

Entrega 3

Diseño de Controladores

Alejandro Jarabo Peñas y Miguel Taibo Martínez

Junio 2020

Índice

| | |
|---|-----------|
| 1. Análisis de controladores | 2 |
| 1.1. Controlador Proporcional | 2 |
| 1.1.1. Análisis visual del efecto de los parámetros de diseño | 3 |
| 1.2. Controlador Proporcional Derivativo | 4 |
| 1.2.1. Análisis visual del efecto de los parámetros de diseño | 6 |
| 1.3. Controlador Proporcional-Derivativo | 7 |
| 1.3.1. Análisis visual del efecto de los parámetros de diseño | 8 |
| 1.4. Controlador Proporcional Integral | 10 |
| 1.4.1. Análisis visual del efecto de los parámetros de diseño | 11 |
| 1.5. Controlador Proporcional Integral Derivativo y Controlador Proporcional Integral-Derivativo | 13 |
| 1.5.1. Análisis visual del efecto de los parámetros de diseño | 15 |
| 1.6. Controlador Proporcional Integral Derivativo-Derivativo | 19 |
| 1.6.1. Análisis visual del efecto de los parámetros de diseño | 21 |
| 1.7. Controlador Derivativo Proporcional Integral Derivativo | 23 |
| 1.7.1. Análisis visual del efecto de los parámetros de diseño | 24 |
| 2. Análisis y diseño de un sistema de control D PID | 27 |
| 2.1. Análisis de la estabilidad | 27 |
| 2.2. Seguimiento a las señales monómicas: escalón, rampa y parábola | 28 |
| 2.3. Sintonización de parámetros | 29 |
| 3. Implementación y Análisis de un controlador D PID en el Telaboratorio | 32 |
| 3.1. Implementación de un controlador D PID en el Telaboratorio | 32 |
| 3.2. Implementación de los diseños anteriores | 32 |
| 3.3. Análisis de los resultados | 33 |
| 3.4. Análisis en régimen permanente y transitorio | 37 |
| 3.4.1. Sinusoide | 37 |
| 3.4.2. Rampa | 38 |
| 3.4.3. Parábola | 39 |
| 4. Conclusiones y futuras líneas de investigación | 41 |
| 4.1. Futuras líneas de investigación | 41 |
| 5. Bibliografía | 42 |

1. Análisis de controladores

1.1. Controlador Proporcional

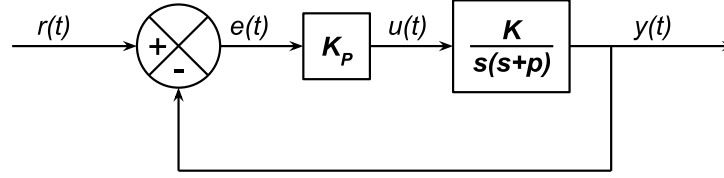


Figura 1: Lazo cerrado con controlador proporcional.

$$\left. \begin{aligned} E(s) &= R(s) - Y(s) \\ U(s) &= K_p E(s) \\ Y(s) &= \frac{K}{s(s+p)} U(s) \end{aligned} \right\} \Rightarrow H_P(s) = \frac{K_p K}{s^2 + ps + K_p K} \quad (1)$$

Observamos que la función de transferencia, $H_P(s)$, coincide con la primera forma canónica de los sistemas de segundo orden, $\mathcal{G}_1(s)$:

$$\mathcal{G}_1(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2)$$

Luego:

$$H_P(s) = \mathcal{G}_1(s) \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{K_p K} \\ \zeta &= \frac{p}{2\omega_n} = \frac{p}{2\sqrt{K_p K}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow K_p K = \frac{p}{2\zeta} \quad (3)$$

Por lo que podemos escribir la función de transferencia, tomando $s = ps_1$:

$$H_P(s) = \frac{p^2/4\zeta^2}{s^2 + ps + p^2/4\zeta^2} = \frac{1/4\zeta^2}{s_1^2 + s_1 + 1/4\zeta^2} \quad (4)$$

Sabemos que si el coeficiente de amortiguamiento, ζ , aumenta, lo que ocurre cuando K_p desciende, los tiempos de respuesta (t_r), pico (t_p) y establecimiento (t_s) bajan mientras el la sobreelongación máxima, M_p , aumenta.

A partir de estos calculamos la función de transferencia del error:

$$H_{e,P}(s) = 1 - H_P(s) = \frac{s^2 + ps}{s^2 + ps + K_p K} \quad (5)$$

Y los errores del seguimiento de las funciones monómicas (escalón, rampa y parábola), aplicando el teorema del valor final:

$$\begin{aligned} e_{P,0}(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \frac{s^2 + ps}{s^2 + ps + K_p K} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sp}{K_p K} = 0 \\ e_{P,1}(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2} \frac{s^2 + ps}{s^2 + ps + K_p K} = \frac{p}{K_p K} = \frac{4\zeta^2}{p} \\ e_{P,2}(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^3} \frac{s^2 + ps}{s^2 + ps + K_p K} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{p}{s K_p K} = \infty \end{aligned}$$

1.1.1. Análisis visual del efecto de los parámetros de diseño

Usando los parámetros del motor para el que vamos a diseñar el controlador en 2:

$$K_m = 2652,28$$

$$p_m = 64,986$$

Hemos visualizado el comportamiento de las respuestas al escalón y al seguimiento de las señales monómicas en función del parámetro de diseño ζ , haciendo $\beta = 0$ y $\beta_2 = 2$, al ser las condiciones para obtener un controlador P a partir de un PID.

Respuesta al escalón Como se puede observar, al crecer ζ la sobreelongación máxima (M_p) disminuye, mientras que el tiempo de establecimiento (t_r) y el tiempo de subida (t_s) aumentan.

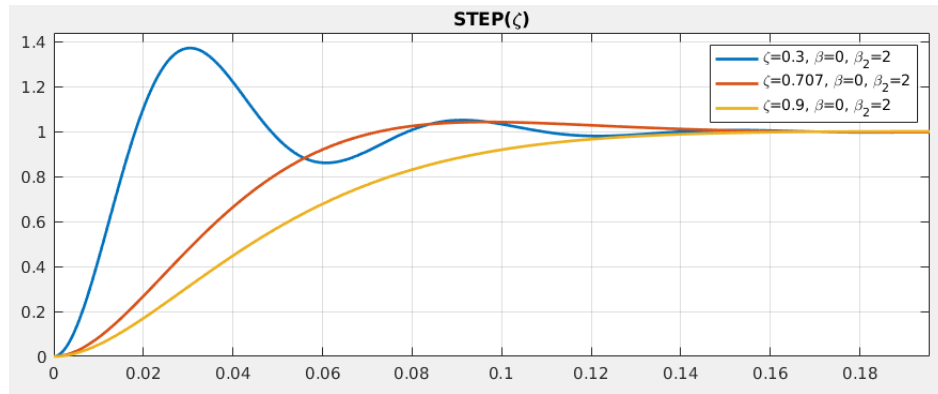


Figura 2: P: Respuesta al escalón en función de ζ .

Respuesta del error al seguimiento de señales monómicas

- **Escalón:** el error en el infinito es nulo, y depende de ζ de la misma manera que la respuesta al escalón.

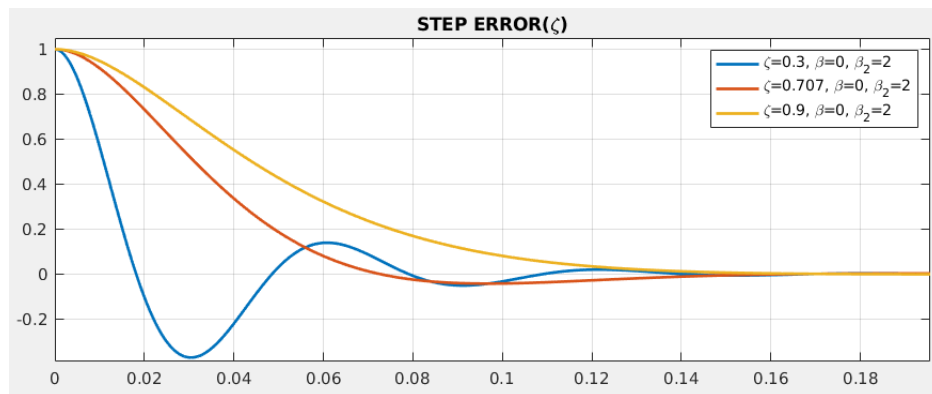


Figura 3: P: Respuesta del error al seguimiento de un escalón en función de ζ .

- **Rampa:** el error en el infinito es constante y mayor cuanto mayor sea ζ .

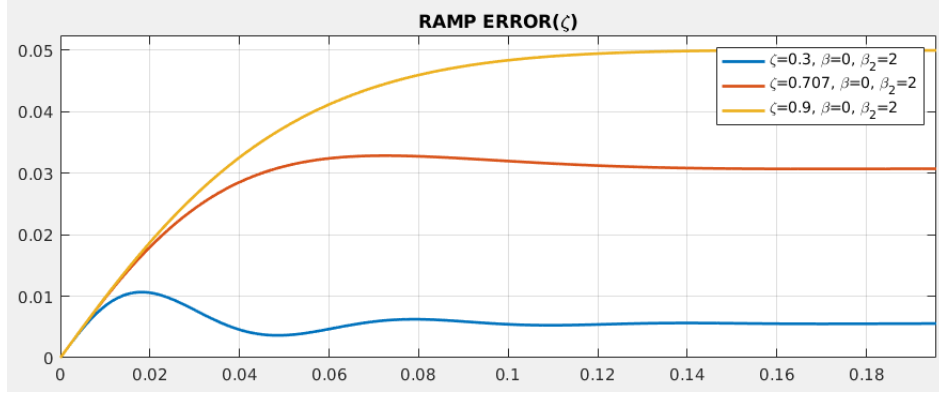


Figura 4: P: Respuesta del error al seguimiento de una parábola en función de ζ .

- **Parábola:** el error en el infinito es infinito, creciendo con mayor pendiente cuanto mayor sea ζ .

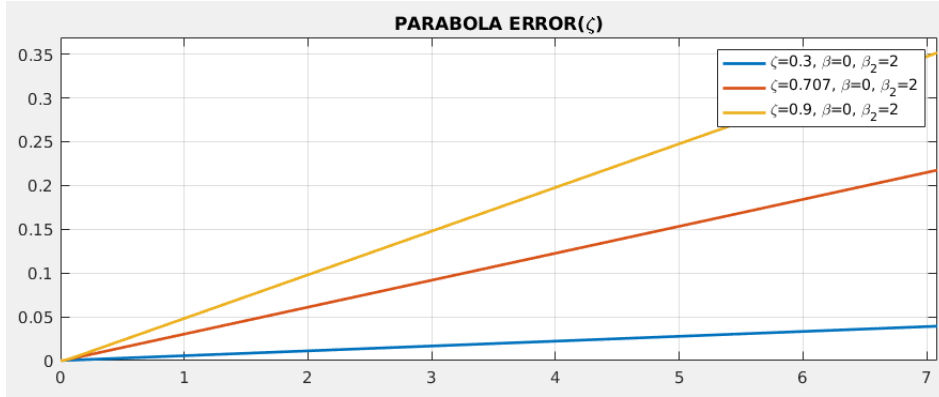


Figura 5: P: Respuesta del error al seguimiento de una parábola en función de ζ .

1.2. Controlador Proporcional Derivativo

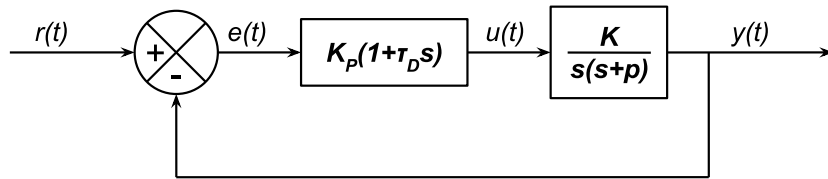


Figura 6: Lazo cerrado con controlador proporcional derivativo.

$$\left. \begin{aligned} E(s) &= R(s) - Y(s) \\ U(s) &= K_p(1 + \tau_D s)E(s) \\ Y(s) &= \frac{K}{s(s+p)}U(s) \end{aligned} \right\} \Rightarrow H_{PD}(s) = \frac{K_p K(1 + \tau_D s)}{s^2 + (p + K_p K \tau_D)s + K_p K} \quad (6)$$

Al tener un cero en $s = -\frac{1}{\tau_D}$, no se asemeja a la primera forma canónica. Sin embargo, es una combinación lineal de las dos formas canónicas de los sistemas de primer orden. Por lo que:

$$H_{PD}(s) = \mathcal{G}_1(s) + (2\zeta - \frac{p}{\omega_n})\mathcal{G}_2(s) \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{K_p K} \\ \zeta = \frac{p + \omega_n^2 \tau_D}{2\omega_n} = \frac{p + K_p K \tau_D}{2\sqrt{K_p K}} \end{cases} \quad (7)$$

Sabiendo que $p = \beta_2 \zeta \omega_n$, sustituyendo llegamos a:

$$H_{PD}(s) = \mathcal{G}_1(s) + \zeta(2 - \beta_2)\mathcal{G}_2(s) \quad (8)$$

Donde observamos que para $\beta_2 = 2$, tendríamos un controlador P en lugar de un PD. Si hacemos el cambio de variable $s = ps_1$, con $\omega_n = \frac{p}{\beta_2 \zeta}$, la función de transferencia queda:

$$H_{PD}(s) = \frac{\frac{p^2}{\beta_2^2 \zeta^2} + \frac{(2 - \beta_2)}{\beta_2 p} s}{s^2 + \frac{2p}{\beta_2} s + \frac{p^2}{\beta_2^2 \zeta^2}} = \frac{\frac{1}{\beta_2^2 \zeta^2} + \frac{2 - \beta_2}{\beta_2} s_1}{s_1^2 + \frac{2}{\beta_2} s_1 + \frac{1}{\beta_2^2 \zeta^2}} \quad (9)$$

Podemos calcular la función de transferencia del error como:

$$H_{e,PD}(s) = R(s)(1 - H_{PD}(s)) = R(s) \frac{s^2 + sp}{s^2 + (p + K_p K \tau_D)s + K_p K} \quad (10)$$

Donde, si aplicamos el teorema del valor final tenemos :

$$e_{PD}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s R(s) \frac{s^2 + sp}{s^2 + (p + K_p K \tau_D)s + K_p K} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 p}{K_p K} R(s) \quad (11)$$

Y los errores del seguimiento de las funciones monómicas (escalón, rampa y parábola), son:

$$\begin{aligned} e_{PD,0}(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \frac{s^2 p}{K_p K} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sp}{K_p K} = 0 \\ e_{PD,1}(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} \frac{s^2 p}{K_p K} = \frac{p}{K_p K} = \frac{\beta_2^2 \zeta^2}{p} \\ e_{PD,2}(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^3} \frac{s^2 p}{K_p K} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{p}{s K_p K} = \infty \end{aligned}$$

Si reescribimos τ_D como:

$$\tau_D = \frac{\zeta(2 - \beta_2)}{\omega_n} \quad (12)$$

Sabiendo que $\zeta > 0$ y $\omega_n > 0$ deberá cumplirse que $\beta_2 < 2$, ya que de lo contrario $\tau_D < 0$. Ésto provocaría que el coeficiente de la segunda forma canónica sea negativo y que la pendiente en el origen se negativa, es decir, que se mueva en dirección opuesta a la deseada.

Si aumentamos el valor de β_2 el sistema se hace más lento: t_r , t_p y t_s aumentan. La variación de M_p con β_2 es muy pequeña, por lo que a la hora de un diseño se podría no considerar. No obstante, como se puede observar en la siguiente sección, a mayor β_2 menor M_p . Esto es debido a que cuando β_2 aumenta tanto K_p como τ_D disminuyen. Siendo $K_p \propto 1/\beta_2$ y $\tau_D \propto (2 - \beta_2)$

En cuanto a la dependencia de comportamiento con ζ es muy similar al de controlador P: cuando ζ aumenta t_r , t_p y t_s aumentan mientras que M_p disminuye. En cuanto a los parámetros del controlador, cuando ζ aumenta, K_p disminuye y τ_D aumenta.

1.2.1. Análisis visual del efecto de los parámetros de diseño

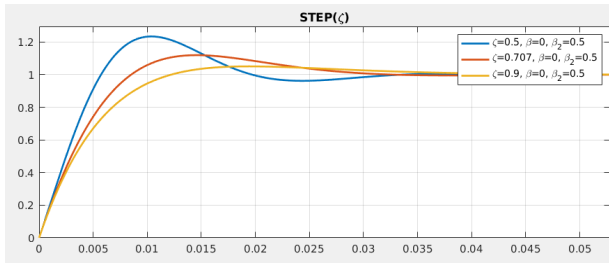
Usando los parámetros del motor para el que vamos a diseñar el controlador en 2:

$$K_m = 2652,28$$

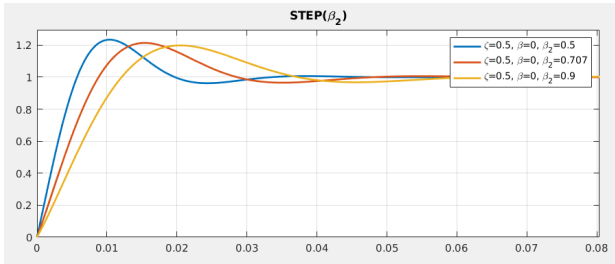
$$p_m = 64,986$$

Hemos visualizado el comportamiento de las respuestas al escalón y al seguimiento de las señales monómicas en función de los parámetros de diseño ζ y β_2 (que debe ser distinto de 2), haciendo $\beta = 0$, al ser las condiciones para obtener un controlador P-D a partir de un PID.

Respuesta al escalón Como se puede observar, al crecer ζ la sobreelongación máxima (M_p) disminuye, mientras que el tiempo de establecimiento (t_r) y el tiempo de subida (t_s) aumentan. Por otro lado, al aumentar β_2 , M_p disminuye a la vez que t_r y t_s aumentan, pero en menor medida que cuando modificamos ζ .



(a) En función de ζ .

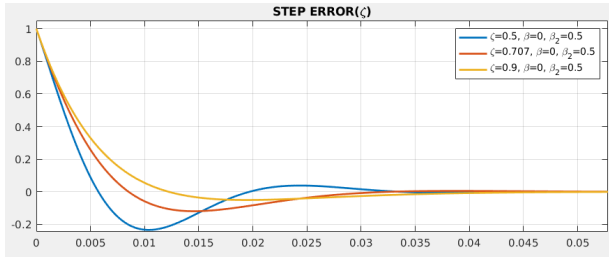


(b) En función de β_2 .

