Matemática Discreta: Apunte teórico de Franco

Cursada del 1er cuatrimestre del 2020
(1er cuatrimestre de la pandemia del COVID-19)

"No se estresen. Disfruten del viaje y no se queden con dudas" - Franco

Este apunte puede contener errores. Por favor, consulten todo con sus profesores.

Siéntanse libres de copiar y modificar este documento para corregir errores que se puedan encontrar, así como, para actualizarlo a los temas más recientes de la materia.

Link al documento de Google:
https://docs.google.com/document/d/1F3yxt2C6FOcXVmtyXpK491Tqb_EM5t-rAhcV7JsDS8Y/edit?usp=sharing

TP1

Funciones Booleanas

- Si p entonces q: $p \rightarrow q = p' + q$
- p si y sólo si q: $p \longleftrightarrow q = p.q + p'.q'$
- XOR: $p \oplus q = p'.q + p.q'$
- Función de Sheffer: NAND: $p \uparrow q = (p.q)'$
- Función de Pierce: NOR: $p \downarrow q = (p + q)'$

Juegos completos

(+, . , ‘) es un juego completo por definición.

Otras juegos completos

- (+, ‘)
- (. , ‘)
- (→ , .)
- ($\uparrow$)
- ($\downarrow$)

Conjuntos

Propiedades

- Sea B^A el conjunto de funciones f: A → B
  ⇒ El B^A es $|B|^{|A|}$
  [A cada uno de los |A| elementos de A, se le puede asignar cualquiera de los |B| elementos de B ⇒ hay |B| . |B| . ... . |B| (|A veces|) asignaciones posibles]
  Si B = {0,1} ⇒ Hay 2^{2^n} funciones f : $B^n \rightarrow B$ de n variables lógicas
- Sean P, Q conjuntos, tales que: $P + Q = \emptyset \Rightarrow P = \emptyset\ ,\ Q = \emptyset$
  (Por principio de dualidad, Si P.Q = I ⇒ P = I, Q= I)

Operaciones

- Sea A, B conjuntos ⇒ A - B = A . B ’

Equivalencias

X C Y	⟺	X.Y = X	⟺	X + Y = Y	⟺	X.Y’ = ∅	⟺	X’ + Y = I	⟺	Y’ C X’
(p→ q)		(p.q = p)		(p + q = q)		(p.q = F)		(p’ + q = T)		q’ → p’

Equivalencias fundamentales

X = Y ⇐⇒ X’ = Y’ ⇐⇒ X’.Y + X.Y’ = ∅ ⇐⇒ (X’ + Y).(X + Y’) = I

Ecuaciones en la incógnita X

- A.X = B.X ⇒ (solución minimal) ∅ C X **C A.B + A’.B’** (solución maximal)
- A + X = B + X ⇒ (solución minimal) **A’.B + A.B’ C** X C I (solución maximal)
- A.X = B ⇒ Si B C A (es decir, A’.B = ∅) ⇒ B C X C A’ + B
- A + X = B ⇒ Si A C B (es decir, A.B’ = ∅) ⇒ A’.B C X C B

Sistemas de ecuaciones

Sea un sistema de ecuaciones de n incógnitas, y sea B un conjunto de |B| elementos que se estructura en un álgebra de Boole.
Las soluciones serán vectores de n dimensiones.
La cantidad de soluciones será igual a $(2^{|B|})^k$, donde k es la cantidad de variables independientes $(0 \leq k \leq n)$

Álgebra de Boole (B, + , . , ‘ , **0**, **1**) :

Axiomas

- Ax. Conmutativa: $x+y=y+x$; $x.y \;=\; y.x$
- Ax. Distributiva: $x.(y+z)=xy+x<$; $x+yz \;=\; (x+y).(x+z)$
- Ax. Neutro: $x+0=x$; $1.x \;=\; x$
- Ax. Complemento: $x+x' \;=1$; $x.x' \;=\; 0$

Propiedades

- P. Acotación: $1+x \;=\; 1$; $x.0 \;=\; 0$
- P. Asociativa: $(x+y)+z=x+(y+z)$; $(x.y).z=x.(y.z)$
- P. Involución: $(x`)` \;=\; x$
- P. De Morgan: $(x+y)'=x'.y'$; $(x.y)' \;=\; x'+y'$
- P. Idempotencia: $x+x=x$; $x.x=x$
- P. Absorción: $x+x.y=x$; $x.(x+y)=x$

Otras propiedades

- El 0_B es único (y por ende 1_B también es único)
- Un elemento no puede ser complemento de sí mismo

Equivalencias

x.y = x ⇐⇒ x + y = y ⇐⇒ x.y ‘ = 0 ⇐⇒ x’ + y = 1

Equivalencias fundamentales

x = y ⟸⟹ x' = y' ⟸⟹ x'y + x.y' = 0 ⟸⟹ (x' + y).(x + y') = 1

Átomos

El elemento $a \in B$ es un átomo

⟸⟹

$a \neq 0_B$ **y** si x.a = x ⇒ (x = a o x = 0_B)

Cantidad de átomos

Sea B un álgebra de Boole ⇒ B tiene $\log_2(|B|)$ átomos

Problema a.x = b.x

En un álgebra de Boole de 128 elementos (B,+, . , ' , 0_B , 1_B), sean a y b dos de sus átomos. Determinar cuántas soluciones tiene la ecuación en la incógnita $x \in B$ dada por a.x=b.x

Si el álgebra tiene 128 elementos ⇒ debe ser que tiene: $\log_2(128)$ átomos = 7 átomos
De estos 7 átomos, a y b no pueden ser la solución, pues:
$a.a = a \neq 0 = b.a$
$a.b = 0 \neq b = b.b$

Las soluciones serán, entonces, conjuntos que contengan a los 5 átomos. Otros elementos no pueden ser soluciones pues:

$\forall x \in B,\ si\ x\ no\ es\ un\ \text{átomo}\ y\ x \neq 0_{B2},\ debe\ ser\ que\ a.x = a \neq b = b.x$

Por lo tanto, habrá un total de 2^5 = 32 soluciones a la ecuación planteada.

Isomorfismos

Sean B1, y B2 dos álgebras de Boole finitas (de la misma cantidad de elementos).
B1 es isomorfa a B2
⟸⟹
Existe una **función biyectiva** f: B1 → B2, tal que, f **preserva:**

- la suma: $f(x +_{B1} y) = f(x) +_{B2} f(y)$
- y el complemento: $f(x'^{B1}) = f(x)'^{B2}$

[pues (+, ') es un juego completo]

Invariantes de isomorfismos

Se preservan:

- neutros: $f(0_{B1}) = 0_{B2}$; $f(1_{B1}) = 1_{B2}$
- orden (inducido)
- átomos: $f(a_{B1}) = a_{B2}$
- subalgebras

Cantidad de isomorfismos

Sea B1 un álgebra de boole con n átomos, es decir, $\log_2(|B1|)$ átomos.
Sea f: B1 → B2 un isomorfismos entre las álgebras de boole B1 y B2

Dado que f preserva los átomos, con definir las imágenes de estos últimos, obtendremos que la imagen de cada uno de los demás elementos de B1 solo pueden corresponderse con un único elemento de B2
⇒ Existen **n!** = **$\log_2(|B1|)$! (factorial)** isomorfismos

Sub-Álgebras de Boole

Sea B un álgebra de Boole.
Sea S un sub-álgebra de Boole de B
⇐⇒
S C B

- $\forall\, x \in S \quad \Rightarrow \quad x' \in S$
- $\forall\, x, y \in S \quad \Rightarrow \quad x + y \in S$
  $x \,.\, y \in S$

Álgebras de Boole frecuentes

- (D_n , m.c.m, M.c.d, n / x, 1, n) es A.B.
  ⇒ n es **múltiplo de números primos distintos** (n debe estar libre de cuadrados)
  Sea n múltiplo de k números primos $p_1 \,.\, p_2 \,.\, \ldots \,.\, p_k$
  Sea $x \in D_n$ ⇐⇒ $x = p_1^{e1} \,.\, p_2^{e2} \,.\, \ldots \,.\, p_k^{ek}$ (donde $e_i \in \{0, 1\}$)
  (estos son los números 0 y 1 del conjunto de los números reales)
    - D_n conjunto de los divisores de n
    - m.c.m. : mínimo común múltiplo
    - M.c.d. : máximo común divisor

- (P(A), +, . , ‘ , ∅, A)
    - P(A) es el conjunto de partes del conjunto A

Relaciones

Caracterización

Sea $\triangle$ la relación de identidad en un conjunto X, tal que, $\triangle = \{(x, x) : x \in X\}$
Sea Id la matriz de identidad de |X|x|X|
Sea R una relación en el conjunto X.

- Reflexividad: xRx ⇐⇒ x = x
    - ⇐⇒ $\triangle\ C\ R$ ⇐⇒ Id . A_R = Id
- Simetria: xRy ⇒ yRx
    - ⇐⇒ $R^{-1} = R$ ⇐⇒ $A_R^T = A_R$

- Antisimetría: xRy, yRx ⇒ x = y
    - ⟺ $R.R^{-1} \subset \Delta$
      ⟺ ($A_R \cdot_{\text{producto tensorial}} A_R^T$) $\cdot_{\text{producto binario}}$ Id = ($A_R \cdot_{\text{producto tensorial}} A_R^T$)
- Transitividad: xRy, yRz ⇒ xRz
    - ⟺ R o R C R ⟺ $A_R^2 \cdot_{\text{producto binario}} A_R = A_R^2$

Matriz

Sea A_R la matriz de una relación R.
El elemento $A_R(i, j)$ es igual a:

- 1 ⟺ a_i R a_j (donde a_i y a_j son elementos de algún conjunto)
- 0 en otro caso

Operaciones

Sean R_a y R_b dos relaciones cuyas matrices son A_{Ra} y A_{Rb} , respectivamente.

