Lezione 3

- L’identità e le sue regole di inferenza
- I connettivi «e», «o», «non».
- Intermezzo matematico

L’identità e le sue regole di inferenza

Linguaggi con identità

In FOL il predicato binario _ = _ ha una interpretazione prefissata:

a = b è vero in una circostanza se e solo se in quella circostanza a, b sono nomi dello stesso individuo/oggetto.

Valgono le seguenti regole di inferenza:

(= Intro) la proposizione **n = n** è vera per qualsiasi costante **n** in qualsiasi contesto e circostanza, per cui la posso inferire in qualunque punto della prova.

(= Elim) se nelle premesse o in passaggi precedenti ho ottenuto **n = m,** allora posso ***sostituire*** **m** al posto di **qualche occorrenza** di **n** in una proposizione **P(n)** già dimostrata, ***inferendo*** *una nuova proposizione* **P(m)**.

Regole Formali per l'identità **(= Intro)** e **(= Elim)** in **Fitch**

Identity Introduction (= Intro):

$$\triangleright \mid \; n = n$$

Identity Elimination (= Elim):

$$\begin{array}{l|l} & P(n) \\ & \vdots \\ & n = m \\ & \vdots \\ \triangleright & P(m) \end{array}$$

Riflessività dell'identità

Identità degli indiscernibili
(indiscernibilità degli identici)

ESEMPIO di dimostrazioni: dimostriamo che l’identità è una relazione di equivalenza.

riflessiva (a arbitraria costante):

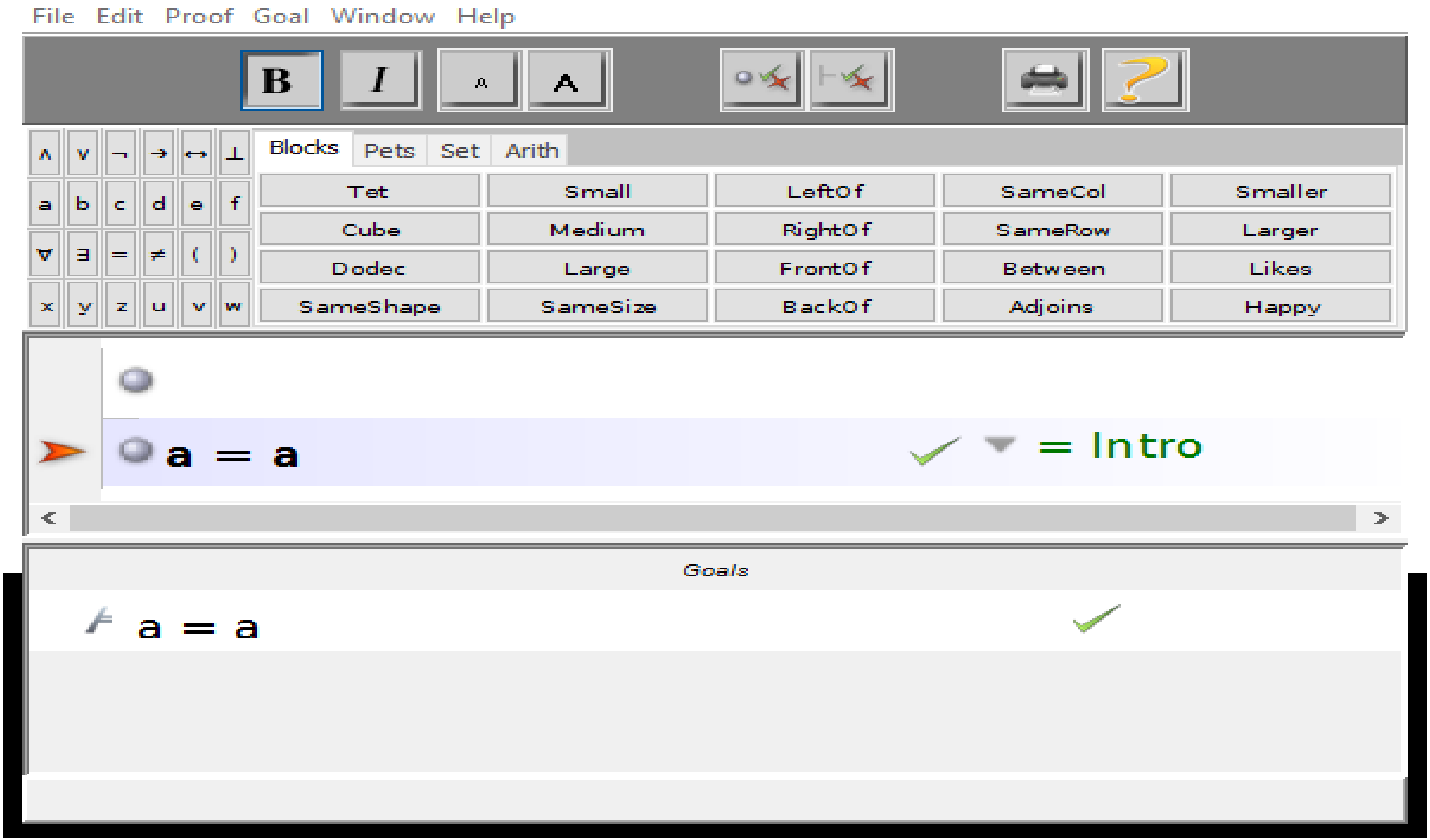
a = a (= intro)

simmetrica (a,b arbitrarie costanti):

