Lezione 9

- Sintassi: formule ben formate
- (Occorrenze di) variabili libere e vincolate
- Semantica: L-strutture
- Intermezzo matematico (*reprise*)
- Semantica: Interpretazione dei termini chiusi

Sintassi: formule ben formate

Linguaggi del primo ordine

- Vi sono infiniti linguaggi del primo ordine, ciascuno adatto a uno o più contesti.

- Alcuni elementi sono comuni a tutti i linguaggi del primo ordine:

- ***Variabili:*** un insieme infinito di simboli, fissato arbitrariamente. Noi tenderemo a usare $x, y, z, \dots, x_1, x_2, x_3, \dots$

- ***Connettivi:*** li conosciamo bene: $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \perp, \leftrightarrow$. Ciascuno con la sua *arità.*

- ***Quantificatori:*** $\forall$ e $\exists$. Per essere usati nel linguaggio abbisognano di una variabile e di una formula (vediamo tra poco i dettagli e la def. di formula).

Gli elementi che determinano un linguaggio del primo ordine

- Alcuni elementi sono invece particolari a un dato linguaggio e lo determinano.

- ***Costanti:*** denotano oggetti dell'universo del discorso. Tenderemo a usare: a,b,c, …

- ***Predicati (n-ari):*** si usano per denotare relazioni fra oggetti del discorso.

- ***Funzioni (n-arie):*** si usano per denotare oggetti in maniera indiretta.

- I predicati completamente istanziati con costanti (Tet(a), Between(c,d,e), …) li abbiamo chiamati «proposizioni atomiche» nella prima parte del corso. Essi si comportano come «lettere proposizionali» (P,Q,…).
- Nei linguaggi del primo ordine possiamo istanziare i predicati con «termini» più generali .

  Es: Tet(x), Between(x,lm(x),rm(c)), Genitore(nonno(socrate),padre(socrate)) .

I due strati di ogni linguaggio del primo ordine

- Ogni linguaggio del primo ordine è stratificato in due livelli:

- ***Termini:***
  - Vengono costruiti solo a partire da variabili, costanti e simboli di funzione.
  - Servono a denotare oggetti dell'universo del discorso.

- ***Formule*:**
  - Vengono costruiti a partire dai termini, usando predicati, connettivi e quantificatori.
  - Servono a denotare frasi che possono essere vere o false in una data circostanza.

- Fra le formule, ci concentreremo in particolare sugli enunciati, o proposizioni (vedremo cosa si intende con questi concetti).

Termini

- Dato un linguaggio del primo ordine L , sia $C(L) = \{c_1, c_2, \ldots\}$ l'insieme delle sue costanti e $F(L) = \{f_1, f_2, \ldots\}$ l'insieme dei suoi simboli di funzione, ciascuno con la sua arità.

- L'insieme $T(L)$ dei termini di L è definito *induttivamente*, come segue:
  - Ogni variabile x è un termine di L.
  - Ogni costante c in $C(L)$ è un termine di L.
  - Se f è un simbolo di funzione n-ario in $F(L)$ e $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sono termini di L, allora anche $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ è un termine di L.
  - Null'altro è un termine di L. ?

Termini. Esempio

Si consideri questo linguaggio L adeguato al contesto dell'Aritmetica:

- $C(L) = \{0, 1\}$,
- $F(L) = \{+, \times\}$ con entrambi i simboli di arità 2,
- $P(L) = \{ =, \leqslant \}$ con entrambi i predicati di arità 2.

NB: $+$, $\times$, $=$ e $\leqslant$ di solito si scrivono in forma infissa:
invece di $+(x,y)$ scriviamo $x + y$.

Allora i seguenti sono termini: (Nota: se F(L) non è vuoto allora T(L) è infinito)
0, 1, $x + 1$, $(1 + 1) \times (y + (x + 1))$, …

Mentre $0 \leqslant 1$ non lo è. Perché?

Formule (ben formate) o fbf.

