2. Sucesiones y series de funciones.

2.1. Convergencia puntual y uniforme de sucesiones funcionales

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y supongamos que para toda $n \in \mathbb{N}$ existe la función $f_n : A \to \mathbb{R}$. Se dice entonces que $\{f_n\}$ es una sucesión funcional de A en $\mathbb{R}$. Para toda $x \in A$, la sucesión funcional da lugar a una sucesión numérica $\{f_n(x)\}$. Esta sucesión numérica puede converger para algunos valores de A, y diverger para otros.

Definición 2.1. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión funcional de $A \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, sea $A_0 \subseteq A$ y sea $f : A_0 \to \mathbb{R}$. Se dice que la sucesión funcional f_n converge puntualmente a f en A_0 si para cada $x \in A_0$ la sucesión numérica $\{f_n(x)\}$ converge al valor $f(x) \in \mathbb{R}$. Para simbolizar que f_n converge puntualmente a f es A_0 escribimos*

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \textit{en } A_0$$

o

$$f_n \to f \quad \textit{en } A_0$$

El conjunto A_0 de todas las $x \in A$ para los cuales las $f_n(x)$ converge y se denomina dominio de la convergencia puntual.
Una definición equivalente de convergencia puntual puede enunciarse haciendo uso de la definición de convergencia de una sucesión numérica así:

Definición 2.2. *$\{f_n\}$ converge puntualmente a $f(x)$ en A_0 si $\forall\, \epsilon > 0$ y $\forall\, x \in A_0$, $\exists \mathbb{N}(\epsilon, x) \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n > N$*

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Ejemplo 2.1.

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}, \quad A = \mathbb{R}$$

como $|\sin nx| \le 1$ para cada $x \in \mathbb{R}$ se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = 0,$$

entonces $f(x) \equiv 0$ y $A_0 = \mathbb{R}$. Por tanto, $f_n(x) \to f(x)$ en $\mathbb{R}$

Ejemplo 2.2. *$f_n(x) = x^n$, $A = \mathbb{R}$ entonces*

$$\begin{aligned} f_n(x) &\to 0 & |x| &< 1, \\ f_n(x) &\to 1 & x &= 1, \\ f_n(x) &\ \textit{diverge} & |x| &> 1,, \\ f_n(x) &\ \textit{diverge} & x &= -1. \end{aligned}$$

de tal manera que $A_0 = (-1, 1]$ y

$$f(x) = \begin{cases} 0 & |x| < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Ejemplo 2.3.

$$f_n(x) = \frac{x}{n}, \quad A = \mathbb{R}$$

Si $x = 0$*,* $f_n(0) = 0 \to 0$*. Si* $x \neq 0$*,* $f_n(x) = x/n \to 0$*. Así* $A_0 = A = \mathbb{R}$ *y* $f(x) \equiv 0$*.*

En el ejemplo anterior tenemos una sucesión funcional de funciones continuas que converge puntualmente a una función continua.

Ejemplo 2.4.

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}, \quad A = \mathbb{R}^+.$$

Para $x = 0$*,* $f_n(0) = 0 \to 0$*. Para* $x > 0$*,*

$$f_n(x) = \frac{n}{1/x + n} = \frac{1}{\frac{1}{nx} + 1} = 1$$

así $A_0 = A$ *y*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

En el ejemplo anterior tenemos una sucesión de funciones continuas que converge puntualmente a una fución discontinua.

Ejemplo 2.5.

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}, \quad A = \mathbb{R}$$

Para $|x| < 1$*,* $f_n(x) \to 0$*.*
Para $|x| > 1$*,*

$$f_n(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^n + x^n} \to 0.$$

Para $x = 1$*,* $f_n(1) = 1/2 \to 1/2$*.*
Para $x = -1$*,* $f_n(-1)$ *diverge. Así* $A_0 = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ *y*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & |x| \neq 1 \\ 1/2 & x = 1 \end{cases}$$

El concepto de convergencia uniforme, permite garantizar el paso de algunas propiedades de las funciones que forman la sucesión a la función límite.

