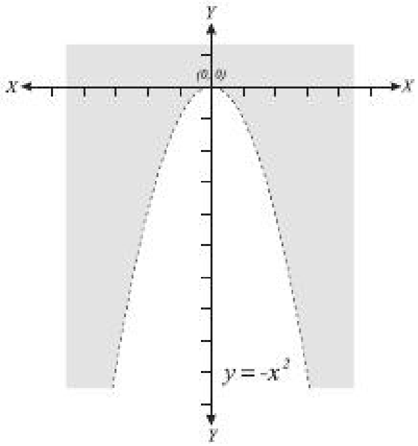
41.



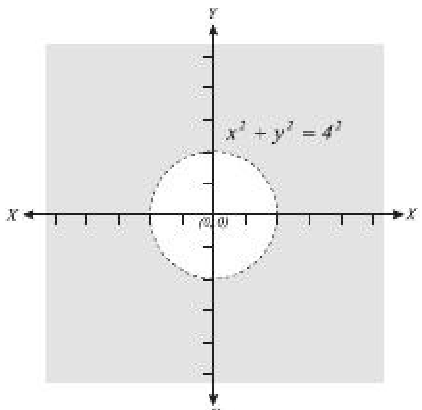
43.



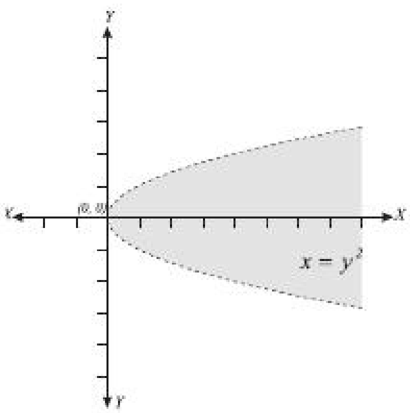
45.



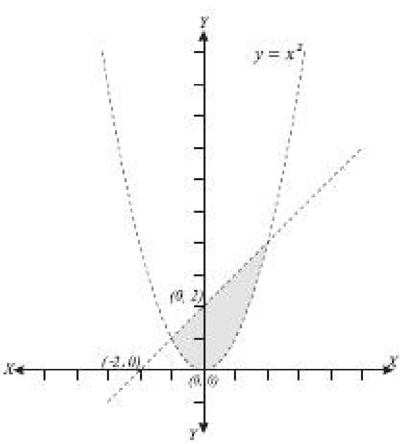
47.



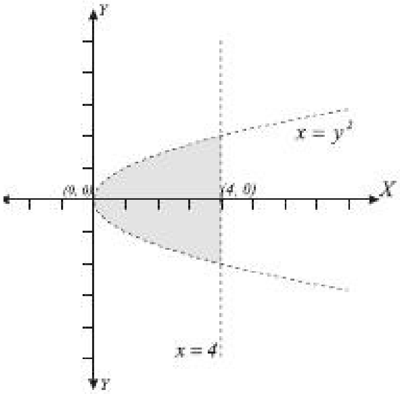
49.



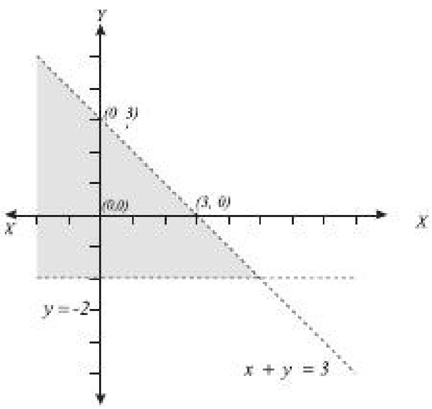
51.



53.



55.



Capítulo 3

3.1 Ejercicios

1. a. 6 m^2

b. 5.53cm

3. a. x=30cm

b. 12,85cm

5. 73.84cm

3.2 Ejercicios

1. a. 70.71cm y 103.71cm

b. 58.30cm

c. 3643.75cm^2

3. 6.24cm

5. $\frac{246}{\pi^2}\, cm^2$

7. πm^2

9. $(150\sqrt{3} - 75\pi)m$

3.3 Ejercicios

1. $84m^2$

3. $(\sqrt{13}+1)\, m^2$

5. $3\sqrt{3}\, m^2$

9. $\left(\frac{60-5\pi}{4}\right) m^2$

3.4 Ejercicios

1. $5.41cm$

3. $4.08cm$

5. $15cm$

7. $6.52cm$

3.5 Ejercicios

1. $12\pi m^2$

3. $(32\pi+64)m^2$

5. $\left(25\sqrt{3} - \frac{25}{2}\pi\right) m^2$

7. 192π

3.6 Ejercicios

3. $\frac{32}{5}$

5. 4

7. $3\sqrt{22}$

3.7 Ejercicios

Poliedro	Caras C	Vértices V	Aristas A	$C+V-A=2$
Tetraedro	4	4	6	2
Hexaedro	6	8	12	2
Octaedro	8	6	12	2
Dodecaedro	12	20	30	2
Icosaedro	20	12	30	2