- Dato un linguaggio del primo ordine L, sia T(L) l'insieme dei suoi termini e P(L) = $\{P_1, P_2, \ldots\}$ l'insieme dei suoi predicati, ciascuno con la sua arità.

- L'insieme FBF(L) delle fbf di L è definito *induttivamente*, come segue:
  - Se P è un predicato n-ario in P(L) e $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sono termini di L, allora $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ è una fbf, detta atomica.
  - Se P e Q sono fbf di L, allora lo sono anche $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \rightarrow Q)$, $(P \leftrightarrow Q)$, $\neg P$, $\perp$.
  - Se P è una fbf di L, e x è una variabile, allora $(\forall x\, P)$ **e** $(\exists x\, P)$ sono fbf di L.
  - Null'altro è fbf di L.

Formule (ben formate) o fbf.

Nello scrivere le fbf valgono le solite convenzioni semplificative. Ecco come il libro definisce le fbf (wff, well-formed formulas).

1. If P is a wff, so is $\neg$P.
2. If $P_1, \ldots, P_n$ are wffs, so is $(P_1 \wedge \ldots \wedge P_n)$.
3. If $P_1, \ldots, P_n$ are wffs, so is $(P_1 \vee \ldots \vee P_n)$.
4. If P and Q are wffs, so is $(P \rightarrow Q)$.
5. If P and Q are wffs, so is $(P \leftrightarrow Q)$.
6. If P is a wff and ν is a variable (i.e., one of t, u, v, w, x, ...), then $\forall\nu\, P$ is a wff
7. If P is a wff and ν is a variable, then $\exists\nu\, P$ is a wff

Fbf. Esempio

Generiamo per strati (cioè, induttivamente) la fbf non atomica:

$\exists x \, (\, Tet(x) \land Small(x) \land \exists y(\neg Small(y) \land Between(y,x,a)) \,)$

1. $Tet(x)$, $Small(x)$, $Small(y)$, $Between(y,x,a)$
2. $Tet(x) \land Small(x)$, $\neg Small(y)$
3. $\neg Small(y) \land Between(y,x,a)$
4. $\exists y(\neg Small(y) \land Between(y,x,a))$
5. $Tet(x) \land Small(x) \land \exists y(\neg Small(y) \land Between(y,x,a))$
6. $\exists x \, (\, Tet(x) \land Small(x) \land \exists y(\neg Small(y) \land Between(y,x,a)) \,)$

Fbf. Un test

Quali delle seguenti non sono fbf?

1. $\forall x\ \forall y\ P(x,y)$
2. $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$
3. $\forall x\ \forall x\ P(x,x)$
4. $\forall x\ \forall x\ P(x,a)$
5. $\exists x\ \forall x\ P(x,y)$
6. $\forall x\ P(x,y)$
7. $\forall P(x,y)$
8. $\forall a\ \forall x\ P(x,a)$

Si assuma che:

- il linguaggio L contenga un predicato binario P,
- x e y siano variabili,
- a sia una costante di L.

Fbf. Esempio

- Nel linguaggio (o *segnatura*) di TW sono delle atomiche ben formate:
  - Tet(a) — nessuna occorrenza di variabile
  - Cube(x) — una occorrenza di x
  - Between(x,a,y) — una occorrenza di x e una di y
  - SameRow(x,x) — due occorrenze di x
  - x = a — una occorrenza di x

- Infatti P(TW) contiene Tet, Cube, Between, SameRow, =, …,
  e C(TW) contiene la costante a.

Esercizio. Dire perché così non va bene:
«Il tetraedro a è più piccolo del cubo x»: Smaller(Tet(a),Cube(x)).

(Occorrenze di) variabili libere e vincolate

Occorrenze di variabili libere (free) e vincolate (bound)

Definizione Induttiva:

Base: le occorrenze di variabili libere in una atomica $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ sono tutte le occorrenze di variabili in $t_1, t_2, \dots, t_n$.

$\perp$ non ha occorrenze di variabili libere.