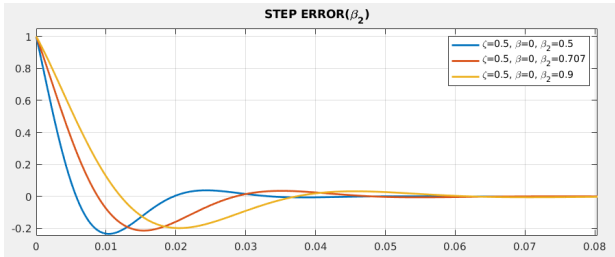
Figura 7: PD: Respuesta al escalón.

Respuesta del error al seguimiento de señales monómicas

- **Escalón:** el error en el infinito es nulo, y depende de ζ y β_2 de la misma manera que la respuesta al escalón.



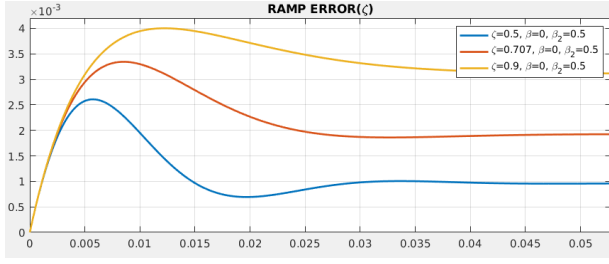
(a) En función de ζ .



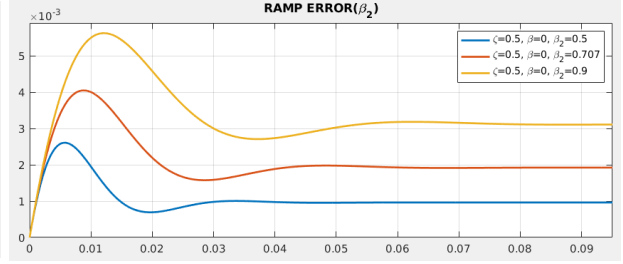
(b) En función de β_2 .

Figura 8: PD: Respuesta del error al seguimiento de un escalón.

- **Rampa:** el error en el infinito es constante y mayor cuanto mayores sean ζ y β_2 .



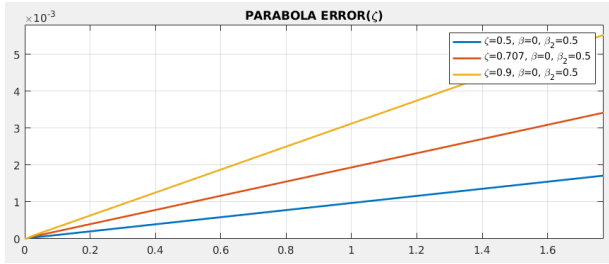
(a) En función de ζ .



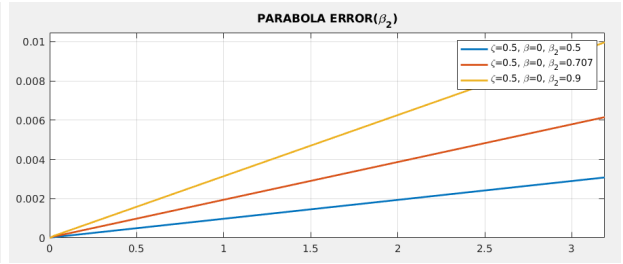
(b) En función de β_2 .

Figura 9: PD: Respuesta del error al seguimiento de una rampa.

- **Parábola:** el error en el infinito es infinito, creciendo con mayor pendiente cuanto mayores sean ζ y β_2 .



(a) En función de ζ .



(b) En función de β_2 .

Figura 10: PD: Respuesta del error al seguimiento de una parábola.

1.3. Controlador Proporcional-Derivativo

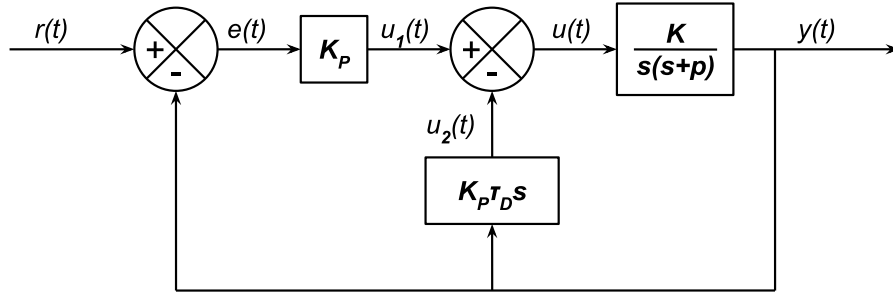


Figura 11: Lazo cerrado con controlador proporcional-derivativo.

$$\left. \begin{aligned} E(s) &= R(s) - Y(s) \\ U_1(s) &= K_p E(s) \\ U_2(s) &= K_p \tau_D s Y(s) \\ U(s) &= U_1(s) - U_2(s) \\ Y(s) &= \frac{K}{s(s+p)} U(s) \end{aligned} \right\} \Rightarrow H_{P-D}(s) = \frac{K_p K}{s^2 + (p + K_p K \tau_D) s + K_p K} \quad (13)$$

Observamos que la función de transferencia, $H_{P-D}(s)$, coincide con la primera forma canónica de los sistemas de segundo orden, $\mathcal{G}_1(s)$:

$$\mathcal{G}_1(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (14)$$

Luego:

$$H_{P-D}(s) = \mathcal{G}_1(s) \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{K_p K} \\ \zeta = \frac{p + \omega_n^2 \tau_D}{2\omega_n} = \frac{p + K_p K \tau_D}{2\sqrt{K_p K}} \end{cases} \quad (15)$$

Por lo que podemos escribir la función de transferencia, tomando $s = ps_1$ y definiendo $\beta_2 = \frac{p}{\omega_n \zeta}$, por lo que $\omega_n = \frac{p}{\beta_2 \zeta}$:

$$H_{P-D}(s) = \frac{\frac{p^2}{\beta_2^2 \zeta^2}}{s^2 + \frac{2p}{\beta_2} s + \frac{p^2}{\beta_2^2 \zeta^2}} = \frac{\frac{1}{\beta_2^2 \zeta^2}}{s_1^2 + \frac{2}{\beta_2} s_1 + \frac{1}{\beta_2^2 \zeta^2}} \quad (16)$$

A partir de estos calculamos la función de transferencia del error:

$$H_{e,P-D}(s) = 1 - H_{P-D}(s) = \frac{s^2 + (p + K_p K \tau_D)s}{s^2 + (p + K_p K \tau_D)s + K_p K} \quad (17)$$

Y los errores del seguimiento de las funciones monómicas (escalón, rampa y parábola):

$$\begin{aligned} e_{P-D,0}(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \frac{s^2 + (p + K_p K \tau_D)s}{s^2 + (p + K_p K \tau_D)s + K_p K} = 0 \\ e_{P-D,1}(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2} \frac{s^2 + (p + K_p K \tau_D)s}{s^2 + (p + K_p K \tau_D)s + K_p K} = \frac{p + K_p K \tau_D}{K_p K} = \frac{2\zeta}{\sqrt{K_p K}} = \frac{2\beta_2 \zeta^2}{p} \\ e_{P-D,2}(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^3} \frac{s^2 + (p + K_p K \tau_D)s}{s^2 + (p + K_p K \tau_D)s + K_p K} = \infty \end{aligned}$$

Si τ_D aumenta ζ también aumentará, mientras que si se cumple $Kp < \sqrt{p/\tau_D}$ si K_p aumenta, ζ desciende y si no se cumple, al contrario. Por otro lado podemos escribir $\beta_2 = \frac{2p}{2 + K_p K \tau_D}$ viendo claramente que tanto aumentando K_p como τ_D , β_2 desciende. Como ya se dijo anteriormente, si ζ aumenta los tiempos de respuesta (t_r), pico (t_p) y establecimiento (t_s) bajan mientras que la sobreelongación máxima, M_p , aumenta. Mientras, si β_2 aumenta la sobreelongación no cambia aunque los tiempos antes nombrados si aumentan.

1.3.1. Análisis visual del efecto de los parámetros de diseño

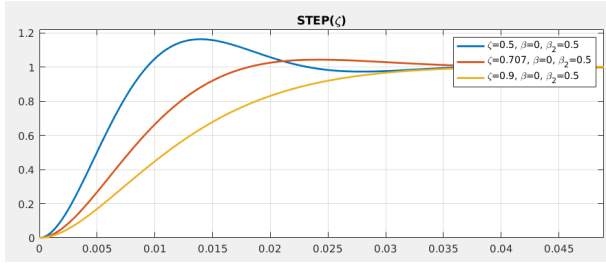
Usando los parámetros del motor para el que vamos a diseñar el controlador en 2:

$$K_m = 2652,28$$

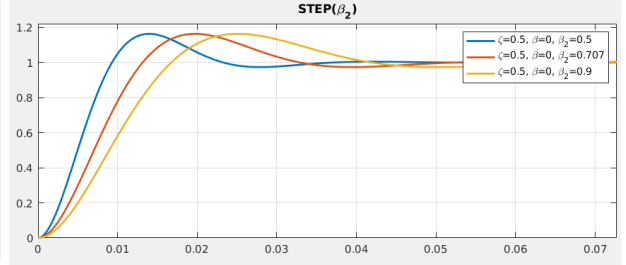
$$p_m = 64,986$$

Hemos visualizado el comportamiento de las respuestas al escalón y al seguimiento de las señales monómicas en función de los parámetros de diseño ζ y β_2 (que debe ser distinto de 2), haciendo $\beta = 0$, al ser las condiciones para obtener un controlador P-D a partir de un PID.

Respuesta al escalón Se comporta de la misma manera que lo hacía para el controlador PD.



(a) En función de ζ .

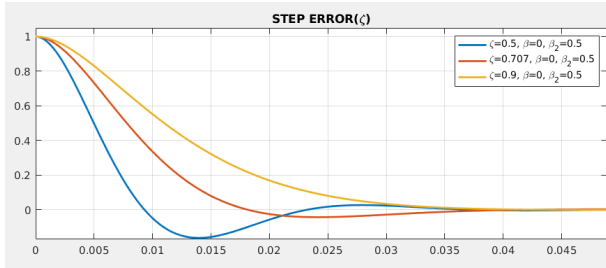


(b) En función de β_2 .

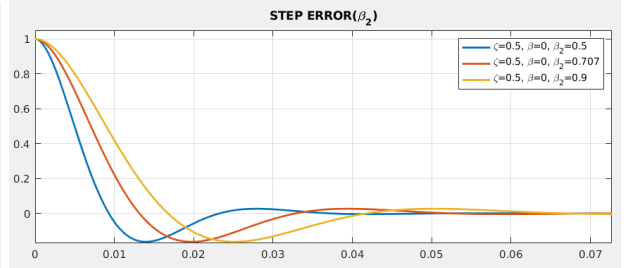
Figura 12: P-D: Respuesta al escalón.

Respuesta del error al seguimiento de señales monómicas Se comporta de la misma manera que lo hacía para el controlador PD.

■ **Escalón:**



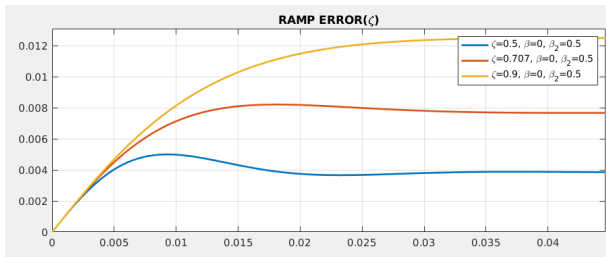
(a) En función de ζ .



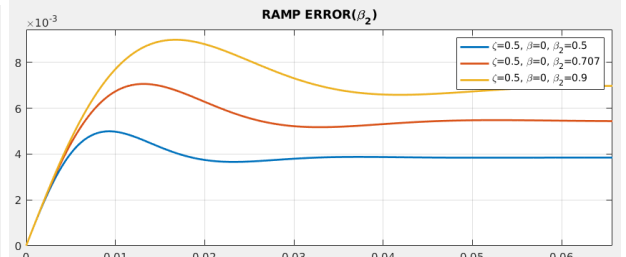
(b) En función de β_2 .

Figura 13: P-D: Respuesta del error al seguimiento de un escalón.

■ **Rampa:**



(a) En función de ζ .



(b) En función de β_2 .

Figura 14: P-D: Respuesta del error al seguimiento de una rampa.

■ **Parábola:**

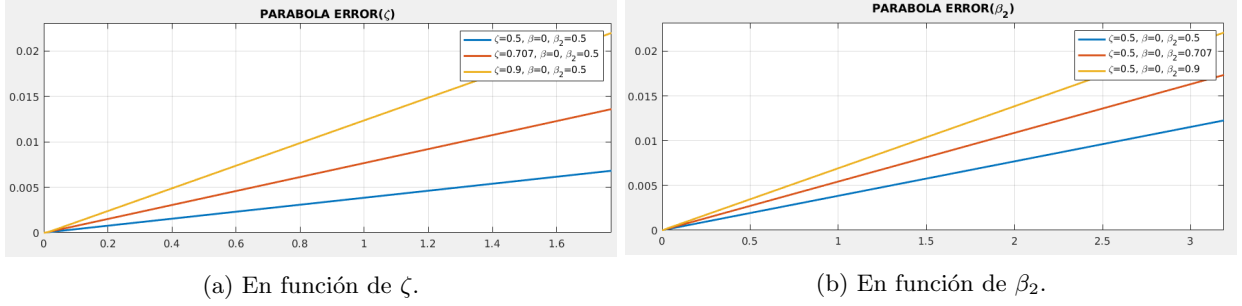


Figura 15: P-D: Respuesta del error al seguimiento de una parábola.

1.4. Controlador Proporcional Integral

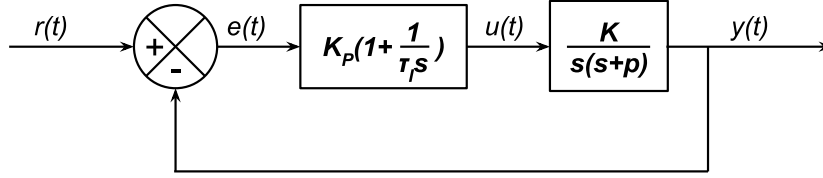


Figura 16: Lazo cerrado con controlador proporcional integral.

$$\left. \begin{aligned} E(s) &= R(s) - Y(s) \\ U(s) &= K_p \left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right) E(s) \\ Y(s) &= \frac{K}{s(s+p)} U(s) \end{aligned} \right\} \Rightarrow H_{PI}(s) = \frac{K_p K \left(s + \frac{1}{\tau_I}\right)}{s^2(s+p) + K_p K \left(s + \frac{1}{\tau_I}\right)} \quad (18)$$

Y, introduciendo el parámetro de diseño β_2 haciendo $p = \beta_2 \zeta \omega_n$, tenemos que:

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{\frac{K K_p}{2(\beta_2 - 2)\zeta^2 + 1}} \\ \tau_I &= \frac{\zeta \left(2 + \frac{1}{(\beta_2 - 2)\zeta^2}\right)}{\omega_n} \end{aligned} \right. \quad (19)$$

Podemos calcular la función de transferencia del error como:

$$H_{e,PI}(s) = R(s)(1 - H_{PI}(s)) = R(s) \frac{s^3 + s^2 p}{s^3 + s^2 p + s K_p K + K_p K \frac{1}{\tau_I}} \quad (20)$$

Donde, si aplicamos el teorema del valor final tenemos :

$$e_{PD}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s R(s) \frac{s^3 + s^2 p}{s^3 + s^2 p + s K_p K + K_p K \frac{1}{\tau_I}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3 p \tau_i}{K_p K} R(s) \quad (21)$$

Y los errores del seguimiento de las funciones monómicas (escalón, rampa y parábola), son:

$$\begin{aligned} e_{PI,0}(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \frac{s^3 p \tau_i}{K_p K} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 p \tau_i}{K_p K} = 0 \\ e_{PI,1}(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} \frac{s^3 p \tau_i}{K_p K} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s p \tau_i}{K_p K} = 0 \end{aligned}$$

$$e_{PI,2}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^3} \frac{s^3 p \tau_i}{K_p K} = \frac{p \tau_i}{K_p K} = \frac{\beta_2^3 \zeta^2}{p^2 (\beta_2 - 2)}$$

El controlador PI es un caso particular de los controladores de tercer orden cuando $\beta = \beta_2 - 2 \neq 0$. Así, el parámetro β_2 es:

$$\beta_2 = \frac{4\zeta^2 - 2\zeta\tau_I\omega_n - 1}{2\zeta^2 - \zeta\tau_I\omega_n} \quad (22)$$

Donde el efecto de modificar el resto de parámetros sobre β_2 no está claro.

Si aumentamos el valor de K_p dejando fijo el resto, aumentan ω_n y por tanto también aumenta ζ . Por otro lado, si incrementamos el valor de τ_I , ζ disminuye. La sobreelónfación máxima depende de manera no lineal de β (y por tanto de β_2) y ζ . A su vez, el tiempo de establecimiento t_s depende linealmente de β_2 (aumentando al aumentar β y por tanto también al aumentar β_2), también dependiendo no linealmente de ζ .

1.4.1. Análisis visual del efecto de los parámetros de diseño

Usando los parámetros del motor para el que vamos a diseñar el controlador en 2:

$$K_m = 2652,28$$

$$p_m = 64,986$$

Hemos visualizado el comportamiento de las respuestas al escalón y al seguimiento de las señales monómicas en función de los parámetros de diseño ζ y β (que debe ser distinto de 0), haciendo $\beta_2 = \beta + 2$, al ser las condiciones para obtener un controlador PI a partir de un PID.

Respuesta al escalón Como se puede observar, al crecer ζ la sobreelónfación máxima (M_p) disminuye, mientras que el tiempo de establecimiento (t_r) y el tiempo de subida (t_s) aumentan. Por otro lado, al aumentar β , M_p aumenta a la vez que t_r y t_s aumentan.

