Taller: derivada de una función como un límite y el problema de la recta tangente

Presentado por:
JOHN VAYRO SANCHEZ
CRISTIAN DANILO QUIROZ
ALEJANDRO MORENO

Curso:
Cálculo Diferencial

Docente:
(FRANKLIN FERRARO GOMEZ)

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA PASCUAL BRAVO
TECNOLOGIA DESARROLLO DE SOFTWARE
MEDELLÍN
2025

Taller: derivada de una función como un límite
y el problema de la recta tangente

1. Halla la recta tangente a la curva en el punto indicado en los ejercicios propuestos a continuación.

Ejercicio	Ejercicio
1. $y = 9 - x^2$; P (2,5)	2. $y = \sqrt{4-x}$; P (-5,3)
3. $y = x^2 + 4$; P (-1,5)	4. $y = 2x - x^3$; P (-2,4)
5. $y = 2x^2 + 4x$; P (-2,0)	6. $y = \frac{4}{x^2}$; P (2,1)
7. $y = x^2 - 6X + 9$; P (3,0)	8. $y = -\frac{8}{\sqrt{x}}$; P (4,-4)
9. $y = x^3 + 3$; P (1,4)	10. $y = x^2 + 1$; P (0,1)
11. $y = 1 - x^3$; P (2,-7)	12. $y = x^2 + 1$;P (-1,2)

Acreditados en Alta Calidad

2. Determina las derivadas de las siguientes funciones utilizando la definición de límites.

Ejercicio	Ejercicio
1. $f(x) = 3x$	2. $f(x) = 5x - 5$
3. $f(x) = 3x^2 - 4$	4. $f(x) = 8 - x^2$
5. $f(x) = 8 - x^3$	6. $f(y) = y^2 - 5y$
7. $f(x) = \frac{8}{x-2}$	8. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$
9. $f(x) = \frac{1}{x^2} - x$	10. $f(x) = t^3 + t$
11. $f(x) = 3x^2 + 3x$	12. $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 5x$

SOLUCION

A continuación, pantallazos de los 10 ejercicios escogidos para la entrega grupal.:

5. $y = 2x^2 + 4x$; $P(\overset{x}{-2}, \overset{y}{0})$

1. Verificar si el punto pertenece a la curva.

$y = 2(-2)^2 + 4(-2)$ $\qquad P(\overset{x}{-2}, \overset{y}{0})$

$y = 2(4) - 8$ $\qquad y=0$ Pertenece a la curva.

$y = 8 - 8$

$y = 0$

2. Encontrar la derivada.

$\frac{d}{dx}(2x^2) = 2 \cdot 2x^{2-1} = 4x$

$\frac{d}{dx}(4x) = 4 \cdot x^{1-1} = 4x^0 = 4 \cdot 1 = 4$

$\frac{dy}{dx} = 4x + 4$

$m = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=-2} = 4(-2) + 4$ $\qquad$ (3) Encontrar la pendiente de la tangente.

$m = -8 + 4$

$m = -4$

4.

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 0 = -4(x - (-2))$

$y = -4(x + 2) \longrightarrow R//$

11. $y = 1 - x^3$; $P(2, -7)$

1. Verificar si pertenece a la curva.

$y = 1 - (2)^3$

$y = 1 - 8$

$y = -7$

$P(\overset{x}{2}, \overset{y}{-7})$

$y = -7$ Pertenece a la curva.

2. Encontrar la derivada.

$\frac{d}{dx}(1) = 0$

$\frac{d}{dx}(-x^3) = -3x^{3-1} = -3x^2$

$\frac{dy}{dx} = 0 - 3x^2 = -3x^2$

3. Encontrar la pendiente de la tangente.

$m = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=2} = -3(2)^2$

$m = -3(4)$

$m = -12$

4.