Definición 2.3. ***Convergencia uniforme*** *La sucesión funcional* $\{f_n\}$ *definida en* $A \subseteq \mathbb{R}$ *converge uniformemente en* $A_0 \subseteq A$ *a la función* $f : A_0 \to \mathbb{R}$ *si para todo* $\epsilon > 0$ $\exists$ $N(\epsilon)$ *tal que para todo* $n > N(\epsilon)$ *y todo* $x \in A_0$

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Notación: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *en* A_0

La diferencia entre convergencia puntual y uniforme estriba en que para la puntual $\exists$ N para cada ϵ y cada x y en la uniforme para cada ϵ existe un único N válido para todos los x de A_0

Ejemplo 2.6. *Analicemos la sucesión $f_n(x) = x/n$. Sabemos que $f_n(x) = x/n \to f(x) = 0$ en $A_0 = \mathbb{R}$. La convergencia puntual en $A_0 = \mathbb{R}$ está dada por*

$$\left|\frac{x}{n}\right| < \epsilon \ \Rightarrow n\epsilon > |x| \ \Rightarrow \ n > \frac{|x|}{\epsilon}$$

así, $\forall\ \epsilon > 0$ *y* $\forall\ x \in \mathbb{R}$

$$\exists\ N(x,\epsilon) = \left\lfloor \frac{|x|}{\epsilon} \right\rfloor :\ \forall\ n > N$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Notemos que no podemos hallar $N(\epsilon)$ que sirva para toda $x \in \mathbb{R}$. No hay convergencia uniforme en $\mathbb{R}$. Sin embargo, si tomamos A_0 en un intervalo acotado (por ejemplo $[a,b]$) entonces $\exists\ M$ tal que $|x| < M$ y por tanto $\forall\,\epsilon > 0\ \exists\ N = \frac{M}{\epsilon}$ tal que $\forall\, n > N$ y $\forall\, x \in A_0$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x|}{n} < \frac{M}{n} < \epsilon,$$

lo cual implica que hay convergencia uniforme.

Definición 2.4. *Sea $\varphi : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ acotada en A. La norma uniforme de φ en A se define por*

$$\|\varphi\|_A = sup\ \{|\varphi(x)| :\ x \in A\}$$

Teorema 2.5. ***Criterio de convergencia uniforme*** *Una sucesión de funciones acotadas $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en A si y sólo si*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_A = 0$$

Demostración.
($\Rightarrow$) Supongamos que $f_n \rightrightarrows f$ en A, entonces $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N(\epsilon)$: $\forall\ n > N$ y $\forall\ x \in A$

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

y por tanto

$$\|f_n - f\|_A \leq \epsilon \ \ \forall\ n > N$$

como $\epsilon > 0$ es arbitraria se obtiene que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_A = 0$.
($\Leftarrow$) Si $\|f_n - f\|_A \to 0$, entonces $\forall\ \epsilon > 0\ \exists N(\epsilon)$ tal que si $n > N$ entonces

$$\|f_n - f\|_A < \epsilon \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

para toda $n > N$ y toda $x \in A$. Por tanto, f_n converge uniformemente a f en A. $\square$

Ejemplo 2.7. *$f_n(x) = x^n$ converge puntualmente en $A_0 = (-1,1]$ a la función*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & |x| < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

entonces

$$f_n(x) - f(x) = \begin{cases} x^n & |x| < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

y

$$\|f_n(x) - f(x)\|_A = sup\ \{|x|^n : x \in (-1,1]\} = 1$$
$$\text{lím}_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\|_A = 1$$

lo cual implica que la sucesión funcional no converge uniformemente en $(-1, 1]$.

Sea ahora $A_0 = [-1+\alpha, 1-\alpha]$, $\forall\ 0 < \alpha < 1$. *Entonces* $f_n(x) - f(x) = x^n$ *para* $x \in A_0$.

$$\|f_n(x) - f(x)\|_{A_0} = sup\ \{|x|^n :\ x \in [-1+\alpha, 1-\alpha]\} = |1-\alpha|^n \to 0$$

con lo que podemos ver que converge uniformemente.

Del teorema anterior se puede obtener un criterio para la no convergencia uniforme. Si existe una subsucesión $x_n \in A_0$ tal que

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \nrightarrow 0$$

entonces no hay convergencia uniforme.