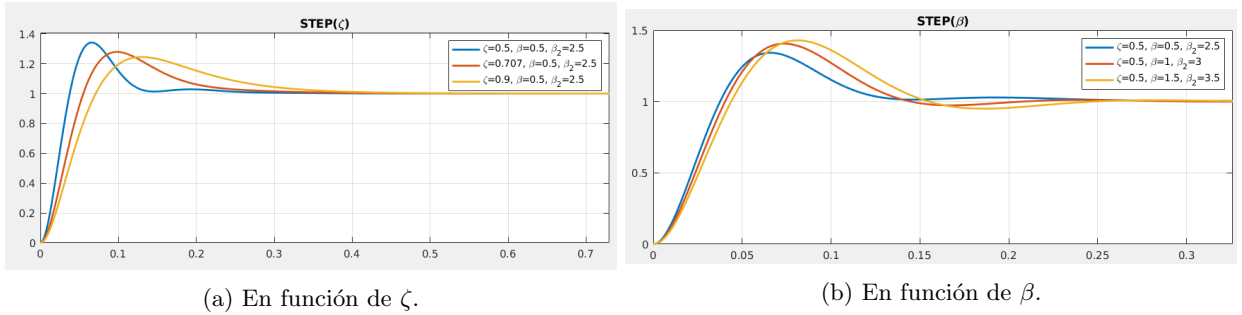
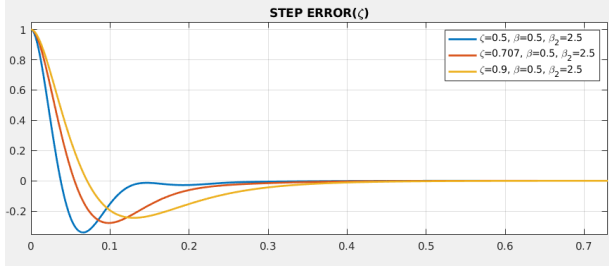


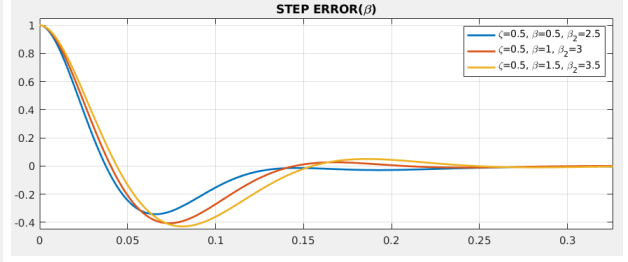
Figura 17: PI: Respuesta al escalón.

Respuesta del error al seguimiento de señales monómicas

- **Escalón:** el error en el infinito es nulo, y depende de ζ y β de la misma manera que la respuesta al escalón.



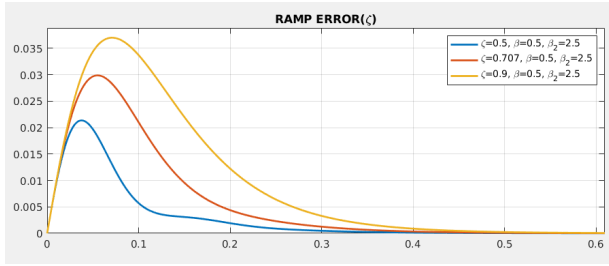
(a) En función de ζ .



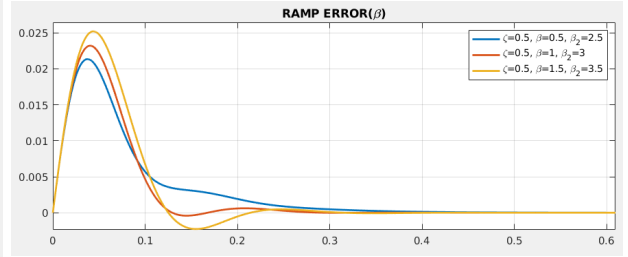
(b) En función de β .

Figura 18: PI: Respuesta del error al seguimiento de un escalón.

- **Rampa:** el error en el infinito es nulo, llegando más lento a este cuanto mayor sea ζ . El pico del error es mayor cuanto mayores sean ζ y β .



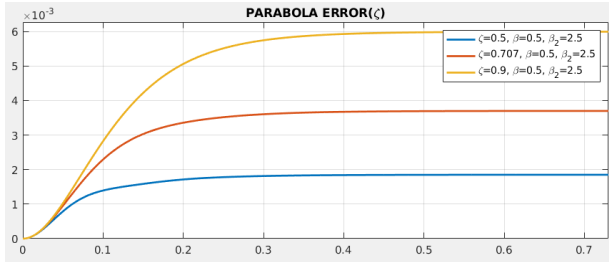
(a) En función de ζ .



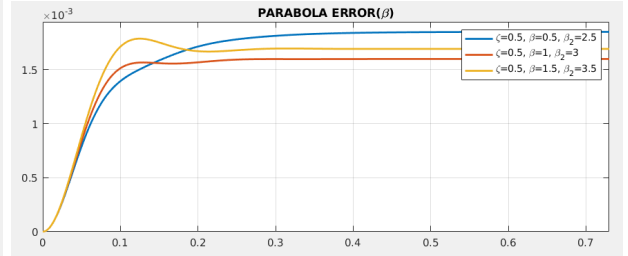
(b) En función de β .

Figura 19: PI: Respuesta del error al seguimiento de una rampa.

- **Parábola:** el error en el infinito es constante, siendo mayor cuanto mayor sea ζ . Su dependencia con β no parece lineal.



(a) En función de ζ .



(b) En función de β .

Figura 20: PI: Respuesta del error al seguimiento de una parábola.

1.5. Controlador Proporcional Integral Derivativo y Controlador Proporcional Integral-Derivativo

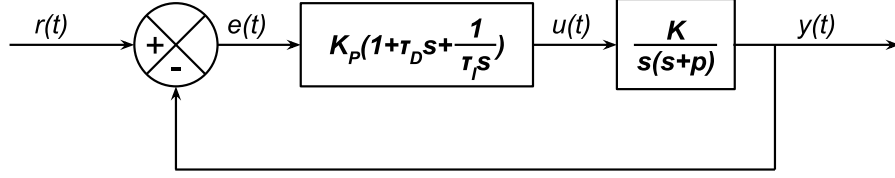


Figura 21: Lazo cerrado con controlador proporcional integral derivativo.

$$\left. \begin{aligned} E(s) &= R(s) - Y(s) \\ U(s) &= K_p(1 + \tau_D s + \frac{1}{\tau_I s})E(s) \\ Y(s) &= \frac{K}{s(s+p)}U(s) \end{aligned} \right\} \Rightarrow H_{PID}(s) = \frac{K_p K (\tau_D s^2 + s + 1/\tau_I)}{s^3 + (p + K_p K \tau_D)s^2 + K_p K s + K_p K / \tau_I} \quad (23)$$

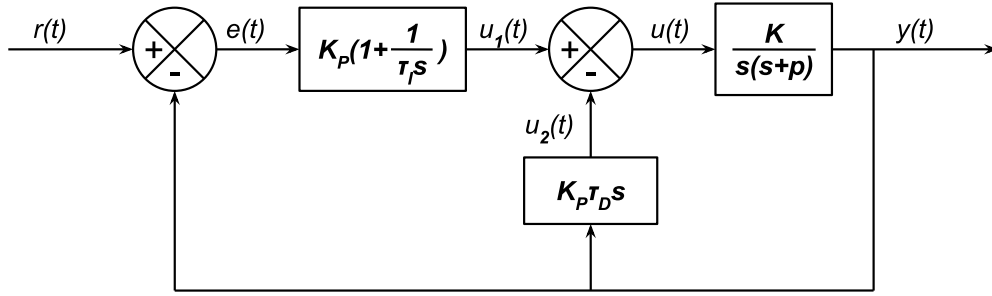


Figura 22: Lazo cerrado con controlador proporcional integral-derivativo.

$$\left. \begin{aligned} E(s) &= R(s) - Y(s) \\ U_1(s) &= K_p(1 + \frac{1}{\tau_I s})E(s) \\ U_2(s) &= K_p \tau_D s Y(s) \\ U(s) &= U_1(s) - U_2(s) \\ Y(s) &= \frac{K}{s(s+p)}U(s) \end{aligned} \right\} \Rightarrow H_{PI-D}(s) = \frac{K_p K (s + 1/\tau_I)}{s^3 + (p + K_p K \tau_D)s^2 + K_p K s + K_p K / \tau_I} \quad (24)$$

Podemos escribir el polinomio característico de ambas funciones de transferencia como:

$$P(s) = (s + c)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) = s^3 + (p + K_p K \tau_D)s^2 + K_p K s + \frac{K_p K}{\tau_I} \quad (25)$$

Con:

$$p = \beta_2 \zeta \omega_n$$

$$c = \beta \zeta \omega_n$$

Por lo que nos queda un sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \frac{K_p K}{\tau_I} &= \frac{\beta p^3}{\beta_2^3 \zeta^2} \\ K_p K &= \frac{p^2(2\beta + 1/\zeta^2)}{\beta_2^2} \\ p + K_p K \tau_D &= \frac{p(2 + \beta)}{\beta_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} K_p = \frac{p^2(2\beta + 1/\zeta^2)}{K \beta_2^2} \\ \tau_I = \frac{\beta_2(2\beta \zeta^2 + 1)}{\beta p} \\ \tau_D = \frac{\beta_2(2 + \beta - \beta_2)}{p(2\beta + 1/\zeta^2)} \end{cases} \quad (26)$$

Observamos también que si se cumple $\beta = 0$ entonces $\tau_I = \infty$ luego estamos ante un controlador PD o P-D. Por otro lado si se cumple $\beta_2 = 2 + \beta$ entonces $\tau_D = 0$ por lo que estamos ante un controlador PI. Si ambas condiciones se cumplen $\beta = 0$ y $\beta_2 = 2$ entonces estamos ante un controlador proporcional.

Como ya hemos dicho anteriormente si ζ aumenta, aumentan los tiempos de respuesta (t_r), pico (t_p) y establecimiento (t_s) mientras que la sobreelongación máxima, M_p , disminuye. Por otro lado, aumentando β_2 la sobreelongación máxima no cambia pero los tiempos aumentan. El comportamiento con β no es lineal. Siempre que β aumente la respuesta será más rápida y hasta un valor la sobreelongación aumentará, a partir de este valor la sobreelongación empezará a reducirse.

Todo lo dicho anteriormente es común para los controladores PID y PI-D. La principal diferencia entre ellos es el comportamiento en los primeros instantes. Para el PI-D, la derivada en el primer instante siempre es nula, mientras que para PID no. Aplicando el teorema del valor inicial obtenemos que:

$$h_{PID}(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{K_p K (\tau_D s^2 + s + 1/\tau_I)}{s^3 + (p + K_p K \tau_D) s^2 + K_p K s + K_p K / \tau_I} = K_p K \tau_D$$

$$h_{PI-D}(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{K_p K (s + 1/\tau_I)}{s^3 + (p + K_p K \tau_D) s^2 + K_p K s + K_p K / \tau_I} = 0$$

Que este valor sea nulo implica que la respuesta no es instantánea, como ocurren en un PI-D, mientras que si no es nula la respuesta es instantánea. Que la respuesta sea instantánea es algo claramente bueno, aunque por el contrario puede provocar que la respuesta sea inicialmente en el sentido contrario de lo deseado, cuando $K_p K \tau_D$ es negativo. Suponiendo que K_p es positivo, ya que lo contrario no tiene sentido, la única forma de que esto sea negativo es que lo sea τ_D , lo que ocurre cuando $\beta_2 > \beta + 2$. Si $\beta_2 = \beta + 2$ entonces $\tau_D = 0$, estamos ante un controlador PI y la respuesta no es instantánea.

A partir de estos calculamos la función de transferencia del error para ambos tipos de controladores:

$$H_{e,PID}(s) = 1 - H_{PID}(s) = \frac{s^3 + p s^2}{s^3 + (p + K_p K \tau_D) s^2 + K_p K s + K_p K / \tau_I} \quad (27)$$

$$H_{e,PI-D}(s) = 1 - H_{PI-D}(s) = \frac{s^3 + (p + K_p K \tau_D) s^2}{s^3 + (p + K_p K \tau_D) s^2 + K_p K s + K_p K / \tau_I} \quad (28)$$

Y los errores del seguimiento de las funciones monómicas (escalón, rampa y parábola):

$$e_{PID,0}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \frac{s^3 + p s^2}{s^3 + (p + K_p K \tau_D) s^2 + K_p K s + K_p K / \tau_I} = 0$$

$$e_{PI-D,0}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \frac{s^3 + (p + K_p K \tau_D) s^2}{s^3 + (p + K_p K \tau_D) s^2 + K_p K s + K_p K / \tau_I} = 0$$

$$e_{PID,1}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2} \frac{s^3 + p s^2}{s^3 + (p + K_p K \tau_D) s^2 + K_p K s + K_p K / \tau_I} = 0$$

$$e_{PI-D,1}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2} \frac{s^3 + (p + K_p K \tau_D) s^2}{s^3 + (p + K_p K \tau_D) s^2 + K_p K s + K_p K / \tau_I} = 0$$

$$e_{PID,2}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^3} \frac{s^3 + p s^2}{s^3 + (p + K_p K \tau_D) s^2 + K_p K s + K_p K / \tau_I} = \frac{p \tau_I}{K_p K} = \frac{\beta_2^3 \zeta^2}{\beta p^2}$$

$$e_{PI-D,2}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^3} \frac{s^3 + (p + K_p K \tau_D) s^2}{s^3 + (p + K_p K \tau_D) s^2 + K_p K s + K_p K / \tau_I} = \frac{(p + K_p K \tau_D) \tau_I}{K_p K} = \frac{\beta_2^2 \zeta^2 (2 + \beta)}{\beta p^2}$$

1.5.1. Análisis visual del efecto de los parámetros de diseño

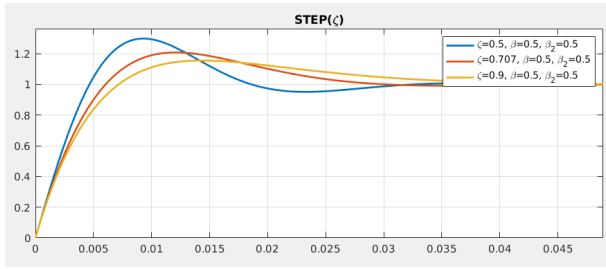
Usando los parámetros del motor para el que vamos a diseñar el controlador en 2:

$$K_m = 2652,28$$

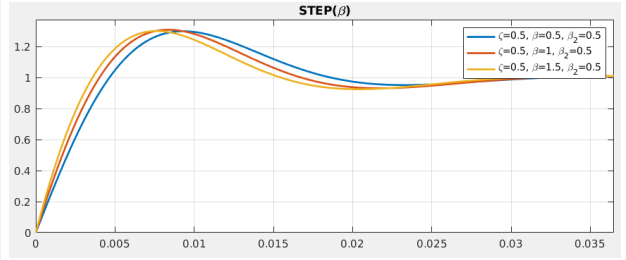
$$p_m = 64,986$$

Hemos visualizado el comportamiento de las respuestas al escalón y al seguimiento de las señales monómicas en función de los parámetros de diseño ζ , β (distinta de 0 y de $(\beta_2 - 2)$) y β_2 (distinta de 2 y de $(\beta + 2)$).

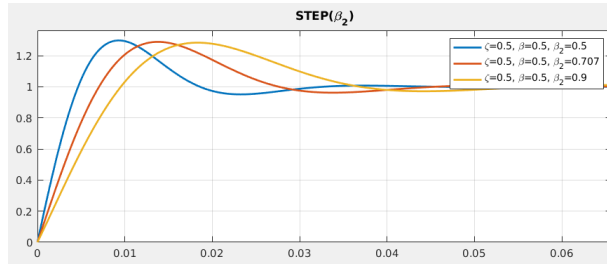
Respuesta al escalón Como se puede observar, al crecer ζ la sobreelongación máxima (M_p) disminuye, mientras que el tiempo de establecimiento (t_r) y el tiempo de subida (t_s) aumentan. Por otro lado, al aumentar β , M_p aumenta (solo en el PI-D) a la vez que t_r y t_s disminuyen. Finalmente, al aumentar β_2 observamos que t_r y t_s aumentan, mientras que M_p se mantiene constante.



(a) En función de ζ .

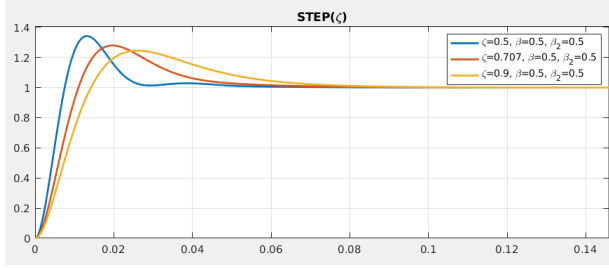


(b) En función de β .

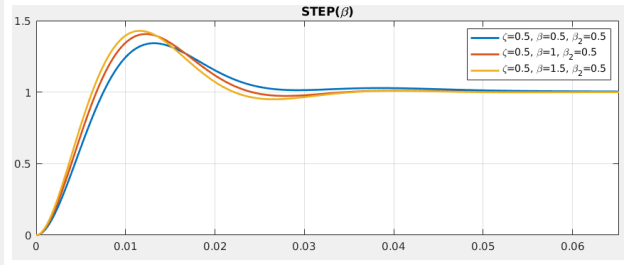


(c) En función de β_2 .

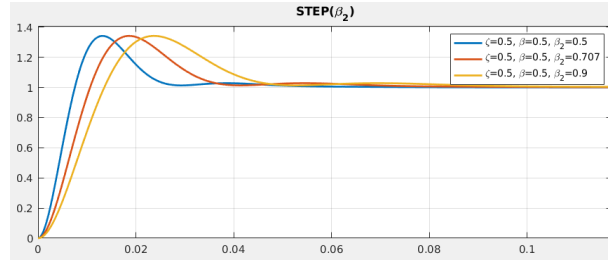
Figura 23: PID: Respuesta al escalón.



(a) En función de ζ .



(b) En función de β .

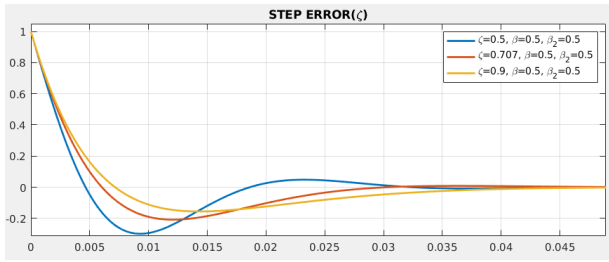


(c) En función de β_2 .

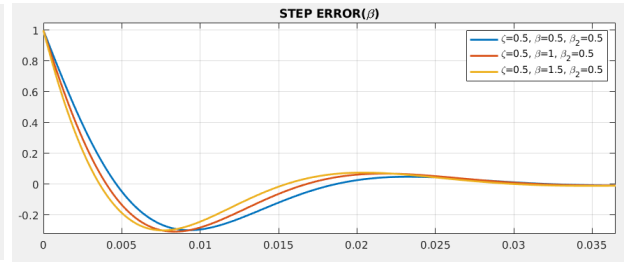
Figura 24: PI-D: Respuesta al escalón.

Respuesta del error al seguimiento de señales monómicas

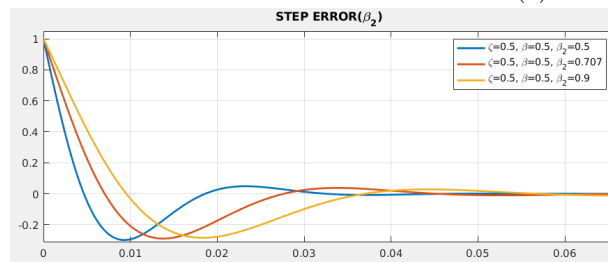
- **Escalón:** el error en el infinito es nulo, y depende de ζ , β y β_2 de la misma manera que la respuesta al escalón.



(a) En función de ζ .