$y - (-7) = -12(x - 2)$

$y + 7 = -12(x - 2)$

$y + 7 = -12x + 24$

$y = -12x + 24 - 7$

$y = -12x + 7 \longrightarrow$ R//

Determinar las derivadas utilizando la definición de limites.

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

1. $F(x+h) = 3(x+h)^2 - 4$

$$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

$$F(x+h) = 3(x^2 + 2xh + h^2) - 4$$

$$F(x+h) = 3x^2 + 6xh + 3h^2 - 4$$

2.

$$F(x+h) - F(x) = (3x^2 + 6xh + 3h^2 - 4) - (3x^2 - 4)$$

$$= 3x^2 + 6xh + 3h^2 - 4 - 3x^2 + 4$$

$$= 6xh + 3h^2$$

3.

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\cancel{h}(6x + 3h)}{\cancel{h}} = 6x + 3h$$

4.

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} (6x + 3h)$$

$$F'(x) = 6x + 3.(0)$$

$$F'(x) = 6x.$$

4. $f(x) = 8 - x^2$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

1.

$$f(x+h) = 8 - (x+h)^2$$

$$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

$$f(x+h) = 8 - (x^2 + 2xh + h^2)$$

$$= 8 - x^2 - 2xh - h^2$$

2.

$$f(x+h) - f(x) = (8 - x^2 - 2xh - h^2) - (8 - x^2)$$

$$= 8 - x^2 - 2xh - h^2 - 8 + x^2$$

$$= -2xh - h^2$$

3.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{-2x\cancel{h} - h^2}{\cancel{h}} = -2x - h$$

4.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} (-2x - h)$$

$$f'(x) = -2x - 0$$

$$f'(x) = -2x$$

Unidad de Educación Digital

Taller 1. Derivada de una función como un límite y el problema de La recta tangente

CETA Centro de Estudios Tributarios

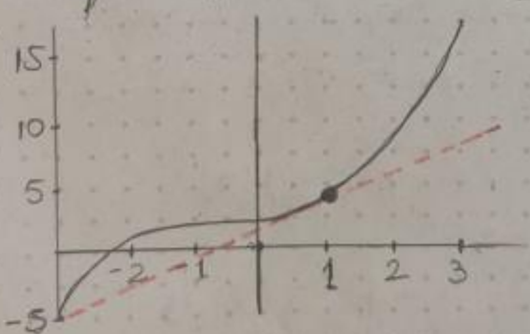
1. Halla la recta tangente a la curva en el punto indicado

(a) $y = x^3 + 3$; $P(1,4)$

- Paso 1. Verifica que el punto pertenece a la curva. $y = x^3 + 3$

Para saber si el punto pertenece a la curva, sustituimos $x = 1$ en la ecuación de la curva, y vemos si obtenemos $y = 4$, si el resultado es diferente entonces el punto dado no pertenece a la curva dada.

$$y = (1)^3 + 3 = 1 + 3 = \underline{4}$$



- Paso 2. Derivar la función: Derivamos termino a término
  - La derivada de x^3 es: $\frac{\partial}{\partial x}(x^3) = 3 \cdot x^{3-1} = 3 \cdot x^2 = 3x^2$

17/05/2025 15:05

www.ceta.org.co

- La derivada de 3 es: $\frac{\partial}{\partial x}(3) = \underline{0}$

(La derivada de una constante es siempre 0
esto se debe a que no hay cambio en el valor
de la función a medida que x varía.

Derivada: $\frac{\partial y}{\partial x} = \underline{\underline{3x^2}}$

Significa que la pendiente de la curva en
cualquier punto x está dada por $3x^2$

- Paso 3. Se evalua la derivada en $x=1$

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=1} = 3(1)^2 = \underline{\underline{3}}$$

Es decir, la pendiente de la recta tangente
en $x=1$ es 3.