Ejemplo 2.8. *Sea*

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$$

que converge puntualmente en $[0, +\infty)$ *a la función*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}$$

Tomemos $x_n = 1/n$, *entonces*

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left| \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{1 + n \cdot \frac{1}{n}} - 1 \right| = \left| \frac{1}{2} - 1 \right| = \frac{1}{2}$$

y por tanto

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{2} \neq 0,$$

no hay convergencia uniforme.

Sea ahora $A_0 = [a, b]$ *con* $a > 0$, *entonces*

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left| \frac{nx}{1+nx} - 1 \right| = \frac{1}{1+nx}$$

$$\|f_n(x) - f(x)\|_A = \frac{1}{1+na} \ \to 0,$$

hay convergencia uniforme.

Teorema 2.6. ***Criterio de Cauchy***. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones acotadas en $A \subseteq \mathbb{R}$. La sucesión f_n converge uniformemente a f en A si y sólo si $\forall\ \epsilon < 0$ $\exists\ N(\epsilon)$ tal que para toda $n < N$, toda $p \in \mathbb{N}$*

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \epsilon$$

para toda $x \in A$.

Teorema 2.7. *Sea f_n una sucesión funcional de funciones continuas en $A \subseteq \mathbb{R}$ que converge uniformemente a $f : A \subseteq \mathbb{R}$ en A. Entonces, f es continua en A*

Demostración.
Como $f_n \rightrightarrows f$ en A, $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ N = N(\epsilon)$ tal que si $n > N$, entonces, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon/3$ para toda $x \in A$.
Sea $c \in A$. Mostremos que f es continua en c. Como $f_n(x)$ es continua en c, entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$, con $|x - c| < \delta$ se cumple que $|f_n(x) - f_n(c)| > \epsilon/3$. Por tanto

$$\begin{aligned} |f(x) - f(c)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(c) + f_n(c) - f(c)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(c)| + |f_n(c) - f(c)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

□

Por supuesto, entonces que si c es un punto de acumulación de A,f_n es continua y $f_n \rightrightarrows f$, entonces

$$\text{lím}_{n\to+\infty} \text{lím}_{x\to c} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(c) = f(c) = \text{lím}_{x\to c} f(x) = \text{lím}_{x\to c} \text{lím}_{n\to\infty} f_n(x).$$

Veamos que la convergencia uniforme de funciones continuas es una condición suficiente para garantizar la continuidad de la función límite, pero no es necesaria.

Ejemplo 2.9. $A = [0, 1]$

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & 0 \leq x < 1/n \\ -n^2(x - 2/n) & 1/n \leq x < 2/n \\ 0 & 2/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

La sucesión de funciones continuas converge puntualmente a $f(x) = 0$ continua. Escojamos $x_n = 1/n^2$, entonces $f_n(x_n) = n^2.(1/n^2) = 1$

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = 1 \nrightarrow 0$$

así, no hay convergencia uniforme.

El teorema puede utilizarse para demostrar que la convergencia de determinada sucesión de funciones no es uniforme.

Ejemplo 2.10. *Sea* $A = [0, 2]$ *y*

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$$

una sucesión funcional que converge puntualmente a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1/2 & x = 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Como $f_n(x)$ *es una sucesión de funciones continuas en* $[0, 2]$ *y la función límite no es continua en* $[0, 2]$ *entonces* $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ *en* $[0, 2]$.

Teorema 2.8. ***Teorema de aproximación de Weierstrass*** *Si* f *es una función continua en un intervalo cerrado, entonces* $\exists$ *una sucesión de polinomios que converge uniformemente a* $f(x)$.

Demostración. Consideremos que $f(x)$ es continua en $[0, 1]$ y consideremos los polinomios de Berstein definidos en $[0, 1]$ según

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$. Mostremos que $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ en $[0, 1]$.
Denotando por

$$P_k(x) = \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k},$$

se tiene que

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} = (x + 1 - x)^n = 1$$

y

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 P_k(x) &= nx(1-x) \\ &= n\left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - x\right)\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - x\right) \\ &= n\left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right) < \frac{n}{4}. \qquad (1) \end{aligned}$$