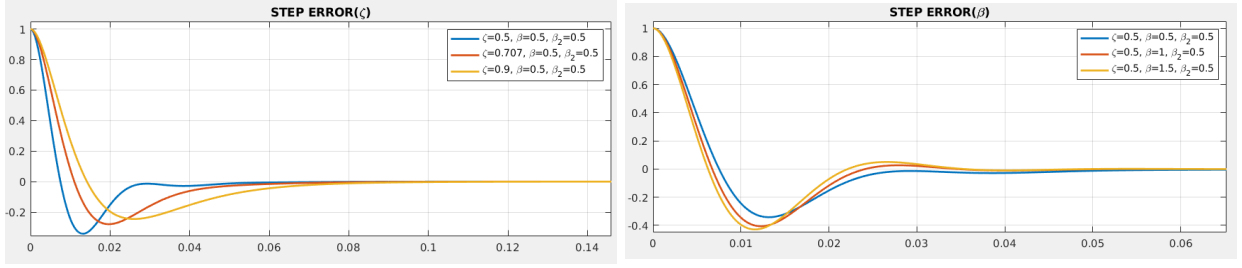


(b) En función de β .



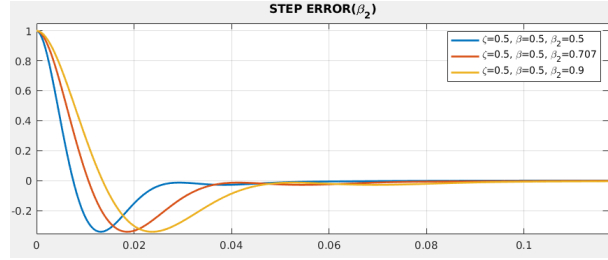
(c) En función de β_2 .

Figura 25: PID: Respuesta del error al seguimiento de un escalón.



(a) En función de ζ .

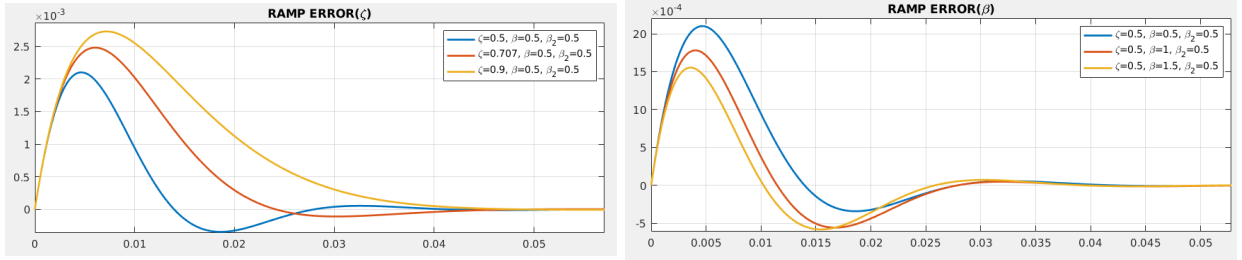
(b) En función de β .



(c) En función de β_2 .

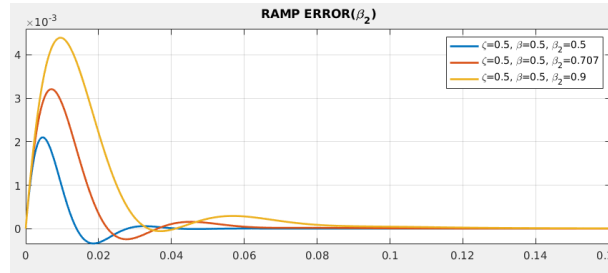
Figura 26: PI-D: Respuesta del error al seguimiento de un escalón.

- **Rampa:** el error en el infinito es nulo, llegando más lento a este cuanto mayor sea ζ y β_2 . El pico del error es mayor cuanto mayores sean ζ y β_2 , a la vez que menor cuanto mayor sea β .



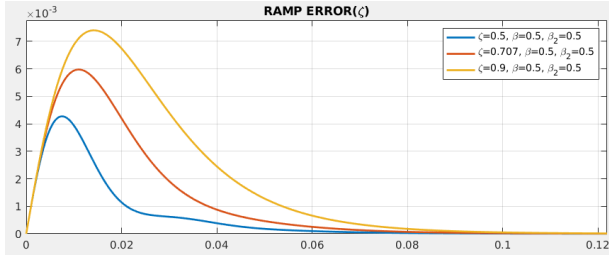
(a) En función de ζ .

(b) En función de β .

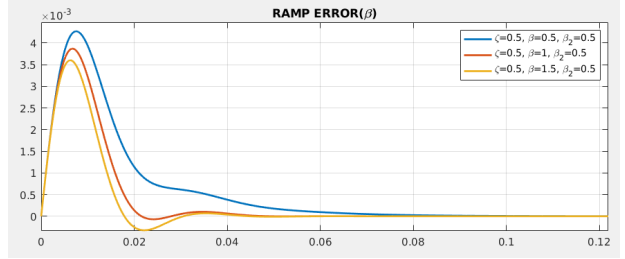


(c) En función de β_2 .

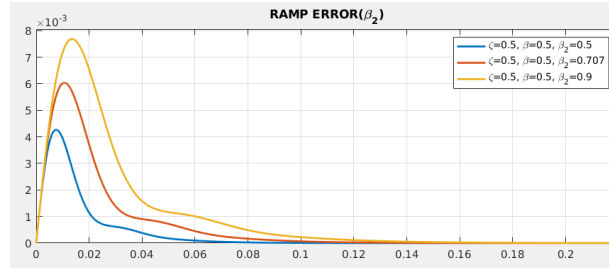
Figura 27: PID: Respuesta del error al seguimiento de una rampa.



(a) En función de ζ .



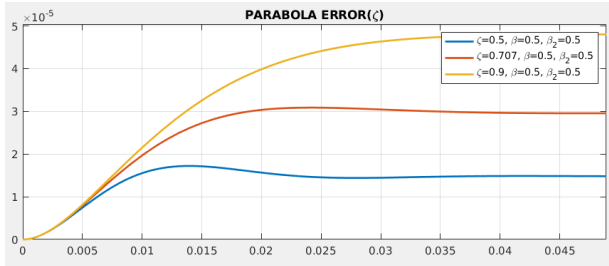
(b) En función de β .



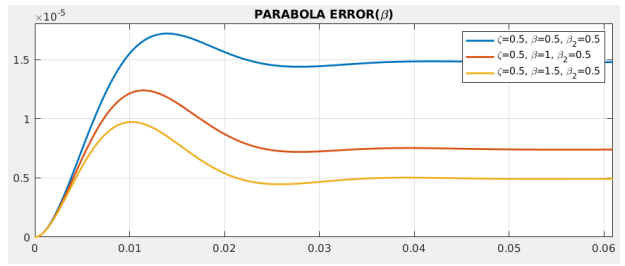
(c) En función de β_2 .

Figura 28: PI-D: Respuesta del error al seguimiento de una rampa.

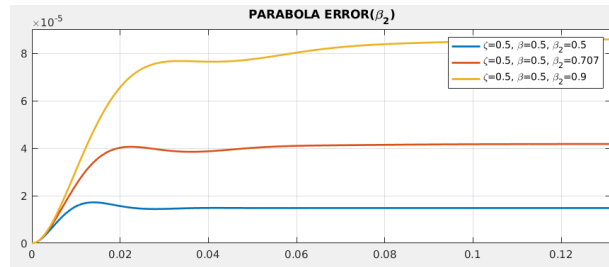
- **Parábola:** el error en el infinito es constante, siendo mayor cuanto mayor sea ζ y β_2 , mientras que es menor cuanto mayor es β .



(a) En función de ζ .



(b) En función de β .



(c) En función de β_2 .

Figura 29: PID: Respuesta del error al seguimiento de una parábola.

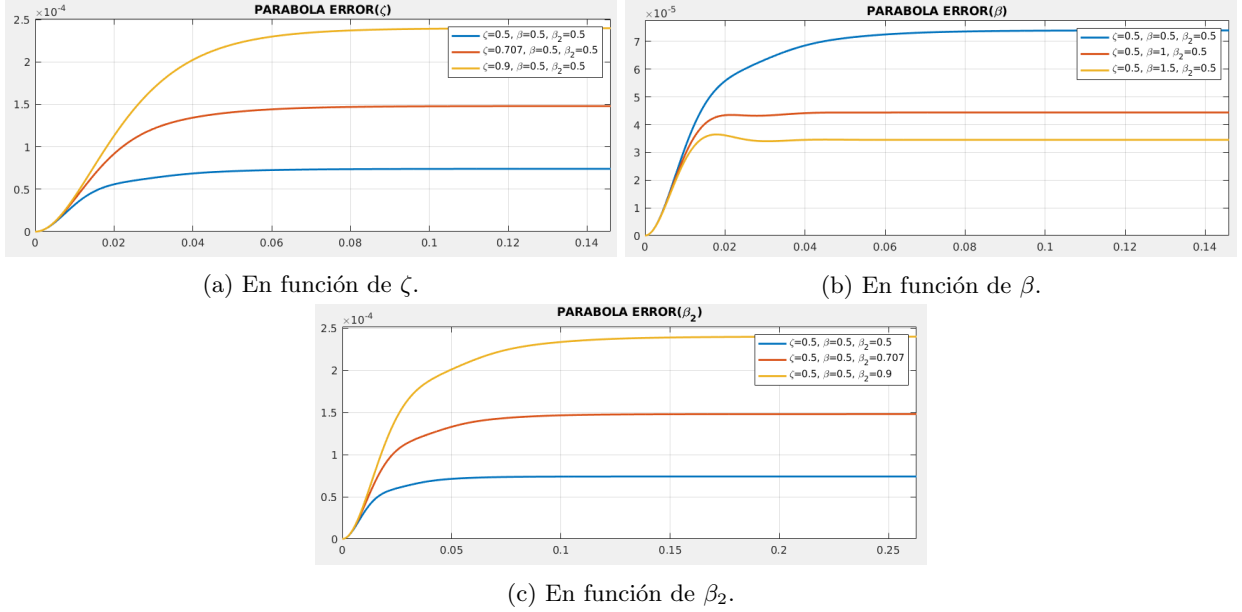


Figura 30: PI-D: Respuesta del error al seguimiento de una parábola.

1.6. Controlador Proporcional Integral Derivativo-Derivativo

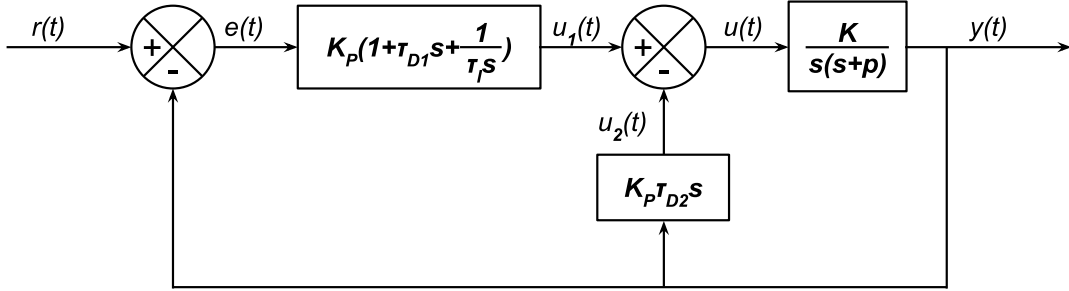


Figura 31: Lazo cerrado con controlador proporcional integral derivativo-derivativo.

$$\left. \begin{aligned}
 E(s) &= R(s) - Y(s) \\
 U_1(s) &= K_p(1 + \tau_{D1}s + \frac{1}{\tau_I s})E(s) \\
 U_2(s) &= K_p \tau_{D2} s Y(s) \\
 U(s) &= U_1(s) - U_2(s) \\
 Y(s) &= \frac{K}{s(s+p)} U(s)
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow H_{PID-D}(s) = \frac{K_p K (\tau_{D1} s^2 + s + 1/\tau_I)}{s^3 + (p + K_p K (\tau_{D1} + \tau_{D2})) s^2 + K_p K s + K_p K / \tau_I}$$

(29)

A partir de estos calculamos la función de transferencia del error:

$$H_{e,PID-D}(s) = 1 - H_{PID-D}(s) = \frac{s^3 + (p + K_p K \tau_{D2}) s^2}{s^3 + (p + K_p K (\tau_{D1} + \tau_{D2})) s^2 + K_p K s + K_p K / \tau_I}$$

(30)

Y los errores del seguimiento de las funciones monómicas (escalón, rampa y parábola):

$$\begin{aligned}
e_{PID-D,0}(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \frac{s^3 + (p + K_p K \tau_{D2}) s^2}{s^3 + (p + K_p K (\tau_{D1} + \tau_{D2})) s^2 + K_p K s + K_p K / \tau_I} = 0 \\
e_{PID-D,1}(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2} \frac{s^3 + (p + K_p K \tau_{D2}) s^2}{s^3 + (p + K_p K (\tau_{D1} + \tau_{D2})) s^2 + K_p K s + K_p K / \tau_I} = 0 \\
e_{PID-D,2}(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^3} \frac{s^3 + (p + K_p K \tau_{D2}) s^2}{s^3 + (p + K_p K (\tau_{D1} + \tau_{D2})) s^2 + K_p K s + K_p K / \tau_I} = \frac{p + K_p K \tau_{D2}}{K_p K / \tau_I}
\end{aligned}$$

A pesar de lo expuesto anteriormente, si se cumple $\tau_{D2} = -p/K_p K$ entonces se cumple que:

$$e_{PID-D,2}(\infty) = 0$$

Bajo esta condición tenemos que:

$$H_{PID-D}(s) = \frac{K_p K (\tau_{D1} s^2 + s + 1/\tau_I)}{s^3 + K_p K \tau_{D1} s^2 + K_p K s + K_p K / \tau_I} \quad (31)$$

De esta forma, de igual manera que en los dos anteriores ejemplos, podemos escribir el polinomio característico de la función de transferencia como:

$$P(s) = (s + c)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) = s^3 + K_p K \tau_{D1} s^2 + K_p K s + \frac{K_p K}{\tau_I} \quad (32)$$

Con:

$$\begin{aligned}
p &= \beta_2 \zeta \omega_n \\
c &= \beta \zeta \omega_n
\end{aligned}$$

Por lo que nos queda un sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \frac{K_p K}{\tau_I} &= \frac{\beta p^3}{\beta_2^3 \zeta^2} \\ K_p K &= \frac{p^2(2\beta + 1/\zeta^2)}{\beta_2^2} \\ K_p K \tau_{D1} &= \frac{p(2 + \beta)}{\beta_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} K_p &= \frac{p^2(2\beta + 1/\zeta^2)}{K \beta_2^2} \\ \tau_I &= \frac{\beta_2(2\beta \zeta^2 + 1)}{\beta p} \\ \tau_{D1} &= \frac{\beta_2(2 + \beta)}{p(2\beta + 1/\zeta^2)} \end{aligned} \right. \quad (33)$$

Para estas nuevas definiciones podemos expresar el error con una parábola a la entrada como:

$$e_{PID-D,2}(\infty) = \frac{\beta_2^3 \zeta^2}{\beta p^3}$$

Todo lo dicho acerca de los efectos de ζ , β y β_2 en los controladores PID y PI-D también se cumple para el PID-D. Además, igual que en el PID, la respuesta es instantánea y con el mismo cambio inicial. Siendo la principal mejora de este sobre los anteriores que el error ante la parábola es nulo (si se cumple la condición).

$$h_{PID-D}(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{K_p K (\tau_{D1} s^2 + s + 1/\tau_I)}{s^3 + K_p K \tau_{D1} s^2 + K_p K s + K_p K / \tau_I} = K_p K \tau_{D1} = \frac{\beta_2^3 \zeta^2}{\beta p^3}$$

1.6.1. Análisis visual del efecto de los parámetros de diseño

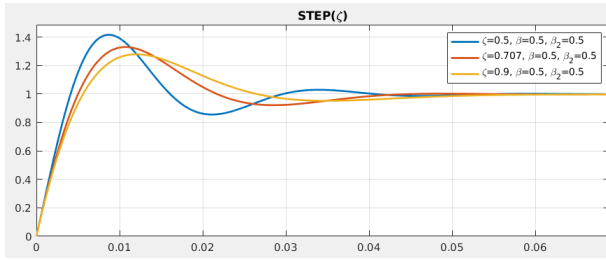
Usando los parámetros del motor para el que vamos a diseñar el controlador en 2:

$$K_m = 2652,28$$

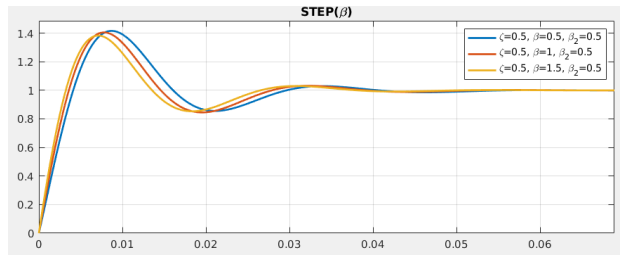
$$p_m = 64,986$$

Hemos visualizado el comportamiento de las respuestas al escalón y al seguimiento de las señales monómicas en función de los parámetros de diseño ζ , β y β_2 , haciendo $\tau_{D2} = -p_m/K_p K_m$ para forzar que el error de seguimiento a la parábola en el infinito sea nulo.

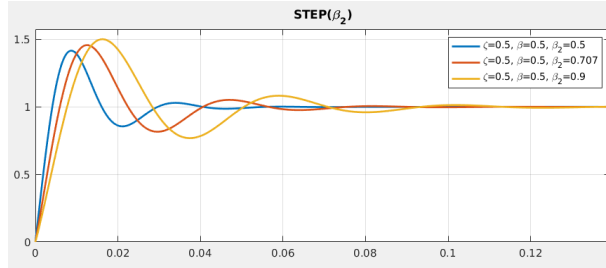
Respuesta al escalón Como se puede observar, al crecer ζ la sobreelongación máxima (M_p) disminuye, mientras que el tiempo de subida (t_s) aumenta. Por otro lado, al aumentar β , M_p disminuye a la vez que t_r y t_s disminuyen. Finalmente, al aumentar β_2 observamos que t_r , t_s y M_p aumentan.



(a) En función de ζ .



(b) En función de β .

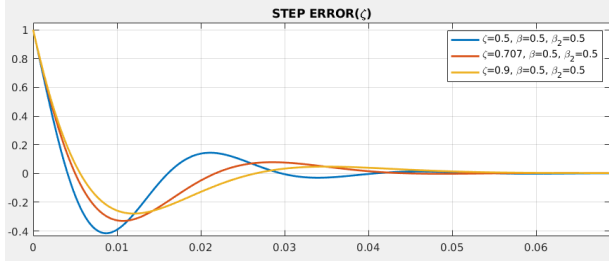


(c) En función de β_2 .