3.8 Ejercicios

1. $562{,}5m^3$

3. $390m^3$

3.9 Ejercicios

1. $4.725 \times 10^7\ cm^3$

3. 125 *cajas*

5. $14.25\ \pi$

9. $22811.2\ cm^3$

11. a. $5\sqrt{3}$ b. $100\ m^2$

   c. $150\ m^2$

   d. $125\ m^3$

13. a. $800\ \sqrt{34}cm^2$

   b. $(800\ \sqrt{34} + 3200)cm^2$ c. $32000\ cm^3$

15. a. $1488.6\ cm^2$

   b. $1956.6\ cm^2$

   c. $5656.68cm^3$

17. a. $2625\pi\ cm^2$

b. $3250\pi\ cm^2$

c. $\dfrac{9250}{3}\pi\, cm^3$

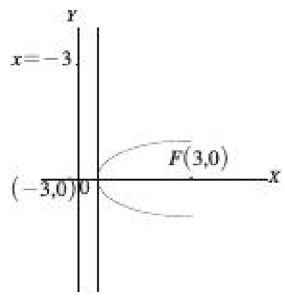
19. $\frac{\pi \cdot h}{12} cm^3$

20. $\frac{2000\pi}{3}\ cm^3$

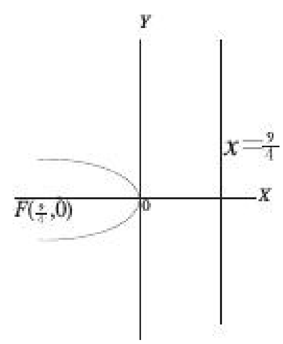
Capítulo 4

4.1 Ejercicios

1. $F(3,0)$, directriz $x=-3$, lado recto 12

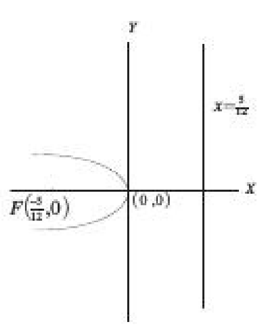


3. $F\left(-\dfrac{9}{4},0\right)$, directriz $x=\dfrac{9}{4}$, lado recto 9



5. $F\left(-\dfrac{5}{12},\ 0\right)$, directriz $x=\dfrac{5}{12}$, lado recto

$\dfrac{5}{3}$



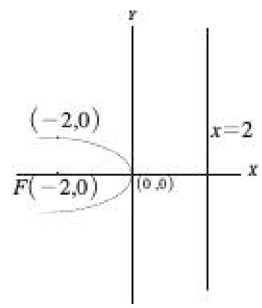
9. $y^2 = -12x$

11. $x^2 = -12\,y$

13. $F(-2, 0)$, directriz $x = 2$, lado recto 8

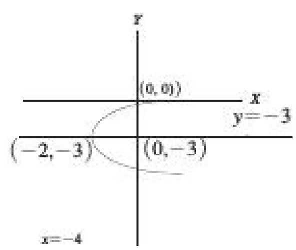
17. $y^2 = -8x$

19. $x^2=y$

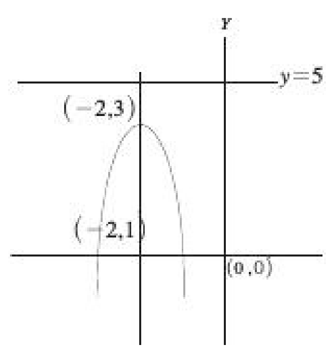


4.2 Ejercicios

1. $(y+3)^2 = 2(x+2)$, x=–4, lado recto=8



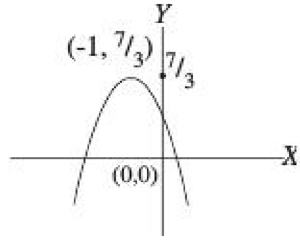
3. $(x+2)^2 = -2(y-3)$, $y=5$, lado recto=8



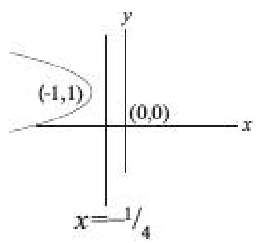
5. $(y-3)^2 = -8(x-4)$

4.3 Ejercicios

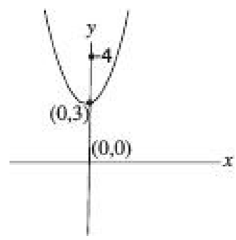
1. $V\left(-1, \frac{7}{3}\right)$, $F\left(-1, \frac{19}{12}\right)$, $y = \frac{37}{12}$, *lado recto* 3



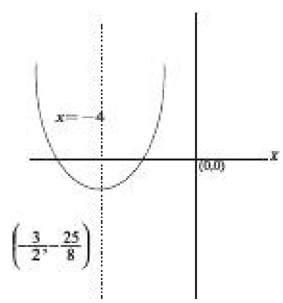
3. $V\ (-1,1)\ F\left(\frac{-7}{4},1\right), x=-\frac{1}{4}$



5. $V(0,3)$,$F(0,4)$,$y=2$ lado recto 4



7. $V\left(-\frac{3}{2},-\frac{25}{8}\right) F\left(-\frac{3}{2},-\frac{21}{8}\right) y=-\frac{29}{8},\quad 2$



2 9. $V(3.-2)\ \ y=-\frac{5}{4}$, lado recto 3, $x - 6x + 3y + 15 = 0$

4.4 Ejercicios

1. a. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

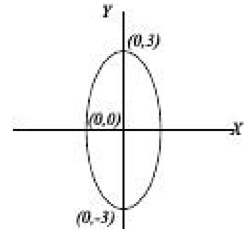
b. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{6}=1$

c. $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{9}=1$

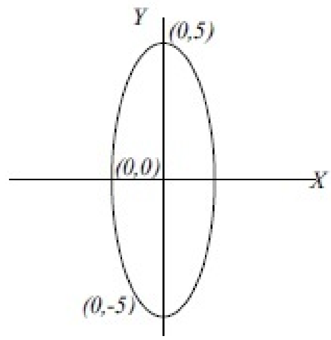
d. $\frac{x^2}{16}+\frac{4y^2}{39}=1$

5. a. $V(0,\pm 3)$, $F(0,\pm\sqrt{5})$, eje mayor = 6, eje menor = 4 lado recto

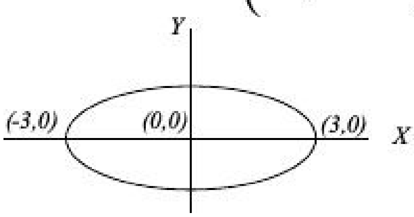
$=\frac{8}{3}$, $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$



b. $V(0, \pm 5)$, $F(0, \pm 3)$, eje mayor = 10, eje menor =8 lado recto $=\frac{32}{5}$, $e=\frac{3}{5}$



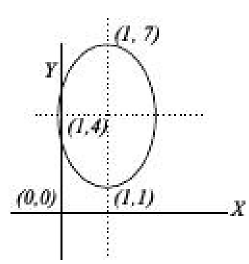
c. $V(\pm 3,0)$, $F\left(\pm\sqrt{\frac{45}{7}},0\right)$, eje mayor = 6, eje menor $=2\sqrt{\frac{18}{3}}$ lado recto $=\frac{36}{7}$, $e=\frac{\sqrt{\frac{45}{7}}}{3}$



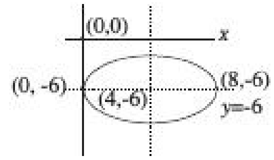
7. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

4.5 Ejercicios

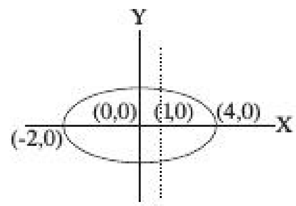
1. $\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{(y-4)^2}{9}=1$, focos (1, 3), (1, 5), eje mayor = 6, eje menor $=2\sqrt{8}$, lado recto $=\frac{16}{3}$



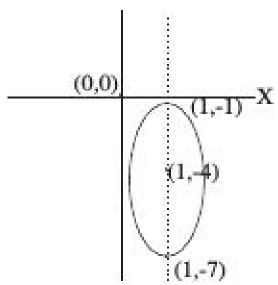
3. $\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y+6)}{9}=1$, focos $\left(4-\sqrt{7},-6\right)$, $\left(4+\sqrt{7},-6\right)$, excentricidad $=\frac{\sqrt{7}}{4}$



5 . $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-0)^2}{4}=1$, vértices (− 3, 0), (4, 0), focos $\left(1+\sqrt{5},0\right)$, $\left(1-\sqrt{5},\ 0\right)$, eje mayor =6, eje menor =4, lados rectos= $\frac{8}{3}$, excentricidad $=\frac{\sqrt{5}}{3}$



7. $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+4)^2}{9}=1$, vértices(1–1),(1–7), focos $\left(1,-4-\sqrt{5}\right)$, $\left(1,-4+\sqrt{5}\right)$, eje mayor=6, eje menor =4, lado recto $=\frac{8}{3}$ excentricidad $=\frac{\sqrt{5}}{3}$

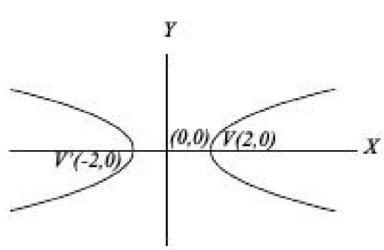


13. Vértices (–2,6),(–2,0) focos $(-2{,}3+\sqrt{3})$, $(-2{,}3-+\sqrt{3})$ eje mayor =6, eje menor $=2\sqrt{6}$, lado recto $=4$, $e=\frac{\sqrt{3}}{3}$

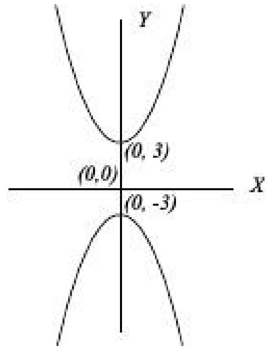
15. Vértices (-1, -1), (5, -1), focos $\left(2-\sqrt{3},-1\right)$, $\left(2+\sqrt{3},-1\right)$, eje mayor = 6, eje menor $=2\sqrt{6}$, lado recto $=4$, $e=\frac{\sqrt{3}}{3}$

