Matemática Discreta – MA265
Talle Virtual N°1 – Semana 02

Primera parte:

Tema: Sucesiones recurrentes

1. Determine la fórmula explícita de las siguientes sucesiones:

b) $a_n = 2{,}5a_{n-1}$, si $n \geq 2$, con $a_1 = 2$

Sol :

USANDO EL MÉTODO DEL ANÁLISIS RECURSIVO

- $a_2 = 2{,}5 \cdot a_1 = (2{,}5)^1 \cdot a_1$
- $a_3 = 2{,}5 \cdot a_2 = 2{,}5 \cdot (2{,}5 \cdot a_1) = (2{,}5)^2 \cdot a_1$
- $a_4 = 2{,}5 \cdot a_3 = 2{,}5 \cdot ((2{,}5)^2 \cdot a_1) = (2{,}5)^3 \cdot a_1$

$\vdots$

- $a_n = (2{,}5)^{n-1} \cdot a_1 , \quad \forall n \geq 1$

USANDO LA CONDICIÓN:

$$\boxed{a_n = (2{,}5)^{n-1} \cdot 2 \quad \forall n \geq 1}$$

* Halla a_4

$$a_4 = (2{,}5)^{4-1} \cdot 2$$
$$a_4 = (2{,}5)^{3} \cdot 2$$

a) Progresión aritmética: La siguiente sucesión $\{a_n\}$ denota una progresión aritmética:

$$a_n = a_{n-1} + d,$$

Note que es una relación de recurrencia, ya que depende de un término anterior. Podemos expresar en su forma explícita a dicha sucesión:

$$a_n = a_0 + nd$$

Los términos en esta forma están dados de manera explícita. Solo faltará conocer el término inicial a_0.

b) Progresión geométrica: La siguiente sucesión $\{a_n\}$ denota una progresión geométrica:

$$a_n = r \times a_{n-1}$$

Note que es una relación de recurrencia, ya que depende de un término anterior. Podemos expresar en su forma explícita a dicha sucesión:

$$a_n = a_0 \times r^n$$

Los términos en esta forma están dados de forma explícita. Solo faltará conocer el término inicial a_0.

2. Determine la fórmula explícita de las siguientes sucesiones:

d) $a_n = a_{n-1} - 0.7$, si $n \geq 2$, con $a_1 = -2$

Sol:

USANDO MÉTODO DEL ANÁLISIS RECURSIVO:

-1

- $a_2 = a_1 - 0{,}7 \qquad = a_1 - 1(0{,}7)$
- $a_3 = a_2 - 0{,}7 = a_1 - 0{,}7 - 0{,}7 = a_1 - 2(0{,}7)$
- $a_4 = a_3 - 0{,}7 = a_1 - 2(0{,}7) - 0{,}7 = a_1 - 3(0{,}7)$

$\vdots$

- $a_n = a_1 - (n-1)(0{,}7)$

USANDO CONDICIÓN:

$$\boxed{a_n = -2 - 0{,}7(n-1)}$$

5. Determine la fórmula explícita para el término enésimo de una sucesión que está definida por la regla:

$a_0 = 3,\ a_1 = 6,\ a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}\ para\ n \geq 2.$

Sol:

RELACIÓN DE RECURRENCIA LINEAL HOMOGENEA DE ORDEN 2

* REEMPLAZAMOS

$$a_n = t^n$$

$$\Rightarrow t^n = 4t^{n-1} - 3t^{n-2} \ \ldots\ldots (\times t^{-n+2})$$

$$\Rightarrow t^2 = 4t^1 - 3t^0$$

$n-2=0$, $n=2$

$$\Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$$

$t \quad -3 \to -3t\ +$

$t \quad -1 \to -1t$

$-4t$ ✓

$$\Rightarrow \underbrace{(t-3)}_{=0}\underbrace{(t-1)}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow t = 3 \ \vee\ t = 1$$

DOS RAICES DIF: 1, 3

Si tiene dos raíces reales distintas s_1 y s_2, entonces la fórmula explícita es

$$a_n = \alpha(s_1)^n + \beta(s_2)^n$$

$$\boxed{a_n = \alpha(1)^n + \beta(3)^n}$$

$\forall n \geq 1$

$a_0 = 3,\ a_1 = 6$

USANDO CONDICIONES INICIALES: $a_n = \alpha(1)^n + \beta(3)^n$

- $a_0 = 3 \to \alpha.(1)^0 + \beta(3)^0 = 3 \to \alpha + \beta = 3$
- $a_1 = 6 \to \alpha.(1)^1 + \beta(3)^1 = 6 \to \alpha + 3\beta = 6$

$$\alpha = \frac{3}{2},\ \beta = \frac{3}{2}$$

REEMPLAZANDO:

$$\boxed{a_n = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}(3)^n, \quad \forall n \geq 0}$$