Unión $R_a + R_b$

$A_{Ra + Rb} = A_{Ra} + A_{Rb}$, tal que, $A_{Ra + Rb}(i, j) = A_{Ra}(i, j) +_{\text{suma binaria}} A_{Rb}(i, j)$

Intersección $R_a . R_b$

$A_{Ra . Rb} = A_{Ra} . A_{Rb}$, tal que, $A_{Ra . Rb}(i, j) = A_{Ra}(i, j) ._{\text{producto binario}} A_{Rb}(i, j)$

Complemento R_a’

$(x,y) \in R_a' \iff (x,y) \notin R_a$

Composición / Potencia R_a o R_b

$A_{Ra \text{ o } Rb} = A_{Ra} \times_{\text{producto matricial}} A_{Rb}$

R_a o $R_a = R_a^2$

Inversa R_a^{-1}

$A_{R_a^{-1}} = A_{R_a}^{\ T}$, tal que, $A_{R_a^{-1}}(i, j) = A_{R_a}(j, i)$

Clausura transitiva R* = CT(R)

$A_{R_a^*} = A_{R_a} +_{suma\ binaria} A_{R_a^2}$
(Es la relación anterior más las relaciones que entre elementos que le faltaban para ser transitiva)

Propiedades

Sean X, Y, Z conjuntos.
Sean la relaciones binarias:

- R: X → Y

- S: X → Y
- T: Y → Z

Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- $(R^{-1})^{-1} = R$ // $(A_R{}^T)^T = A_R$
- $(R')^{-1} = (R^{-1})'$ // $(A_R')^T = (A_R{}^T)^{-1}$
- $(R + S)^{-1} = R^{-1} + S^{-1}$ // $(A_R + A_s)^T = A_R{}^T + A_S{}^T$
- $(R.S)^{-1} = R^{-1} . S^{-1}$ // $(A_R . A_s)^T = A_R{}^T . A_S{}^T$
- $R^{-1} \subset S^{-1} \Longleftrightarrow R \subset S$ // $A_R{}^T . A_s{}^T = A_R{}^T \Longleftrightarrow A_R . A_s = A_R$
- $R^{-1} = S^{-1} \Longleftrightarrow R = S$ // $A_R{}^T = A_s{}^T \Longleftrightarrow A_R = A_s$
- $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$ // $(A_S \times A_T)^T = A_T{}^T \times A_S{}^T$
- $\exists$ S, T, tal que, $(S \circ T)^* \neq T^* \circ S^*$

Relación de orden ≤ (parcial)

R es una relación de orden parcial

$\Longleftrightarrow$

R es:

- Reflexiva
- Antisimétrica
- Transitiva

Propiedades en Álgebras de Boole

Sea (≤) una relación de orden parcial en un álgebra de Boole (B, + , . , ‘ , 0_B, 1_B), tal que:
$\forall\, x,y \in B,\ x \le y \iff x.y = x$

Propiedades:

- $0_B \le x \le 1_B$
- $x.y \le x \le x + y$; $x.y \le y \le x + y$
- $sup(x,y) = x + y$; $inf(x,y) = x.y$
- $x \le y \iff y' \le x'$
- Sean a, b átomos de B ⇒ $a.b = 0$

Elementos particulares

Sea un conjunto A donde se ha introducido un orden parcial $(\le)$.
Sea B un subconjunto de A.
Los elementos particulares del subconjunto B son:

- Cotas superiores (C.S.): $\forall x \in A,\ x \in CS(B) \iff \forall\, y \in B,\ y \le x$
- Cotas inferiores (C.I.): $\forall x \in A,\ x \in CI(B) \iff \forall\, y \in B,\ x \le y$
- Supremo (sup) : $Sea\, x \in CS(B),\ sup(B) = x \iff \forall\, y \in CS(B),\ x \le y$
  - Si el supremos existe ⇒ es único
- Ínfimo (inf): $Sea\, x \in CI(B),\ inf(B) = x \iff \forall\, y \in CI(B),\ y \le x$
  - Si el ínfimo existe ⇒ es único
- Máximo: $Sea\, x \in B,\ máximo(B) = x \iff máximo(B) = sup(B)$
- Mínimo: $Sea\, x \in B,\ mínimo(B) = x \iff mínimo(B) = inf(B)$
- Maximales: $\forall x \in B,\ x \in maximales(B) \iff \forall y \in B,\ si\, x \le y \Rightarrow y = x$

- Minimales: $\forall x \in B,\ x \in minimales(B) \Longleftrightarrow\ \forall y \in B,\ si\ y \leq x \Rightarrow\ y = x$

Relaciones de equivalencia

Sea R una relación de equivalencia
⟺
R es:

- reflexiva
- simétrica
- transitiva

Conjunto cociente A / R

Sea A donde se ha introducido una relación de equivalencia R.
Entonces, el conjunto cociente será:

A / R = { $[a_1]$, $[a_2]$, … , $[a_k]$ }

donde $[a_i]\ =\ \{x \in A\ :\ xRa\}$

Relaciones de equivalencia frecuentes

- $Con\ n\ \in N\ fijo,\ en\ Z,\ x\ R\ y\ \ \Longleftrightarrow\ \ x = y\ (mod\ n)$
    - Z / R = {[0], [1], … , [n-1]}
- $Con\ f\ \in B^A\ fija,\ en\ A,\ x\ R\ y\ \ \Longleftrightarrow\ \ f(x)\ =\ f(y)$
    - Sus clases son los conjuntos maximales de A donde f(x) es constante
- En un álgebra de Boole (B, + , . , ‘ , 0 , 1), x R y ⟺ x.y = x + y
- En R^I, f R g ⟺ $\int_I f(t)\ dt = \int_I g(t)\ dt$
- $Con\ n, m \in N\ fijos,\ en\ Z,\ xRy$
  ⟺
  x = y (mod n)
  x = y (mod m)
    - El conjunto cociente tiene m.c.m (n, m) elementos

Autómatas

Sea M = (∑, Q, q_0, ϒ, F) el autómata finito determinista con:

- ∑ : alfabeto
- Q : conjunto de estados
- q_0 : estado inicial
- ϒ: Qx∑ → Q : función de transición / tabla de transiciones
- F : conjunto de aceptación.
    - F C Q

Lenguaje reconocido por el autómata : L(M)

$L(M)\ =\ \{x \in \sum^*\ :\ ��^*(q_0,\ x) \in F\}$

donde:

- $\sum^*$: es cualquier palabra formada por las letras de $\sum$
- ��* : $Qx\sum^* \rightarrow Q$: *función de transición generalizada*

L(M) también puede ser representado por **expresiones regulares**.

Otras representaciones de L(M) frecuentes:

- $L(M) = \{x \in \sum^* : |x|_b = 2\}$: *palabras con exactamente dos letras b*
- $L(M) = \{x \in \sum^* : |x|_b = 1\ (mod\ 2)\}$: *palabras con un número impar de letras b*
- $L(M) = \{x \in \sum^* : |x|_b = 0\ (mod\ 3)\}$: *palabras con una cantidad de letras b multipla de 3*

Clases de k-equivalencias [R_k]

Sea M = (∑, Q, q_0, **ϒ**, F) el autómata finito determinista.
Dados dos estados s y t (arbitrarios) en M:

1. s es equivalente a t
   ⇐⇒ ambos (s y t) son estados aceptables o ambos son estados no aceptables.
2. Para cada entero $k \geq 1$ s es k-equivalente a t
   ⇐⇒ s y t son (k-1)-equivalentes y para cualquier símbolo de entrada: m, **ϒ**(s, m) y **ϒ**(t, m) también son (k-1)-equivalentes

Si M es un autómata de estado finito, entonces para algún entero $k \geq 0$, el conjunto de clases de k-equivalencias de estados de M, es igual al conjunto de clases de (k+1) equivalencias de estados de M, y para tal k, ambos conjuntos son iguales al conjunto de clases $*-$ *equivalencias* de estados de M

R* es un una relación de equivalencia, porque es la clausura transitiva de R_k.

Se define al **autómata cociente** como:

$\overline{M} = (\sum, \overline{Q}, \overline{q_0}, \overline{\Upsilon}, \overline{F})$, tal que,

$\overline{Q}$ = Q / R*

$\overline{q_0} = [q_0] \in \overline{Q}$

$\overline{\Upsilon} = \overline{Q}\, x \sum \rightarrow \overline{Q}$

$\overline{F}$ = F / R*

El autómata cociente permite obtener lenguajes reconocidos por el autómata más fácilmente, tal que:

$$L(\overline{M}) = L(M)$$

TP2: Recurrencia e Inducción

Principio de inducción fuerte y débil

Ambos principios son equivalentes. Cada uno puede deducirse del otro. Y ambas pueden deducirse del **principio del buen orden** aceptado como axioma. A su vez, este último principio puede deducirse del principio de inducción completa tomado como axioma

Principio de inducción completa (FUERTE)

Sea p(n) una función proposicional de variable natural n.
Paso Básico (P.B.)
Sea P(1) verdadera

Paso Inductivo (P.I.)
Sea P(2), P(3), …, P(k) verdaderas ⇒ p(k+1) verdadera.

Por (P.B.) y por (P.I.) demostrados verdaderos, entonces el principio de inducción completa garantiza que $\forall n \in N,\ p(n)\ es\ verdadera$

Principio de inducción completa (DÉBIL)

Sea P(1) es verdadera
Sea P(k) verdadera ⇒ P(k+1) es verdadera.
(Aquí solo asumimos que P(k) es verdadero, y no decimos nada de los valores anteriores)

Entonces, $\forall n \in N,\ se\ tiene\ que\ p(n)\ es\ verdadera,\ por\ principio\ de\ inducción\ completa$

Principio del buen orden (para números enteros)

Sea S un conjunto de números enteros que contiene uno o más enteros, todos los cuales son mayores que un entero fijo. Entonces S tiene un mínimo elemento.