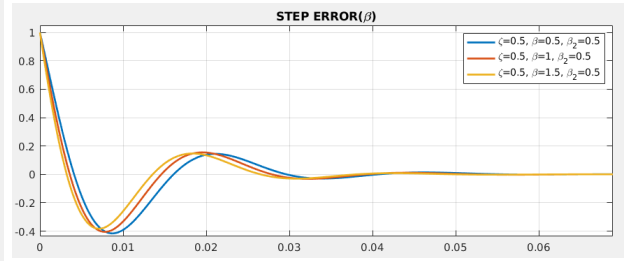
Figura 32: PID-D: Respuesta al escalón.

Respuesta del error al seguimiento de señales monómicas

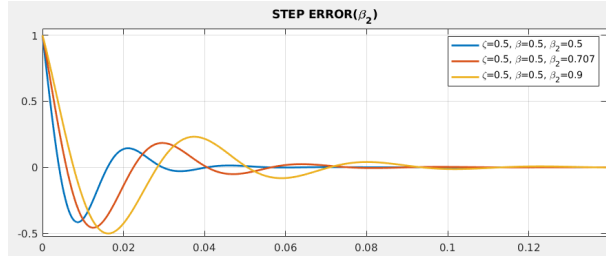
- **Escalón:** el error en el infinito es nulo, y depende de ζ , β y β_2 de la misma manera que la respuesta al escalón.



(a) En función de ζ .



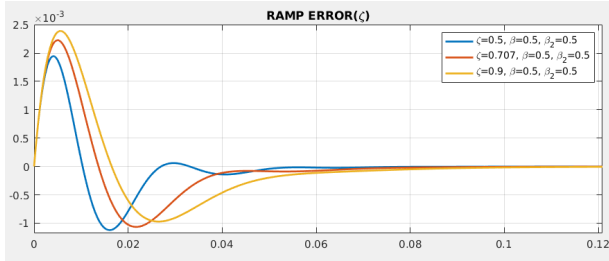
(b) En función de β .



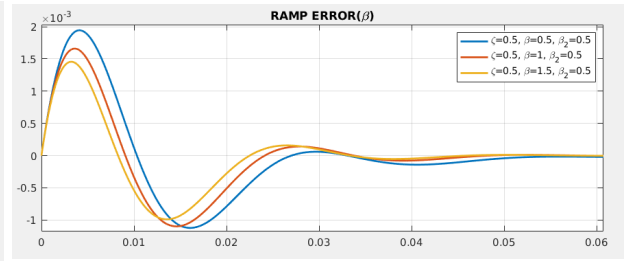
(c) En función de β_2 .

Figura 33: PID-D: Respuesta del error al seguimiento de un escalón.

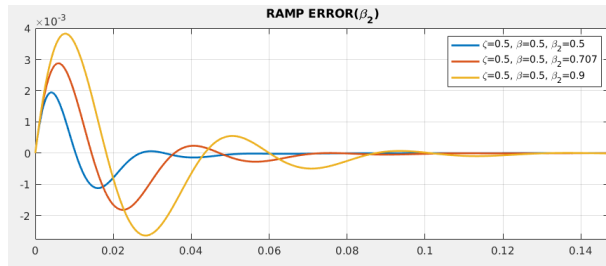
- **Rampa:** el error en el infinito es nulo, llegando más lento a este cuanto mayor sea ζ y β_2 , y cuanto menor sea β . El pico del error es mayor cuanto mayores sean ζ y β_2 , a la vez que menor cuanto mayor sea β .



(a) En función de ζ .



(b) En función de β .



(c) En función de β_2 .

Figura 34: PID-D: Respuesta del error al seguimiento de una rampa.

- **Parábola:** el error en el infinito es nulo, llegando más lento a este cuanto mayor sea ζ y β_2 , y cuanto menor sea β . El pico del error es mayor cuanto mayores sean ζ y β_2 , a la vez que menor cuanto mayor sea β .

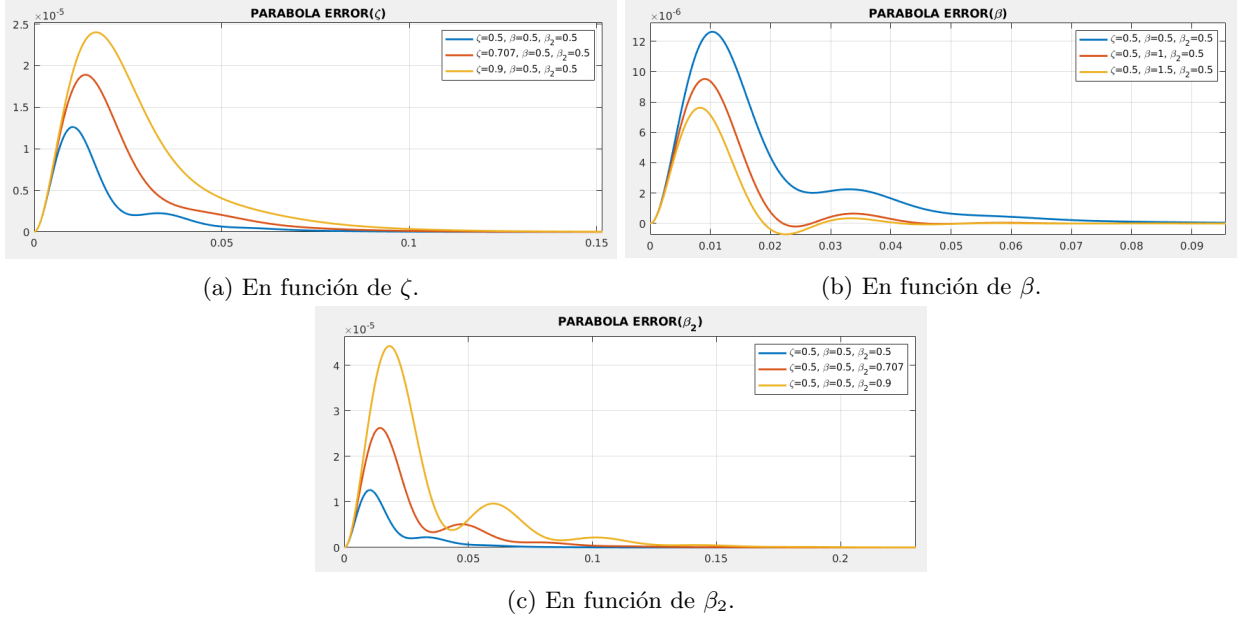


Figura 35: PID-D: Respuesta del error al seguimiento de una parábola.

1.7. Controlador Derivativo | Proporcional Integral Derivativo

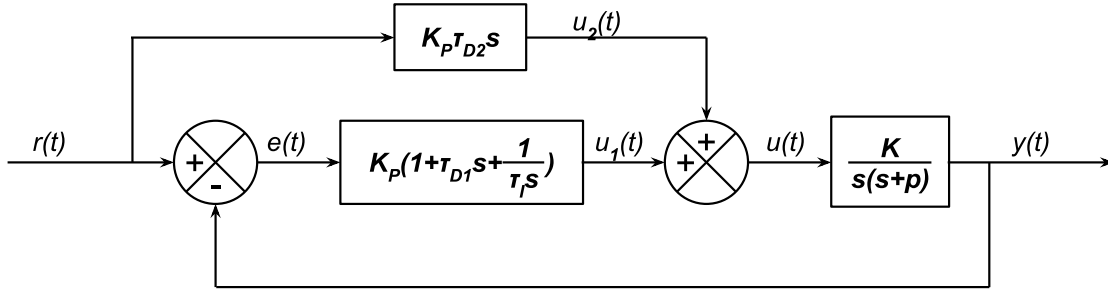


Figura 36: Lazo cerrado con controlador D|PID.

$$\left. \begin{aligned} E(s) &= R(s) - Y(s) \\ U_1(s) &= K_p E(s) \\ U_2(s) &= K_p \tau_{D2} s R(s) \\ U(s) &= U_1(s) + U_2(s) \\ Y(s) &= \frac{K}{s(s+p)} U(s) \end{aligned} \right\} \Rightarrow H_{D|PID}(s) = \frac{K K_p \tau_{D2} (s^2 + \frac{s}{\tau_{D1}} + \frac{1}{\tau_{D1} \tau_I})}{s^2(s+p) + K K_p \tau_{D1} (s^2 + \frac{s}{\tau_{D1}} + \frac{1}{\tau_{D1} \tau_I})} \quad (34)$$

Que, haciendo $K_p \tau_{D2} = \frac{p}{K}$ para forzar que el error a la parábola sea nulo, llegamos a que:

$$H_{D|PID}(s) = \frac{ps^2 + K K_p \tau_{D1} (s^2 + \frac{s}{\tau_{D1}} + \frac{1}{\tau_{D1} \tau_I})}{s^2(s+p) + K K_p \tau_{D1} (s^2 + \frac{s}{\tau_{D1}} + \frac{1}{\tau_{D1} \tau_I})} \quad (35)$$

Por otro lado, la función de transferencia del error es:

$$H_{e,D|PID}(s) = \frac{s^3}{(s^2(s+p) + K K_p \tau_{D1}(s^2 + \frac{s}{\tau_{D1}} + \frac{1}{\tau_{D1}\tau_I}))} \quad (36)$$

Que, como hemos especificado antes, tiene un error nulo al seguir al escalón, la rampa y la parábola (lo analizamos más detalladamente en la sección 2.2). Reescribiendo el polinomio característico de la siguiente forma:

$$P(s) = (s+c)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) = s^3 + (p + K_p K \tau_{D1})s^2 + K_p K s + \frac{K_p K}{\tau_I} \quad (37)$$

Tenemos, de forma análoga al PID-D, que los parámetros de diseño se relacionan con los del controlador como:

$$\begin{cases} K_p = \frac{p^2(2\beta + 1/\zeta^2)}{K\beta_2^2} \\ \tau_I = \frac{\beta_2(2\beta\zeta^2 + 1)}{\beta p} \\ \tau_{D1} = \frac{\beta_2(2 + \beta - \beta_2)}{p(2\beta + 1/\zeta^2)} \end{cases} \quad (38)$$

La pendiente de la salida en el inicio, como ocurría también con el controlador PID-D, es positiva e igual a:

$$\dot{y}(0^+) = \zeta\omega_n(\beta + 2) = \frac{\beta + 2}{\beta_2}p = p + K K_p \tau_{D1} \quad (39)$$

Los efectos de los parámetros de diseño ζ , β y β_2 son similares a los descritos para el caso del PID.

1.7.1. Análisis visual del efecto de los parámetros de diseño

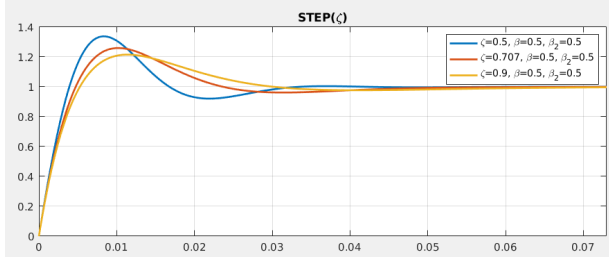
Usando los parámetros del motor para el que vamos a diseñar el controlador en 2:

$$K_m = 2652,28$$

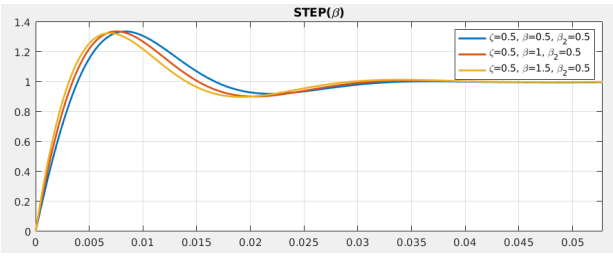
$$p_m = 64,986$$

Hemos visualizado el comportamiento de las respuestas al escalón y al seguimiento de las señales monómicas en función de los parámetros de diseño ζ , β y β_2 , haciendo $\tau_{D2} = p_m/K_p K_m$ para forzar que el error de seguimiento a la parábola en el infinito sea nulo.

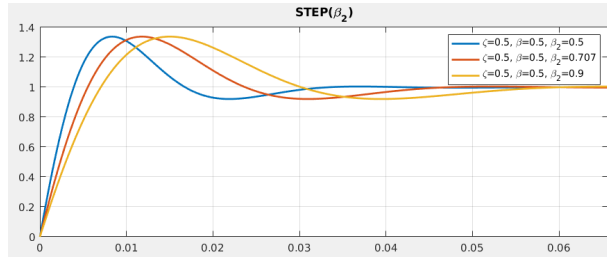
Respuesta al escalón Como se puede observar, al crecer ζ la sobreelongación máxima (M_p) disminuye, mientras que el tiempo de subida (t_s) aumenta. Por otro lado, al aumentar β , M_p se mantiene a la vez que t_r y t_s disminuyen. Finalmente, al aumentar β_2 observamos que t_r y t_s aumentan, mientras que M_p se mantiene constante.



(a) En función de ζ .



(b) En función de β .

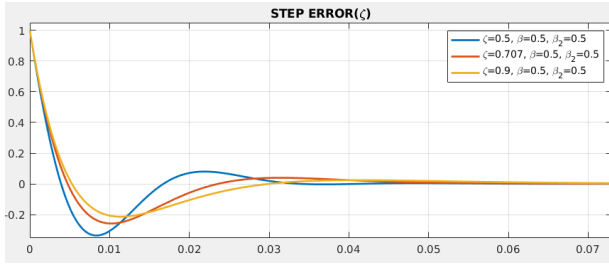


(c) En función de β_2 .

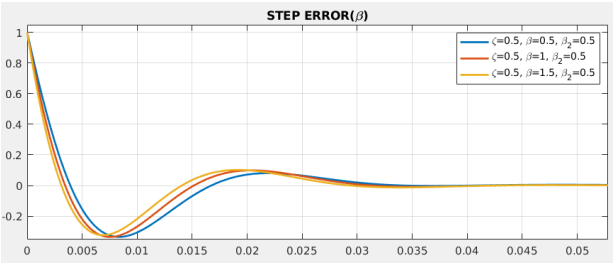
Figura 37: D|PID: Respuesta al escalón.

Respuesta del error al seguimiento de señales monómicas

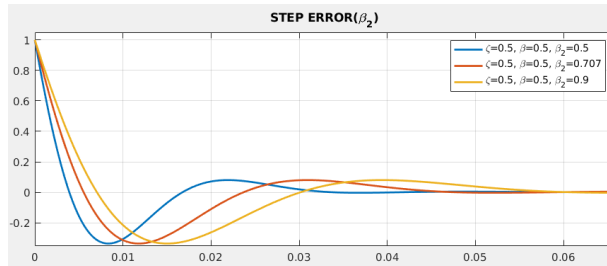
- **Escalón:** el error en el infinito es nulo, y depende de ζ , β y β_2 de la misma manera que la respuesta al escalón.



(a) En función de ζ .



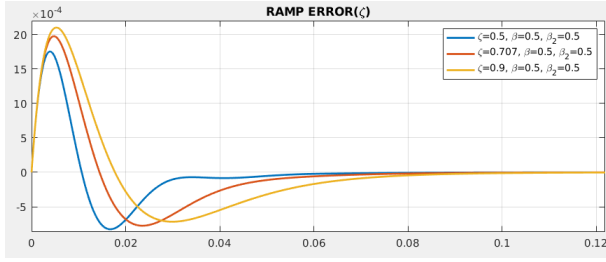
(b) En función de β .



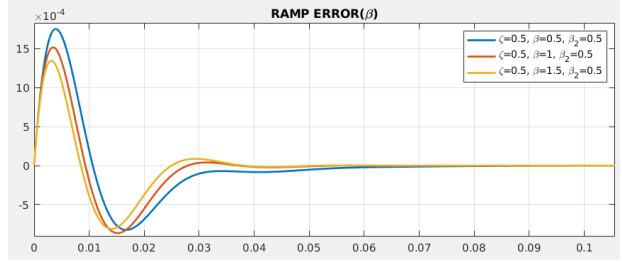
(c) En función de β_2 .

Figura 38: D|PID: Respuesta del error al seguimiento de un escalón.

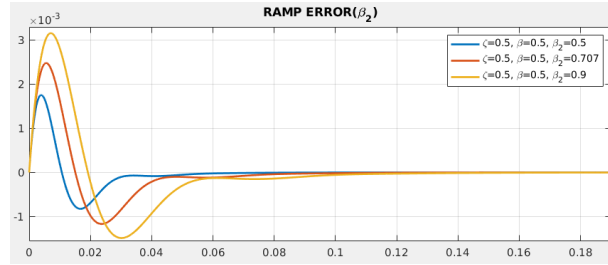
- **Rampa:** el error en el infinito es nulo, llegando más lento a este cuanto mayor sea ζ y β_2 , y cuanto menor sea β . El pico del error es mayor cuanto mayores sean ζ y β_2 , a la vez que menor cuanto mayor sea β .



(a) En función de ζ .



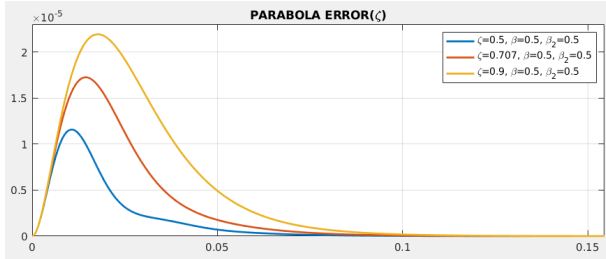
(b) En función de β .



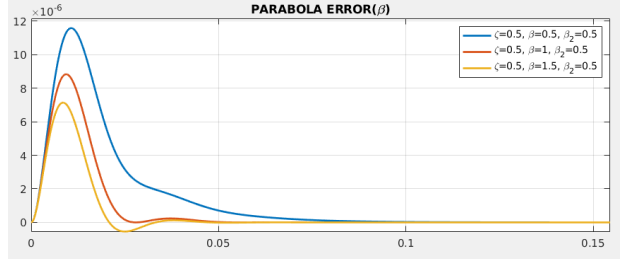
(c) En función de β_2 .

Figura 39: D|PID: Respuesta del error al seguimiento de una rampa.

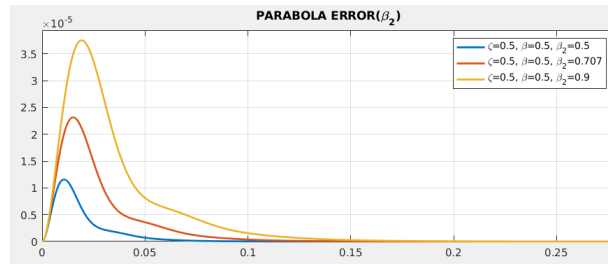
- **Parábola:** el error en el infinito es nulo, llegando más lento a este cuanto mayor sea ζ y β_2 , y cuanto menor sea β . El pico del error es mayor cuanto mayores sean ζ y β_2 , a la vez que menor cuanto mayor sea β .



(a) En función de ζ .



(b) En función de β .



(c) En función de β_2 .