4.6 Ejercicios

3. $V(\pm2,0)$, $F\left(\pm2\frac{\sqrt{10}}{3},0\right)$ eje transverso 4, eje conjugado $\frac{4}{3}$, $e=\frac{\sqrt{10}}{3}$, lado recto $\frac{4}{9}$



5. $V(0,\pm 3)$, $F\left(0,\pm\sqrt{14}\right)$, eje transverso 6, eje conjugado $2\sqrt{5}$, $e=\frac{\sqrt{14}}{3}$, lado recto $\frac{10}{3}$



7. $\frac{(y+4)^2}{4}-\frac{(x-3)^2}{5}=1$

9. $\frac{(x-1)2}{9}-\frac{(y-3)2}{25}=1$

11. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$

13. $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{20}=1$

4.7 Ejercicios

1. Utilizando el Teorema 2 se tiene $b^2 y^2 – a^2x^2=0$ de la cual se obtiene por diferencia de cuadrados, $by–ax=0$, $by+ax=0$

3. Los extremos del eje transverso son los puntos (0,±a) y los extremos del eje conjugado son $(\pm b,0)$, se forma el rectángulo con vértices (b,a),$(–b,a)$$(–b,–a)$,$(b,–a)$ las ecuaciones de las diagonales de este rectángulo forman las asíntotas.

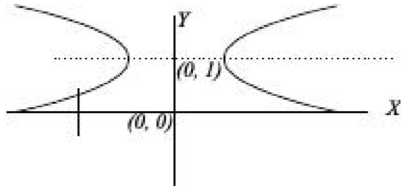
5. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ tiene eje transverso $=2(3)=6, \frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$ eje conjugado = 2(3) = 6.

4.8 Ejercicios

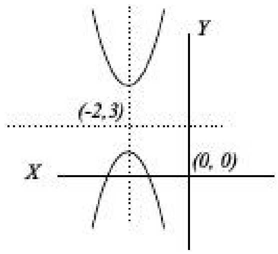
1. $\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{5}=1$

3. $\frac{4(x-2)^2}{9}-\frac{4(y+2)^2}{25}=1$

5. $\frac{(x-0)^2}{14}-\frac{(y-1)^2}{7}=1$, eje transverso =2a=2$\sqrt{14}$, eje conjugado 2(7) =2b=2$\sqrt{7}$, lado recto $\frac{2b^2}{a}=\frac{2(7)}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$, excentricidad $=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{14}}=\sqrt{\frac{21}{14}}$



7. $\frac{(y+2)^2}{5}-\frac{(x-3)^2}{6}=1$, eje transverso $=2\sqrt{5}$, eje conjugado $=2\sqrt{6}$, lado recto $=\frac{12}{\sqrt{5}}$, excentricidad $=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{11}{5}}$



4.9 Ejercicios adicionales

1. $(x-1)^2-4(y-0)^2=0$ no hay cónica

3. $\frac{9(x+3)^2}{68}+\frac{(y+2)^2}{17}=1$, elipse eje mayor $=2\sqrt{17}$, eje menor $=2\sqrt{7.56}$, lado recto $=\frac{15.12}{\sqrt{17}}$, excentricidad $=\frac{\sqrt{9.44}}{\sqrt{17}}$

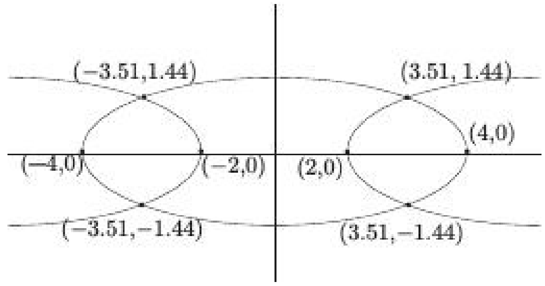
5. $36\left(y+\frac{1}{6}\right)^2-16(x-4)^2=1$, hipérbola centro $\left(4,-\frac{1}{6}\right)$, eje paralelo a Y, $e=\frac{\sqrt{13}}{2}$, eje transverso $=\frac{1}{3}$, eje conjugado $=\frac{1}{2}$, lado recto $=\frac{3}{4}$

7. $\frac{(y-6)^2}{4}-\frac{(x-5)^2}{12}=1$, eje transverso = 4, eje conjugado $=2\sqrt{12}$

9. $(x-3)^2=-8(y-5)$ 11. $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{16}=1$, vértices (0,3),(10,3) $e=\frac{3}{5}$

13. $(x+1)^2=-4(y-4)$

15. (±3,51,±1, 44)



Capítulo 5

5.1 Ejercicios

1. $f(0)=1$; $f(-1)=0$; $f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}+3$; $f(-x)=-x+1$

3. $\frac{f'(x+h)-f(x)}{h}=2x+h$

5. a. $(-\infty,\infty)$

   b. $(-\infty,\infty)$

   c. $\mathbb{R}\neq\{-1\}$

   d. $\mathbb{R}\neq\{-3,2\}$

   g. $\mathbb{R}\neq\{1-,-1\}$

   j. $(-\infty,\infty)$

7. a. $f(0)=1$

   c. $f(h)=h^2+3h+1$

   e. $f(x+h)=x^2+2xh+h^2+3x+3h+1$

9. $\frac{\sqrt{x}+h-\sqrt{x}}{h}$

10. a. $3=f(1)$

    b. $f(6)={}^1/_2$

    c. $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$

9. $\frac{-3}{x(x+h)}$

13. a. $Df{:}\mathbb{R}$

$Imf{:}\mathbb{R}^+$

b. $Df{:}\mathbb{R}$

$Imf{:}\mathbb{R}$

c. $Df{:}[-1,1]$

$Imf{:}[0,1]$

5.2 Ejercicios

1. a. Es función

   b. No es función

   c. Es función

   d. No es función

   e. No es función

   f. No es función

5. a. Par

   b. Impar

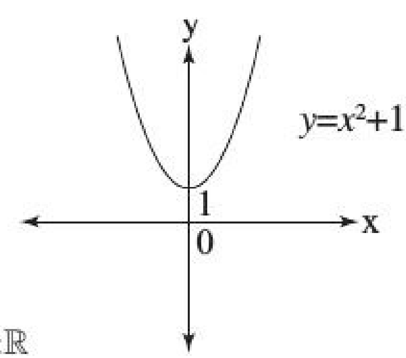
   c. Impar

   d. Par

   e. Par.

5.3 Ejercici

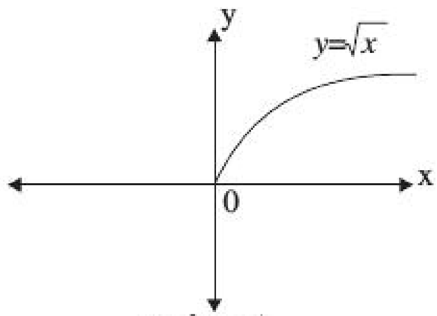
1. a



$Df{:}\mathbb{R}$

$Imgf{:}[1,\infty)$

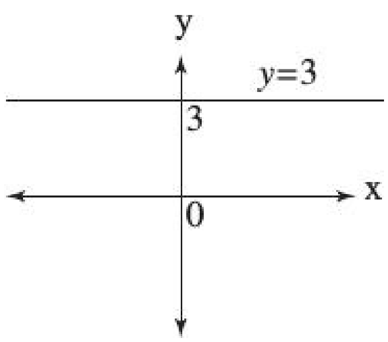
c.