Passo:

- Le occorrenze di variabili libere in $(\neg P)$, $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \rightarrow Q)$, $(P \leftrightarrow Q)$ sono tutte le occorrenze di variabili libere in P o in Q.
- Le occorrenze di variabili libere in $\forall v\, P$ sono tutte le occorrenze di variabili libere in P, ad eccezione di v; ogni occorrenza di v in P è vincolata in $\forall v\, P$.
- Le occorrenze di variabili libere in $\exists v\, P$ sono tutte le occorrenze di variabili libere in P, ad eccezione di v; ogni occorrenza di v in P è vincolata in $\exists v\, P$.

Esempio: calcolo per strati dell'insieme delle variabili libere

1. Tet(x) Libere = {x}
   Small(x) Libere = {x}
   Small(y) Libere = {y}
   Between(y,x,a): Libere = {x, y}
2. Tet(x) $\wedge$ Small(x) Libere = {x}
   $\neg$Small(y): Libere = {y}
3. $\neg$Small(y) $\wedge$ Between(y,x,a) Libere = {x,y}
4. $\exists$y($\neg$Small(y) $\wedge$ Between(y,x,a)) Libere = {x} (vincolate = {y})
5. Tet(x) $\wedge$ Small(x) $\wedge$ $\exists$y($\neg$Small(y) $\wedge$ Between(y,x,a))
   Libere = {x}, vincolate = {y}
6. $\exists$x (Tet(x) $\wedge$ Small(x) $\wedge$ $\exists$y($\neg$Small(y) $\wedge$ Between(y,x,a)))
   Libere = $\emptyset$, vincolate = {x,y}

Occorrenze di variabili libere (free) e vincolate (bound)

!

Una variabile può avere occorrenze libere e vincolate nella stessa fbf

$$F = \underline{\exists \mathbf{x}\,(\,Tet(\mathbf{x}) \wedge Large(\mathbf{x}))} \;\wedge\; \underline{\exists \mathbf{y}\,(\neg Tet(\mathbf{y}) \wedge SameRow(\mathbf{y},\mathbf{x})\,)}$$

x ha due occorrenze **vincolate** (in rosso) nella prima sottoformula principale
e una **libera** (in blu) nella seconda.

Se una variabile x ha un'occorrenza libera in una formula F, poniamo x nell'insieme delle libere. Nell'esempio sopra:

- Libere(F) = {x}. Vincolate(F) = {y}.

Fbf chiuse, aperte. Proposizioni (o enunciati)

- Una formula che non contiene occorrenze di variabili libere si dice chiusa, altrimenti si dice aperta.

- Una fbf è detta una proposizione o enunciato se e solo se è chiusa.
  - Nota. Infatti se è chiusa è interpretabile come vera o falsa in una data circostanza (come vedremo); ma se non è chiusa non siamo in grado di attribuirle un valore di verità.
  - Le proposizioni atomiche introdotte nella prima parte del corso (Tet(a), Between(c,d,e), Uomo(socrate),…) sono per l'appunto un caso speciale di fbf atomiche chiuse.

Semantica: L-strutture

Il Problema della semantica

- Abbiamo fissato in maniera formale la sintassi dei linguaggi L del primo ordine.

- Il problema che dobbiamo affrontare e risolvere consiste nel definire in maniera rigorosa l'interpretazione dei costrutti linguistici di L, in ogni dato «mondo» possibile, in modo da poter assegnare, in modo rigoroso, formale, e non ambiguo, un valore di verità a ogni enunciato (in quel «mondo»).

- A livello proposizionale, tale processo è consistito semplicemente nell'assegnare un valore di verità alle proposizioni atomiche.

- A livello della logica del primo ordine, sorgono diverse problematiche.

Problematiche da affrontare: Variabili libere.

- Si consideri una fbf con qualche occorrenza libera di variabile:

$$\text{Cube}(x)$$

- Cube(x) non è un enunciato, e non è o vero o falso in una data circostanza.
- Infatti il valore di verità di Cube(x) dipende anche dall'oggetto denotato da x, che però non è «fissato».
- Cube(x) può essere pensato come un insieme di enunciati, al variare di x nell'universo del discorso.

Problematiche da affrontare: Variabili libere.