Figura 40: D|PID: Respuesta del error al seguimiento de una parábola.

2. Análisis y diseño de un sistema de control D|PID

2.1. Análisis de la estabilidad

Recordamos la función de transferencia y el polinomio característico correspondiente a un lazo cerrado con un controlador D|PID:

$$H_{D|PID}(s) = \frac{KK_P(\tilde{\tau}_D s^2 + s + \frac{1}{\tau_I})}{s^2(s+p) + KK_P(\tau_{D1}s^2 + s + \frac{1}{\tau_I})} \quad (40)$$

Con:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_D &= \tau_{D1} + \tau_{D2} \\ P(s) &= s^2(s+p) + KK_P(\tau_{D1}s^2 + s + \frac{1}{\tau_I}) = s^3 + (p + K_p K \tau_{D1})s^2 + K_p K s + \frac{K_p K}{\tau_I} \end{aligned} \quad (41)$$

Lo primero que observamos es que la estabilidad va a depender unicamente de K_p , τ_I y τ_{D1} , siendo completamente independiente de τ_{D2} . Esto tiene sentido, ya que este parámetro no está presente en el lazo realimentado. Al mismo tiempo, que la estabilidad no dependa de τ_{D2} es muy útil, ya que como hemos explicado en la sección anterior uno de los usos de este parámetro es que el error con una parábola de entrada sea nulo. Pudiendo ajustar este parámetro sin preocuparnos de la estabilidad.

$$\begin{array}{l} s^3 : \\ s^2 : \\ s^1 : \\ s^0 : \end{array} \left\| \begin{array}{cc} 1 & \frac{K_p K}{\tau_I} \\ p + K_p K \tau_{D1} & \frac{K_p K}{\tau_I} \\ K_p K \frac{p + K_p K \tau_{D1} - \frac{1}{\tau_I}}{p + K_p K \tau_{D1}} & 0 \\ \frac{K_p K}{\tau_I} & 0 \end{array} \right.$$

Tabla 1: Tabla de Routh de la ecuación característica del lazo cerrado con un controlador D|PID.

El criterio de Routh expone que el número de raíces con parte real positiva de un sistema es igual al número de cambios de signo de los coeficientes de la primera columna de la tabla de Routh del polinomio característico. Como el primer coeficiente de esta columna es positivo, 1, sabemos que para que el sistema sea estable todos los coeficientes de la primera columna de la tabla de Routh deben ser positivos. Sabemos que tanto K_p como τ_I son positivos, para unos valores de diseño β , β_2 y ζ positivos. De esta forma evaluaremos los únicos coeficientes que pueden ser negativos:

$$\begin{aligned} p + K_p K \tau_{D1} &= \frac{p(2+\beta)}{\beta_2} > 0 \quad \forall \beta_2 > 0, \beta > 0 \\ K_p K \frac{p + K_p K \tau_{D1} - \frac{1}{\tau_I}}{p + K_p K \tau_{D1}} &\Rightarrow p + K_p K \tau_{D1} - \frac{1}{\tau_I} = \frac{p}{\beta_2} \frac{2 + (4\zeta^2 - 1)\beta + 2\zeta^2\beta^2}{\zeta^2(2\beta + 1/\zeta^2)} \Rightarrow 2 + (4\zeta^2 - 1)\beta + 2\zeta^2\beta^2 \end{aligned}$$

Luego, podemos calcular los puntos en los que el sistema deja de ser estable viendo cuando la expresión anterior es menor a 0, en caso de que exista en los números reales. Fijando β buscamos un valor de ζ que exista dentro de los números reales y que satisfaga la siguiente desigualdad.

$$(2\beta^2 + 4\beta)\zeta^2 + (2 - \beta) < 0 \Rightarrow \zeta < \sqrt{\frac{1}{2\beta} \frac{\beta - 2}{\beta + 2}}$$

De esta forma, podemos observar que si $\beta \leq 2$ el sistema será estable, y que para todo $\beta > 2$ existe ζ tal que el sistema es inestable. También podemos observar que no para todo ζ existe un β para el que el sistema sea inestable, ya que la desigualdad anterior, para $\beta > 2$ está acotada por arriba y por abajo. Inferiormente esta acotada por $\zeta = 0$ y por arriba por $\zeta = 0,207$, como se demuestra a continuación. Por lo que podemos concluir que para todo $\zeta \geq 0,207$ el sistema será estable, mientras que si $\zeta < 0,207$ existe β tal que el sistema es inestable.

$$\frac{d}{d\beta} \frac{\beta - 2}{2\beta^2 + 4\beta} = \frac{-2\beta^2 + 8\beta + 8}{(2\beta^2 + 4\beta)^2} = 0 \Rightarrow \beta^2 - 4\beta - 4 = 0 \Rightarrow \beta = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-4)}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow \beta = 2 + 2\sqrt{2}$$

$$\zeta_{max}(\beta = 2 + 2\sqrt{2}) = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{2(2 + 2\sqrt{2})(4 + \sqrt{2})}} = 0,207$$

En vez de observar los parámetros de diseño, podemos ver la relación que se tiene que dar para que el sistema sea estable a partir de K_p , τ_{D1} y τ_I :

$$p + K_p K \tau_{D1} > \frac{1}{\tau_I} \quad (42)$$

2.2. Seguimiento a las señales monómicas: escalón, rampa y parábola

La función de transferencia del error del controlador $D|PID$ es:

$$H_{e,D|PID}(s) = 1 - H_{D|PID}(s) = \frac{s^3 + (p - K_p K_m \tau_{D2})s^2}{s^3 + (p + K_p K_m (\tau_{D1} + \tau_{D2}))s^2 + K_p K_m s + K_p K_m / \tau_I} \quad (43)$$

Podemos calcular el error del seguimiento a las señales monómicas en el infinito como:

$$e_{D|PID}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s R(s) \frac{s^3 + (p - K_p K_m \tau_{D2})s^2}{s^3 + (p + K_p K_m (\tau_{D1} + \tau_{D2}))s^2 + K_p K_m s + K_p K_m / \tau_I} = \lim_{s \rightarrow 0} R(s) \frac{s^3 (p - K_m K_p \tau_{D2}) \tau_I}{K_m K_p} \quad (44)$$

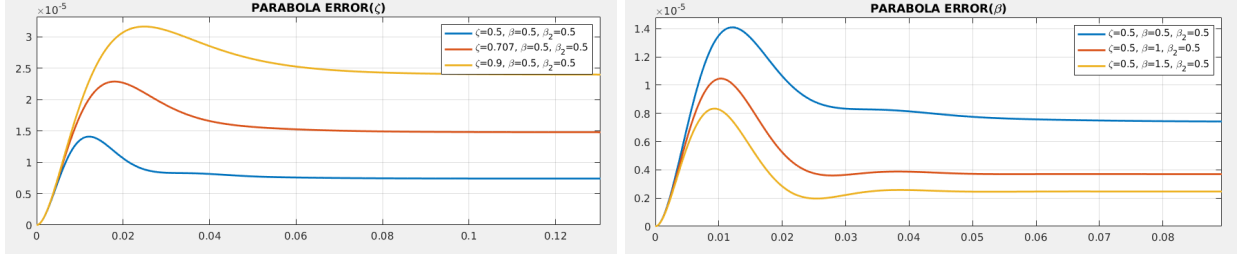
Y los errores del seguimiento de las funciones monómicas (escalón, rampa y parábola):

$$\begin{aligned} e_{PID-D,0}(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \frac{s^3 (p - K_m K_p \tau_{D2}) \tau_I}{K_m K_p} = 0 \\ e_{PID-D,1}(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} \frac{s^3 (p - K_m K_p \tau_{D2}) \tau_I}{K_m K_p} = 0 \\ e_{PID-D,2}(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^3} \frac{s^3 (p - K_m K_p \tau_{D2}) \tau_I}{K_m K_p} = \frac{(p - K_m K_p \tau_{D2}) \tau_I}{K_m K_p} \end{aligned}$$

Por lo que, como hemos comentado ya anteriormente, si hacemos que $\tau_{D2} = \frac{p}{K_m K_p}$ obtenemos un error nulo al seguimiento de la parábola. Este caso se puede ver en las representaciones del apartado 1.7.1.

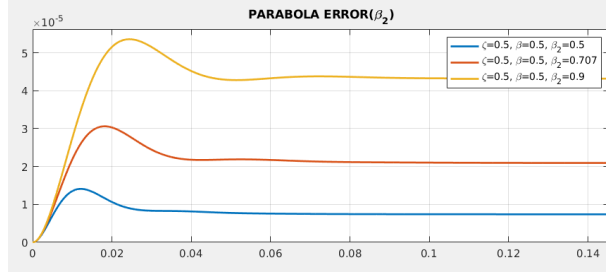
Ahora vamos a representar dos casos distintos para el error a la parábola (ya que es el único que puede no ser nulo), el primero cuando $\tau_{D2} < \frac{p}{K_m K_p}$ y el segundo para $\tau_{D2} > \frac{p}{K_m K_p}$.

Respuesta del error al seguimiento de la parábola cuando $\tau_{D2} < \frac{p}{K_m K_p}$: haciendo $\tau_{D2} = \frac{1}{2} \frac{p}{K_m K_p}$, observamos que el error en el infinito es constante y positivo, llegando más lento a este cuanto mayor sea ζ y β_2 , y cuanto menor sea β . El pico del error es mayor cuanto mayores sean ζ y β_2 , a la vez que menor cuanto mayor sea β .



(a) En función de ζ .

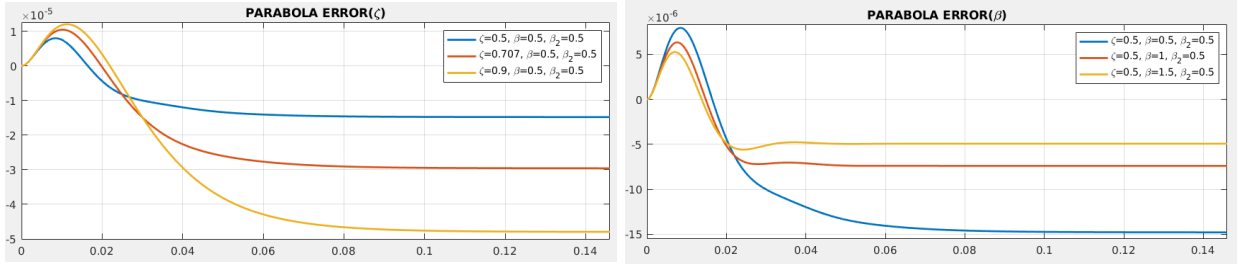
(b) En función de β .



(c) En función de β_2 .

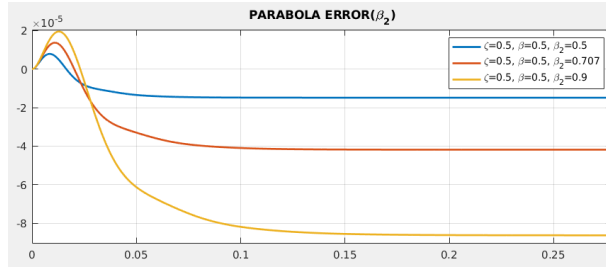
Figura 41: D|PID: Respuesta del error al seguimiento de una parábola cuando $\tau_{D2} < \frac{p}{K_m K_p}$.

Respuesta del error al seguimiento de la parábola cuando $\tau_{D2} > \frac{p}{K_m K_p}$: por otro lado, haciendo $\tau_{D2} = 2\frac{p}{K_m K_p}$, vemos que el error en el infinito es constante y negativo, llegando más lento a este cuanto mayor sea ζ y β_2 , y cuanto menor sea β . El pico del error es mayor por encima y por debajo de cero (en valor absoluto) cuanto mayores sean ζ y β_2 , a la vez que menor cuanto mayor sea β .



(a) En función de ζ .

(b) En función de β .



(c) En función de β_2 .

Figura 42: D|PID: Respuesta del error al seguimiento de una parábola cuando $\tau_{D2} > \frac{p}{K_m K_p}$.

2.3. Sintonización de parámetros

Para sintonizar el controlador deberemos fijar los parámetros K_p , τ_{D1} , τ_{D2} y τ_I . En un principio fijamos $\tau_{D2} = p/K_p K$ de forma que el error a la parábola en el infinito sea nulo. En cuanto a los otros parámetros, siguiendo los razonamientos de las secciones anteriores trabajaremos con los parámetros ζ , β y β_2 . Para

fijar estos valores se probarán diferentes configuraciones evaluando cuáles cumplen las distintas condiciones y en que medida hay que modificar los parámetros para que las cumplan. En todo momento nos apoyaremos en los contenidos y razonamientos a los que se ha llegado sobre los controladores $D|PID$ en las secciones anteriores.

La primera condición que debemos cumplir es la de la sobreelongación máxima, $M_p \in [0,6,0,13]$. Sabemos que M_p es independiente de β_2 , teniendo únicamente que fijar ζ y β para tener un valor de M_p . El comportamiento con ζ es lineal e inversamente proporcional. No obstante, con β es no lineal. Por lo tanto tomaremos una serie de valores de ζ y observaremos para que intervalo de β se cumple la condición. En la figura 43 podemos observar los resultados obtenidos para un total de 7 valores de ζ .

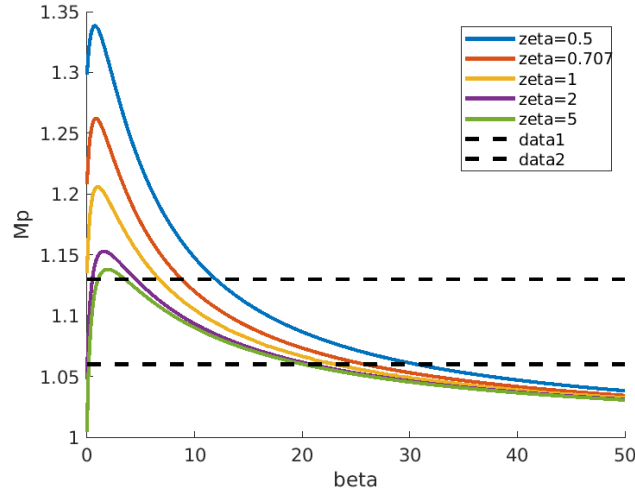


Figura 43: Sobreelongación máxima en función de β , variando ζ .

Sabemos que un valor mayor de ζ hará el sistema más lento, pero reducirá la sobreelongación máxima. Además un valor de ζ próximo a 1 reducirá la frecuencia de oscilación, ω_d . Teniendo todo esto en cuenta, fijamos $\zeta = 1/\sqrt{2} = 0,707$. Por lo que, la condición que debe cumplirse es $\beta \in [8'80, 25'80]$. Por lo tanto, fijamos a un valor que cumpla dicha condición, $\beta = 10$.

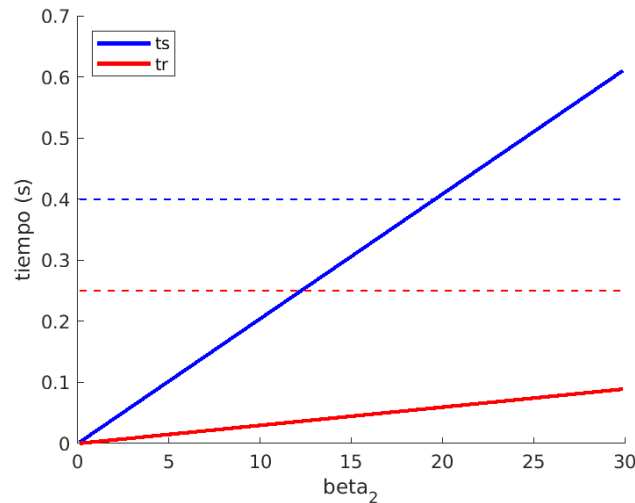


Figura 44: Tiempo de subida y de establecimiento en función de β_2 para $\zeta = 0,707$ y $\beta = 10$.

En la figura 44 podemos observar la evolución del tiempo de establecimiento, t_s , para una tolerancia de $v = 2\%$, y el tiempo de subida en función de β_2 para $\zeta = 0,707$ y $\beta = 10$. En la figura también aparecen representados los tiempo de subida y establecimiento máximos, de las especificaciones que debemos cumplir: $t_s \leq 0,4(s)$ y $t_r \leq 0,25(s)$. Se observa que claramente para β_2 estrictamente mayor a 0 el comportamiento es lineal: a mayor β_2 mayor t_s y mayor t_r . A partir de los datos de la figura, podemos concluir que, para que se cumpla la condición del tiempo de subida, $\beta_2 \in (0, 19'59]$ y que, para que se cumpla la condición del tiempo de establecimiento, $\beta_2 \in (0, 83'99]$. Siendo la primera más restrictiva tenemos que $\beta_2 \in (0, 19'59]$. Por lo tanto, fijamos a un valor que cumpla dicha condición, $\beta_2 = 10$.

Tras la sintonización de parámetros, llegamos a la conclusión de que las condiciones no han sido difíciles de cumplir, existen grandes intervalos para los cuáles se cumplen. En un primer momento fijamos el valor de ζ , que como se razonó en los apartados anteriores es el más influyente en la velocidad del sistema. Con un valor próximo a la unidad se ha podido elegir los valores de β y β_2 sin grandes restricciones.

Finalmente se presenta un resumen de, los parámetros de diseño, los parámetros del controlador y los parámetros de régimen transitorio obtenido, que como se puede observar cumplen todas las restricciones. También se observa la simulación de la respuesta al escalón para esta configuración en la figura 45.

$$\begin{cases} \zeta = 0,707 \\ \beta = 10 \\ \beta_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_p = 0,3503 \\ \tau_{D1} = 0,0140 \\ \tau_{D2} = 0,0699 \\ \tau_I = 0,1693 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_p = 0,1199 \\ t_s = 0,2041 \\ t_r = 0,0298 \end{cases}$$

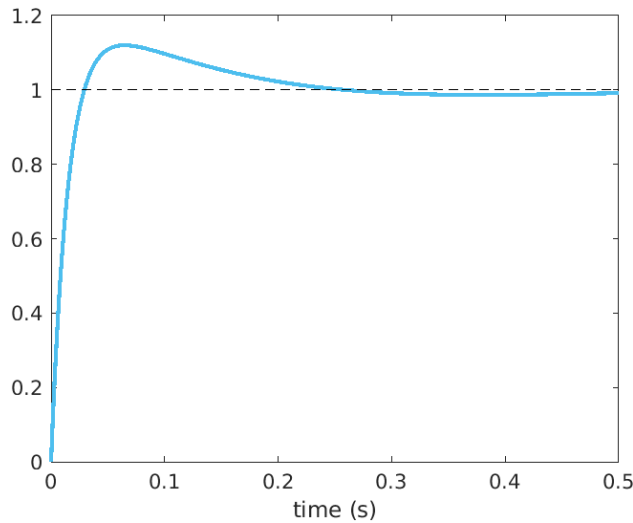


Figura 45: Respuesta al escalón con un controlador $D|PID$ con $\zeta = 0,707$, $\beta = 10$ y $\beta_2 = 10$.