Df:$[0,\infty)$

Imf:$[0,\infty)$

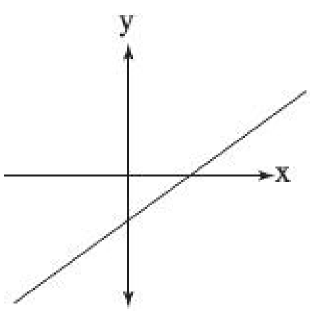
d.



Df:$\mathbb{R}$

Imf:$\{3\}$

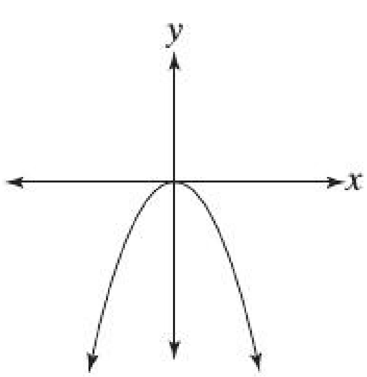
e. $y=x-1$



Df:$\mathbb{R}$

Imf:$\mathbb{R}$

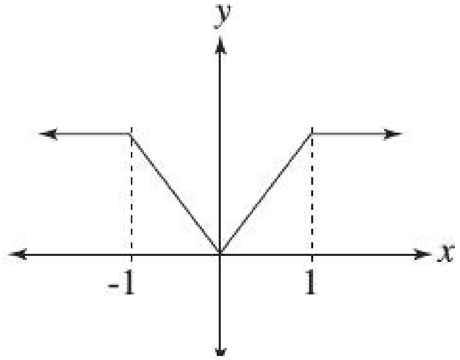
i.



Df:$\mathbb{R}$

Imf:$(-\infty,0]$

o.



$Df{:}\mathbb{R}$

$Imf{:}[0,1]$

3. b. Potencia

c. Racional

d. Polínomica

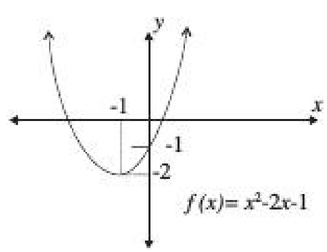
e. Racional

f. Racional

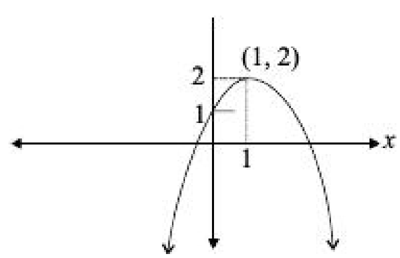
g. Radical

h. Polínamica

5. a. Vértice (-1, 2) es un mínimo; corta el eje y en -1.



c. Vértice (1, 2) es un máximo corta el eje y en 1.



7. a. $(f+g)(x)=3x^2+6x^3$; $(f-g)(x)=3x^2-6x^3-2$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{3x^2-1}{6x^3+1}$

b. Dominio de (f+g)(x) y (f–g)(x) los reales. Dominio de $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, los reales diferentes de $x=\frac{-1}{\sqrt[3]{6}}$

c. $(f+g)(2)=60\left(\frac{f}{g}\right)(2)=\frac{11}{49}$

9. a. $(f\circ g)(x)=2x+5$; $(g\circ f)(x)=2x+4$
$(g\circ g)(x)=4x+9$; $(g\circ g)(x)=x+2$

c. $(f\circ g)(x)=\sqrt{x^2-1}$; $(g\circ g)(x)=x-1$
$(f\circ f)(x)=\sqrt{\sqrt{x-1}-1}$; $(g\circ g)(x)=x^4$

11. a. $(f\circ g)(x)=2$; $(g\circ f)(2)=\sqrt{5}$; $(g\circ g)(3)=\sqrt[4]{3}$

5.4 Ejercicios

1. a. No es uno a uno

b. Si es uno a uno

c. Si es uno a uno

d. Si es uno a uno

e. No es uno a uno

3. a. No es uno a uno

b. Es uno a uno

c. No es uno a uno

d. No es uno a uno

e. Si es uno a uno

f. No es uno a uno

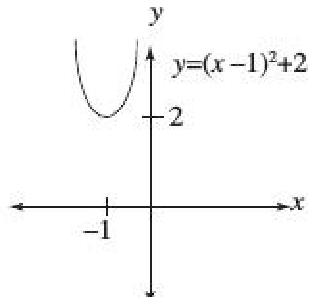
5. a. $(f\circ f^{-1})(x)=(\sqrt{x})^2=x$

b. $(f\circ f^{-1})(x)=\sqrt[3]{x^3}=x$

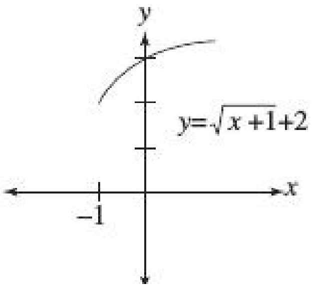
c. $(f\circ f^{-1})(x)=4\left[\frac{x+3}{4}\right]-3=x$

5.5 Ejercicios

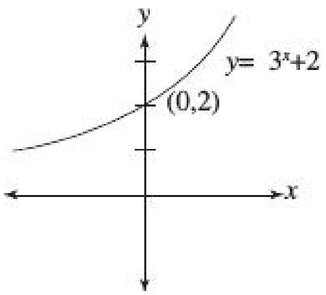
1.



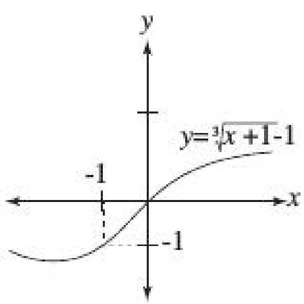
3.



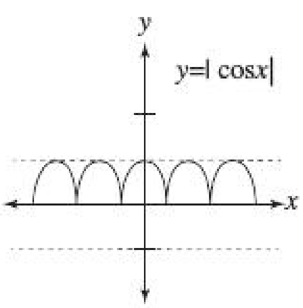
5.



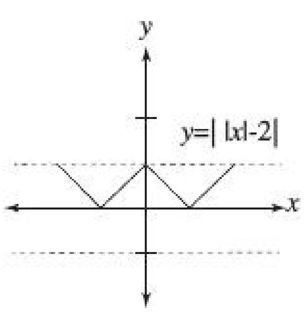
7.



9.



11.



5.6 Ejercicios

1. a. No es inyectiva

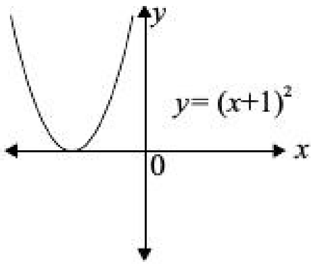
b. Es inyectiva.

c. No es inyectiva.

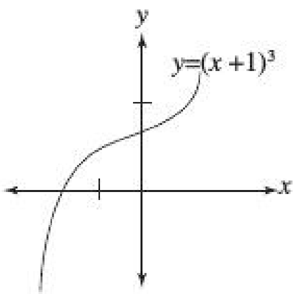
d. Si es inyectiva

e. No es inyectiva

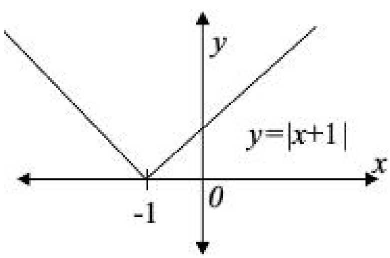
3. c.