- Il valore di verità di

$$\text{Cube}(x)$$

dipende anche dall'oggetto denotato da x, che però non è «fissato».

- Se Cube(x) non ha un fissato valore di verità, come possiamo basare su di essa la semantica delle fbf quantificate come:

$$\forall x\ \text{Cube}(x) \qquad\qquad \exists x\ \text{Cube}(x)$$

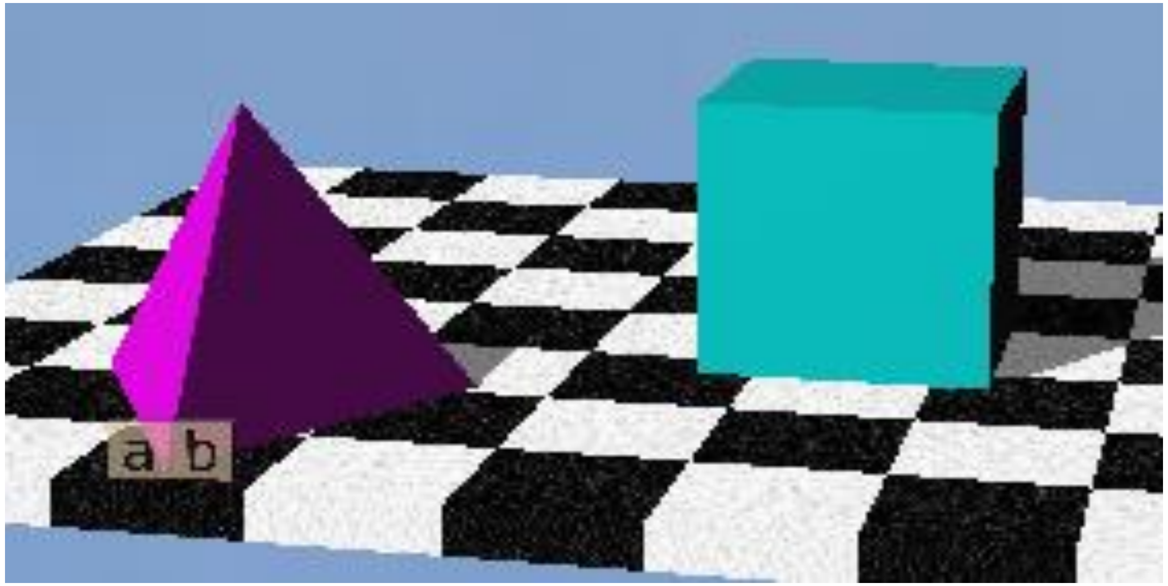
?

Esempio.

- La verità di una fbf non è più determinabile a partire da quella delle atomiche che la compongono (significato non più vero-funzionale).

- Vorrei determinare la verità di $\forall x\ Tet(x)$ a partire da quella di $Tet(x)$.

- Ma $Tet(x)$ è vera o falsa? Dipende da x.