Como f es continua en $[0, 1]$, entonces f es uniformemente continua, luego para toda $\epsilon > 0 \ \exists \ \delta : \forall \ x_1, x_2 \in [0, 1]$ con $|x_1 - x_2| < \delta$ se cumple que $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. Además $\exists \ M$ tal que $|f(x)| < M \ \forall \ x \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_k(x) - f(x) \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) p_k(x) \right| \\
&\leq \underbrace{\sum_{k} \left| \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) p_k(x) \right|}_{\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta} + \underbrace{\sum_{k} \left| \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) p_k(x) \right|}_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \delta} \\
&< \epsilon \underbrace{\sum_{k} P_k(x)}_{\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta} + 2M \underbrace{\sum_{k} P_k(x)}_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \delta}.
\end{aligned}$$

Para la primera suma tenemos

$$\underbrace{\sum_{k} P_k(x)}_{\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta} \leq \sum_{k=0}^{n} P_k(x) = 1.$$

Para la segunda suma, como

$$\begin{gathered}
\left| \frac{k}{n} - x \right| > \delta \\
\frac{k - nx}{n\delta} > 1 \\
\left(\frac{k - nx}{n\delta} \right)^2 > 1
\end{gathered}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\underbrace{\sum_{k} P_k(x)}_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \delta} &\leq \underbrace{\sum_{k} \left(\frac{k - nx}{n\delta} \right)^2 P_k(x)}_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \delta} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k - nx}{n\delta} \right)^2 P_k(x) \\
&= \frac{n}{n^2\delta^2} x(1 - x) \leq \frac{1}{\delta^2 n} \cdot \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo se obtiene

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon + \frac{M}{2n\delta^2}.$$

Lo anterior es válido para todo $x \in [0, 1]$ luego, $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ N = \left\lfloor \frac{M}{2n\delta^2} \right\rfloor$, tal que $\forall\ n > N$ se tiene que

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

$\square$

Problema 2.1. *$A = \mathbb{R}$ y*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 1 - nx & 0 \leq x < 1/n \\ 0 & 1/n \leq x \end{cases}$$

Hallar la función límite y probar que la convergencia no es uniforme.

Problema 2.2. *$A_0 = [0, 1]$ y*

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1 + n^2x^2}$$

Hallar $f(x)$ y probar que la convergencia no es uniforme aún cuando la sucesión de funciones continuas y la función límite es continua.

2.2. Integración y derivación término a término de sucesiones funcionales

Consideremos ahora la relación que existe entre la diferenciabilidad de las funciones que forman una sucesión funcional y la diferenciabilidad de la función límite. Por ejemplo, dada una sucesión de funciones diferenciables $\{f_n\}$ de la convergencia de $\{f_n\}$ se deduce la convergencia de la sucesión de las derivadas $\{f'_n\}$? Puede converger $\{f'_n\}$ si $\{f_n\}$ no converge. ¿Qué papel juega la convergencia uniforme?

Definición 2.9. *Diremos que una sucesión funcional $\{f_n\}$ de funciones diferenciables en A, es diferenciable término a término en A si tanto $\{f_n\}$ como $\{f'_n\}$ convergen y la función límite de $\{f'_n\}$ es la derivada de la función límite de $\{f_n\}$*

Ejemplo 2.11. *$f_n(x) = x^n$, $A = (-1, 1)$, $f(x) \equiv 0$. $f'_n(x) = nx^{n-1}$, $\{nx^{n-1}\} \to g(x) \equiv 0$ en A. Notar que $f_n(x) = x^n$ es diferenciable término a término, sin embargo que $\{x^n\}$ no converge uniformemente en $(-1, 1)$ y es fácil demostrar que $\{nx^{n-1}\}$ tampoco converge uniformemente en $(-1, 1)$*

Ejemplo 2.12.

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$$

$f(x) = 0$ y $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ en R. Analicemos la sucesión de las derivadas.

$$f'_n(x) = \cos nx$$

esta sucesión diverge para todo $x \neq 0$. Por lo tanto la convergencia uniforme de la sucesión original no garantiza la convergencia de la sucesión de las derivadas.