Proposiciones verdaderas

$(a) \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ $\quad (b) \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ $\quad (c) \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}[n(n+1)]^2$ $\quad (d) \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$

$(e) \sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{a^n-1}{a-1}, a \neq 1$ $\quad (f) \sum_{k=0}^{n} ka^k = \frac{(a-1)(n+1)a^{n+1}-a^{n+2}+a}{(a-1)^2}, a \neq 1$ $\quad (g) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

$(h) \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 = \frac{(-1)^n}{2} n(n+1)$ $\quad (i) \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$ $\quad (j) \sum_{k=1}^{n} k\, k! = (n+1)!-1$

$(k)\ 9 \mid \sum_{k=n}^{n+2} k^3$ $\quad (l)\ 133 \mid (11^{n+2}+12^{2n+1})$ $\quad (m) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$ $\quad (n)\ 4^n(n!)^2 < (2n)!(n+1), n > 1$

$(\tilde{n})\ (1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha, \alpha \geq -1$ $\quad (o) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} > \frac{1}{2},\ n \geq 2$ $\quad (p)\ 2^{n-1}(\alpha^n+\beta^n) > (\alpha+\beta)^n,\ \alpha+\beta > 0, \alpha \neq \beta, n > 1$

$(q)\ \sum_{k=0}^{n} x^{n-2k} \geq n+1,\ x > 0$ $\quad (r)\ 3^n > n^4,\ n \geq 8$ $\quad (s)\ 7 \mid (8^n - 14n + 27)$ $\quad (t)\ 3^n n! > n^n$

$(u)\ \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 - \frac{1}{n},\ n > 1$ $\quad (v)\ n! \geq 2^{n-1}$ $\quad (w)\ \mid A \mid = n \Rightarrow \mid \mathcal{P}(A) \mid = 2^n$

$(x)\ 6 \mid (n^3+11n)$ $\quad$ (y) $2^n(\alpha^n+1) > 2(\alpha+1)^n,\ \alpha > -1, \alpha \neq 1, n > 1$ $\quad (z)\ 2^n(\alpha^n+1) > 2+2n\alpha,\ \alpha > -1, n > 1$

$2^n.n! = 2 . 4 . 6 . \dots . (2n)$

Recurrencia

Solución general

$X_n^G = X_n^H + X_n^P$

$X_n^H = c.r^n$ con $c.r^n \neq 0$

Si X_H tiene:

- Raíces simples $\Rightarrow X_H = A.(r_1)^n + B.(r_2)^n$
- Raíces múltiples $\Rightarrow X_H = A.(r_1)^n + B.n.(r_2)^n$
- Raíces complejas $\Rightarrow X_H = p^n . (A.\cos(\Theta.n) + B.\text{sen}(\Theta.n))$
    - $p = \sqrt{r_1^{\,2} + r_2^{\,2}}$
    - $\Theta = arctg(r_1 / r_2)$

X_n^P : Se propone una solución similar a la que se presenta del otro lado del igual. Esta solución no debe ser una combinación lineal de la solución homogénea.

A partir de las condiciones iniciales se calculan los valores de las constantes de la solución homogénea.

Fibonacci

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

Si, $F_0 = F_1 = 1$ (o $F_1 = 1, F_2 = 2$)

$\Rightarrow$

$F_n = (1 / \sqrt{5}) . (\lambda_1^n - \lambda_2^n)$

con $\lambda_1 = (1+\sqrt{5}) / 2$, $\lambda_2 = (1-\sqrt{5}) / 2$, $n \geq 0$

Observación 1: $\lambda_2 = (-1) / \lambda_1$

Observación 2: Los primeros números de la serie de Fibonacci son:
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,

Variaciones en las condiciones iniciales

Si $F_0 = F_1 = 1 \Rightarrow F_n = (1/\sqrt{5}) . (\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1})$ con $n \geq 0$

Si $F_1 = 1, F_2 = 2 \Rightarrow F_n = (1/\sqrt{5}) . (\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1})$ con $n \geq 1$

Si $F_0 = 1, F_1 = 2 \Rightarrow F_n = (1/\sqrt{5}) . (\lambda_1^{n+2} - \lambda_2^{n+2})$ con $n \geq 0$

Si $F_1 = 2, F_2 = 3 \Rightarrow F_n = (1/\sqrt{5}) . (\lambda_1^{n+2} - \lambda_2^{n+2})$ con $n \geq 1$

Torre de Hanoi

¿Cantidad de movimientos para mover k discos: m_k ?
Asumimos que ya movimos k -1 discos, habiendo hecho m_{k-1} movimientos.
Luego queremos mover el disco k a la pila de final, lo cual requiere 1 movimiento.
Por último, volvemos a mover los k-1 discos anteriores a la pila final, volviendo a realizar m_{k-1} movimientos.

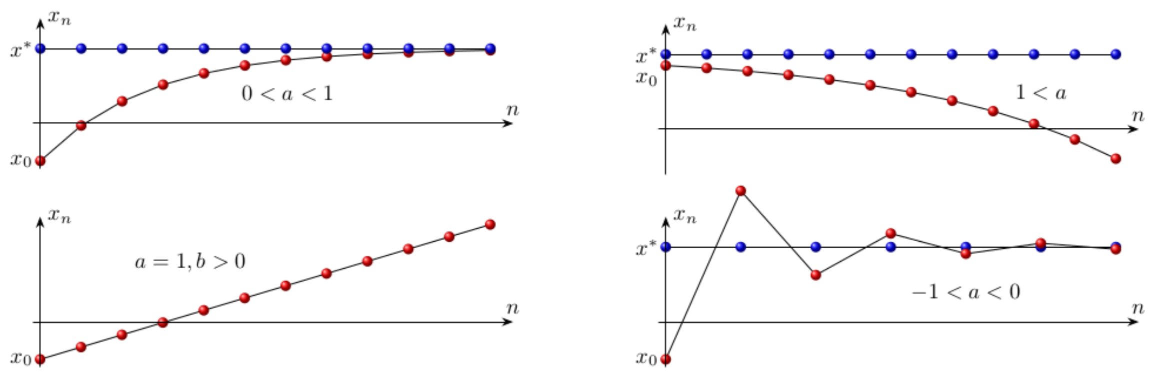
$m_k = 2.m_{k-1} + 1$ con $k \geq 2$
$m_1 = 1$

$m_n = 2^n - 1$ con $n \geq 1$

Fórmulas generales

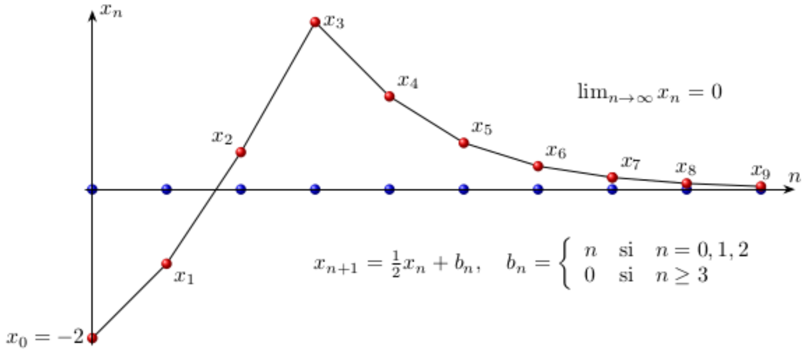
3. (−) Sean a, b dos constantes reales. Hallar la solución de la ecuación lineal de primer orden $x_{n+1} = ax_n + b$ conocida la condición inicial x_0 (para $a \neq 1$, expresar la solución en función del punto de equilibrio $x^* = b/(1-a)$ y discutir el comportamiento cualitativo de la solución).

♣ (Resp. Parcial) Es $x_n : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, $x_n = (x_0 - x^*)a^n + x^*$ si $a \neq 1$; si en cambio es $a = 1$, la ecuación es sencillamente $x_{n+1} = x_n + b$, con solución $x_n : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, $x_n = x_0 + bn$. El punto de equilibrio x^* es un atractor sii $|a| < 1$ (es un repulsor sii $|a| > 1$, y si $a = -1$ la solución oscila alrededor de $x^* = b/2$). Las figuras recogen algunas de estas características.



5. $(-)$ Sea a una constante real no nula y b_n una función real definida para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Hallar la solución de la ecuación lineal de primer orden $x_{n+1} = ax_n + b_n$ conocida la condición inicial x_0. Resolver, en particular, la ecuación $x_{n+1} = x_n/2 + b_n$ con la condición inicial $x_0 = -2$, siendo $b_n = n$ si $n \le 2$, 0 en todo otro caso y determinar además $\min\{x_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ y $\max\{x_n : n \in \mathbb{N}_0\}$. ¿Para algún valor inicial el atractor es un superatractor (esto es que es alcanzado en un número *finito* de pasos)?

♣ (Resp. Parcial) Resulta $x_n : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, $x_n = x_0 a^n + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b_k$; para el caso particular resulta que $x_1 = -1, x_2 = 1/2$ y para cualquier $n \ge 3$ es $x_n = 18/2^n$. Observar que el término b_n tiene un efecto transitorio y que finalmente $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Sí, de ser $x_0 = -20$ resulta que $\forall n \in \mathbb{N} : n \ge 3$ es $x_n = 0$. El mínimo de la sucesión es -2 y se alcanza en $n = 0$, el máximo es $9/4$ y se alcanza en $n = 3$.



7. $(+)$ Sean a_n, b_n dos funciones reales definidas para todos los naturales n tales que $n \ge n_0 \ge 0$, con $a_n \neq 0$. Hallar la solución de la ecuación lineal de primer orden $x_{n+1} = a_n x_n + b_n$ con la condición $x_{n_0} = x_0$. Resolver, además, las ecuaciones (a) $x_{n+1} = (n+1)\,x_n + (n+1)!\,2^n, x_0 = c$; (b) $x_{n+1} = 3^n x_n, x_0 = 1$; (c) $(n+1)\,x_{n+1} = n\,x_n, x_1 = 2$.

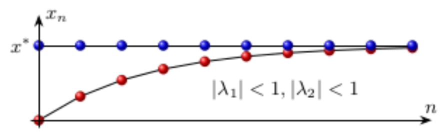
♣ (Resp. Parcial) Es $x_n : \mathbb{N}_{n_0} \to \mathbb{R}$, $x_n = x_0 \prod_{i=n_0}^{n-1} a_i + \sum_{k=n_0}^{n-1} (\prod_{i=k+1}^{n-1} a_i)\, b_k$; si $a_n = a$ queda $x_n = x_0 a^n + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b_k$; con $a \neq 1, b_n = b$ es $x_n = (x_0 - x^*)\,a^n + x^*$, solución convergente a x^* para cualquier estado inicial sii $|a| < 1$, divergente acotada sii $a = -1$, divergente no acotada sii $|a| > 1$ o $a = 1$. (a) $x_n = n!(2^n + c - 1)$; (b) $x_n = 3^{n(n-1)/2}$; (c) $x_n = 2/n$.

13. $(-)$ Escribir la solución general de $x_{n+2} + a\,x_{n+1} + b\,x_n = c$ para todos los valores de a, b, c constantes reales (considerar las distintas situaciones que conducen a soluciones de diferente tipo). ¿Cuál es la relación entre la estabilidad asintótica y las raíces del polinomio característico?