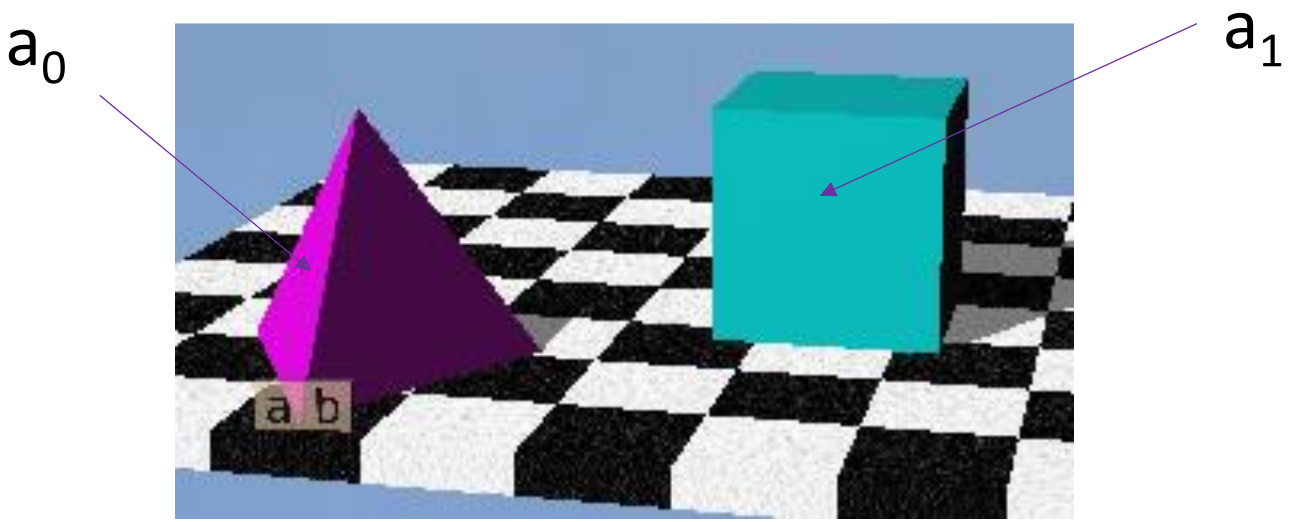


Problematiche da affrontare: Variabili libere.

- Sono possibili diversi approcci, tutti equivalenti, a questa problematica. La nostra scelta è la seguente:

- Sia $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una fbf in cui occorrono libere le variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
  - Allora: per ogni *n*-pla di oggetti $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dell'universo del discorso U, si dice che $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ soddisfa A se e solo se $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ è vera in U.
  - Dove $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ è ottenuta da $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ rimpiazzando ogni occorrenza libera di x_1 con a_1, x_2 con a_2, …, x_n con a_n.

Esempio.



$\forall$x Tet(x)   vera?

- Tet(a_0) è vera? Sì
- Tet(a_1) è vera? No

$\forall$x Tet(x) non è vera perché Tet(x) non è soddisfatta da tutti gli oggetti di U.

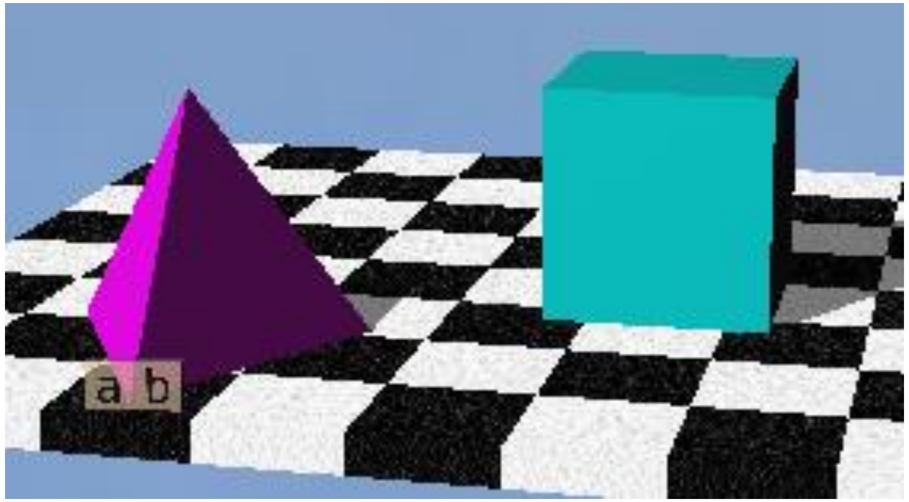
Problematiche da affrontare: oggetti senza nome.

- Per ogni *n*-pla di oggetti $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ dell'universo del discorso U, si dice che $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ soddisfa A se e solo se $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ è vera in U.

- Il problema è che $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ non è una formula!
- Infatti ogni a_i è un oggetto «semantico», non un «nome» sintattico.
- Non è detto che ogni oggetto di U abbia un nome sintattico che lo denoti.

Esempio.

Il nome non è l'oggetto.