Ejemplo 2.13. *$f_n(x) = x + n$ no converge para ningún x. Sin embargo, $f'_n(x) = 1$ converge uniformemente. Por tanto, la convergencia uniforme de $\{f'_n\}$ no garantiza la diferenciabilidad término a término.*

Ejemplo 2.14.

$$f_n(x) = \frac{2x}{1 + n^2x^2}, \quad A = [0, +\infty),$$

$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \equiv 0$ en A. Sin embargo

$$f'_n(x) = \frac{2(1 - n^2x^2)}{(1 + n^2x^2)^2} \;\to\; g(x) = \begin{cases} 2 & x = 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

Como $g(x)$ es discontinua, no hay convergencia uniforme, además $g(x) \neq f'(x)$. Sin embargo la sucesión es diferenciable término a término en $[a, +\infty)$, $\forall\ a > 0$. Aquí, tanto $f_n(x)$ como $f'(n)(x)$ convergen uniformemente y $g(x) = f'(x)$.

Teorema 2.10. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones diferenciables definidas en $[a, b]$ tal que $f_n(c)$ converge para algún $a \leq c \leq b$ y la sucesión funcional $\{f'_n\}$ converge uniformemente en $[a, b]$. Entonces la sucesión funcional $\{f_n\}$ converge uniformemente a la función diferenciable f y*

$$f'(x) = (\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = \lim_{n\to\infty} f'_n(x).$$

Demostración.
Como $f_n(c)$ converge entonces, $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N_0(\epsilon)$ tal que $\forall\ n > N$ y $\forall\ p \in \mathbb{N}$,

$$|f_{n+p}(c) - f_n(c)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como f_n' converge uniformemente entonces, $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N_1$ tal que $\forall\ n > N_1$ y $\forall\ p \in \mathbb{N}$,

$$\left|f_{n+p}'(x) - f_n'(x)\right| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}\ \forall x \in [a,b].$$

Si tomamos $N = max\ (N_0, N_1)$ ambas desigualdades se cumplen $\forall\ n > N$ y $\forall\ p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| &= |f_{n+p}(x) - f_{n+p}(c) - f_n(x) + f_n(c) + f_{n+p}(c) - f_n(c)| \\ &\leq |f_{n+p}(x) - f_n(x) - (f_{n+p}(c) - f_n(c))| + |f_{n+p}(c) - f_n(c)| \end{aligned}$$

Aplicando el teorema del valor medio a la función $f_{n+p}(x) - f_n(x)$ tenemos que $\exists\ \xi \in (a,b)$:

$$= \ |f_{n+p}'(\xi) - f_n'(\xi)|(b-a) + |f_{n+p}(c) - f_n(c)| < \epsilon$$

con lo que queda demostrada la convergencia uniforme.
Sea ahora $x_0 \in [a,b]$ y consideremos las funciones F_n definidas en $[a,b]$ como sigue

$$F_n(x) = \begin{cases} \frac{f_n(x) - f_n(x_o)}{x - x_0} & x \neq x_0 \\ f_n'(x_0) & x = x_0 \end{cases}$$

Como f_n es diferenciable en $[a,b]$ entonces $F_n(x)$ es continua en $[a,b]$. Si $x \neq x_0$, aplicando el teorema del valor medio

$$\begin{aligned} |F_{n+p}(x) - F_n(x)| &= \left|\frac{f_{n+p}(x) - f_{n+p}(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}\right| \\ &= \left|\frac{f_{n+p}(x) - f_n(x) - (f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0))}{x - x_0}\right| \end{aligned}$$

$\exists\ \xi$ entre x y x_0 tal que

$$= \left|f_{n+p}'(\xi) - f_n'(\xi)\right| < \epsilon.$$

Si $x = x_0$ entonces

$$|F_{n+p}(x_0) - F_n(x_0)| = \left|f_n'(x_0) - f_n'(x_0)\right| < \epsilon,$$

por tanto $\forall\ n > N$, $\forall\ p \in \mathbb{N}$ y $\forall\ x \in [a,b]$,

$$|F_{n+p}(x) - F_n(x)| < \epsilon,$$

es decir, $F_n(x)$ converge uniformemente en $[a,b]$ y su función límite es continua en $[a,b]$ por el teorema de la clase anterior. Además

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & x \neq x_0 \\ \lim_{n\to\infty} f_n'(x_0) & x = x_0 \end{cases}$$

De la continuidad de F para cualquier punto x_0 en $[a, b]$obtenemos que

$$f'(x_0) = \text{lím}_{x \to x_0} F(x) = \text{lím}_{n \to \infty} f'_n(x_0)$$

□

Integración término a término

Teorema 2.11. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones Riemann integrables en $[a, b]$ que convergen uniformemente a la función f. Entonces la función límite es Riemann integrable y se cumple que*

$$\text{lím}_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \text{lím}_{n \to \infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Demostración.
$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N : \forall\ n > N$