♣ (Resp. Parcial) Sea $\sigma(p) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ el espectro del polinomio característico $p(\lambda) = \lambda^2 + a\,\lambda + b$, esto es $\lambda_{1,2} = (-a \pm \sqrt{a^2 - 4b})/2$, si $1 \notin \sigma(p)$ y entonces $1 + a + b \neq 0$) y llamando $x^* = c/(1 + a + b)$, la solución general es $x_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + x^*$ si $a^2 \neq 4b$, mientras que si $a^2 = 4b$ es $\lambda_1 = \lambda_2 = -a/2$ siendo en tal caso $x_n = (c_1 + c_2 n)(-a/2)^n + x^*$. Si en cambio $1 \in \sigma(p)$ es $1 + a + b = 0$ con $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = b$, de modo que si $b \neq 1$ (y entonces $a \neq 2$) es $x_n = c_1 + c_2 b^n + cn/(1 - b)$, mientras que si $b = 1$ (y entonces $a = -2$) es $x_n = c_1 + c_2 b^n + cn^2/2$.

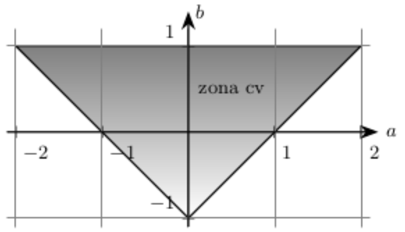
$$x_n = \begin{cases} c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \frac{c}{1+a+b} & \text{si} \quad 1 + a + b \neq 0, a^2 \neq 4b \\ (c_1 + c_2 n)(-\frac{a}{2})^n + \frac{c}{1+a+b} & \text{si} \quad 1 + a + b \neq 0, a^2 = 4b \\ c_1 + c_2 b^n + \frac{c}{1-b} n & \text{si} \quad 1 + a + b = 0, b \neq 1 \\ c_1 + c_2 n + \frac{c}{2} n^2 & \text{si} \quad 1 + a + b = 0, b = 1 \quad \text{esto es } a = -2, b = 1 \end{cases}$$

Para que $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ partiendo de cualesquiera condiciones iniciales (y entonces de cualesquiera c_1, c_2) se necesita y alcanza que $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1$ (se dice que x^* es un *atractor*); en todo otro caso, siempre pueden escogerse c_1, c_2 que hagan la sucesión x_n divergente. La figura muestra un caso de convergencia.



16. (+) Dada $x_{n+2} + a\,x_{n+1} + b\,x_n = c$ con a, b, c constantes reales, *probar* que la condición $|a| - 1 < b < 1$ es *necesaria* y *suficiente* para la convergencia de *cualquier* solución x_n (¿a qué converge?). Resolver, en particular, la ecuación $2x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 1$ y graficar algunas soluciones x_n versus n para ilustrar la convergencia.

♣ (Resp. Parcial) Es necesario y suficiente (ver ejercicio anterior) que sea menor que 1 el módulo de las raíces λ_1 y λ_2 de la ecuación característica $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$; se sabe que $\lambda_1 + \lambda_2 = -a, \lambda_1\lambda_2 = b$. Necesidad: si $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1$, debe ser $|b| < 1$ (y entonces $|b+1| = b+1$), y además $0 < (1-\lambda_1^2)(1-\lambda_2^2) = 1 - (\lambda_1+\lambda_2)^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1^2\lambda_2^2 = (b+1)^2 - a^2$, entonces $a^2 < (b+1)^2$, o bien $|a| < |b+1| = b+1$. Para la suficiencia, ver que la condición $|a| - 1 < b < 1$ equivale a las dos condiciones $-1 < b < 1, a^2 < (b+1)^2$ que escritas escritas en el lenguaje de las raíces son $|\lambda_1\lambda_1| < 1, (\lambda_1+\lambda_2)^2 < (1+\lambda_1\lambda_1)^2$, la segunda de las cuales equivale a $0 < (1-\lambda_1^2)(1-\lambda_2^2)$, de donde o bien es $0 < (1-\lambda_1^2), 0 < (1-\lambda_2^2)$ (y en ese caso es efectivamente $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1$) o bien es $0 > (1-\lambda_1^2), 0 > (1-\lambda_2^2)$ (pero esto último es imposible pues entonces resultaría $(\lambda_1\lambda_2)^2 > 1$, contra lo dicho de que $|\lambda_1\lambda_2| < 1$).



En la zona sombreada, para cualesquiera condiciones iniciales, las soluciones convergen al punto de equilibrio $x^* = \frac{c}{1+a+b}$ (observar que como $b > |a| - 1 \geq -a - 1$, es $1 + a + b > 0$). La solución general de $2x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 1$ es $x_n = (\sqrt{2}/2)^n(c_1\cos(\pi n/4) + c_2\sin(\pi n/4)) + 1$.

TP3: Grafos

Canales de YouTube que recomiendo consultar

- Wrath of Math
- Sarada Herke

Grafos no dirigidos

Sea un G = (V(G), E(G)) no dirigido cualquiera, se define:

- <u>Orden de G</u>: n(G) = |V(G)|
- <u>Tamaño de G</u>: m(G) = |E(G)|
- <u>Sucesión (creciente) de grados de G</u>: deg(G) = ($deg_G(v_1)$, $deg_G(v_2)$, ... , $deg_G(v_n)$) (donde de $deg_G(v_1) \leq deg_G(v_2) \leq \dots \leq deg_G(v_n)$)
- <u>Grado mínimo de G</u>: $\delta(G) = min_{v \in V(G)}(deg_G(v))$
- <u>Grado máximo de G</u>: $\Delta(G) = max_{v \in V(G)}(deg_G(v))$
- <u>Excentricidad de un vértice de G</u>: $\forall\ v \in V(G),\ e(v) = max_{u \in V(G),\, u \neq v}(dist(v,u))$
- <u>Diámetro de G</u>: $\varphi(G) = max_{v \in V(G)}(e(v))$
- <u>Radio de G</u>: $r(G) = min_{v \in V(G)}(e(v))$
- <u>Centro de G</u>: $C(G) = \{v \in V(G) :\ e(v) = r(G)\}$
- <u>Periferia de G</u>: $P(G) = \{v \in V(G) :\ e(v) = \varphi(G)\}$

Propiedades

Sea G = (V(G), E(G)) de orden n y tamaño m, entonces debe ser que:

- G cumple el *handshaking lemma* : $\forall v_k \in V(G) \sum_{k=1}^{n(G)} deg_G(V_k) = 2.m(G)$
  - Nótese que esta valor es un número natural **par**

- $r(G) \leq \varphi(G) \leq 2.r(G)$
  - Para probar esto recordar la **desigualdad triangular**: sean tres vértices x,y,z en V(G), entonces se cumple que:
    $dist(x,y) \ \leq dist(x,z) \ + \ dist(y,z)$
- $m(G) \leq \binom{n}{2} = \frac{n\,!}{2\,!\,(n-2)\,!} = \dots \ = \frac{n.(n-1)}{2}$
- G debe ser uno de los $2^{\binom{n}{2}}$ grafos distintos posibles.
- Si G es **simple y n(G) > 2**
  ⇒ G tiene al menos dos vértices del mismo grado [se prueba por contradicción y considerando deg(G)]
- Si deg(G) = (d_1, d_2, …, d_n) es la sucesión creciente de grados de un grafo G **sin lazos**
  ⇒ $d_n \leq d_1 + d_2 + \dots + d_{n-1}$
  [considerar que cada arista aporte en uno al grado de dos vértices]
- Todo grafo **simple** G de orden n = |V (G)| cuyo grado mínimo cumple δ(G) ≥ (n − 1)/2 es G es conexo. [Se prueba por contradicción; considerar la cantidad total de vértices por componente]
- Si G es un grafo de orden 6 = |V (G)|,
  ⇒ o bien G o bien su complemento G' contienen un triángulo
  [considerar el grafo mínimo de un vértice cualquiera en G y en su complemento para todos los casos]
- Si el diámetro del grafo simple G es φ(G) ≥ 3,
  ⇒ el diámetro de su complemento es φ(G') ≤ 3;
  si en cambio es φ(G) ≥ 4 ⇒ se tiene que φ(G') ≤ 2.
  [Considerar que los dos vértices extremos de un diámetro en G, serán adyacentes en G, y que estos dos vértices no pueden tener un ningún vértice adyacente en común]
- Si x e y son dos vértices adyacentes del grafo conexo G = (V(G), E(G)),
  ⇒ cualquiera sea z ∈ V (G) se tiene |dist(z, x) − dist(z, y)| ≤ 1).
  [Considerar que path(z,x) puede contener o no contener al vértice y
  ⇒ a la distancia de dist(x,z) hay que sumarle o restarle uno, pero no va a ser mayor que sumarle uno]
- Si un grafo tiene exactamente dos vértices de grado impar,
  ⇒ hay un camino entre esos dos vértices.
  [Considerar que estos dos vértices no pueden estar en componentes conexas distintas; considerar handshaking lemma sobre el subgrafo que representa una de estas componentes conexas]
- Un grafo simple con n = |V(G)| vértices y k componentes tiene un tamaño m = |E(G)| que cumple m ≤ (n − k)(n − k + 1)/2.
  [Mostrar que m es máximo cuando hay k-1 vértices aislados, por contradicción]

Complemento

Sea G un grafo simple.
El complemento de G, simbolizado como G', es tal que:

- |V(G')| = |V(G)|

- $\forall$ (u,v) $\in$ |E(G)| $\Rightarrow$ (u,v) $\notin$ |E(G')|
- $\forall$ (u,v) $\notin$ |E(G)| $\Rightarrow$ (u,v) $\in$ |E(G')|

Propiedades

- Si G no es conexo, entonces G' debe ser conexo.
- $\forall\, v \in V(G),\ deg_{G'}(v) = n(G) - 1 - deg_G(v)$ [La cantidad total de vértices, menos el vértice actual, menos el grado de v en el grafo G]
- deg(G) + deg(G') = deg(K_n) $\Rightarrow$ m(G) + m(G') = m(K_n)
- El complemento **preserva los isomorfismos.**
- El complemento **preserva la regularidad.**
    - Sea G un grafo k-regular $\Rightarrow$ G' es (n-1-k)- regular

Auto-complementos

Si G $\cong$ G' (isomorfo), entonces G es auto-complementario.

Propiedades

- El único ciclo autocomplementario es C_5
- n(G) = 0 (mod 4)   ó   n(G) = 1 (mod 4)
    - [Prueba: m(G) = m(G') por isomorfismo; m es un número natural por definición; m(G) + m(G') = m(K_n) por propiedad]

Isomorfismo ($\cong$)

Dos grafos simples G = (V(G), E(G)) y H = (V(H), E(H)) son isomorfos
sii
existe una función biyectiva:

f: V(G) $\rightarrow$ V(H)

tal que

$\forall$ v,w $\in$ V(G), (v,w) $\in$ E(G) $\Longleftrightarrow$ (f(v), f(w)) $\in$ E(H)

<u>Observación</u>: f es reflexiva, simétrica y transitiva $\Rightarrow$ $\cong$ es un relación de equivalencia.