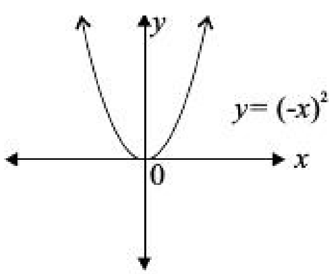
d.



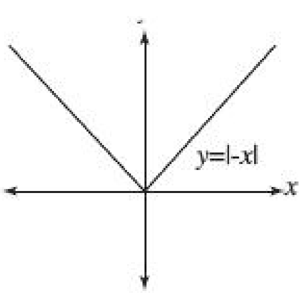
e.



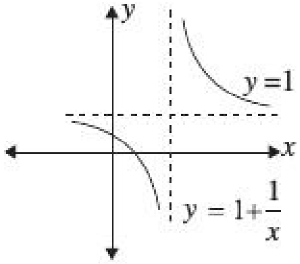
k.



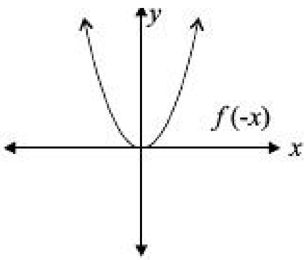
l.



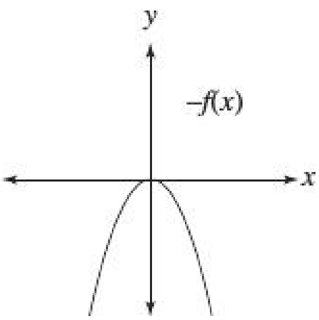
o.



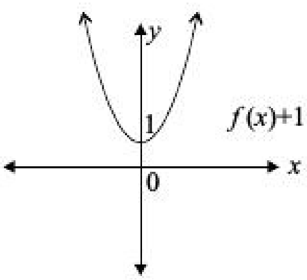
4. a.



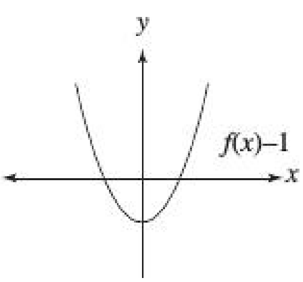
b.



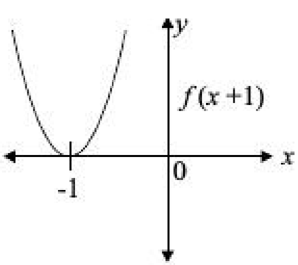
c.



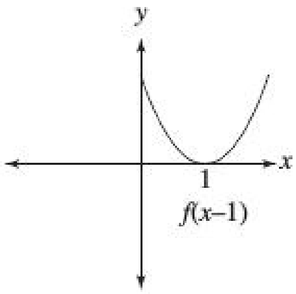
d.



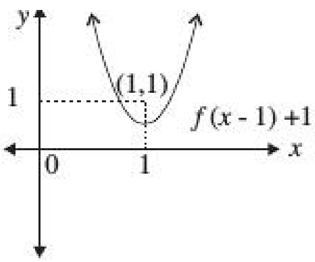
e.



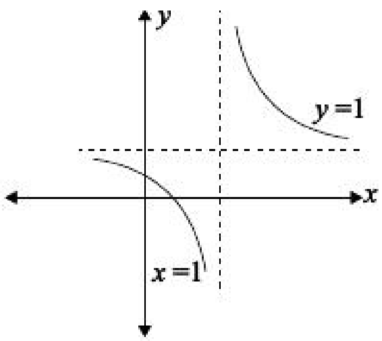
f.



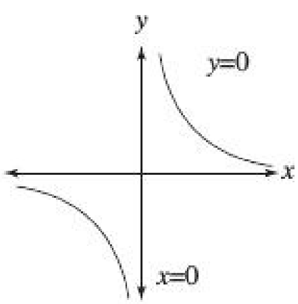
g.



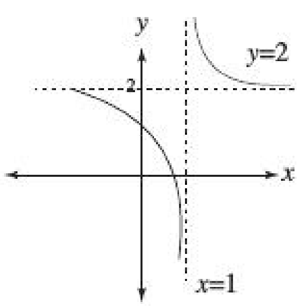
5. a.



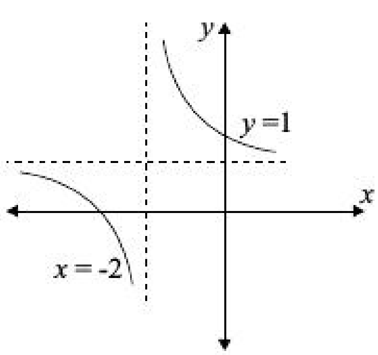
b.



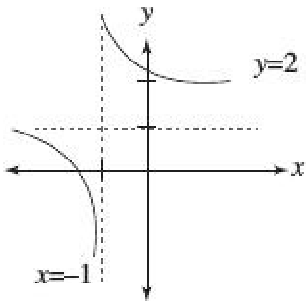
c.



d.



k.



5.7 Ejercicios

1. $V(x)=\frac{x^3}{12}$

3. $V(h)=\frac{16}{3}\pi h^3$

5. $A(x)=x^2\left(\frac{\pi}{4}+1\right)$

7. $A(x)=500x-x^2$

9. $P(x)=4x+2\sqrt{400-x^2}$

11. $S(y)=\frac{100}{y}+y$

13. $A(x)=\frac{x^2}{4}\sqrt{3}$

15. $A(x)=x^2+\frac{160}{x}$

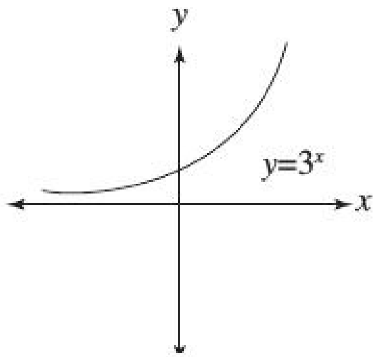
18. $V(x)=60x-32x^2+4x^3$

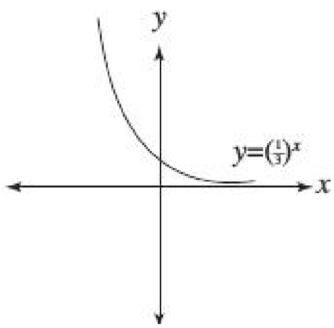
21. $A(x)150x-x^2$

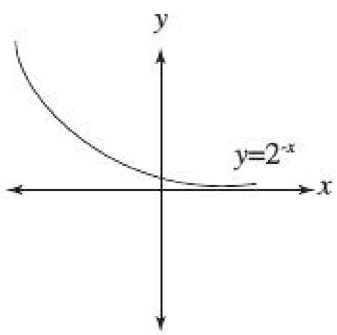
22. $A(x)=150x-\frac{x^2}{2}$

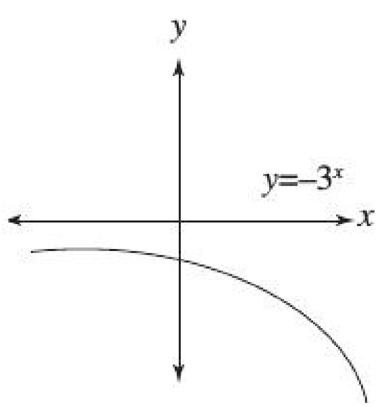
29. $P(x)=120-x^2$

5.8 Ejercicios

1. a. 

c. 

e. 

g. 