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{4(b-a)}, \quad \forall\ x \in [a, b].$$

Como $f_n(x)$ es Riemann integrable $\exists$ la partición $P_\epsilon = \{x_0, x_1, \ldots, x_s\}$ de $[a, b]$ tal que

$$U(P_\epsilon, f_n) - L(P_\epsilon, f_n) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{4(b-a)} \quad \forall\ x,$$

entonces

$$f(x) \leq f_n(x) + \frac{\epsilon}{4(b-a)} \quad \forall\ x \in [a, b]$$

y por tanto

$$U(P_\epsilon, f) = \sum_{k=1}^{s} M_k(f)\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{m} \left(M_k(f_n) + \frac{\epsilon}{4(b-a)} \right) (x_k - x_{k-1}) = U(P_{\epsilon, f_n}) + \frac{\epsilon}{4}.$$

Una desigualdad análoga puede obtenerse para las sumas inferiores, así

$$\begin{aligned} U(P_{\epsilon,f}) &\leq U(P_\epsilon, f_n) + \frac{\epsilon}{4} \\ L(P_\epsilon, f) &\geq L(P_\epsilon, f_n) - \frac{\epsilon}{4} \end{aligned}$$

y por tanto

$$U(P_{\epsilon,f}) - L(P_\epsilon, f) \leq U(P_\epsilon, f_n) - L(P_\epsilon, f_n) + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

□

Ejemplo 2.15. *Sea*

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & 0 \leq x \leq 1/n \\ -n^2(x-2/n) & 1/n \leq x \leq 2/n \\ 0 & 2/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

y $f(x) \equiv 0$ $[0,1]$. $f_n(x)$ *es continua y por tanto es Riemann integrable.*

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x)dx &= \int_0^{1/n} n^2xdx + \int_{1/n}^{2/n} -n^2(x-2/n)dx \\ &= n^2\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{1/n} - n^2\frac{(x-2/n)^2}{2}\bigg|_{1/n}^{2/n} \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1 \quad n > 2 \end{aligned}$$

así

$$\int_0^1 f(x)dx = 0 \neq \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$$

y por el teorema anterior no hay convergencia uniforme.

Ejemplo 2.16. *Sea*

$$f_n = \frac{nx}{1+nx}$$

definida en $[0,1]$ *y*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{nx}{1+nx}dx &= \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{dx}{1+nx} = 1 - \frac{1}{n}\ln(1+nx)\bigg|_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{n}\ln 1 + n \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nxdx}{1+nx} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n}\ln(1+n) = 1 = \int_0^1 f(x)dx,$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x) = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n$$

sin embargo no hay convergencia uniforme pues la función límite no es continua.

Problema 2.3. *Probar que* $f_n(x) = nx(1+x)^n$ *es integrable término a término pero no converge uniformemente*

Problema 2.4. *Sea*

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}.$$

Muestre que $\lim_{n\to\infty} f_n' \neq (\lim_{n\to\infty} f_n)'$. *¿Qué condiciones del teorema no se cumplen?*

Problema 2.5. *Probar que* $f_n(x) = xe^{-nx^2}$ *converge uniformemente en* $[-1, 1]$ *y que no es derivable término a término.*

Problema 2.6. *Será*

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n}$$

diferenciable término a término.

2.3. Series funcionales. Convergencia Uniforme

Al igual que en el caso de las series numéricas, dada una sucesión funcional $\{f_n\}$, definida en $A \subseteq \mathbb{R}$, una serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ se define a través de la sucesión funcional $S_n(x)$ de sumas parciales:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

Decimos que la serie converge puntualmente (uniformemente) en el dominio $A \subseteq \mathbb{R}$ si la sucesión funcional S_n converge puntualmente (uniformemente) en A. La función límite $S(x)$ de la sucesión $\{S_n\}$ funcional se denomina función suma de la serie funcional.