Propiedades

- Los grafos simples G, H con matrices de adyacencia A_G , A_H son isomorfos
$\Longleftrightarrow$ existe una matriz de permutación P tal que $A_H = P\, A_G\, P^T$
[Considerar que permutar una matriz equivale a cambiar el nombre de sus vértices]

Invariantes de los isomorfismos

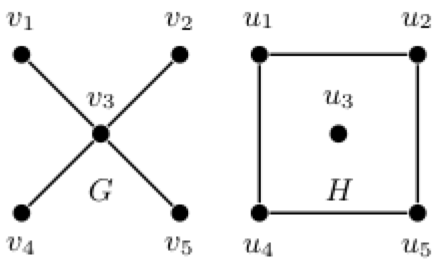
La siguiente lista muestra **algunas** de las características de los grafos que son invariantes entre isomorfismos:

- orden: n(G)

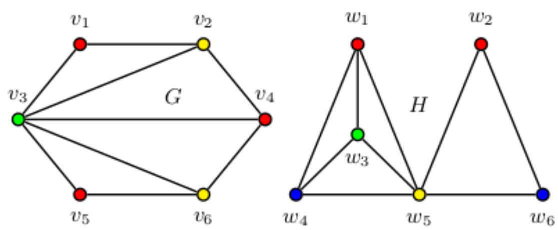
- tamaño: m(G)
- grafo mínimo: $\delta(G)$
- grado máximo: $\Delta(G)$
- radio: $r(G)$
- diámetro: $\varphi(G)$
- longitud de sus ciclos
- sucesión (creciente) de grados: deg(G)
- espectro : $\sigma(G)$ [son los autovalores de su matriz de adyacencia]
- número cromático: $\kappa(G)$
- índice cromático: $\kappa'(G)$

No isomorfismos

Grafos con mismo espectro pero NO isomorfos:

  - 

Grafos con misma sucesión de grados, mismo radio, mismo diámetro y mismo índice cromático



Matriz de adyacencia: A

Propiedades

- El elemento (i, j) de la matriz A^q representa la cantidad de caminos de longitud 'q' desde el vértice v_i hasta el vértice v_j . [por inducción]
- $\forall\ 1 \leq i \leq n(G), v_i \in V(G), \quad deg_G(v_i) = \sum_{k=1}^{n(G)} A_{(i,k)} = \sum_{k=1}^{n(G)} A_{(k,i)}$
- $m(G) = (1/2) . \sum_{k=1}^{n(G)} \sum_{i=1}^{n(G)} A_{(i,k)}$ [por *handshaking lemma*]

- A es la matriz de adyacencia de un grafo **conexo** G de orden n(G) > 1

  ⇐⇒

  Los elementos de la diagonal de la matriz: $B = \sum_{k=1}^{n-1} A^k$, **NO** son nulos
  (**También aplica grafos dirigidos fuertemente conexos**)

Espectro (autovalores)

Sea $\sigma(G) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ el **espectro de** un **grafo simple** G, es decir, su sucesión de autovalores, de su matriz de adyacencia.

Espectros frecuentes

- Sea K_n un grafo completo de orden n
  $\Rightarrow \sigma(K_n) = \{n-1, \ -1\ (n-1\ veces)\}$
- Sea $K_{r,s}$ un grafo completo bipartito de orden r + s
  $\Rightarrow \sigma(K_{r,s}) = \{\pm\sqrt{r.s},\ 0\ (r+s-2\ veces)\}$
- Sea P_n un path de orden n
  $\Rightarrow \sigma(P_n) = \{2.cos(\ k\pi\ /\ (n+1)\ ),\ k = 1,\ 2,\ \ldots, n\}$
- Sea C_n un ciclo de orden n
  $\Rightarrow \sigma(P_n) = \{2.cos(\ 2k\pi\ /\ n\ ),\ k = 1,\ 2,\ \ldots, n\}$

Propiedades

- $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0$
  [Como A es simple ⇒ A no tiene lazos ⇒ traza(A) = 0
  Además, A es simétrica a una matriz D = diag($\sigma(G)$) por D.V.S, pues A es cuadrada
  ⇒ traza(A) = traza(D)]
- $\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k)^2 = 2.m$ (donde m es el tamaño de G)
  [Considerar la matriz A^2 simétrica a una matriz D^2]
- $\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k)^3 = 6.\tau$ (donde τ es la cantidad de triángulos en G)
  [Considerar la matriz A^3 simétrica a una matriz D^3; y las aristas se cuentan por tres, y que los ciclos se pueden recorrer en dos ambos sentidos]

Matriz de incidencia: M

Propiedades

- $\forall\ 1 \le i \le n(G), v_i \in V(G), \quad deg_G(v_i) = [M.M^T]_{(i,\ i)}$
- $\forall\ 1 \le\ i \le n(G),\ 1 \le\ j \le n(G),\ i \ne j,\ v_i,\ v_j \in V(G),$
  $\Rightarrow M.M^T_{(i,j)}$ es la cantidad de aristas que conectan al vértice v_i con el vértice v_j .

Paths

Un *path* es camino que no repite vértices.

- Un path es **máximo** si es el path de mayor longitud en el grafo.
- Un path es **maximal** si no está contenido dentro de ningún otro path.
    - **Todo grafo finito** debe contener un path maximal.

Propiedades

- Si el grado mínimo de G: $\delta(G) \geq 2$ ⇒ G contiene al menos un ciclo [Probar considerando un path maximal]
- Si G tiene n vértices y al menos n aristas ⇒ G contiene un ciclo [por inducción y por propiedad anterior]
- Si un grafo G contiene cualquier camino (walk) entre dos vértices v_0 y v_n
  ⇒ contiene un camino simple (path) entre esos vértices;
- Sea G un grafo de grafo mínimo: δ(G) ≥ k
  ⇒ G tiene un camino simple (path) de longitud k.

Grafos k-regulares

G es k-regular ⇐⇒ $\forall v \in V(G),\ deg_G(v) = k \quad (con\ k \in N)$

Grafos completos

Sea G un grafo completo ⇐⇒ G es un grafo simple, tal que, $\forall v \in V(G),\ deg(v) = n - 1$

(es decir, cada vértice está conectado con todos los demás, por medio de un arista directa)

Grafos Bipartitos

Sea G un grafo bipartito ⇐⇒ Los vértices de G se pueden dividir en dos conjuntos X y Y, tales que:

- $V(G) = X \cup Y$
- $X \cap Y = \emptyset$
- $\forall\ v, w \in V(G),\ (v, w) \in E(G) \quad sii \quad v \in X,\ w \in Y \quad ó \quad v \in Y,\ w \in Y$

Propiedades

- Todo grafo bipartito es 2-coloreable
- Si G es un bipartito G(X, Y) ⇒ debe ser m ≤ |X|.|Y| ≤ [n² / 4]
  [Considerar que cada vértice en X sólo está conectado a vértices en Y; maximizar la función: f(X, Y) = |X|. |Y|]
- Un grafo G = (V (G), E(G)) es bipartito

$\Longleftrightarrow$ carece de ciclos de longitud impar.
[Probar por contradicción; considerar un ciclo de longitud impar e intentar separarlo en dos conjuntos bipartitos; considerar un vértice w y enumerar a los vértices en base a su distancia a dicho vértice luego mostrar que no puede haber una arista entre dos vértices ambos con subíndice par (o impar)]

- Un grafo de orden n ≥ 2 es bipartito
$\Longleftrightarrow$ todos sus ciclos son de longitud par [por propiedad anterior]
además la suma de sus grados no excede de n^2 [por propiedad anterior]
- Un grafo G = (V (G), E(G)) es bipartito sii sus componentes conexas son bipartitas.
[Considerar que todo subgrafo debe ser bipartito;
Considerar la particiones de cada componente y mostrar un bipartición de todo el grafo]

Grafos bipartitos frecuentes

- Grafo bipartito completo : $K_{p,\,q}$ [por definición]
- Path de orden n: P_n [por inducción]
- Ciclo de longitud par: C_{2K} ($k \in N$) [considerar que los paths son bipartitos]
- Todo árbol T = (V (T), E(T)) de orden n = |V (T)| ≥ 2 es bipartito, y la parte de mayor tamaño tiene una hoja (ambas partes, si son de igual tamaño).
[Considera que T carece de ciclos;
Para la segunda parte, usar contradicción teniendo en cuenta que m = n - 1, y que las hojas tienen grado 1]

Árboles: T

Un grafo conexo y sin ciclos T = (V(T), E(T)), con n(T) = V(T), y m(T) = E(T) es **por definición** un **árbol.**

Proposiciones equivalentes

- T es un árbol
- T no tiene ciclos y m(T) = n(T) - 1
- T es conexo y m(T) = n(T) - 1
- T es conexo minimal, es decir, la remoción la de cualquier arista desconecta al grafo
- Cualquier par de vértices en T, está conectado por **exactamente un path**
- T no tiene ciclos, y el añadido de cualquier arista crea un ciclo

[Para mostrar que T siempre tiene m(T) = n(T) - 1 aristas, usar inducción y tener en cuenta las hojas del árbol, es decir, vértices de grado igual a uno]

Propiedades

- Un grafo F = (V(F), E(F)) es un bosque (forest: **grafo que carece de ciclos**) sii para todo par x, y de vértices distintos en V(F) hay a lo sumo un path entre x e y.
[probar por contradicción]

- Todo árbol T = (V(T), E(T)) de orden n = |V(T)| ≥ 2 tiene al menos dos hojas (leafs vértices de grado 1); además, borrar una hoja de T produce un árbol de orden n − 1. Además, el cardinal de su centro C(T) es 1 o es
  [Probar por contradicción, considerando m = n -1 y handshaking lemma; Considerar T con n = 1,2,3,4 y para n >= 5 considerar que borrar todas las hojas reduce la excentricidad de todos los vértices en uno]
- Un grafo es un árbol
  ⟸⟹ carece de lazos y tiene un único árbol generador
  [Los árboles no tienen ciclos; si el aŕbol generador de G es único es porque todas las aristas de G están T ⇒ G = T]

Árboles generadores

Un árbol generador T de un grafo no dirigido G, es un subgrafo (del mismo) que es un árbol que incluye todos los vértices de G, y la mínima cantidad de aristas (para que sea un árbol). En general, un grafo G puede tener varios árboles generadores, a menos que G no sea conexo, en cuyo caso no existe un árbol generador (pero podría contener un bosque generador). Si todas las aristas de G son también aristas de su árbol generador T, entonces G es un árbol y es igual a T.