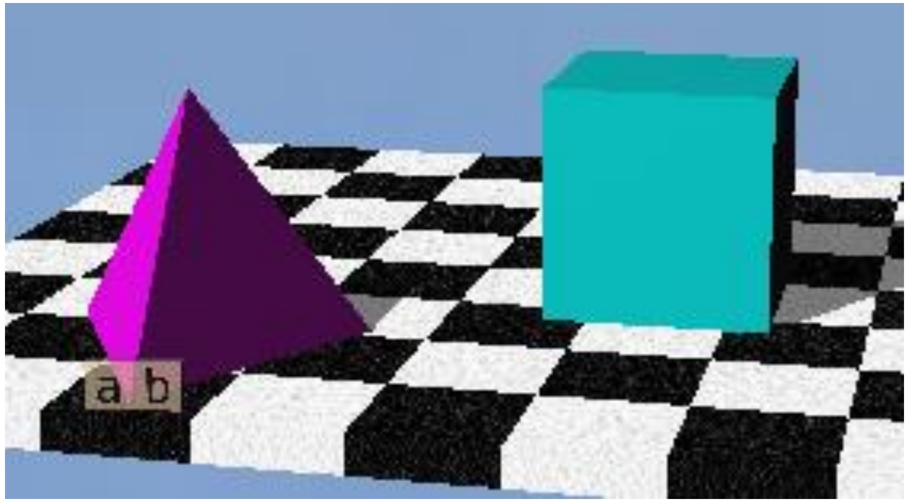
∀x Tet(x) vera?

- Tet() è vera? Sì, se fosse una formula (ok, non ha molto senso)
- Tet() è vera? No, se fosse una formula (ok, non ha molto senso)

∀x Tet(x) non è vera perché Tet(x) non è soddisfatta da tutti gli oggetti di U.

Esempio.

Il tetraedro ha un nome, ma il cubo no.



∀x Tet(x) vera?

- Tet(a) è vera? Sì
- Tet() è vera? No, se fosse una formula (ok, non ha molto senso)

∀x Tet(x) non è vera perché Tet(x) non è soddisfatta da tutti gli oggetti di U.

Problematiche da affrontare: oggetti senza nome.

- *Fatta la legge, trovato l'inganno*:
  - imponiamo che a_i «sia un nuovo nome»: ampliamo L per ospitarlo,
  - o, meglio, introduciamo una nuova costante c_i , ampliando L, e ci ricorderemo di interpretare c_i con a_i.

- **Def.:** Per ogni *n*-pla di oggetti $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ dell'universo del discorso U, si dice che

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ soddisfa } A$$

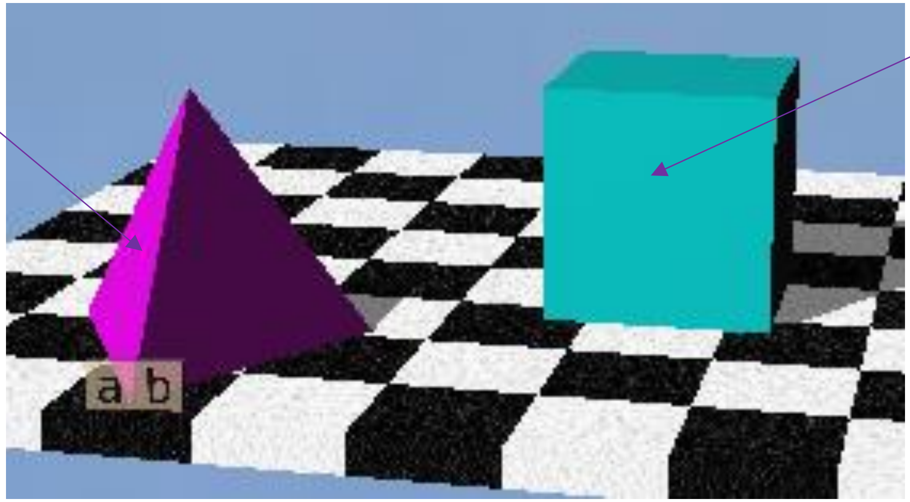
se e solo se

$$A(c_1, c_2, \dots, c_n) \text{ è vera in U.}$$

Esempio.