Ejemplo 2.17.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n-1}}{1 - x} \ (para)\ x \neq 1$$

La serie converge puntualmente en $(-1, 1)$. Veamos si hay convergencia uniforme. Debemos analizar el límite cuando $n \to \infty$ de

$$\|S_n(x) - S_x\|_{(-1,1)} = sup_{x\in(-1,1)} \left| \frac{1 - x^{n-1}}{1 - x} - \frac{1}{1 - x} \right|$$

$$\|S_n(x) - S_x\|_{(-1,1)} = sup_{x\in(-1,1)} \frac{|x|^{n+1}}{|1 - x|}$$

Veamos que si

$$x_n = 1 - \frac{1}{n + 1}$$

entonces

$$|S_n(x_n) - S(x_n)| = \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n+1}} \to \infty,$$

por tanto no hay convergencia uniforme. Sin embargo si $A = [-1 + \delta, 1 - \delta]$, $\forall\ 0 < \delta < 1$ entonces

$$|S_n(x_n) - S(x_n)| = \frac{|x|^{n+1}}{|1 - x|} \leq \frac{(1 - \delta)^{n+1}}{(2 - \delta)} \to 0 \ si\ n \to \infty$$

lo que implica que

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n(x) - S(x)\|_{(-1+\delta,1-\delta)} = 0$$

así podemos decir que hay convergencia uniforme.

Criterio de Cauchy de Convergencia Uniforme

Teorema 2.12. $\sum f_n(x)$ *converge uniformemente en* A *si y sólo si* $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N = N(\epsilon) : \forall\ n > N$ *y* $\forall\ p \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_n(x)\right| < \epsilon \quad \forall\ x \in A$$

Teorema 2.13. ***(Condición necesaria)*** *Si* $\sum f_n(x)$ *converge uniformemente en* A *entonces* $f_n \rightrightarrows 0$ *en* A

Ejemplo 2.18. *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, $A = (-1, 1)$.

$$\|f_n(x) - 0\|_{(-1,1)} = \|x^n\|_{(-1,1)} = 1 \nrightarrow 0$$

luego $x^n \rightrightarrows 0$, *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ *no converge uniformemente en* $A = (-1, 1)$.

Teorema 2.14. ***Criterio de Weierstrass*** *Sea* $\sum f_n(x)$ *es una serie funcional definida en* A *y* $\sum a_n$ *una serie numérica convergente, tal que* $|f_n(x)| \leq a_n$ *para* $x \in A$. *Entonces* $\sum f_n(x)$ *converge absolutamente y uniformemente en* A

Demostración.
La convergencia absoluta se obtiene como consecuencia directa del criterio de comparación para series numéricas de términos positivos. Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y además $a_n \geq 0$, entonces por el criterio de Cauchy para series numéricas $\forall\ \epsilon > 0$ $\exists\ N : \forall\ n > N\ \forall\ p \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_n < \epsilon \quad \forall\ x \in A$$

□

Ejemplo 2.19. *Analizar la convergencia de la siguiente serie funcional.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{2 + n^3x^2}$$

$$\left|\frac{2x}{2 + n^3x^2}\right| = \frac{2|x|}{2 + n^3x^2} < \frac{2|x|}{2n^{3/2}|x|} = \frac{1}{n^{3/2}} \quad si\ x \neq 0$$

Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$ *entonces*

$$|f_n(x)| < \frac{1}{n^{3/2}}\ \forall\ n\ y\ \forall\ x \in \mathbb{R}$$

y como

$$\sum \frac{1}{n^{3/2}}\ converge$$

por el criterio de Weierstrass la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x}{2 + n^3x^2}\ \text{converge absoluta y uniformemente}$$

Ejemplo 2.20. *Analizar la convergencia de la siguiente serie funcional.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{2x}{x^2+n^4}\right) \quad x \in \mathbb{R}$$

Como la función $\arctan(x)$ *es creciente*

$$\left|\arctan\left(\frac{2x}{x^2+n^4}\right)\right| = \arctan\left(\frac{2|x|}{x^2+n^4}\right) < \arctan\frac{2|x|}{2|x|n^2} = \arctan\frac{1}{n^2} \ \textit{si } x \neq 0$$

y para $x = 0$, $\arctan(2x/(x^2+n^4)) = 0$, *por tanto*

$$\left|\arctan\left(\frac{2x}{x^2+n^4}\right)\right| < \arctan\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2} \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \textit{converge}$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{2x}{x^2+n^4}\right) \quad \textit{converge absoluta y uniformemente}$$