- Paso 4: Usa la formula de la recta

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Teniendo: $m = 3$
$(x_1, y_1) = (1, 4)$

Reemplazamos.

$$y - 4 = 3(x-1)$$
$$y - 4 = 3x - 3$$
$$y = 3x + 1$$

La recta tangente a la curva $y = x^3+3$ en el punto
$(1,4)$ es:
$$\underline{y = 3x + 1}$$

2. Determina las derivadas de las funciones utilizando la definición de límites

2.. $F(x) = 5x - 5$

• Paso 1 Sustituimos la función usando la definición por límites

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Primero calculamos $f(x+h)$

$$f'(x+h) = 5(x+h) - 5 = 5x + 5h - 5$$

Ahora reemplazamos en la definición

$$f'(x) \lim_{h \to 0} \frac{(5x + 5h - 5) - (5x - 5)}{h}$$

• Paso 2 simplificamos la expresión del numerador

$$(5x + 5h - 5) - (5x - 5) = 5x + 5h - 5 - 5x + 5 = 5h$$

es decir, $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{5h}{h}$

• Paso 3 Simplificamos la fracción

$$\frac{5h}{h} = 5 \quad (\text{siempre que } h \neq 0)$$

Paso 4. Aplicamos al límite.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} 5 = 5 \qquad f'(x) = 5$$

17/05/2025 15:08

CETA 2. Determina las derivadas de las funciones utilizando La definición de límites.

Centro de Estudios Tributarios

10. $f(x) = t^3 + t$

Definición de la derivada:

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

• Paso 1 Calcular $f(t+h)$

$$f(t+h) = (t+h)^3 + (t+h)$$

Desarrollamos $(t+h)^3$ usando binomio de Newton

$$(t+h)^3 = t^3 + 3t^2h + 3th^2 + h^3$$

Entonces. $f(t+h) = t^3 + 3t^2h + 3th^2 + h^3 + t + h$

• Paso 2 Reemplazamos en la fórmula de la derivada.

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{t^3 + 3t^2h + 3th^2 + h^3 + t + h) - (t^3 + t)}{h}$$

• Paso 3 Cancelamos terminos comunes:

$$t^3 - t^3 = 0, \quad t - t = 0$$

Queda: $3t^2h + 3th^2 + h^3 + h$

La expresión queda: $f'(t) \lim_{h \to 0} \frac{3t^2h + 3th^2 + h^3 + h}{}$

17/05/2025 15:09

www.ceta.org.co

• Paso 4 Factorizamos el numerador

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(3t^2 + 3th + h^2 + 1)}{h}$$