Abbiamo attribuito nuovi nomi a tutti gli oggetti.

c_0



c_1

$\forall x\ Tet(x)$ vera?

- $Tet(c_0)$ è vera? Sì
- $Tet(c_1)$ è vera? No

$\forall x\ Tet(x)$ non è vera perché $Tet(x)$ non è soddisfatta da tutti gli oggetti di U.

Problematiche da affrontare: oggetti senza nome.

Abbiamo fissato L per parlare dei mondi in un dato contesto.

- L è stato fissato specificando C(L), F(L), P(L).
- Ora, in un dato mondo (universo del discorso) U, ampliamo L *in funzione* di U: otteniamo un nuovo linguaggio L_U determinato da:

$$C(L_U) = C(L) \cup \{c_a : a \in U\}, \quad F(L_U) = F(L), \quad P(L_U) = P(L).$$

Se consideriamo un altro mondo U' sullo stesso linguaggio L, allora L_U è in genere diverso da $L_{U'}$.

Un dubbio.

Ma non è una «fisima», questa dei nomi?

Non possiamo usare  e  come nomi?

Ammesso e non concesso, non spostiamo di molto il problema, ad esempio:

- Vorremmo parlare di mondi infiniti, come $\mathbb{N}$,$\mathbb{Q}$,$\mathbb{R}$, …
- Ma vorremmo farlo a partire da un numero finito di simboli (per parlare di $\mathbb{N}$ ci basteranno $0,s,+,\times$).
- Introduciamo i nuovi nomi (nel caso di $\mathbb{R}$, un nome per ogni reale!) solo a scopo strumentale e «temporaneo».

L-strutture

- Dunque, per interpretare una formula nel linguaggio L in un dato «mondo», dobbiamo:

1. Fornire una versione formalizzata dei «mondi» possibili, in cui, in ogni tale mondo, ogni elemento linguistico di L è interpretato con un concetto insiemistico sull'universo del discorso U.
2. La collezione di tali concetti insiemistici associati a L fornisce una «fotografia» del mondo stesso: descrive in termini formali come tale mondo è strutturato, rispetto ai concetti linguistici costruibili con L.
3. Per far fronte agli aspetti problematici (variabili libere, oggetti senza nome), strumentalmente ampliamo L in un nuovo linguaggio L_U, che ha un nome per ogni oggetto del «mondo».

L-strutture

- Il concetto di L-struttura formalizza i «mondi» in cui interpretare le fbf di L.
- **Def:** Sia L un linguaggio (dato da C(L), F(L), P(L)).
  - Allora una L-struttura è una coppia (U,I), dove
    - U è un insieme non vuoto (universo del discorso).
    - I è la funzione «interpretazione», definita come segue:
      - Per ogni $c \in C(L)$, $I(c) \in U$ (I(c) è un elemento di U).
      - Per ogni simbolo di funzione *n*-ario $f \in F(L)$, $I(f) : U^n \to U$ (I(f) è una funzione *n*-aria su U).
      - Per ogni predicato *n*-ario $P \in P(L)$, $I(P) \subseteq U^n$ (I(P) è una relazione *n*-aria su U).

Intermezzo matematico (*reprise*)

Insiemi, tuple, prodotti cartesiani

Insiemi:

$$S = \{2,3,5,7\}, \quad T = \{\text{pippo},\text{pluto},\text{topolino}\},$$

$$X = \{ k \in \mathbb{N} : k < 11 \}$$

Tuple:

$$(3,2,2,5), \quad (\text{topolino, pluto, pippo, pluto})$$

Prodotti cartesiani:

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$$

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i\}$$

Relazioni

Relazioni: sottoinsiemi di un prodotto cartesiano

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

Relazioni unarie: $R \subseteq A$:

Es: $P \subseteq \mathbb{N}$, $P = \{ a \in \mathbb{N} : a = 2b \text{ per qualche } b \in \mathbb{N}\}$

Relazioni binarie $R \subseteq A \times B$:

Es: Persone = {Ada, Bruno, Carla}, Cibi = {Pizza, Pasta, Carne, Uova}

PiaceA $\subseteq$ Cibi $\times$ Persone =

{(Pizza,Ada),(Pizza,Bruno),(Carne,Bruno),(Uova,Bruno),(Pasta,Ada)}

Funzioni

Funzioni (totali):

$$f : A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \longrightarrow B$$

Sono relazioni

$$f \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times B$$

tali che,

per ogni n-pla $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$

esiste un unico $b \in B$ per cui $(a_1, a_2, \ldots, a_{n,} b) \in f$

Si scrive: $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = b$.