Somos conscientes de que los parámetros de régimen transitorio aún pueden mejorar. No obstante, sacar más provecho de los parámetros para que el sistema sea más rápido y con menos oscilaciones no tiene porque suponer una mejora real, ya que esto es una simulación. A partir de lo aprendido en esta sección, fijamos unos parámetros de una forma intuitiva y obtenemos unos resultados aparentemente mucho mejores que se recogen a continuación. También se puede observar la respuesta al escalón en la figura 46. No obstante, esperamos que las no idealidades del motor real afecten mucho más a este diseño que al anterior, por lo que este no será sobre el que se trabajará.

$$\begin{cases} \zeta = 0,9 \\ \beta = 20 \\ \beta_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_p = 16,4143 \\ \tau_{D1} = 0,0149 \\ \tau_{D2} = 0,0015 \\ \tau_I = 0,0514 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_p = 0,0682 \\ t_s = 0,0316 \\ t_r = 0,0040 \end{cases}$$

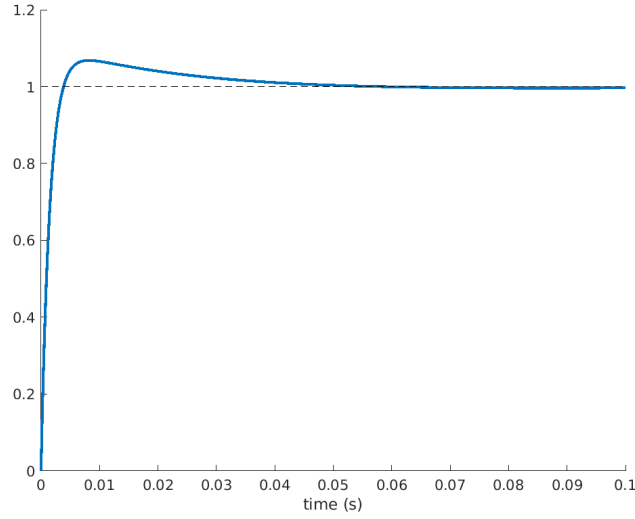


Figura 46: Respuesta al escalón con un controlador $D|PID$ con $\zeta = 0,9$, $\beta = 20$ y $\beta_2 = 2$.

3. Implementación y Análisis de un controlador $D|PID$ en el Telaboratorio

3.1. Implementación de un controlador $D|PID$ en el Telaboratorio

Para este apartado deberemos aplicar a la función de transferencia del motor la reductora, $r = 23$, ya que la posición controlada será la de después de la reductora. Por lo tanto tenemos que la función de transferencia será:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+p)} = \frac{115,3165}{s(s+64,986)} \quad (45)$$

También tendremos que realizar un procesado sobre los parámetros para adecuarlos al controlador implementado en el telaboratorio. Tenemos que fijar un total de 12 parámetros: tres parámetros (el proporcional, K_p , el derivativo, K_d , y el integrado, K_i) por cada una de las cuatro ramas (prealimentada, directa, paralela y realimentada). Para un controlador $D|PID$ y fijando un tiempo de muestreo T podemos calcular los diferentes parámetros como se indica en la tabla 2, a partir de los parámetros del controlador (K_p , τ_{D1} , τ_{D2} , τ_I).

| | Directa | Paralela | Realimentada | Prealimentada |
|-------|---------------------------|----------|--------------|---------------------------|
| K_p | K_p | 0 | 0 | 0 |
| K_i | $K_p \frac{T}{\tau_I}$ | 0 | 0 | 0 |
| K_d | $K_p \frac{\tau_{D1}}{T}$ | 0 | 0 | $K_p \frac{\tau_{D2}}{T}$ |

Tabla 2: Cálculo de los parámetros para un controlador $D|PID$

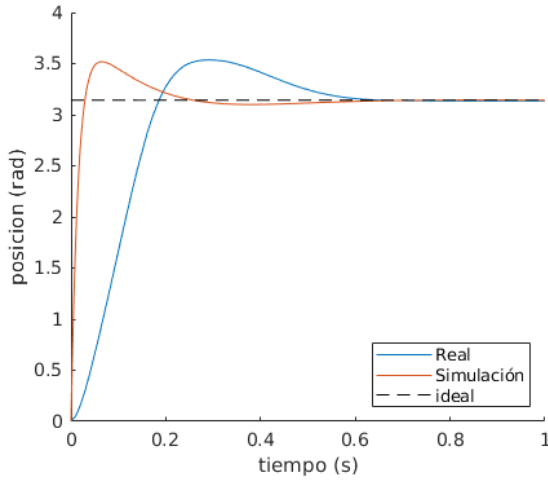
3.2. Implementación de los diseños anteriores

Aplicamos los dos diseños del apartado anterior. Se presentan los parámetros obtenidos para ambos experimentos a continuación. También se presentan en la figura 47 las respuestas al escalón para ambos diseños.

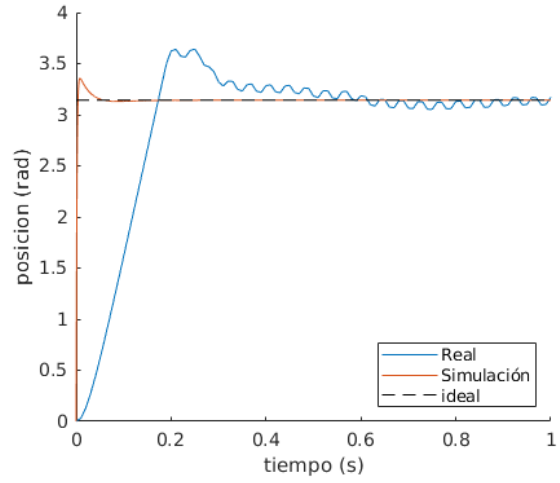
$$\begin{cases} \zeta = 0,707 \\ \beta = 10 \\ \beta_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_p = 0,3503 \\ \tau_{D1} = 0,0140 \\ \tau_{D2} = 0,0699 \\ \tau_I = 0,1693 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_p = 0,1255 \text{ (rad)} \\ t_s = 0,53 \text{ (s)} \\ t_r = 0,19 \text{ (s)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \zeta = 0,9 \\ \beta = 20 \\ \beta_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_p = 16,4143 \\ \tau_{D1} = 0,0149 \\ \tau_{D2} = 0,0015 \\ \tau_I = 0,0514 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_p = 0,1592 \text{ (rad)} \\ t_s = 0,87 \text{ (s)} \\ t_r = 0,18 \text{ (s)} \end{cases}$$

Los resultados obtenidos son radicalmente diferentes a los simulados. Lo primero que observamos es que de las condiciones que se pedían únicamente se cumple la condición del tiempo de subida. Para el primer diseño también se cumple, aunque cerca del límite, la condición de la sobreelongación máxima. Lo siguiente que observamos es que como habíamos predicho en el apartado 2.3 el comportamiento real del primer diseño es mejor que el del segundo, pareciéndose en gran medida al simulado. Mientras que el segundo, con un comportamiento simulado peor funciona mejor en el motor real.



(a) $\zeta = 0,707$, $\beta = 10$ y $\beta_2 = 10$.



(b) $\zeta = 0,9$, $\beta = 20$ y $\beta_2 = 2$.

Figura 47: Respuesta al impulso para ambos diseños, real y simulada.

3.3. Análisis de los resultados

El primer diseño se ha considerado mejor al segundo (en cuanto a la implementación en el motor real), por lo que a partir de este punto será el que usaremos y al que haremos referencia. También se ha fijado el tiempo de muestreo del controlador a $T = 10ms$. Comparando los resultados simulador y los reales llegamos a una serie de conclusiones acerca de el funcionamiento no ideal de un motor:

- La velocidad inicial del motor es nula. La ley de Newton relaciona la fuerza ejercida sobre un cuerpo con la variación de su momento lineal. Para el instante inicial t , estando en reposo por lo que la fuerza ejercida ha de ser infinita para que la velocidad pase a ser no nula, lo cuál es claramente imposible. Esto a su vez también fija la aceleración máxima del motor por la fuerza que es capaz de ejercer.

$$\sum \vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

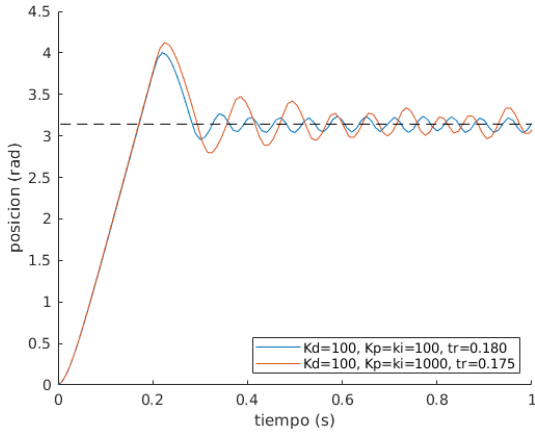
Como se ha comprobado en la simulación la velocidad inicial era no nula y la podemos calcular como:

$$\dot{y}(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 R(s) H_{D|PID}(s) = p = 64,986 \text{ (s}^{-1}\text{)}$$

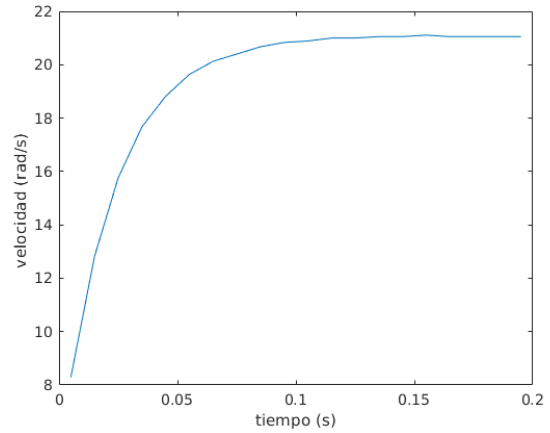
- Existe una velocidad máxima del motor. De una forma parecida al razonamiento anterior, el motor solo es capaz de recibir un determinado voltaje máximo que se traducirá en una potencia máxima y por consecuencia una velocidad máxima. Estas dos no linealidades provocan que el tiempo de respuesta sea bastante peor a lo deseado. Al mismo tiempo, como se tarda más a llegar al valor deseado el efecto integrador es mayor, lo que facilita que aparezcan oscilaciones, como podemos observar para el segundo diseño.

Estas no linealidades tienen un efecto diferente para cada uno de los parámetros de medida. Nuestra motivación es la de modificar el diseño anterior para cumplir las condiciones propuestas, por lo que se realizará un análisis de los tres parámetros por separado:

- **Sobreelongación máxima:** La sobreelongación máxima aumenta con respecto a la simulada (M_p : $12\% \rightarrow 12,5\%$) pero no en gran medida, manteniéndose en el rango deseado. Por lo tanto, no será la causa de que tengamos que cambiar el diseño. No obstante, al estar muy próximos al límite superior debemos intentar reducirla en vez de aumentarla. Esto se consigue, disminuyendo ζ o, en el rango en el que nos encontramos, aumentando β .
- **Tiempo de subida:** El tiempo de subida si aumenta de una forma importante, no obstante este parámetro está fuertemente limitado por las no linealidades. Para comprobar hasta que punto podríamos llegar implementamos un controlador *PID* con unos parámetros de diseño para que el sistema vaya a toda la velocidad posible, sin importarnos el resto. Para $K_p = K_i = 1000$ y $K_d = 100$ con $T = 5(ms)$ obtenemos que $t_s = 0,175(s)$ con un tiempo de muestreo de $T_f = 5(ms)$. Usamos este mismo experimento para medir la velocidad máxima del motor que es $\omega_{max} = 21,1(rad/s)$. En la figura 51 se puede observar este experimento.



(a) Respuesta al escalón.



(b) Velocidad en la subida para el más rápido.

Figura 48: Experimentos para optimizar el tiempo de subida.

La principal conclusión que se extrae de este experimento es que el valor de t_s es muy próximo al mejor que podemos conseguir, por lo que, mientras no empeore no nos fijaremos en él. Sabemos que este tiempo aumentará si aumentamos ζ si disminuimos β o aumentamos β_2 .

- **Tiempo de establecimiento:** Este es el parámetro que no cumple las especificaciones, $t_s < 0,4(s)$ para una tolerancia del 2%. En un principio podríamos recopilar los efectos de los parámetros que afectan a este parámetro y modificarlos para que mejore. No obstante, pensamos, esto solo aumentaría la diferencia entre la simulación y la realidad, no solucionando el problema. De esta forma vamos a realizar una modificación intuitiva por cada parámetro del lazo directo (K_i , K_d y K_p).
- El efecto integrador no solo depende de la constante de integración K_i , sino que también depende de la integral del error. Por lo tanto, para que el pico sea menor, y sobretodo, para sea menos

dilatado en el tiempo realizaremos la siguiente transformación.

$$K_i \cdot I = K'_i \cdot I' \Rightarrow K'_i = K_i \cdot \frac{I}{I'} = 0,476 \cdot \frac{0,0340}{0,3000} = 0,054 \quad (46)$$

Donde:

$$K_i = K_p \cdot \frac{T}{\tau_I} = 0,476 \quad \text{es la constante integradora del diseño}$$

$$I = \int_0^{t_r} (\theta_{final} - \theta_{simulado}) dt = 0,0340 \quad (s \cdot rad)$$

$$I' = \int_0^{t_r} (\theta_{final} - \theta_{real}) dt = 0,3000 \quad (s \cdot rad)$$

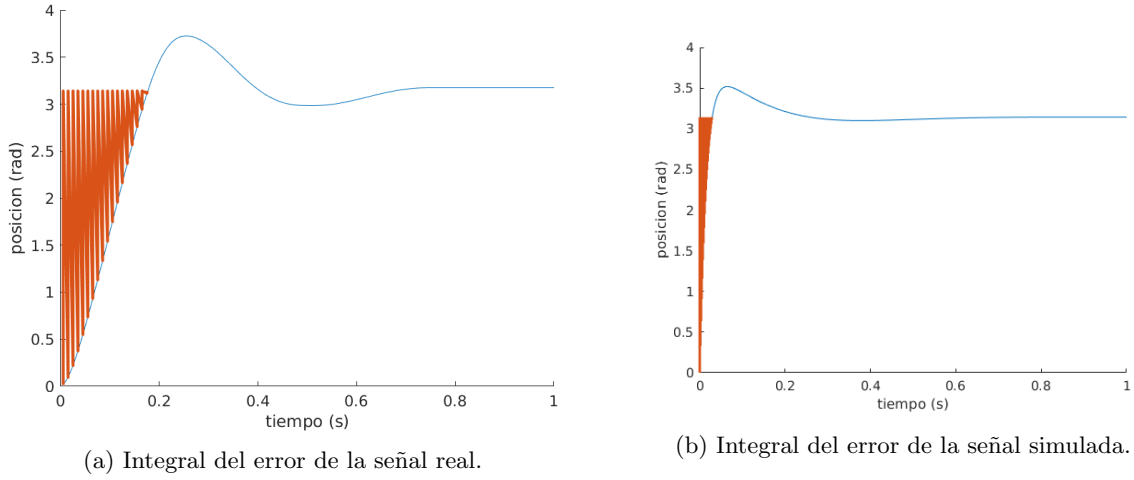


Figura 49: Respuestas al escalón real y simulada.

- El efecto derivador tampoco depende únicamente de la constante de derivación, K_d , sino que también depende de la variación del error, es decir, la velocidad. Por lo tanto, con que el pico sea menor realizamos la siguiente modificación:

$$K_d \cdot \dot{\theta}_{tr} = K'_d \cdot \dot{\theta}'_{tr} \Rightarrow K'_d = K_d \cdot \frac{\dot{\theta}_{tr}}{\dot{\theta}'_{tr}} = 11,271 \cdot \frac{30,413}{8,890} = 38,557 \quad (47)$$

Donde:

$$K_d = K_p \cdot \frac{\tau_D}{T} = 11,271 \quad \text{es la constante derivadora del diseño}$$

$$\dot{\theta}_{tr} = \left. \frac{d\theta_{simulada}}{dt} \right|_{t=t_r} = 30,413 \quad (rad/s)$$

$$\dot{\theta}'_{tr} = \left. \frac{d\theta_{real}}{dt} \right|_{t=t_r} = 8,890 \quad (rad/s)$$

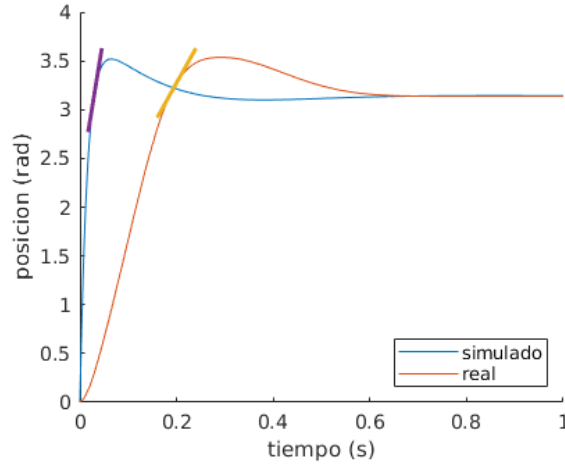


Figura 50: Respuestas al escalón real y simulada representando las velocidades al cruzar la posición deseada.

- Tras las transformaciones anteriores se ha disminuido el efecto integrador y se ha aumentado el derivador, lo que provoca que el sistema tarde mucho en llegar al pico y por lo tanto sea muy lento. Para hacer el sistema más rápido aumentaremos el valor de la constante proporcional, K_p de la siguiente forma:

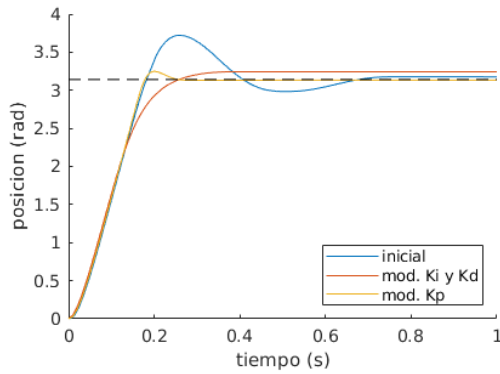
$$K_p \cdot M_p = K'_p \cdot M'_p \Rightarrow K'_p = K_p \cdot \frac{M_p}{M'_p} = 8,0570 \cdot \frac{0,1255}{0,0304} = 33,261 \quad (48)$$

Donde:

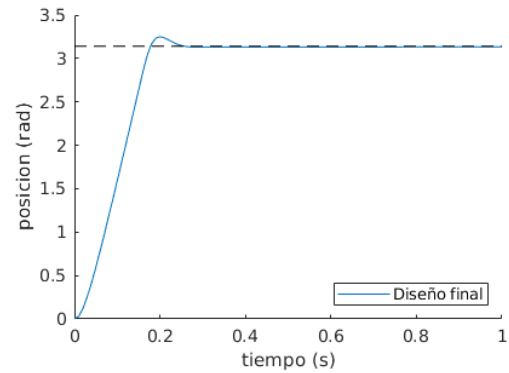
$K_d = 8,0570$ es la constante proporcional del diseño

$M_p = 0,1255$ (*rad*) es la sobreelongación máxima obtenida en el primer diseño

$M'_p = 0,0304$ (*rad*) es la sobreelongación máxima obtenida tras las modificaciones de esta sección



(a) Comparación entre el diseño inicial, tras modificar K_i y K_d y tras modificar también K_p .