5.9 Ejercicios

1. a. $2^5=32$

b. $x^4=b$

c. $3^1=\frac{1}{9}$

d. $25^m=5$

e. $2^y=m+n$

f. $(m+n)^3=B$

g. $2^{a+b}=x$

h. $2^{(1/3)}=x$

3. a. $\ell og_a 4+\ell og_a x$

c. $\frac{1}{2}\ell og x$

d. $2\ell og x+\frac{1}{2}\ell og y$

e. $\frac{1}{3}\ell og_3(x^2+1)$

i. $\frac{1}{2}Ln x+2Ln y-Ln z-Ln N$

5. a. $\frac{Ln3}{Ln2}$

b. $\frac{Ln2}{Ln3}$

c. $\frac{Ln125}{Ln4}$

5.10 Ejercicios

1. a. $x=\frac{-3}{2}$

b. $x=3$

c. $x=4$

d. $x=0$

f. $x=\frac{Ln2}{2}$

i. $x=\frac{Ln7}{Ln5-Ln7}$

l. $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

5.11 Ejercicios

2. a. $x=4$

b. $x=3$ ó $x=-2$

c. $x=5$ ó $x=-2$

f. $x=-6$ ó $x=3$

h. $x=97$

i. $-2/5$

5.12 Ejercicios

1. a. $x=\ell og_5 3$

b. $x=Ln2$

c. $x=1$

3. a. $x = e - 2$

c. $x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

e. $x=1004$

5.13 Ejercicios

1. a. 21 años

b. Se duplica a los 7 años

3. $t=\dfrac{Ln\left(\dfrac{A}{P}\right)}{Ln\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^n}$

5. a. Los 9 años y medio

8. $t=\dfrac{Ln\left(\dfrac{T(t)-T_s}{h_0}\right)}{-k}$

9. a. 2´700.000 habitantes

b. 2´916.000 habitantes

c. 2´397.312.493 habitantes

d. $p=2´000.000\left(1+\frac{0.08}{n}\right)$

11. 6% anual

14. 10324.735 pesos en un año

15. 4% anual

Capítulo 6

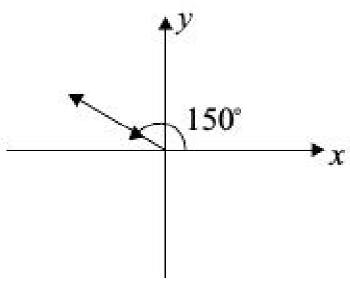
6.1 Ejercicios

1. a. $\frac{5\pi}{6}$

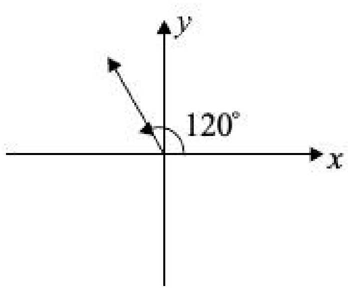
   b. $\frac{7\pi}{6}$

   c. $-\frac{7\pi}{6}$

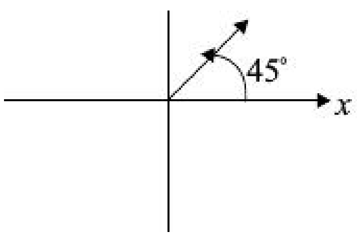
3. a.



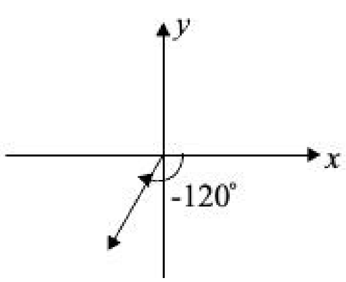
   b.



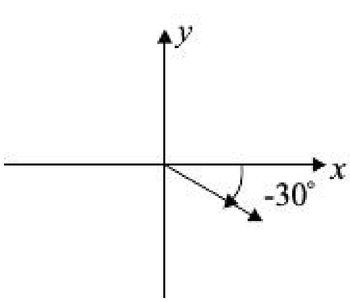
   c.

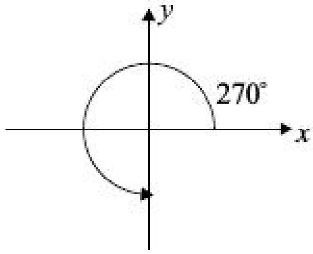


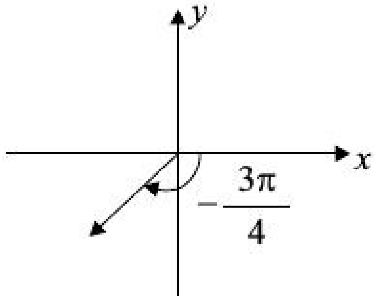
   d.

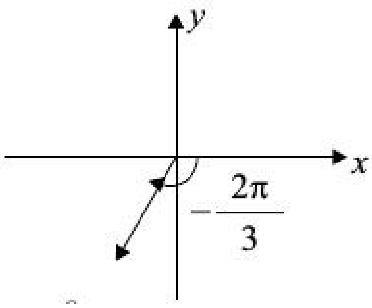


   e.



f. 

h. 

k. 

5. $\theta = \frac{1}{5}$

7. $S=\pi$ cms

9. $\alpha = \frac{6}{\pi}$

11. $\theta = \frac{1}{5}$ radianes

13. $S=10\pi$ cms.

15. b. Ángulo agudo

d. Ángulo obtuso

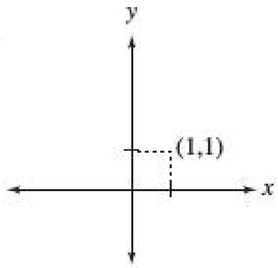
f. Ángulo obtuso

i. Ángulo agudo

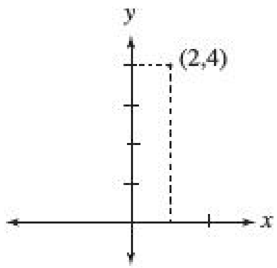
k. Ángulo obtuso

6.2 Ejercicios

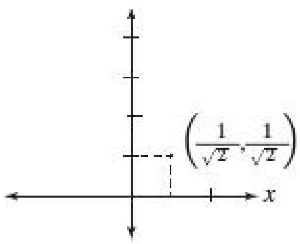
1. a.



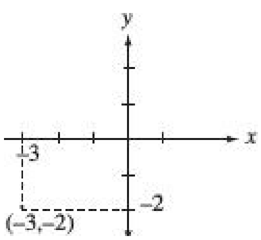
c.



f.



h.



6.3 Ejercicios

1. $Sen\theta= \frac{3}{5}$; $Tan\theta= \frac{3}{4}$; $Cot\theta= \frac{4}{3}$; $Sec\theta= \frac{5}{4}$; $Cosc\theta= \frac{5}{3}$

3. $Cosc\theta= \frac{15}{17}$; $Tan\theta= \frac{8}{15}$;

5. $Sen\theta= \frac{3}{5}$; $Cos\theta= \frac{4}{5}$;

9. $Sen\theta=\frac{3}{\sqrt{13}}$, $Cos\theta=\frac{2}{\sqrt{13}}$, $Cotg\theta= \frac{2}{3}$, $Sec\theta=\frac{\sqrt{13}}{2}$, $Cosc\theta=\frac{\sqrt{13}}{3}$

11. $SenA=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $CosA=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $CotA= \frac{1}{x}$, $SecA=\sqrt{x^2+1}$, $CoscA=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

13.