8. Determine la fórmula explícita de las siguientes sucesiones:

a. $a_0 = 2, a_1 = 6, a_n = 4\,a_{n-1} - 4a_{n-2}$ *para* $n \geq 2$

Sol:

RELACIÓN DE RECURRENCIA LINEAL HOMOGENEA DE ORDEN 2:

* REEMPLAZAMOS: $a_n = r^n$

$\Rightarrow r^n = 4r^{n-1} - 4r^{n-2}$ ... $n=2$

$r^2 = 4r^1 - 4.\cancel{r^0}^{1}$

$r^2 = 4r - 4$

$\Rightarrow r^2 - 4r + 4 = 0$

$r \quad -2 \to -2r +$

$r \quad -2 \to -2r$

$-4r$ ✓

$\Rightarrow \underbrace{(r-2)}_{=0}\underbrace{(r-2)}_{=0} = 0$

$\Rightarrow r = 2 \vee r = 2$ 2 RAICES IGUALES: $\underline{\underline{2}}$

Si tiene dos raíces iguales s, entonces la fórmula explícita es

- $a_n = \alpha(s)^n + \beta n(s)^n$

$$\boxed{a_n = \alpha(2)^n + \beta.n.(2)^n}$$

$a_0 = 2, a_1 = 6$

*USANDO LAS CONDICIONES: $\boxed{a_n = \alpha(2)^n + \beta.n.(2)^n}$

- $a_0 = 2 \to \alpha\,\cancel{(2)^0}^{1} + \beta.0.\cancel{(2)^0} = 2 \to \alpha = 2$
- $a_1 = 6 \to \alpha(2)^1 + \beta.1.(2)^1 = 6 \to \underbrace{2\alpha}_{} + 2\beta = 6$

$4 + 2\beta = 6 \to \beta = 1$

*REEMPLAZANDO:

$$\boxed{a_n = 2(2)^n + 1.n.(2)^n \quad \forall\, n \geq 0}$$

1. Determine la fórmula explícita de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = 3a_{n-1}$, si $n \geq 2$, con $a_1 = 2$

Sol:

UTILIZANDO MÉTODO DEL ANÁLISIS RECURSIVO: (a_1)

-1

- $a_2 = 3a_1 = 3^1 \cdot a_1$
- $a_3 = 3a_2 = 3(3a_1) = 3^2 \cdot a_1$
- $a_4 = 3a_3 = 3(3^2 a_1) = 3^3 \cdot a_1$

$\vdots$

- $a_n = 3^{n-1} \cdot a_1, \quad \forall n \geq 1$

UTILIZANDO CONDICIÓN INICIAL:

$$\boxed{a_n = 2 \cdot 3^{n-1}, \quad \forall n \geq 1}$$

* $a_6 = 2 \cdot 3^5$

* $a_5 = 2 \cdot 3^4$

Una sucesión de recurrencia está definida como $a_n = 8a_{n-1} - 12a_{n-2}$, $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$.

Sol:

RELACIÓN DE RECURRENCIA LINEAL HOMOGENEA DE ORDEN 2:

*REEMPLAZAR: $a_n = t^n$

$$\Rightarrow t^n = 8t^{n-1} - 12t^{n-2} \quad \ldots \quad n = 2$$

$$t^2 = 8t^1 - 12t^0$$

$$t^2 - 8t + 12 = 0$$

$t \quad -6 \to -6t$

$t \quad -2 \to -2t$

$-8t$ ✓

$$\Rightarrow \underbrace{(t-6)}\cdot\underbrace{(t-2)} = 0$$

$t = 6 \lor t = 2$ DOS RAÍCES DIF. $\{2, 6$

Si tiene dos raíces reales distintas s_1 y s_2, entonces la fórmula explícita es

$$a_n = \alpha(s_1)^n + \beta(s_2)^n$$

$$\Rightarrow a_n = \alpha(2)^n + \beta(6)^n, \; \forall n \geq 0$$

$a_0 = 1$, $a_1 = 3$.

* USANDO CONDICIONES INICIALES $a_n = \alpha(2)^n + \beta(6)^n$

- $a_0 = 1 \to \alpha(2)^0 + \beta(6)^0 = 1 \to \alpha + \beta = 1$
- $a_1 = 3 \to \alpha(2)^1 + \beta(6)^1 = 3 \to 2\alpha + 6\beta = 3$

$\alpha = \frac{3}{4}, \beta = \frac{1}{4}$

* REEMPLAZANDO:

$$\boxed{a_n = \frac{3}{4}(2)^n + \frac{1}{4}(6)^n, \; \forall n \geq 0}$$