SPAZI VETTORIALI

<u>Definizione</u> : V è uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ se :

1) $(V, +)$ è un gruppo abeliano
2) E' definita un'operazione

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V \quad \text{tale che}$$

- $(h+k)\cdot \underline{v} = h\cdot \underline{v} + k \cdot \underline{v}$
- $k\cdot(\underline{u} + \underline{v}) = k\cdot\underline{u} + k\cdot\underline{v}$
- $(hk)\cdot\underline{v} = h\cdot(k\cdot\underline{v})$
- $1\cdot\underline{v} = \underline{v}$

$\forall\ \underline{u}, \underline{v} \in V$
$\forall\ h, k \in \mathbb{K}$

<u>ESEMPI</u> (Lezione)

- $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{K}^n$
- $Mat_{n\times k}(\mathbb{K})$
- $\mathbb{K}[x]$

<u>SOTTOSPAZI</u> : $U \subseteq V$ è sottospazio se

1. $U \neq \emptyset$
2. $\underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in U \quad \forall\ \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U$
3. $\lambda\underline{u} \in U \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$ e $\forall\, \underline{u} \in U$

chiuso rispetto alle comb. lineari

0. equiv. $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $u_1, u_2 \in U$ $\quad \lambda u_1 + \mu u_2 \in U$

ESERCIZIO 1

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Sia $V = \mathbb{R}^3$. Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi:

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix},\ x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$V_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ x+y \end{bmatrix},\ x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$V_4 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ x, y, z \in \mathbb{N} \right\}$$

$$V_5 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ x+y \end{bmatrix},\ x, y \in \mathbb{Q} \right\}$$

$$V_6 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x, y, z \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$$V_7 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$V_8 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\ x \cdot y \cdot z = 0 \right\}$$

1) $V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$

sottospazio?

$\forall\ \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in V_1$

$\underline{u}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \qquad \underline{u}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$\underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in V_1$?

$\lambda \underline{u}_1 \in V_1$?

$\underline{u}_1 + \underline{u}_2 = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \in V_1$ si

$\lambda \underline{u}_1 = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_1 \\ \lambda x_1 \end{bmatrix} \in V_1$ si

$\Rightarrow$ è sottospazio

2) $V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ \underline{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = z \right\}$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \in V_2$

$\lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda y_1 \\ \lambda x_1 \end{bmatrix} \in V_2$

$\Rightarrow$ è sottospazio

3) $V_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ x+y \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ x_1 + y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ 2x_2 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \\ x_1 + y_1 + x_2 + y_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2(x_1 + x_2) \\ (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) \end{bmatrix} \in V_3$$

$$\begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda 2 x_1 \\ \lambda x_1 + \lambda y_1 \end{bmatrix} \in V_3$$

$\Rightarrow$ è sottospazio

6) $V_6 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid x \geq 0 \land x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\geq 0}{x_1 + x_2} \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix} \in V_6$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ per $\lambda = -1$

$$\begin{bmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{bmatrix} \notin V_6$$

$\Rightarrow$ Non è sottospazio

4) $V_4 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{N} \right\}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix} \in V_4$$

$$\lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \overset{?}{\in} V_4 \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

per $\lambda = -1$

NO

=D NON è sottospazio

5) $V_5 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ x+y \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Q} \right\}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_1+y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ x_2+y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \end{bmatrix} \in V_5$$

$$\sqrt{2} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \notin V_5$$

=D NON è sottospazio

7) $V_7 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

=D è sottospazio

8) $V_8 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \;\middle|\; x \cdot y \cdot z = 0 \right\}$

<u>NO</u> perchè $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\underset{V_8}{\cap} \qquad \underset{V_8}{\cap} \qquad \underset{V_8}{\not\cap}$$

Basta trovare controesempio

ESERCIZIO 2

Sia $V = Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

$$S = \{ A \cdot X \mid X \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) \}$$

1) determinare gli elementi di S

2) mostrare che S è un sottospazio di V

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} x+2z & y+2w \\ -2x-4z & -2y-4w \end{bmatrix} \qquad S = \left\{ \begin{bmatrix} x+2z & y+2w \\ -2x-4z & -2y-4w \end{bmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} x & y \\ z & w \end{matrix} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} x_1+2z_1 & y_1+2w_1 \\ -2x_1-4z_1 & -2y_1-4w_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2+2z_2 & y_2+2w_2 \\ -2x_2-4z_2 & -2y_2-4w_2 \end{bmatrix} \in S$$

$\Rightarrow$ è sottospazio

ESERCIZIO SVOLTO A LEZIONE

ESERCIZIO 3

Sia $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$.

A è simmetrica se $A = A^T$

A è antisimmetrica se $A = -A^T$

1) Stabilire se l'insieme delle matrici simmetriche / antisimm. sono sottospazi di $Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$

2) In caso affermativo determinare l'intersezione

ESERCIZIO 5

In $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Per ciascuna delle seguenti affermazioni dire se sono Vere o False:

1) $\mathbb{R}^3 = \langle \underline{v}_1 \rangle + \langle \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle$

2) $\mathbb{R}^3 = \langle \underline{v}_1 \rangle + \langle \underline{v}_3, \underline{v}_4 \rangle$

3) $\mathbb{R}^3 = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle + \langle \underline{v}_4 \rangle$

($\mathbb{R}^n = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ significa che $\mathbb{R}^n$ è GENERATO da $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k$)

ESERCIZIO 6

In $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ k+1 \end{bmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Stabilire, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ se $\underline{v} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$

$\underline{v} \in \langle a, b, c \rangle \iff \underline{v}$ è combinazione lineare di a, b, c cioè $\iff$ il sistema rappr. da $[A | b]$

$$\begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & k+1 & 1 \end{bmatrix} \\ \underline{a} \quad \underline{b} \quad \underline{c} \quad \underline{v} \end{array}$$

ha soluzione

$\iff rk[A] = rk[A|b]$

$\rightsquigarrow \alpha, \beta, \gamma$ t.c. $\underline{v} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & k+1 & 1 \end{array}\right] \quad R_3 - 3R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & k-2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 + R_2]{}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 1 \end{array}\right]$$

ha soluzione $\iff k \neq 1$

$\Rightarrow$ se $k = 1$ $\underline{v} \notin \langle a, b, c \rangle$

se $k \neq 1$ $\underline{v} \in \langle a, b, c \rangle$

e i coeff. di $\underline{v}$ sono:

$$\Rightarrow \underline{v} = \frac{1}{1-k}\underline{a} + \frac{1}{1-k}\underline{b} + \frac{1}{1-k}$$

$$= \frac{1}{1-k}(a + b + c)$$

ESERCIZIO 7

A) Per ciascuno dei seguenti sottospazi V di $\mathbb{R}[x]$ e dei polinomi $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ stabilire se $p(x) \in V$:

1) $V = \langle 2x+1,\ x^2-x+1 \rangle$

$p(x) = -7x^2 + 13x - 4$

2) $V = \langle x,\ x^2-3,\ 1 \rangle$

$p(x) = x^3 + 1$

3) $V = \langle x^4 - x^2,\ 2x+1 \rangle$

$p(x) = x^3$

4) $V = \langle x,\ x^2-1,\ x^3+1 \rangle$

$p(x) = -4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

B) Per ciascuno dei seguenti sottospazi V di $\mathbb{Z}_5[x]$ e dei polinomi $p(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ stabilire se $p(x) \in V$:

1) $V = \langle x^2, x^2+1 \rangle \qquad p(x) = 3$

2) $V = \langle x^2, x^3 - 3 \rangle$

$p(x) = 2x^3 - 4x^2 - 1$