Análisis de Reducción de Dimensionalidad y Compresión de Imágenes utilizando Descomposición de Valores Singulares

Métodos Numéricos y Optimización
Trabajo práctico N°3

Timoteo Menceyra y Alejo Zimmermann

Universidad de San Andrés, Buenos Aires, Argentina

1er Semestre 2024

Resumen

Este informe explora la aplicación de la Descomposición de Valores Singulares (SVD) para la reducción de dimensionalidad y compresión de imágenes. Se analizan dos casos: reducción de dimensionalidad de un conjunto de datos multidimensional y compresión de imágenes. En el primer caso, se evalúa el impacto de diferentes dimensiones reducidas en la preservación de similitud entre muestras y el rendimiento de predicción lineal. En el segundo, se estudia la calidad de reconstrucción de imágenes comprimidas y la similitud entre imágenes en espacios de baja dimensión. Los resultados resaltan la eficacia de SVD como técnica para reducción de dimensionalidad y compresión de datos.

1. Introducción

La Descomposición de Valores Singulares (SVD) es una técnica fundamental en el análisis de datos y procesamiento de señales. Esta descomposición matricial permite factorizar una matriz en tres componentes: matrices ortogonales y una matriz diagonal de valores singulares. La SVD tiene numerosas aplicaciones, incluyendo la reducción de dimensionalidad y la compresión de datos. La reducción de dimensionalidad es un proceso crucial en el análisis de conjuntos de datos de alta dimensión. Estos conjuntos a menudo contienen redundancias y ruido, lo que dificulta su visualización e interpretación. La SVD permite proyectar los datos a un espacio de dimensión reducida, preservando la mayor cantidad posible de información relevante y facilitando el análisis y la visualización de patrones subyacentes. Por otro lado, la compresión de imágenes es una tarea fundamental en el procesamiento de imágenes digitales. Las imágenes digitales suelen requerir una gran cantidad de espacio de almacenamiento y ancho de banda para su transmisión. La SVD ofrece una técnica eficiente para comprimir imágenes, reduciendo su tamaño sin comprometer significativamente la calidad visual. En este informe, se exploran dos casos de estudio que aprovechan la potencia de la SVD. El primero se centra en la reducción de dimensionalidad de un conjunto de datos multidimensional, analizando el impacto de diferentes dimensiones reducidas en la preservación de similitud entre muestras y el rendimiento de predicción lineal utilizando mínimos cuadrados. El segundo caso aborda la compresión de imágenes, estudiando la calidad de reconstrucción de imágenes comprimidas, la similitud entre imágenes en espacios de baja dimensión y determinando el número mínimo de dimensiones necesarias para garantizar un error de reconstrucción aceptable.

2. Métodos

3. Métodos

En este trabajo utilizamos la Descomposición de Valores Singulares (SVD) para reducir la dimensionalidad de un conjunto de datos multidimensional y comprimir imágenes.

3.1. Descomposición de Valores Singulares (SVD)

La Descomposición de Valores Singulares (SVD) es una técnica matemática que factoriza una matriz en tres componentes: una matriz de vectores singulares izquierdos, una matriz diagonal de valores singulares y una matriz de vectores singulares derechos. La SVD se define para cualquier matriz A de tamaño $m \times n$ como:

$$A = U\Sigma V^T$$

donde U es la matriz de vectores singulares izquierdos de tamaño $m \times m$, Σ es la matriz diagonal de valores singulares de tamaño $m \times n$ y V^T es la matriz de vectores singulares derechos de tamaño $n \times n$.

3.2. Reducción de dimensionalidad: Análisis de Componentes Principales (PCA)

En la reducción de dimensionalidad, utilizamos el método de Análisis de Componentes Principales (PCA). PCA es una técnica estadística que permite transformar un conjunto de variables correlacionadas en un nuevo conjunto de variables no correlacionadas llamadas componentes principales. Estos componentes principales capturan la mayor parte de la variabilidad de los datos originales y se ordenan en función de su importancia.

El cálculo de PCA se realiza a través de los siguientes pasos:

1. Calculamos la matriz de covarianza de los datos originales. 2. Calculamos los autovectores y autovalores de la matriz de covarianza. 3. Ordenamos los autovectores en función de sus autovalores, de mayor a menor. 4. Seleccionamos los primeros k autovectores correspondientes a los k componentes principales. 5. Proyectamos los datos originales en el espacio de los k componentes principales.

La fórmula para la proyección de los datos originales en el espacio de los k componentes principales es:

$$X_{\text{proy}} = X \cdot V_k$$

donde X_{proy} es la matriz de datos proyectada, X es la matriz de datos originales y V_k es la matriz de autovectores correspondientes a los k componentes principales.

3.3. Fórmula de similitud: Distancia Euclidiana

La fórmula para definir la similitud entre dos muestras o imágenes es la distancia euclidiana. La distancia euclidiana entre dos puntos en un espacio n-dimensional se calcula como la raíz cuadrada de la suma de las diferencias al cuadrado de cada coordenada. En el caso de imágenes, la distancia euclidiana se calcula comparando los valores de los píxeles en cada posición.

La fórmula de la distancia euclidiana entre dos puntos x y y en un espacio n-dimensional es:

$$\text{dist}(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

4. Implementación

4.1. Compresión de imágenes

En cuanto a la compresión de imágenes, aplicamos la SVD a la matriz de píxeles de la imagen y seleccionamos las primeras k columnas de la matriz de valores singulares. Luego, multiplicamos las matrices resultantes para obtener una aproximación de la imagen original con menor tamaño.

La fórmula para la reconstrucción de la imagen comprimida es:

$$\hat{I} = U_k \Sigma_k V_k^T$$

donde $\hat{I}$ es la imagen reconstruida, U_k, Σ_k y V_k^T son las matrices truncadas de U, Σ y V^T respectivamente, que contienen solo las primeras k columnas.

En ambos casos, evaluamos el impacto de diferentes valores de k en la calidad de los resultados. Además, medimos la similitud entre las muestras o imágenes originales y sus versiones reducidas o comprimidas utilizando métricas como la distancia euclidiana o el error de reconstrucción.

Finalmente, utilizamos técnicas de visualización para representar los datos reducidos en un espacio de menor dimensión y compararlos con los datos originales. También comparamos visualmente las imágenes originales y sus versiones comprimidas para evaluar la calidad de la compresión.

5. Resultados y análisis

6. Conclusión