Sea G un grafo cualquier, y sea T su árbol generador ⇒ $m_T \leq m$

Construir árbol de tendido mínimo

Algoritmo de Prim

Sea G un grafo conexo cualquiera.
Sea T = (V(T), E(T)) un árbol sin vértices.

1. Agregar a V(T), un vértice cualquiera de V(G).
2. Si V(T) es igual a V(G), entonces hemos terminado, sino continuar con el paso 3
3. Agregar a E(T) la arista de menor peso de E(G), que conecte a alguno de los vértices de V(T), con alguno de los vértices de V(G), **que aún no pertenecen a V(T)**. El vértice extremo de la arista agregado que no pertenecía a V(T), es agregado a este último.
   - Si hay más de una arista de menor peso, se toma una al azar

   Volver al paso 2.

Algoritmo de Kruskal

Sea G un grafo conexo cualquiera
Sea T= (V(T), E(T)) un árbol sin vértices.

1. Agregar a E(T) la arista de menor peso en E(G), y con ella se agrega a V(T) los vértices de la arista que no pertenecen al mismo.
2. Si V(T) es igual a V(G), entonces hemos terminado, sino continuar con el paso 3.
3. Repetir el paso 1, pero agregando la condición de que la arista agregado no puede generar un ciclo en T.

Volver al paso 2.

Propiedades

- El algoritmo de Kruskal (o el de Prim) aplicado a un grafo en el que ninguna de sus ramas tienen el mismo peso, produce un árbol generador mínimo único.
  [Considerar contrareciproco :
  Sea G un grafo con al menos dos árbol generadores mínimos
  ⇒ G tiene al menos dos arista del mismo peso;
  Considerar T, T', y T'' = T' + e - e'' ; w(e'') >= w(e') >= w(e))]

Hallar camino mínimo entre dos vértices

Algoritmo de Dijkstra

No forma parte del programa

⇒ Sacar el camino mínimo a OJO !

Grafos Eulerianos

Un grafo G se denomina Euleriano si contiene un circuito (circuito : camino cerrado que no repite aristas) que incluye todas las aristas de G.

Un grafo G se denomina semi-euleriano si contiene un *trial* (trial: camino que no repite aristas) que contiene todas las aristas.

Teorema de Euler

Sea G un grafo Euleriano, y por ende, semi-euleriano $\Longleftrightarrow$ $\forall\ v \in V(G),\ deg(v)\ es\ par$

Sea G un grafo exclusivamente semi-euleriano $\Longleftrightarrow$

- $V(G) = P \cup I$, con:
  - I = {x,y}, tal que, deg(x) y deg(y) son números impares
  - $\forall v \in P = V(G) - \{x, y\}\ :\ deg(v)\ es\ par$

Grafos Hamiltonianos

Un grafo G se denomina Hamiltoniano si contiene un ciclo (ciclo: camino cerrado que no repite vértices) que incluye todos los vértices de G.

Un grafo G se denomina semi-hamiltoniano si contiene un path (path: camino que no repite vértices) que incluye todos los vértices.

Propiedades

- Si G es un grafo bipartito de orden impar ⇒ G no es hamiltoniano
  [Si G fuese Hamiltoniano ⇒ G tendría un ciclo de longitud impar: Absurdo]

Teórema de Dirac: D

Si G es un grafo **conexo, simple, sin lazos** y con n vértices, tal que,
$\forall v \in V(G), deg(v) \geq n/2$ ⇒ (**ENTONCES**) G es Hamiltoniano

Teorema de Ore: O

Si G es un grafo **conexo, simple y sin lazos** con n vértices, con n ≥ 3, tal que,
$\forall\ v, u \in V(G):\ deg_G(v)\ +\ deg_G(u) \geq n$ (con v y u no adyacentes)
⇒ (**ENTONCES**) G es Hamiltoniano

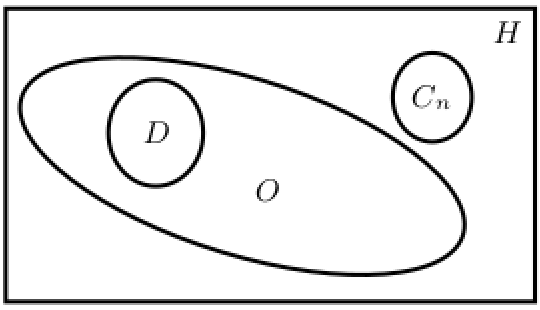
Ciclos: C

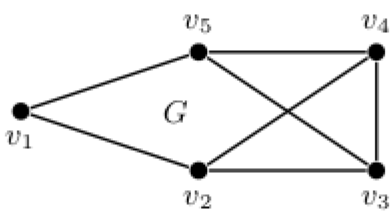
Todos los ciclos **son** grafos **Hamiltonianos**

Grafo bipartito completo : $K_{p,q}$

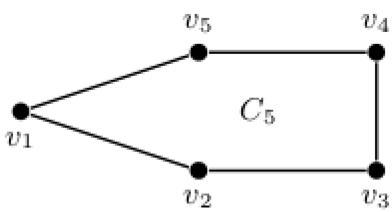
$\forall\ p,\ q\ \in N:\ p\ y\ q\ son\ números\ pares$ ⇒ El grafo completo bipartito: $K_{p,q}$ es euleriano

Universo





G cumple Ore pero no Dirac



C_5 es un ciclo que no cumple Ore, y por lo tanto, no cumple Dirac

Puntos de articulación

Un punto de articulación es un vértice tal que al ser removido del grafo al que pertenece, entonces divide al mismo en al menos dos componentes conexas.

Si un grafo tiene un punto de articulación, entonces **no** puede ser hamiltoniano. Esto también aplica para digrafos.

Grafos Planares

Un grafo G es planar
⇐⇒
G admite una representación en plano con aristas solo intersecadas eventualmente en vértices.

Grafo Dual

Un grafo dual G* de un grafo planar G es un grafo que tiene un vértice por cada cara de G, y una arista por cada arista en G uniendo a dos caras vecinas.

Grafos completos planares

Los grafos completos **K_1, K_2, K_3, K_4, son planares**.
A partir del grafo completo **K_5 en adelante** ya **NO** son planares.

Los grafos completos bipartitos **$K_{1,1}$, $K_{2,2}$ son planares**.
A partir del grafo completo bipartito **$K_{3,3}$ en adelante ($K_{n,n}$)** ya **NO** son planares.

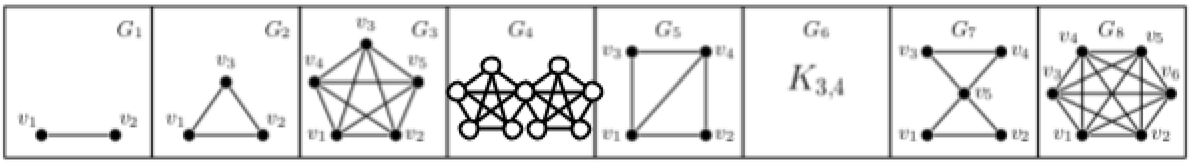
Propiedades

Sea G un grafo cualquiera:

- Si G es **conexo y planar** ⇒ cumple la **fórmula de Euler** : n(G) - m(G) + f(G) = 2
  (donde f(G) es la cantidad de caras de G)
- Si G es **conexo y planar** ⇒ cumple el *faceshaking lemma:* $\sum_{k=1}^{f(G)} deg_G(f_k) = 2 \,.\, m$
  (donde f_k es la cara k de G)
- Si G* es el grafo **dual del** grafo **conexo y planar** G
  ⇒ G* tiene f(G) vértices, n(G) caras, y m(G) aristas.
- Si G es un grafo **simple y planar** con $n \geq 3$
  ⇒ $m \leq 3 \,.\, (n-2)$
  - y si G no tiene triángulos ⇒ $m \leq 2.(n-2)$

- **No existe** G **simple y planar**, tal que **su complemento** sea **planar** y de **orden n>10**
- Si G es **planar y conexo** de orden **n > 2** ⇒ G tiene **al menos un vértice v** de grado: $deg(v) \leq 5$
- Si G es un grafo **planar** ⇒ G es **5-colorable**

Grafos Eulerianos, Hamiltonianos y/o Planares



Grafo Arista: L(G)

Sea G un grafo **sin lazos**, se define el grafo-arista L(G) , como el grafo obtenido tomando las aristas de G como vértices de L(G) y uniendo dos de estos vértices siempre que sus correspondientes aristas en G tengan un vértice común.

Grafos frecuentes

- Sea K_n un grafo completo de orden n ⇒ $L(K_n)$ es un grafo [2.(n-2)]-regular. Entonces debe ser que:
  - $n(L(K_n)) = n(n-1)/2$
  - $m(L(K_n)) = n(n-1)(n-2)/2$
- Sea $P_{n>2}$ un path de orden n ⇒ $L(P_n) = P_{n-1}$
- Sea $C_{n>2}$ un ciclo de orden n ⇒ $L(C_n) = C_n$

Propiedades

- $Si\ u \in V(L(G)),\ corresponde\ a\ la\ arista\ (x,y) \in E(G)$
  $\Rightarrow\ deg_{L(G)}(u)\ =\ deg_G(x) + deg_G(y)$
- G es isomorfo a L(G) ⇐⇒ G es 2-regular
  - Si G es 2-regular y es conexo ⇒ G es un ciclo de orden n
  - Si G es 2-regular y NO es conexo ⇒ G es la unión disjunta de ciclos C_k cuyos órdenes suman n
    En ambos casos, **G es planar** y $\kappa(G)\ =\ \kappa(C_n)\ = \kappa'(C_n)\ =\ \kappa'\ (G)$
- $L(G) = K_n$ con n > 3 ⇒ $G = K_{1,n}$
- Sea G un grafo de orden n, tamaño m, tal que, deg(G) = (d1,d2, …, dn)
  ⇒
  n(L(G)) = m [por definición]
  $m(L(G)) = \sum_{k=1}^{n} \binom{deg(v_k)}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{deg(V_k).[deg(v_k)-1]}{2} = (1\ /\ 2).\ \sum_{k=1}^{n} \{[deg(v_k)]^2\ -\ m\}$
  [Por cada vértice, cada arista saliente del mismo, es adyacente a otras $deg_G(v_k)$ - 1 aristas, que también salen de este vértice]

- Si G es Euleriano ⇒ L(G) es Euleriano y Hamiltoniano
- Si G es Hamiltoniano ⇒ L(G) es Hamiltoniano

Coloración de grafos

Sea G un grafo **sin lazos**.