Ejemplo 2.21.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n}) \quad \frac{1}{2} \leq |x| \leq 2$$

$$\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n}) \leq \frac{n^2}{\sqrt{n!}} \cdot \left(2^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{-n}\right) = \frac{n^2 2^{n+1}}{\sqrt{n!}}$$

Analicemos con el criterio de D'Alambert la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^{n+1}}{\sqrt{n!}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2 2^{n+2}}{\sqrt{(n+1)!}} \cdot \frac{\sqrt{n!}}{n^2 2^{n+1}} = 2\left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$$

entonces la serie numérica converge y la serie funcional converge absoluta y uniformemente.

Ejemplo 2.22.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$$

$$\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right| < \frac{1}{n^p}$$

converge absoluta y uniformemente para $p > 1$

Otros criterios de convergencia uniforme.

Teorema 2.15. ***(Criterio de Abel)*** *La serie funcional* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ *converge uniformemente en* $A \subseteq \mathbb{R}$ *si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge uniformemente y si la sucesión* $g_n(x)$ *está uniformemente acotada en* A *y para cada* $x \in A$ *la sucesión* $\{g_n(x)\}$ *es monótona*

Nota 2.1. *Uniformemente acotada significa que* $|f_n(x)| < M \ \forall\ x \in A$ *y* $\forall\ n \in \mathbb{N}$

Ejemplo 2.23.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}, \quad A = [1, +\infty)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{1}{n^{x-1}}$$

como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *converge uniformemente (pues no depende de* x*), y además*

$$\left| \frac{1}{n^{x-1}} \right| < 1 \quad \textit{uniformemente acotada}$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ *converge uniformemente.*

Teorema 2.16. ***(Criterio de Dirichlet)*** *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ *converge uniformemente en* A *si la sucesión funcional* $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_n(x)$ *es uniformemente acotada en* A *y* $\{g_n(x)\}$ *converge uniformemente a cero en* A*.*

Ejemplo 2.24.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p} \quad 0 < p \leq 1$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \sin kx \right| \leq \frac{2}{|\sin x/2|} \quad \textit{para} \quad x \neq 2k$$

$$\frac{2}{|\sin x/2|} < \frac{2}{\sin \delta/2} \quad [\delta, 2\pi - \delta]$$

luego, $\sum_{k=1}^{n} \sin kx$ *está uniformemente acotada en* $[\delta, 2\pi - \delta]$ *con* $0 < \delta < 2\pi$*. Por otro lado* $1/n^p \to 0 \ \forall\ p > 0$ *y como no depende de* x*, entonces la convergencia es uniforme.*

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p} \quad \textit{converge uniformemente en } [\delta, 2\pi - \delta].$$

¿Qué relación hay entre la convergencia uniforme y la absoluta?

Propiedades de las series que convergen uniformemente.

Teorema 2.17. ***(Continuidad)*** *Si $\sum f_n$ es una serie uniformemente convergente en A de funciones continuas, entonces la función suma es continua en A.*
si x es un punto de acumulación de A entonces

$$S(x_0) = \lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0).$$

Teorema 2.18. ***(Derivación término a término)*** *Sea $\sum f_n$ una serie de funciones diferenciables en $[a,b]$ que converge para cierto punto $c \in [a,b]$ y tal que la serie $\sum f_n'$ converge uniformemente en $[a,b]$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente a la función diferenciable $S(x)$ tal que*

$$S'(x) = \left(\sum f_n\right)' = \sum f_n'$$

Ejemplo 2.25.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n2^n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Evidentemente converge para $x = 0$. Hallemos la serie de las derivadas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos nx}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$$

$$\left|\frac{\cos nx}{2^n}\right| < \frac{1}{2^n}$$

$$\sum \frac{1}{2^n} \quad \textit{converge} \;\Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n} \quad \textit{converge uniformemente en } \mathbb{R} \textit{ por el criterio de Weierstrass.}$$

luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n2^n} \quad x \in \mathbb{R}$$

converge uniformemente y es válida la derivación término a término.

Teorema 2.19. ***(Integración término a término)*** *Si $\sum f_n$ es una serie uniformemente convergente de funciones Riemann integrables en $[a,b]$. Entonces la función suma es Riemann integrable en $[a,b]$ y*

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$