Ángu-lo	$Sen\theta$	$Cos\theta$	$Tan\theta$	$Cotg\theta$	$Sec\theta$	$Cosc\theta$
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{13}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

15. a. Para α

$Cos\alpha=\frac{3}{4}$ $\quad$ $Sen\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$ $\quad$ $Tan\alpha=\frac{\sqrt{7}}{3}$

$Sec\alpha=\frac{4}{3}$ $\quad$ $Cosc\alpha=\frac{4}{\sqrt{7}}$ $\quad$ $Cot\alpha=\frac{3}{\sqrt{7}}$

Para θ

$Cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$ $\quad$ $Sen\theta=\frac{3}{4}$ $\quad$ $Tan\theta=\frac{3}{\sqrt{7}}$

$Sec\theta=\frac{4}{\sqrt{7}}$

$Cosc\theta=\frac{4}{3}$ $\quad$ $Cot\theta=\frac{\sqrt{7}}{3}$

b. Para α

$Sen\alpha=\frac{b}{a}$ $\quad$ $Cos\alpha=\frac{c}{a}$ $\quad$ $Tan\alpha=\frac{b}{c}$

$Cosc\alpha=\frac{a}{b}$

$Sec\alpha=\frac{a}{c}$ $\quad$ $Cot\alpha=\frac{c}{b}$

Para θ

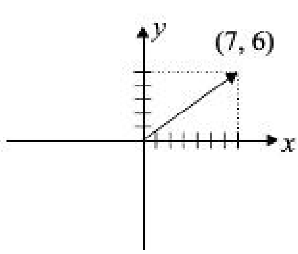
$Sen\theta=\frac{c}{a}$ $\quad$ $Cos\theta=\frac{b}{a}$ $\quad$ $Tan\theta=\frac{c}{b}$

$Cosc\theta=\frac{a}{c}$

$Sec\theta=\frac{a}{b}$ $\quad$ $Cot\theta=\frac{b}{c}$

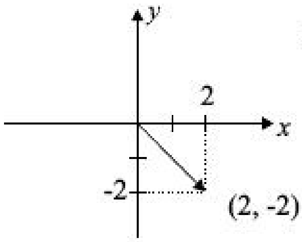
6.4 Ejercicios

1. a.



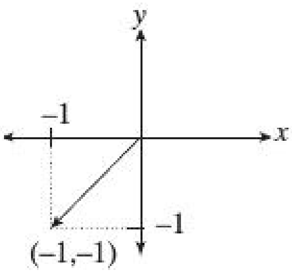
$d=\sqrt{85}$

c.



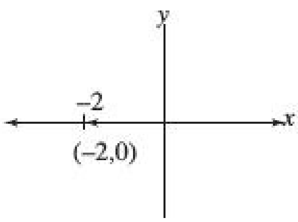
$d = 2\sqrt{2}$

e.



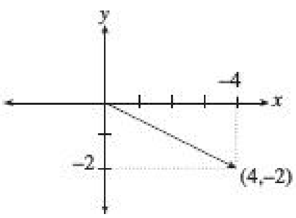
$d = \sqrt{2}$

g.



$d = 2$

i.



$d = 2\sqrt{5}$

5. $Tan\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $Cot\,\theta = \sqrt{3}$; $Sec\,\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $Cosc\,\theta = 2$

7. a. $Sen\,\theta = \frac{12}{15}$; $Cos\,\theta = \frac{9}{15}$; $Tan\,\theta = \frac{12}{9}$; $Cot\,\theta = \frac{9}{12}$; $Sec\,\theta = \frac{15}{9}$

c. $Sen\,\theta = \frac{4}{5}$; $Cosc\,\theta = \frac{5}{4}$; $Tan\,\theta = \frac{4}{3}$; $Cot\theta\frac{3}{4}$; $Cos\pi\frac{3}{5}$

d. $Cos\,\theta = \frac{4}{5}$; $Tan\,\theta = \frac{3}{4}$; $Cot\,\theta = \frac{4}{3}$; $Sec\,\theta = \frac{5}{4}$; $Cosc\,\theta = \frac{5}{3}$

f. $Sen\,\theta = \frac{21}{29}$; $Cos\,\theta = \frac{20}{29}$; $Sec\,\theta = \frac{29}{20}$; $Cosc\,\theta = \frac{29}{21}$; $Cot\,\theta = \frac{20}{21}$

9. a. 1

b. $= \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

c. 1

e. 12

i. $= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

j. $=\dfrac{\sqrt{3}\;+2}{2}$

k. $=\dfrac{3}{2}$

o. 0

6.5 Ejercicios

1. a. 43 *mts*

3. 22,6 *mts*

5. 39,8 *grados*

7. 32,96 *mts*

9. Área: 1098 cm^2 perímetro: 156,8 *cm*

6.6 Ejercicios

1. a. a = 12.65 ; b = 29.8 ; A = 23°

b. a = 32.26; b=47.3; A = 47°

e. a = 15.58 ; b = 9 ; A = 30°

f. c = 17.49 ; A = 31° ; B = 59°

g. a = 15.41; A = 58.8° ; B = 31.2°

3. La distancia del barco al faro es de 495 pies.

5. a. La distancia hacia el Norte es de 245 *m*.

b. La distancia hacia el Este es de 205 *m*.

7. a. La magnitud del vector resultante es $|R|$ = 26.62 . b. θ = 55.7°

9. a. La velocidad resultante es 403.11*km/h*.

b. La dirección del avión es de 7.12°.

11. El ángulo $\angle BAC$ es de 148.54 .

13. La distancia de cada orificio de la placa es de 8.22 *cm*.

15. La distancia del cable es de 214.21 *mts*.

17. La distancia $\overline{AB}$ =1529.37 *mts*.

19. x= 4.29 *mts*.

21. La longitud del frente del armario es de 1.76 *mts*.

23. *BC*=252*mts* cometas de 287 pies

25. *d*=68.8*mts*

27. La distancia entre las

6.7 Ejercicios

1. $Sec^2\theta+Csc^2\theta=\frac{1}{Csc^2\theta}+\frac{1}{Sen^2\theta}=\frac{Sen^2\theta+Csc^2\theta}{Csc^2\theta\cdot Sen^2\theta}=\frac{1}{Csc^2\theta\cdot Sen^2\theta}$

   $=Sec^2\theta\cdot Csc^2\theta$

3. $\frac{Senx}{1+Cosx}+\frac{1+Cosx}{Senx}=\frac{Sen^2x+1+2Cosx+Cos^2x}{(1+Cosx)\cdot Senx}=\frac{2(1+Cosx)}{(1+Cosx)Senx}=\frac{2}{Senx}$

   $=2Coscx$

15. a. $\frac{1}{2}[Sen(70°)+Sen(10°)]$

    b. $\frac{1}{2}[Sen(165°)-Sen(55°)]$

    c. $\frac{1}{2}[Cos(80°)+Cos(60°)]$

    d. $\frac{1}{2}[Cos(15°)-Cos(140°)]$

17. $2Sen(45°)\cdot Cos(15°)=2\left[\frac{1}{2}(Sen60+Sen30)\right]=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$

19. a. $Sen(15°)=\pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$ $\frac{1}{2}$

    b. $Cos(15°)=\pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

21. a. $2Sen\left(\frac{7x}{2}\right)+Cos\left(\frac{x}{2}\right)$

    b. 2*Sen*(4*x*)Cos(2*x*)

    c. $2Cos\left(\frac{3x}{2}\right)+Cos\left(\frac{-x}{2}\right)$

    d. 2*Cos*(*t*)+*Cos*(3*t*)