Una k-coloración de vértices es una asignación de k colores a los vértices de modo que dos vértices adyacentes tengan distinto color. El menor k para el que G tiene una k-coloración de vértices se designa $\kappa(G)$ y se llama número cromático.

Una k-coloración de aristas es una asignación de k colores a las aristas de modo que dos aristas adyacentes tengan distinto color. El menor k para el que G tiene una k-coloración de vértices se designa $\kappa'(G)$ y se llama índice cromático.

Coloraciones frecuentes

- Sea C_n un ciclo de orden n,
  - Si n es par ⇒ $\kappa(C_n) = \kappa'(C_n) = 2$ con n > 1
  - Si n es impar ⇒ $\kappa(C_n) = \kappa'(C_n) = 3$ con n > 2
- Sea W_n una rueda de orden n, es decir, un grafo en el que un vértice está conectado a todos los demás vértices que, a su vez, forman un ciclo de orden (n-1).
  - Si n es par ⇒ $\kappa(W_n) = 3$
  - Si n es impar ⇒ $\kappa(W_n) = 4$
  - $\kappa'(W_n) = ???$
- Sea P_n un path de orden n
  - $\kappa(P_n) = 2$ con n > 1
  - $\kappa'(P_n) = 2$ con n > 2
- Sea K_n un grafo completo de orden n
  - $\kappa(K_n) = n$
  - $\kappa'(K_n) =???$
- Sea $K_{p,q}$ un grafo bipartito formado por dos conjuntos bipartitos de p y q vértices, respectivamente.
  - $\kappa(K_{p,q}) = 2$
  - $\kappa'(K_{p,q}) = max(p, q)$
- Sea Q_n un grafo hypercubico de orden n
  - $\kappa(Q_n) = 2$
  - $\kappa'(Q_n) =???$
- Sea F un bosque.
  - $\kappa(F) = 2$
  - $\kappa'(F) =???$

Propiedades

- Si G contiene a un grafo completo $K_n \Rightarrow \kappa(G) \geq n = \kappa(K_n)$
- Sea $\Delta = \Delta(G)$: *grado máximo de G*, entonces:
    - $\kappa(G) \leq \Delta + 1$
    - $\Delta \leq \kappa'(G) \leq \Delta + 1$
- Si G es k-coloreable ⇒ G es particionable en k clases disjuntas, donde, en cada clase, los elementos pertenecientes a la misma, solo son adyacentes a elementos de las otras clases.
    - Una de estas clases debe tener al menos $n / \kappa(G)$ elementos.
- $\kappa(G) . \kappa(G') \geq n = |V(G)|$

Corte de vértices y aristas

Sea un grafo G = (V(G), E(G)) **conexo**.

Corte de vértices: S

Sea S ⊂ V(G),

S es un **corte de vértices**

SII

G - S tiene más de una componente, y la remoción de solo algunos vértices de S no desconecta a G.

Corte de aristas: F

Sea F ⊂ E(G)

F es un **corte de aristas**

SII

G - F tiene más de una componente, y la remoción de solo algunas aristas de F no desconecta a G

Vértices conectividad: κ(G)

Es el mínimo cardinal de S, tal que, G - S es no conexo o tiene un solo vértice.

Si k ≤ κ(G) , entonces el grafo G es **k-vértice-conexo**

Arista conectividad: λ(G)

Es el mínimo cardinal de F, tal que, G - F es no conexo.

Si k ≤ λ(G) , entonces el grafo G es **k-arista-conexo**

Propiedades

Sea δ(G) el **mínimo grado** de G, se verifica que:

$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$

Conectividades frecuentes

- $K_n \Rightarrow \kappa(K_n) = \lambda(K_n) = \delta(K_n) = n - 1$
- $K_{1,q} \Rightarrow \kappa(K_{1,q}) = \lambda(K_{1,q}) = \delta(K_{1,q}) = 1$
- $K_{p,q} \Rightarrow \kappa(K_{p,q}) = \lambda(K_{p,q}) = \delta(K_{p,q}) = min(p, q)$
- C_n , n ≥ 2 $\Rightarrow \kappa(C_n) = \lambda(C_n) = \delta(C_n) = 2$
- P_n , n ≥ 2 $\Rightarrow \kappa(P_n) = \lambda(P_n) = \delta(P_n) = 1$
- T , |V(T)| ≥ 2 $\Rightarrow \kappa(T) = \lambda(T) = \delta(T) = 1$

Separación de Paths

Sea un grafo G = (V(G), E(G)) **conexo**.
Sean s y t ∈ V(G).

Dos o más s-t *paths* son **arista-disjuntos si** no comparten aristas

Un subconjunto de E(G) separa a s de t **si** su remoción destruye todo *path* entre s y t.

Dos o más s-t *paths* son **vértice-disjuntos si** no comparten vértices (excepto los extremos s y t).

Un subconjunto de V(G) separa a s de t **si** su remoción destruye todo *path* entre s y t.

Propiedades

La máxima cantidad de *paths* aristas-conjuntos es igual a la cantidad de aristas que separan s de t. [por teorema de Menger]

La máxima cantidad de *paths* vértices-conjuntos es igual a la cantidad de vértices que separan s de t. [por teorema de Menger]

Teorema de Menger

Sean s y t dos vértices no adyacentes en un grafo G.
La mínima cantidad de vértices en un s-t_corte de G, es igual a la máxima cantidad de s-t_*paths*_vértice-disjuntos.
[Se demuestra por inducción evaluando distintas cantidades de aristas por grafo]

Grafos dirigidos (D)

Propiedades

- En un grafo orientado G = (V(G), E(G)) con n = |V (G)| se verifica que $\sum_{k=1}^{n} deg^{+}(v_k) = \sum_{k=1}^{n} deg^{-}(v_k)$; si además el grafo subyacente K_n , se cumple $\sum_{k=1}^{n} [deg^{+}(v_k)]^2 = \sum_{k=1}^{n} [deg^{-}(v_k)]^2$
  [Probar handshaking dilemma por inducción, considerando que cada arista aumenta en uno el grado positivo y negativo de dos vértices;
  Para la segunda parte, tener en cuenta que la $deg_G^{+}(v_k) + deg_G^{-}(v_k) = n - 1$; y usar la parte anterior]

Fuertemente conexo

Un grafo dirigido D es fuertemente conexo, si desde cualquier vértice se puede llegar a cualquier otro.

Handshaking di-lemma

$\sum deg^{+}(vi) = \sum deg^{-}(vi) = |E(G)| = m$

Grafo subyacente

Sea D un digrafo. El grafo subyacente de D es el grafo que se obtiene reemplazando cada arco (orientado) de D por una arista no orientada.

Isomorfismo

Dos grafos G y H son isomorfos **sii**
sus grafos no dirigidos son isomorfos, **y**
la dirección y sentido de sus aristas correspondientes son las mismas.

Euler para digrafos

D = (V, E)

- es euleriano **sii**
  - $\forall v \in V(D), deg^{+}(v) = deg^{-}(v)$
- es semi-euleriano desde un vértice x hasta un vértice y, **sii**
  - $\forall v \in V(D) - \{x,y\}, deg^{+}(v) = deg^{-}(v)$
  - $deg^{+}(y) = deg^{-}(y) + 1$

- $deg^-(x) = deg^+(x) + 1$

Hamilton para digrafos

Ver a ojo !

Matriz de adyacencia vs sucesión de grados

Sea A la matriz de adyacencia de un grafo G.
Sea $deg^+(G)$ la sucesión de grados positivos de G
Sea $deg^-(G)$ la sucesión de grados negativos de G.

Para cada fila de A, la sumatoria de sus elementos resulta en alguno de los grados pertenecientes a $deg^-(G)$.
Para cada columna de A, la sumatoria de sus elementos resulta en alguno de los grados pertenecientes a $deg^+(G)$.

Transformar grafo no dirigido a grafo dirigido fuertemente conexo con DFS

En todo grafo conexo sin puentes puede introducirse una orientación tal que resulte fuertemente conexo: basta enumerar sus vértices con subíndices crecientes en el proceso de construcción de búsqueda en profundidad (DFS: depth first search) de un árbol generador, orientando las aristas del árbol como (v_i , v_j), $i < j$, mientras que las restantes como (v_j , v_i), $i < j$.

Tournaments

Grafo orientado con grafo subyacente completo.
Se obtiene asignándole una dirección a cada arista de un grafo completo no dirigido.

Red de transporte

Sea G = (V, E) un grafo **dirigido** (grafo con sus aristas orientadas) **conexo sin lazos**. G **es una red de transporte si**:

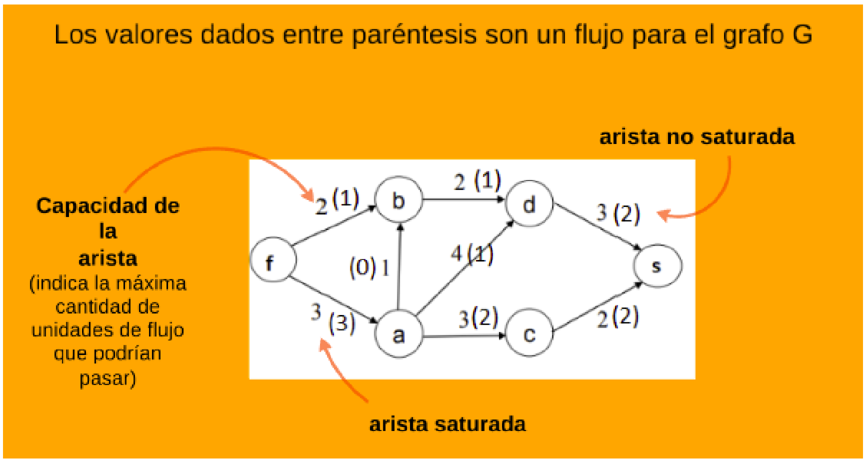
- **Existe un único vértice** s (FUENTE) tal que el grado positivo de s es cero (**no llegan flechas**)
- **Existe un único vértice** t (SUMIDERO) tal que el grado negativo de t es cero (**no salen flechas**).
- **Existe una función** $C: E \to N_0$ que **asigna** a **cada arista una capacidad**

Flujo de una red de transporte

Sea G = (V, E) una red de transporte, se llama **flujo** de G, a una **función** $F: E \to N_o$, tal que:

- La cantidad de **flujo transportado por cada arista es menor o igual a la capacidad**.
- El **flujo que entra** a un determinado vértice es **igual** a la **cantidad que sale** desde ese vértice.