Simplificamos h

$$= \lim_{h \to 0} (3t^2 + 3th + h^2 + 1)$$

• Paso 5 Aplicamos el límite

Cuando $h \to 0$ Los terminos con h desaparecen

$$f'(t) = 3t^2 + 1$$

Resultado: $\boxed{f'(t) = 3t^2 + 1}$

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA PASCUAL BRAVO®

Acreditados en Alta Calidad

Aplicando derivadas

3. $y = x^2 + 4$; $P(-1, 5)$

- Primero Derivamos la Función

$F(x) = x^2 + 4 \Rightarrow F'(x) = 2x$

- Calcular la pendiente en $x = -1$

$F'(-1) = 2(-1) = -2$

La pendiente de la recta tangente es -2

- Ecuación de la recta tangente

$$y - F(-1) = F'(-1)(x - (-1))$$

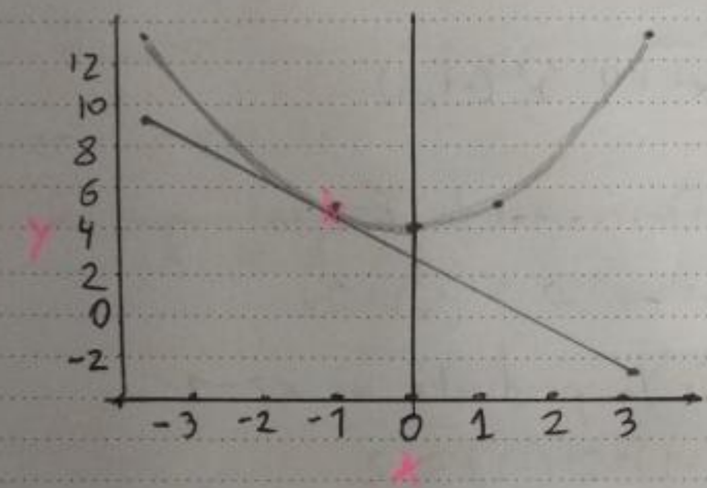
$$y - 5 = -2(x + 1)$$

$$y = -2x + 3$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$\boxed{y = -2x + 3}$$

Grafico:



12. $y = x^2+1$; $P(-1,2)$

Derivar la función:

$$F(x) = x^2+1 \Rightarrow F'(x) = 2x$$

Calcular la pendiente en $x=-1$

$$F'(-1) = 2(-1) = -2$$

Ecuación de la recta tangente

$$y - F(-1) = F'(-1)(x-(-1))$$

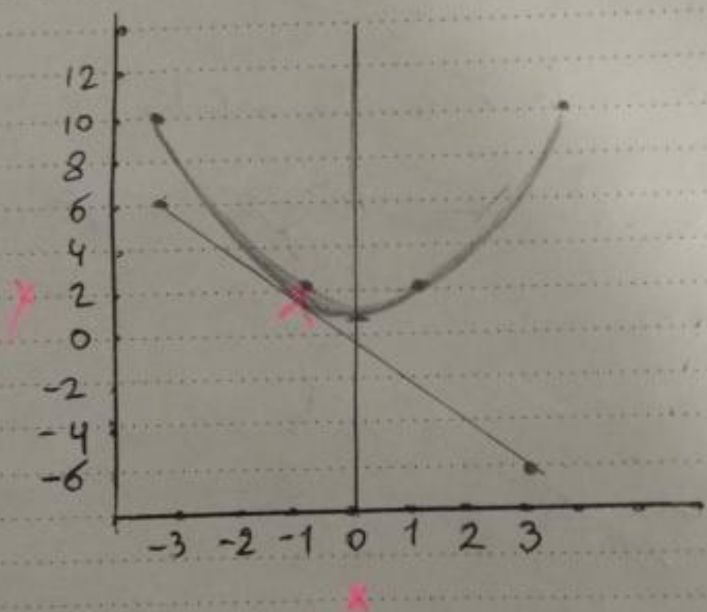
$$y-2 = -2(x+1)$$

$$y = -2x+0$$

TI Services

La ecuación de la recta tangente es:

$$y = -2x$$



2-6 $F(y) = y^2 - 5y$

Vamos a resolver utilizando la definición de derivada por límite.

$$F'(y) = \lim_{h \to 0} \frac{F(y+h) - F(y)}{h}$$

TI Services

Paso 1: Calcular $F(y+h)$

$$F(y+h) = (y+h)^2 - 5(y+h)$$

$$F(y+h) = y^2 + 2yh + h^2 - 5y - 5h$$

Sustituimos en la Formula del limite

$$\frac{F(y+h) - F(y)}{h} = \frac{[y^2 + 2yh + h^2 - 5y - 5h] - [y^2 - 5x]}{h}$$

Simplificamos

$$= \frac{2yh + h^2 - 5h}{h} = \frac{h(2y + h - 5)}{h}$$

$$= 2y + h - 5$$

Calculamos el limite cuando $h \to 0$:

$$\lim_{h \to 0} (2y + h - 5) = 2y - 5$$

Resultado:

$$F'(y) = 2y - 5$$

Unidad de Educación Digital

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
PASCUAL BRAVO®
Acreditados en Alta Calidad

Tradición - Transformación - Innovación

Alcaldía de Medellín
Distrito de
Ciencia, Tecnología e Innovación