Linguaggi ricorsivi e ricorsivamente enumerabili

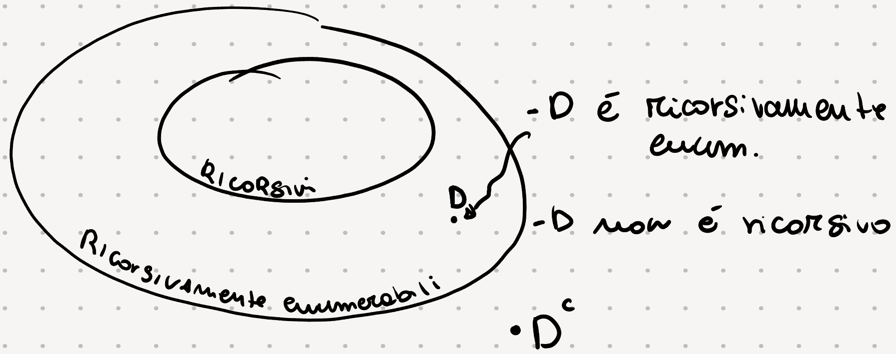
Def: Un linguaggio L è ricorsivo quando esiste un algoritmo w t.c.

$$F_w(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in L \\ 0 & \text{se } x \notin L \end{cases}$$

Def: Un linguaggio L è ricorsivamente enumerabile quando esiste una procedura w t.c.

$$F_w(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in L \\ \uparrow & \text{se } x \notin L \end{cases}$$

GRAZIE ALL'ESISTENZA DI D LE DUE CLASSI NON COINCIDONO



Def: L'INTERPRETE è un programma "u" $\in \{0,1\}^*$

Input: passiamo ad u la coppia
(programma, dato)

Output: il risultato del "programma" su quel dato

x passare + input

$$F_u(w\$x) = \begin{cases} F_w(x) & \text{se } w \text{ è programma} \\ \perp & \text{se } w \text{ \underline{non} è programma} \end{cases}$$

interprete prog dato

dove $w\$x \in \{0,1\}^*$

Definizioni:

$$D = \{ x \in \{0,1\}^* \mid F_u(x\$x)\downarrow \}$$

$x\$x \in \{0,1\}^*$ è quindi lecito passarlo ad "u"

D è detto Linguaggio dell'arresto ristretto

$$D^c = \{ x \in \{0,1\}^* \mid F_u(x\$x)\uparrow \}$$

D^c è il complemento del linguaggio dell'arresto ristretto

<u>Teorema</u>: 1) D è un linguaggio ricorsivamente enumerabile

2) D non è ricorsivo

3) D^c non è ricorsivamente enumerabile

<u>Dimostrazione</u> 1) Devo esibire per D una procedura P

t.c.
$$F_P(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in D \ ⊙ \\ \uparrow & \text{se } x \notin D \ ⊙⊙ \end{cases}$$

⊙ ovvero quando $F_u(x\$x)\downarrow$

⊙⊙ ovvero quando $F_u(x\$x)\uparrow$

Posso costruire la seguente procedura

Procedura RICNUM $(x \in \{0,1\}^*)$

u esiste sempre, quindi fattibile

```
{
    y = F_u(x$x)
    return 1
}
```

Vediamo che RICNUM è proprio la procedura p che cercavamo dim. di correttezza di RICNUM:

$\underline{x \in D} \Rightarrow F_u(x \$ x)\downarrow \Rightarrow$ viene fatta l'istr. $y = \dots$

$\Rightarrow$ viene poi eseguito return 1

$\Rightarrow \underline{\text{RICNUM}(x) = 1}$

$\underline{x \notin D} \Rightarrow F_u(x \$ x)\uparrow \Rightarrow$ loop

$\Rightarrow$ return (1) non viene eseguita

$\Rightarrow \underline{\text{RICNUM}(x)\uparrow}$

$\Downarrow$

RICNUM(x) è la procedura p che cercavamo

$\Downarrow$

D è ricorsivamente enumerabile

Dimostrazione 2) D non è ricorsivo

Si dimostra per ASSURDO, supponendo che D sia ricorsivo

posso costruire un programma che mi porterà ad una CONTRADDIZIONE

posso farlo perché

Procedura ASSURDOA ($x \in \{0,1\}^*$)

{

if ($x \in D$) then return($1 - F_u(x \$ x)$)

else return(0)

}

$\in \{0,1\}^*$

Tutte le istruzioni sono implementabili

In particolare $x \in D$ lo è perché sotto ipotesi che D è ricorsivo

$\Downarrow$

esiste "e" codice binario

ASSURDO A (x)

Passo "e" codice di ASSURDOA (x)

la parola binaria e, mi chiedo:

quanto vale ASSURDOA (e) ?

-> Secondo alcune considerazioni ottengo la seguente risposta:

$$(\#) \quad \text{ASSURDOA}(e) \underset{\text{per def. di } e}{=} F_e(e) \underset{\text{per def. di } u}{=} F_u(e\$e)$$

quindi ho ottenuto

$$\text{AssurdoA}(e) = F_u(e\$e)$$

-> Esiste un altro modo per mostrare quanto vale ASSURDOA(e)

Considerando ora il codice di ASSURDOA ottengo un altro risultato:

$$\boxed{\text{caso } \ e \in D} \underset{\text{per def. D}}{\Rightarrow} F_u(e\$e)\downarrow \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$F_u(e\$e) \underset{\text{per eq. \#}}{=} \text{ASSURDOA}(e) \underset{\text{per def. ASSURDOA}}{=} 1 - F_u(e\$e)$$

ottengo così

$$F_u(e\$e) = 1 - F_u(e\$e)$$

ma siamo nel caso $F_u(e\$e)\downarrow \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$

ottengo

$$\text{contraddizione} \begin{cases} 1 = 1 - 1 = 0 & -F_u(e\$e) = 1 \\ 0 = 1 - 0 = 1 & -F_u(e\$e) = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{caso } e \notin D}$ => $F_u(e\$e)\uparrow$

def. D

$F_u(e\$e) = \text{ASSURDOA}(e) = 0$

per def. ASSURDA

ma siamo nel caso in cui $F_u(e\$e)\uparrow$

per cui si ottiene

$\uparrow = 0$ } contraddizione

$\Downarrow$

allora e non può esistere

perché non sta in D e nemmeno

fuori D

$\Downarrow$

Non posso implementare "$x \in D$?"

$\Downarrow$

D non è ricorsivo!