6.8 Ejercicios

1. a. $Senx \cdot Secx = Senx\left(\frac{1}{Cosx}\right) = \frac{Senx}{Cosx} = Tanx$

d. $\frac{Senx+Cosx}{Senx} = \frac{Senx}{Senx} + \frac{Cosx}{Senx} = 1 + Cotx$

e. $\frac{Cosx}{Cotx} = \frac{Cosx}{\left(\frac{Cosx}{Senx}\right)} = \frac{Senx \cdot Cosx}{Cosx} = Senx$

h. $Secx(1-Sen^2x) = \left(\frac{1}{Cosx}\right)Cos^2x = Cosx$

j. $\frac{1}{1-Sen^2x} = \frac{1}{Cos^2x} = Sec^2x = 1+Tan^2x$

l. $Senx \cdot Secx \cdot Cotx = Senx\left(\frac{1}{Cosx}\right)\left(\frac{Cosx}{Senx}\right) = 1$

p. $(1-Sen^2x)(1+Tan^2x) = Cos^2x \cdot Sec^2x = Cos^2x\left(\frac{1}{Cos^2x}\right) = 1$

3. a. *Sen*(45°+*x*)–*Sen*(45°–*x*)

$$= (Sen45°Cosx+Cos45°Senx)-(Sen45°Cosx-Cos45°Senx)$$
$$= Sen45°Cosx+Cos45°Senx-Sen45°Cosx+Cos45°Senx$$
$$= 2Cos45°Senx = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)Senx - \sqrt{2}Senx$$

b. *Sen*(30°+*x*)+*Cos*(60°+*x*)

$$= Sen30°Cosx+Cos30°Senx+Cos60°Cosx-Sen60°Senx$$
$$= Sen45°Cosx+Cos45°Senx-Sen45°Cosx+Cos45°Senx$$
$$= \frac{1}{2}Cos+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Senx+\frac{1}{2}Cos-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Senx = Cosx$$

5. 2 *Sen*45°· *Cos*15°

$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(Cos(45°-30)\right)$$
$$= \sqrt{2}\left[Cos45° \cdot Cos30+Sen45°Sen30°\right]$$
$$= \sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{1}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$$

7. $\frac{Cos50°-Cos40°}{Cos35°-Cos25°} = \frac{-2Sen(45°)Sen(5)}{-2Sen(60°)Sen(5)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

9. a. 180°

b. 60°

c. 90°

d. –45° e. –30°

f. $\frac{1}{2}$

g. $-\frac{\pi}{4}$

11. a. $X=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ para $k\in\mathcal{Z}$

$X=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ para $k\in\mathcal{Z}$

b. $X=\frac{\pi}{12}+2k\pi$ para $k\in\mathcal{Z}$

c. $\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi \end{cases}$ para $k\in\mathcal{Z}$

d. $\begin{cases} x=0+2k\pi \\ x=\pi+2k\pi \end{cases}$ para $k\in\mathcal{Z}$

f. $\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \\ x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi \end{cases}$ para $k\in\mathcal{Z}$

h. $\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \\ x=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi \\ x=0+2k\pi \\ x=\pi+2k\pi \end{cases}$ para $k\in\mathcal{Z}$

i. $\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi \\ x=\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi \\ x=\dfrac{11\pi}{6}+2k\pi \end{cases}$ para $k\in\mathcal{Z}$

n. $\begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \\ x=-\dfrac{7\pi}{2}+2k\pi \end{cases}$ para $k\in\mathcal{Z}$

Índice temático

A

C

D

E

F

G

H

I

L

M

N

P

R

S

T

V

Acerca de los autores

Lucio Rojas Cortés

Licenciado en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Bogotá), especialista en Gerencia de Costos de la Universidad Central y magíster en Matemática Aplicada de la Universidad EAFIT (Medellín). Ha sido docente de Matemáticas en la Universidad de los Andes, Pontificia Universidad Javeriana, Universidad Libre, Universidad Manuela Beltrán y Universidad Nacional Abierta y a Distancia (UNAD). En la actualidad es docente de la Universidad Militar Nueva Granada y la Universidad Central.

Arturo Ramírez Baracaldo

Matemático de la Universidad Nacional de Colombia y especialista en Docencia Universitaria de la Universidad Santo Tomás (Bogotá). Ha sido director del Departamento de Matemáticas de la Universidad Militar Nueva Granada y docente de Matemáticas en la Universidad Santo Tomás, Universidad de La Salle, Universidad de América y Universidad Católica de Colombia. En la actualidad está vinculado a la Universidad Libre y a la Universidad Militar Nueva Granada, donde es codirector de proyectos de grado en Ingeniería Industrial.

Luis Enrique Rojas Cárdenas

Licenciado en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, magíster en Evaluación en Educación de la Universidad Santo Tomás y candidato a Ph. D en Educación de la misma universidad. Ha sido docente de Matemáticas en la Pontificia Universidad Javeriana, Universidad Pedagógica Nacional, Universidad Sergio Arboleda, Universidad de la Salle, Universidad Libre y Fundación Universitaria Konrad Lorenz. También ha realizado ponencias a nivel nacional e internacional sobre competencias en educación superior. Actualmente está vinculado a la Universidad Militar Nueva Granada y la Universidad Central.

Sistema de Información en Línea

www.ecoeediciones.com

Bienvenido

Estimado lector, en esta página se encuentra el serial de registro al **Sistema de Información en Línea (SIL)** de Ecoe Ediciones.

Si ingresa al sistema usted podrá:

- Obtener información adicional sobre los libros adquiridos de nuestro fondo.
- Consultar y descargar actualizaciones permanentes de los textos.

Instrucciones para registrarse en el Sistema de Información en Línea - SIL - de Ecoe Ediciones.

1. Ingrese a www.ecoeediciones.com y haga clic en - SIL-
2. Regístrese en el SIL completando la información solicitada.
3. El sistema le enviará un correo electrónico para que confirme su registro.
4. Una vez registrado, el usuario siempre será su e-mail y tenga en cuenta la clave de acceso para futuras consultas. Solo puede registrarse una vez.

Serial de registro:

EBPOD-0069

MATEMÁTICAS BÁSICAS
Con aplicaciones a la Ingeniería

Los estudiantes de programas de Ingeniería requieren de una sólida formación en Matemáticas básicas como preámbulo a las asignaturas de Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Ecuaciones Diferenciales, Álgebra Lineal y Cálculo Vectorial, las cuales les darán las herramientas suficientes para aplicarlas en proyectos propios de la disciplina.

Incluye

- Geometría euclidiana: líneas, ángulos, triángulos y volúmenes.
- Geometría analítica: parábolas, elipses e hipérbolas.
- Funciones: funciones inversas, modelos funcionales, funciones exponenciales y funciones logarítmicas.
- Trigonometría: relaciones, funciones, identidades y ecuaciones trigonométricas.

Este texto, elaborado a partir de la revisión de un gran número de cursos de Matemáticas en programas de Ingeniería, cubre los prerrequisitos necesarios para estudiantes de primer semestre. El texto maneja expresiones y ecuaciones algebraicas, plano cartesiano, recta, circunferencia, geometría euclidiana, geometría analítica, funciones y trigonometría. Los autores utilizan una metodología didáctica que invita al aprendizaje autónomo.

Matemáticas básicas con aplicaciones a la ingeniería está dirigido a estudiantes de cursos de Matemáticas en los primeros semestres de programas de Ingeniería. También es útil para cursos preuniversitarios de ingeniería, cursos de nivelación en matemáticas básicas y, en general, todo profesional interesado en recordar conceptos previos al cálculo.

Colección: Ciencias básicas
Área: Matemáticas

ECOE EDICIONES

www.ecoeediciones.com

e-ISBN 978-958-771-363-3