Ejemplo:



Teorema: Flujo de entrada es igual a flujo de salida

Si F es un flujo en una red de transporte, se cumple que:
$\sum_{w \in V} F(s, w) = \sum_{w \in V} F(w, t)$

Valor de flujo

Se llama VALOR DE FLUJO a la suma de todos los flujos de todas las aristas que salen del vértice fuente, es decir:

$$val(F) = \sum_{v \in V} F(s, v)$$

Corte en una red de transporte

Un corte (S, T) en una red de transporte G = (V, E) son dos conjuntos disjuntos S y T, tal que:

- $S \subset V, T \subset V$
- $S \cup T = V$
- $s \in S, t \in T$

Capacidad de un corte

$$c(S, T) = \sum_{v \in S} \sum_{w \in T} c(v,w)$$

Teorema: Capacidad de un corte limita el valor de flujo

Sea F un flujo de la red G = (V, E), y sea (S, T) un corte de G, entonces:

$$c(S, T) \geq val(F)$$

Teorema: Flujo máximo igual a capacidad del corte minimal

Para una red de transporte el flujo máximo que se puede obtener es igual a la capacidad mínima sobre todos los cortes de la red (y a este corte los llamaremos corte minimal)

Algoritmo de Ford Fulkerson

1. Arrancar con un flujo compatible
2. Etiquetar a la fuente con (-, oo)
3. Etiquetar vértices adyacentes a los ya etiquetados
4. Si etiqueté el sumidero, mejoró la red, y vuelvo a 2.
5. Si no puedo etiquetar más, y no llegue al sumidero → FIN

Etiquetado de los vértices

Paso 1: Dada una Red definimos un flujo inicial compatible

Paso 2: Etiquetamos la fuente a con $(-,\ \infty)$

Paso 3: Para cualquier vértice x adyacente a a, etiquetamos a x como sigue:

a) **Si $c(a,x) - f(a,x) > 0$ definimos: $\Delta x = c(a,x) - f(a,x)$ y etiquetamos x con $(a^+, \Delta x)$**
b) **Si $c(a,x) - f(a,x) = 0$ dejamos x sin etiquetar**

Paso 4: Mientras exista $x \neq a$ tal que x este etiquetado y exista una arista (x,y) tal que y no este etiquetado, etiquetamos al vértice y como sigue:

a) **Si $c(x,y) - f(x,y) > 0$ definimos $\Delta y = mín\,\{\Delta x, c(x,y) - f(x,y)\}$ y etiquetamos al vértice y como $(x^+, \Delta y)$**
b) **Si $c(x,y) - f(x,y) = 0$ dejamos y sin etiquetar**

Paso 5: De forma análoga, mientras exista un vértice $x \neq a$ tal que x este etiquetado y exista una arista (y,x) tal que y no este etiquetado, etiquetamos el vértice y como sigue:

a) **Si $f(y,x) > 0$ etiquetamos el vértice y como $(x^-, \Delta y)$ donde $\Delta y = mín\{\Delta x, f(y,x)\}$**
b) **Si $f(y,x) = 0$ dejamos a y sin etiquetar**

Alcance de un vértice

El alcance de un vértice $a(u_i)$, es el conjunto de todos los vértices u_j tales que hay un camino (orientado) desde u_i hasta u_j .

MIT- Flujo (*Network flow*)

Sean s y t, dos vértices en un digrafo G = (V(G), E(G)), donde s es la fuente (source): $deg^{+}(s) = 0$, y t es la pozo o sumidero (sink): $deg^{-}(t) = 0$.
Cada arista (u,v) perteneciente a E(G), tendrá una capacidad no negativa C(u,v).
Si una arista (a,b) no pertenece a E(G), asumimos que C(a,b) = 0

Un flujo en un digrafo G = (V(G), E(G)), es una función f: VxV → R, que satisface los siguiente:

- Restricción de capacidad: $\forall$ u,v $\in$ V, f(u,v) ≤ C(u,v)
- Conservación del flujo: $\forall$ u $\in$ V - {s,t}: $\sum_{v \in (G)V} f(u,v) = 0$

Simetría sesgada (*skew symmetry*): $\forall$ u,v $\in$ V, f(u,v) = - f(v,u)

Propiedades

f(X,X) = 0
f(X,Y) = - f(Y,X)
f(X ∪ Y, Z) = f(X,Z) + f(X,Y) si X ∩ Y = ∅

Valor del flujo (*flow value*): |f|

$|f| = \sum_{v \in V(G)} f(s,v) = f(s, V(G))$

Teorema: |f| = f(V(G), t)

Prueba
|f| = f(s, V)
= f(V, V) - f(V - s, V) [por propiedad 3]
= 0 - f(V - s, V) [por propiedad 1]
= - f(V - s, V)
= + f(V, V - s) [por propiedad 2 / simetría sesgada]
= f(V, t) + f(V, V - s - t)
= f(V, t) - f(V - s - t, V) [por propiedad 2 / simetría sesgada]
= f(V, t) - 0 [por conservación del flujo]
= f(V, t)

Cortes de flujo

Un corte (S, T), de una red de flujo G = (V, E), es una partición de V, tal que, s ∈ S, t ∈ .
Si f es un flujo en G, entonces el flujo a través del corte (S, T), es f(S, T).

Corte de flujo en relación al valor de un flujo

Lema:
Para cualquier flujo f, y para cualquier corte de flujo (S, T), tenemos que:

$$|f| = f(S, T), \text{ para cualquier corte de flujo } (S, T)$$

Prueba:
f(S, T) = f(S, V) - f(S, S) [Puesto que S u T = V]
= f(S, V) - 0 [Por propiedad 1]
= f(S, V)
= f(s, V) + f(S - s, V)
= f(s, V) + f(S - s - t, V) [S no contiene a t por definición, por lo que S - t = S]
= f(s, V) + 0 [por ley de conservación del flujo]
= |f|

Corolario:
El valor de cualquier flujo está limitado por la capacidad de cualquier corte de flujo:

$$|f| \leq c(S, T), \text{ para cualquier corte de flujo } (S, T)$$

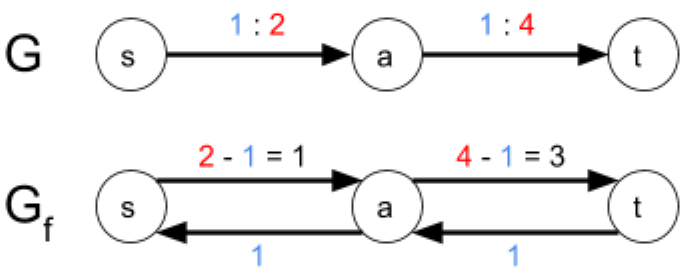
Grafo residual: G_f

Dado un digrafo G, se define su grafo residual, $G_f = (V, Ef)$, con capacidades residuales estrictamente mayores a cero:

$$c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v) > 0$$

Las aristas en E_f admiten más flujo.

Observación:
Si $(v,u) \notin E_f$, entonces c(v,u) = 0, pero f(v,u) = - f(u,v) [por simetría sesgada]



Augmenting path: es cualquier *path* entre s y t, en G_f

Capacidad residual de un *augmenting path*: $c_f(p) = \min_{(u,v) \in p} c_f(u,v)$

Teorema del máximo flujo y el corte mínimo (*Max flow min cut theorem*)

Las siguientes declaraciones son equivalentes:

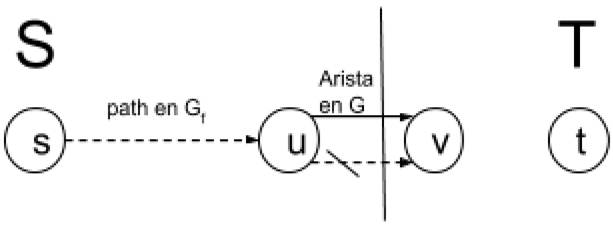
1. $|f| = c(S, T)$ para algún corte (S, T)
2. f es el flujo máximo
3. f no admite *augmenting paths*

Observación: 3 => 2

Prueba:
1 => 2
Dado que $|f| \leq c(S, T)$, entonces para cualquier corte (S, T), si $|f| = c(S, T)$ implica que f es un flujo máximo (porque no se puede incrementar)

2 => 3
Si existiese un *augmenting path*, entonces el flujo podría aumentarse, lo cual contradice la hipótesis de que el flujo es máximo. Por lo tanto, no puede existir un *augmenting path.*

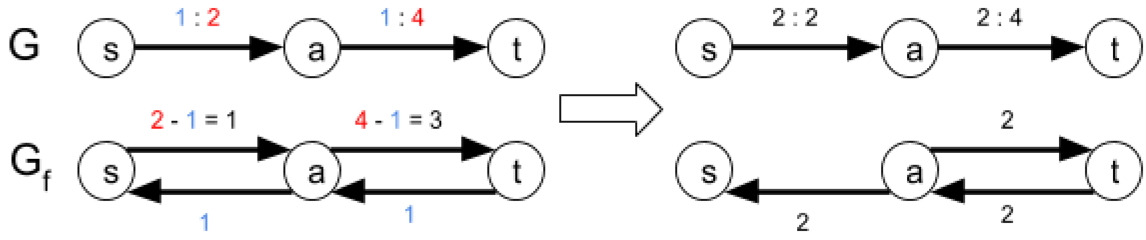
3 => 1
Suponemos que f no admite *augmenting paths*.
Definimos:
$S = \{u \in V$, entonces existe un *path* en G_f de s hasta u$\}$
$s \in S$
$T = V - S$
$t \in T$
Por lo tanto, (S, T) es un corte.



Observación: $c_f(u,v) = 0$
Dado que, si hubiese sido que $c_f(u,v) > 0$, entonces $v \in S$, y $v \notin T$ (que es lo que habíamos asumido inicialmente)
Por lo tanto, debe ser que: $f(u,v) = c(u,v)$,
y entonces: $c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v) = 0$ (que es lo que habíamos observado inicialmente).
En conclusión: $\forall\ u \in S,\ v \in T$, se obtiene que $f(S, T) = c(S, T)$

Algoritmo de Ford-Fulkerson

f[u,v] ← 0 para todo (u,v)
while an augmenting path in G_f exists
    do augment f by $c_f(p)$


G
1 : 2
1 : 4
s
a
t
G_f
2 - 1 = 1
4 - 1 = 3
1
1
2 : 2
2 : 4
2
2
2