(b) Diseño final.

Figura 51: Respuestas al escalón real y simulada.

Finalmente, para obtener el diseño final debemos modificar $\tau_{D2} = \frac{p}{K_p K}$ para mantener un error nulo a la parábola. A continuación realizamos un resumen del nuevo diseño, de los parámetros del controlador y los resultados obtenidos.

$$\left. \begin{array}{cc} \text{Direct} & \text{FeedForward} \\ K_p = 33,261 & K_p = 0 \\ K_i = 0,054 & K_i = 0 \\ K_d = 38,557 & K_d = 13,651 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K_p = 33,261 \\ \tau_{D1} = 0,0116 \\ \tau_{D2} = 0,0169 \\ \tau_I = 6,1657 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M_p = 0,0347 \text{ (rad)} \\ t_p = 0,2000 \text{ (s)} \\ t_r = 0,1800 \text{ (s)} \\ t_s = 0,2200 \text{ (s)} \end{array} \right.$$

Los resultados del diseño han sido satisfactorios, únicamente no cumplimos la condición de la sobreelongación máxima, $M_p = 3,47\%$. No obstante, es debido a que la sobreelongación es menor al mínimo y esto para muchos sistemas no es realmente malo. En cuanto al tiempo de subida, $t_s = 0,18(s)$, es muy próximo al mínimo tiempo posible para el motor. Por último, el tiempo de establecimiento, $t_r = 0,22(s)$, cumple de forma holgada las restricciones y es muy próximo al tiempo de subida, por lo que se piensa que tampoco se podría mejorar más.

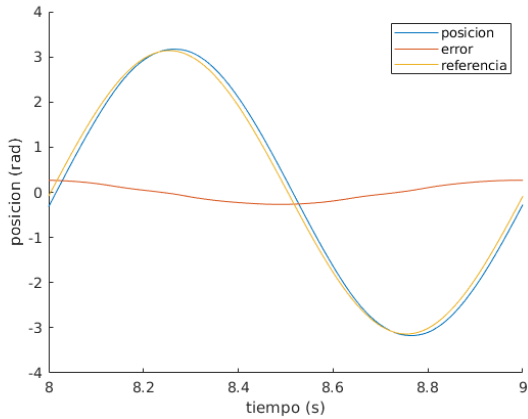
En cuanto al procedimiento de diseño seguido, podemos concluir que para este ejemplo y nuestras especificaciones ha dado bastante buenos resultados. No obstante, no podemos asegurar que esto vaya a suceder de la misma forma para otros diseños y mucho menos para otros sistemas con no idealidades diferentes. Por ejemplo, a lo largo de los experimentos la rotura del par de fricción para que el motor se empiece a mover no ha sido un problema, cuestión que si experimentamos en la entrega anterior. Si esta no idealidad se hace importante se necesita en mayor medida efecto integrador.

3.4. Análisis en régimen permanente y transitorio

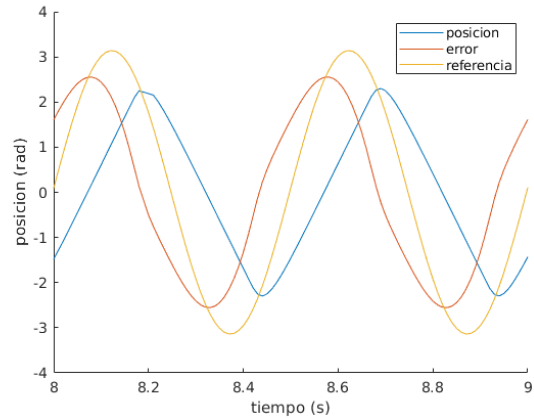
Ya se ha realizado un análisis de la respuesta al escalón. Tomando el último diseño obtenido vamos a realizar un estudio sobre la rampa, la parábola y una senoide.

3.4.1. Senoide

Para realizar un experimento con una señal sinusoidal deberemos fijar la amplitud y la velocidad angular. Fijaremos la amplitud y variaremos la frecuencia para ver cual es el comportamiento del controlador. Además, para evaluar el régimen permanente se realizarán los experimentos a los largo de 10 segundos, aunque en las gráficas se presente únicamente 1 segundo.



(a) Seguimiento para $f = 1Hz$.



(b) Seguimiento para $f = 1Hz$.

Figura 52: Uso de controlador $D|PID$ para el seguimiento de una señal sinusoidal.

Observamos que el seguimiento para una frecuencia de $f = 1Hz$ es bastante bueno. Únicamente existe un pequeño retraso de la posición con respecto a la referencia, lo que provoca un pequeño error. No obstante, cuando la frecuencia aumenta, en este caso a $f = 2Hz$ el error se hace muy notable, siendo de la misma magnitud que la referencia y la posición. Este hecho nos motivo a investigar la relación existente entre el error y la frecuencia.

En la figura 53 se presentan los datos obtenidos del error máximo para frecuencias entre $f_{min} = 0,25Hz$ y $f_{max} = 3Hz$. A partir de estos datos podemos llegar a la conclusión de que en un primer intervalo el error aumenta con el cuadrado de la frecuencia. Mientras, en un segundo tramo, cuando la amplitud del error está próxima a la de la referencia el error se satura y deja de aumentar.

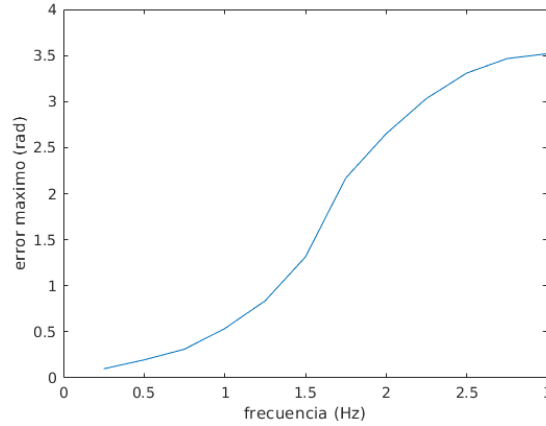
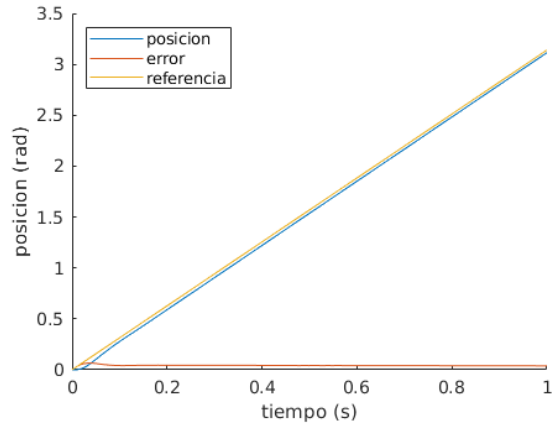


Figura 53: Evolución del error máximo

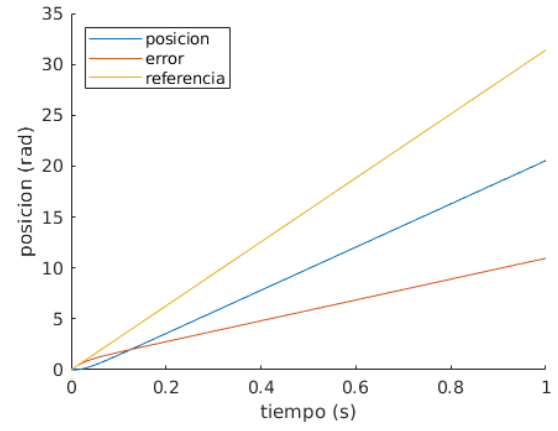
No podemos asegurar que esto vaya a suceder en otros casos, con distintos controladores o sistemas de diferentes características. No obstante, es lógico pensar que ocurra de este modo en muchos. La separación entre ambos intervalos de evolución es lo que se espera que varíe su magnitud. Esto es importante, ya que mientras nos mantengamos suficientemente por debajo de la frecuencia entre intervalos, el seguimiento será casi perfecto.

3.4.2. Rampa

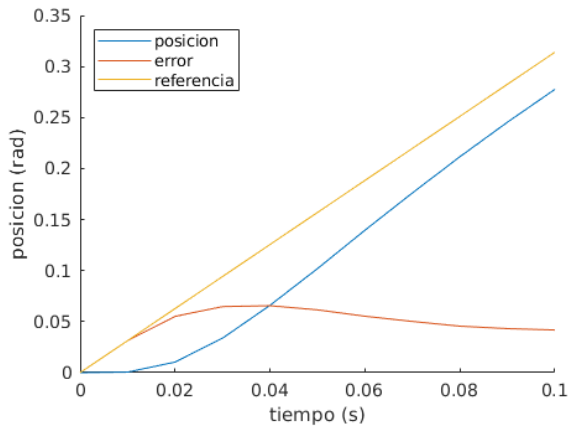
Para estos experimentos únicamente deberemos fijar la pendiente de la rampa. Teóricamente el error a la rampa en el infinito es nulo, y tras los experimentos llegamos a la conclusión de que esto es en efecto así. En la figura 54 podemos observar un experimento para una pendiente de $m = \pi$ (rad/s), en el se ve como existe un error debido a la aceleración no inmediata del motor, que se va reduciendo poco a poco hasta que en el infinito es nulo. También se ha realizado un experimento con $m = 10\pi$ (rad/s), está velocidad al ser mayor que la máxima del motor el error se hace infinito.



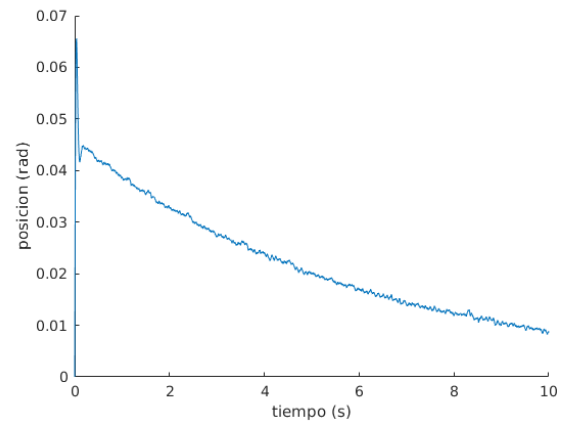
(a) Seguimiento para $m = \pi$ (rad/s).



(b) Seguimiento para $m = 10\pi$ (rad/s).



(c) Seguimiento para $m = \pi$ (rad/s).



(d) Error cometido para $m = \pi$ (rad/s).

Figura 54: Uso de controlador $D|PID$ para el seguimiento de una señal rampa.

3.4.3. Parábola

Hemos realizado un diseño que pretende anular el error a la parábola en el infinito. No obstante, a partir del análisis de las no idealidades sabemos que no es posible, ya que la velocidad en el infinito es también infinita. La función que vamos a representar es:

$$\theta = \frac{\pi}{2} t^2 \text{ (rad)} \quad (49)$$

En la figura 55 se puede observar cuál es la evolución. Se ve claramente como para el principio el error es casi nulo, pero cuando la velocidad requerida por la referencia es mayor a la máxima posible el error empieza a aumentar, siendo la posición una recta de pendiente igual a la velocidad máxima del motor.

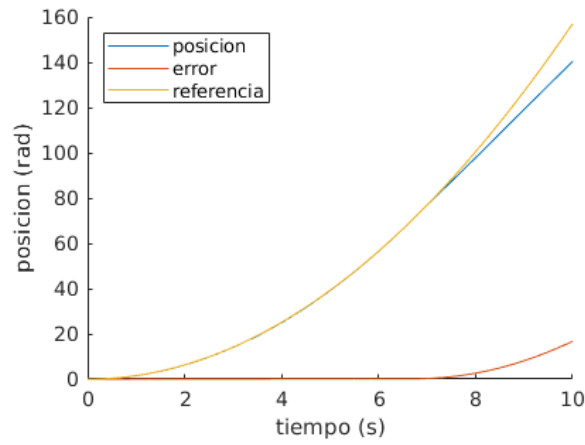


Figura 55: Uso de controlador $D|PID$ para el seguimiento de una señal parábola.

A pesar de ello en la figura 56 se observa como el error en el infinito no sería cero aunque no existiera esta limitación de velocidad. Si fuera así el error sería decreciente como en la rampa y no creciente. No obstante, el error aumenta muy poco, la pendiente de este aumento del error se puede aproximar a $0,025 \text{ (rad/s)}$. Esto nos hace pensar que se debe a la pérdida de precisión y redondeos de los parámetros de diseño y de las imprecisiones de la función transferencia del motor, en lugar de a un error a la hora de sintonizar τ_{D2} .

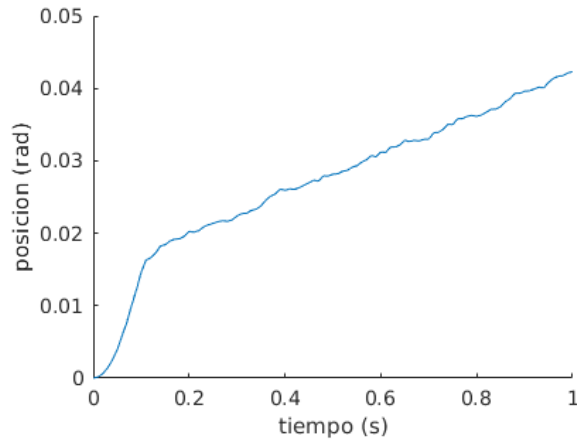


Figura 56: Error a la parábola sin saturación de velocidad.

4. Conclusiones y futuras líneas de investigación

En este trabajo, hemos analizado las características de varios tipos de controladores lineales, además de como se comportan la respuesta al impulso y el seguimiento a las señales monómicas (escalón, rampa y parábola) al variar los parámetros de diseño ζ , β y β_2 (ayudándonos con una serie de visualizaciones).

Una vez hemos entendido el comportamiento de estos controladores, nos hemos centrado en el D|PID para diseñar un controlador que analíticamente cumpla unos requisitos preestablecidos, conociendo la función de transferencia del motor. Para ello hemos realizado un análisis de estabilidad mediante la tabla de Routh para determinar para que valores de los parámetros el sistema es estable, seguido de un análisis del error al seguimiento de las señales monómicas. Usando estos análisis previos, y conociendo como reacciona el controlador D|PID a los valores de los parámetros de diseño, hemos determinado el rango de valores de K_p , K_d y K_i para los cuales el sistema cumple con las especificación, a partir de los cuales designamos dos posibles diseños. Aunque analíticamente el segundo era más rápido y con menor sobreelongación máxima, el primero tuvo un mejor comportamiento sobre el motor real.

Finalmente, hemos implementado y probado ambos diseños teóricos en el motor real del telelaboratorio. Debido a las no linealidades y diferencias respecto al modelo teórico el diseño en el motor real no cumplía todas especificaciones. Hemos reajustado los parámetros del primer diseño (que tenía mejor comportamiento en el telelaboratorio) ligeramente siguiendo una serie de criterios, consiguiendo que finalmente el controlador se ajustase a la especificación en el motor real.

Todo este proceso nos ha llevado a las siguientes conclusiones:

- Los únicos controladores que presentan un error nulo (analíticamente) frente al seguimiento de la parábola son el PID-D y el D|PID (que son sistemas de 2 grados de libertad). Esto se consigue sintonizando el coeficiente τ_{D2} . Después tenemos los controladores que presentan un error nulo frente a la rampa y constante frente a la parábola, que son el PID, PI-D y el PI (sistemas de tercer orden) y finalmente los que presentan un error nulo frente al escalón pero constante frente a la rampa e infinito frente a la parábola, que son el PD, P-D y P (sistemas de segundo y primer orden).
- El comportamiento que tienen los controladores en función de los parámetros K_p , τ_d y τ_i es difícil de comprender y analizar, esto nos lleva a designar unos parámetros de diseño: ζ , β y β_2 , que hacen el diseño más sencillo y comprensible. Una vez encontramos los valores o rangos de valores para los parámetros de diseño, es cuando los volvemos a transformar a los parámetros con los que trabaja el controlador real.
- Si el tiempo de establecimiento (t_s) o de subida (t_r) requeridos por la especificación son tan bajos que no permiten que el motor real los alcance (debido a su velocidad y aceleración máxima) entonces nos veríamos obligados a adquirir un motor con mayor velocidad y aceleración máximas, o, si esto no es posible a modificar la especificación. Que un sistema sea realizable analíticamente (somos capaces de cumplir con las especificaciones) no supone que sea realizable en el motor real.

4.1. Futuras líneas de investigación

- Todos los controladores estudiados en la asignatura constituyen controladores lineales. La tecnología actual requiere de leyes de control más sofisticadas para poder cumplir las (cada vez más estrictas) especificaciones de diseño, además de poder adaptarse de una manera más fiel al sistema a controlar, lo que provoca una creciente importancia de los sistemas de control no lineales frente a los sistemas de control lineales [5].
- Uso de técnicas de “Control Fraccionario”, que emplean técnicas de extensión del cálculo que permiten considerar la integración y derivación en órdenes no necesariamente enteros, que pueden ayudar a mejorar el rendimiento de nuestros controladores [6].

5. Bibliografía

Referencias

- [1] Álvaro Gutiérrez Martín y Blanca Larraga García *Apuntes de la asignatura de SECO*. ETSIT UPM
- [2] Vicente Gómez Garay *Acciones Básicas de Control*. DEA UNSJ
- [3] Samuel Moya *Sintonice su controlador PID para obtener la respuesta deseada*. <https://www.isamex.org/intechmx/index.php/2019/01/07/sintonice-su-controlador-pid-para-obtener-la-respuesta-deseada/>
- [4] Autor anónimo. *Controlador PID*: <https://www.picuino.com/es/arduprog/control-pid.html>
- [5] *Nonlinear control systems – A brief overview of historical and recent advances*. Iqbal, Jamshed & Ullah, Mukhtar & Khan, Said & Baizid, Khelifa & Ćuković, Saša. (2017). Nonlinear Engineering. 6. 10.1515/nleng-2016-0077.
- [6] *Introducción al control fraccionario*. Blas M. Vinagre & Concepción A. Monje. Departamento de Electrónica e Ingeniería Electromecánica, Escuela de Ingenierías Industriales, Universidad de Extremadura, Badajoz, España.
- [7] Myo Maung Maung, Maung Maung Latt, Chaw Myat Nwe. *DC Motor Angular Position Control using PID Controller with Friction Compensation*. Mandalay Technological University, 2018.