(o anche: $f:(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mapsto b$)

Semantica: Interpretazione dei termini chiusi

L-strutture

- **Def:** Sia L un linguaggio (dato da C(L), F(L), P(L)).
  - Allora una L-struttura è una coppia (U,I), dove
    - U è un insieme non vuoto (universo del discorso).
    - I è la funzione «interpretazione», definita come segue:
      - Per ogni $c \in C(L)$, $I(c) \in U$ (I(c) è un elemento di U).
      - Per ogni simbolo di funzione *n*-ario $f \in F(L)$,
        $I(f) : U^n \rightarrow U$ (I(f) è una funzione *n*-aria su U).
      - Per ogni predicato *n*-ario $P \in P(L)$,
        $I(P) \subseteq U^n$ (I(P) è una relazione *n*-aria su U).

Enunciati e termini chiusi su L_U

- Dato un linguaggio L, il nostro interesse precipuo è definire la semantica degli enunciati (o proposizioni) su L.

- Per «ragioni tecniche» dovute alla presenza di variabili libere nelle fbf che compongono gli enunciati, una volta che fissiamo S = (U,I), al posto di L consideriamo l'ampliamento L_U, determinato da

$$C(L_U) = C(L) \cup \{c_a : a \in U\},\quad F(L_U) = F(L),\quad P(L_U) = P(L).$$

- Per dare la semantica degli enunciati su L_U, ci basta dare prima la semantica dei termini chiusi (o *ground*) su L_U.

Termini chiusi su L_U

Sia L un linguaggio. Sia S = (U,I) una L-struttura.

- L'insieme $GT(L_U)$ dei termini chiusi di L_U è definito *induttivamente*, come segue:
  - Ogni variabile x è un termine di L. ⟵ rimossa
  - Ogni costante c in $C(L_U) = C(L) \cup \{c_a : a \in U\}$, è un termine chiuso di L_U.
  - Se f è un simbolo di funzione n-ario in F(L) e $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sono termini chiusi di L_U, allora anche $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ è un termine chiuso di L_U.
  - Null'altro è un termine chiuso di L_U.

Interpretazione dei termini chiusi

Sia L un linguaggio, e sia S = (U,I) una L-struttura.

Allora, l'interpretazione $I(t)$ di ogni termine $t \in GT(L_U)$, è data induttivamente:

- Per ogni $c \in C(L)$, $I(c)$ è già definita.
- Per ogni $a \in U$, si pone $I(c_a) := a$.
- Se $f \in F(L)$, e $t_1, t_2, \ldots, t_n \in GT(L_U)$, allora

$$I(f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) := (I(f))(I(t_1), I(t_2), \ldots, I(t_n)).$$

Interpretazione dei termini chiusi

Sia L un linguaggio, e sia S = (U,I) una L-struttura.

- La definizione induttiva di I(t) garantisce che per ogni termine $t \in GT(L_U)$:

$$I(t) \in U.$$

- t denota l'oggetto I(t).

Riferimenti al libro di testo

- Chapter 9: 9.3, 9.4, 9.7

- Le L-strutture sono introdotte, come First-order structures, in modo leggermente diverso in Chapter 18, 18.1.

- Per un approfondimento sulla nozione di L-struttura, e l'approccio con il linguaggio *ampliato* con i nuovi nomi di ogni elemento, si può leggere l'estratto scaricabile da:

  https://homes.di.unimi.it/aguzzoli/areariservata/estratto.pdf