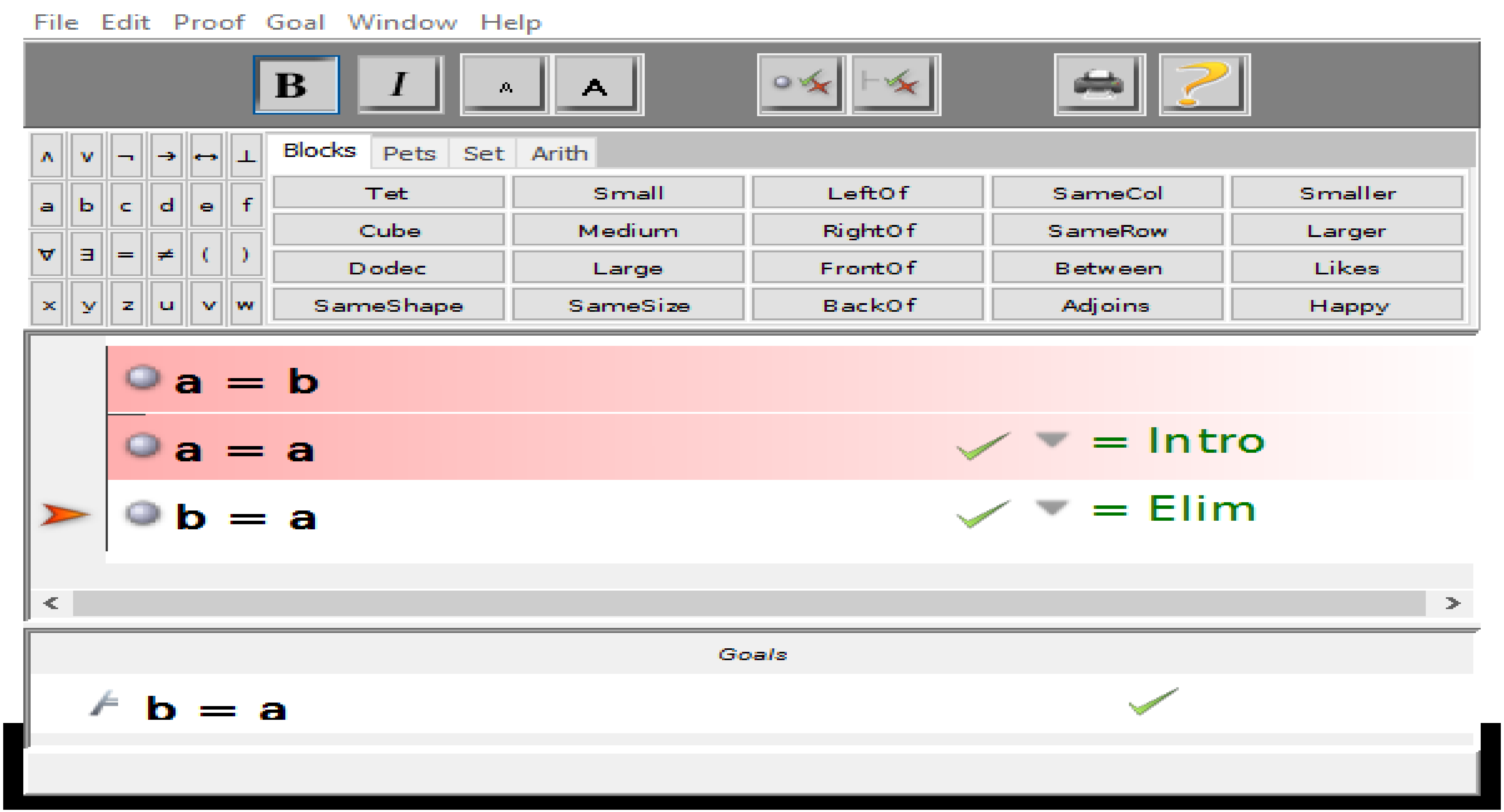
da	1.	a = b
segue	2.	b = a

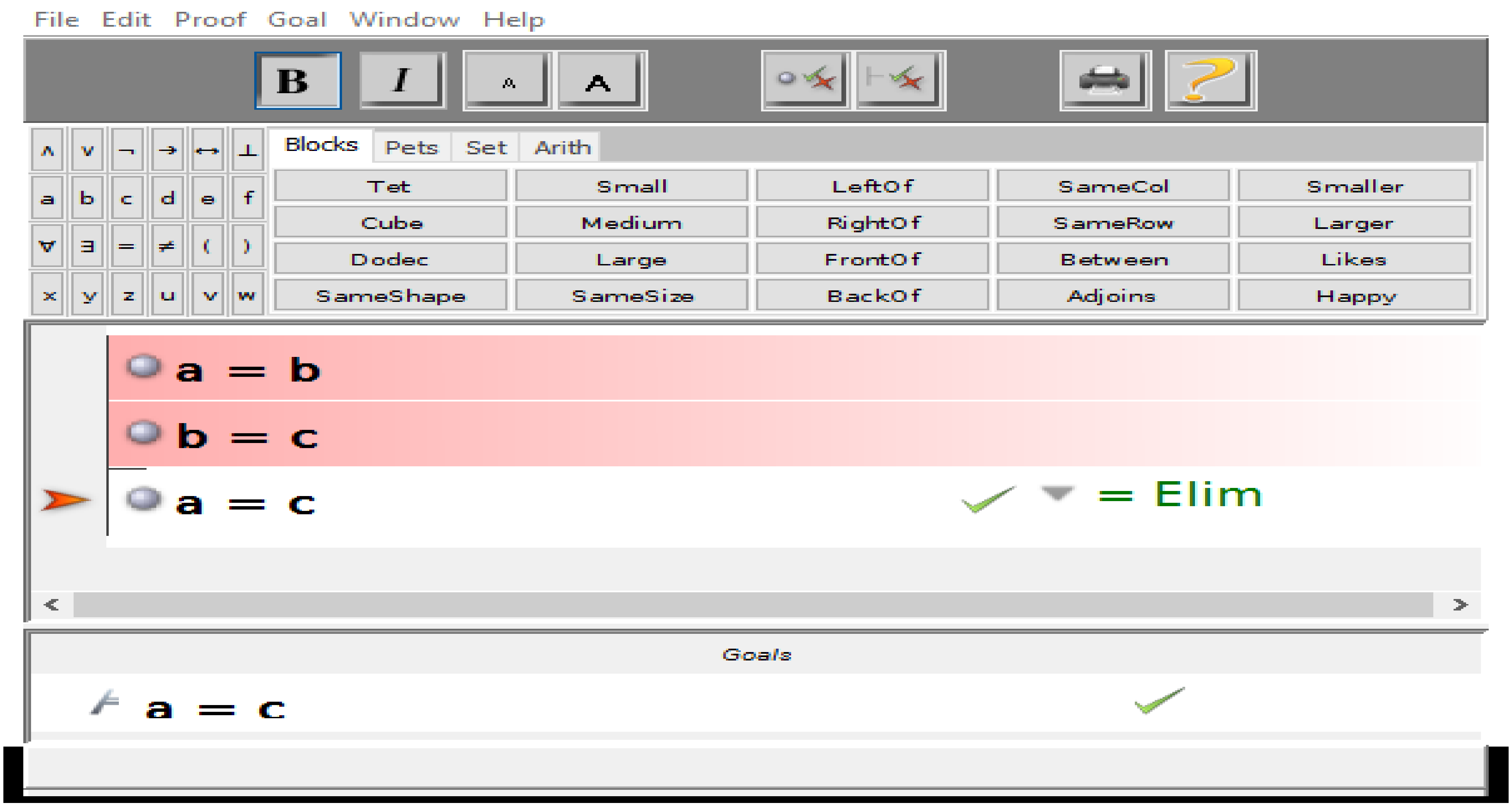
transitiva (a,b,c arbitrarie costanti)

da	1.	a = b
	2.	b = c
segue	3.	a = c



File Edit Proof Goal Window Help
B
I
A
A
∧ ∨ ¬ → ↔ ⊥
a b c d e f
∀ ∃ = ≠ ( )
x y z u v w
Blocks
Pets
Set
Arith
Tet
Small
LeftOf
SameCol
Smaller
Cube
Medium
RightOf
SameRow
Larger
Dodec
Large
FrontOf
Between
Likes
SameShape
SameSize
BackOf
Adjoins
Happy
a = a
= Intro
Goals
a = a


File Edit Proof Goal Window Help
Blocks Pets Set Arith
Tet Small LeftOf SameCol Smaller
Cube Medium RightOf SameRow Larger
Dodec Large FrontOf Between Likes
SameShape SameSize BackOf Adjoins Happy
a = b
a = a
= Intro
b = a
= Elim
Goals
b = a


File Edit Proof Goal Window Help
B I A A
∧ ∨ ¬ → ↔ ⊥
a b c d e f
∀ ∃ = ≠ ( )
x y z u v w
Blocks Pets Set Arith
Tet Small LeftOf SameCol Smaller
Cube Medium RightOf SameRow Larger
Dodec Large FrontOf Between Likes
SameShape SameSize BackOf Adjoins Happy
a = b
b = c
a = c
= Elim
Goals
a = c

Identità e logica delle proposizioni atomiche

a è un cubo, e a e b sono due nomi dello stesso oggetto.
Dunque anche b è un cubo.

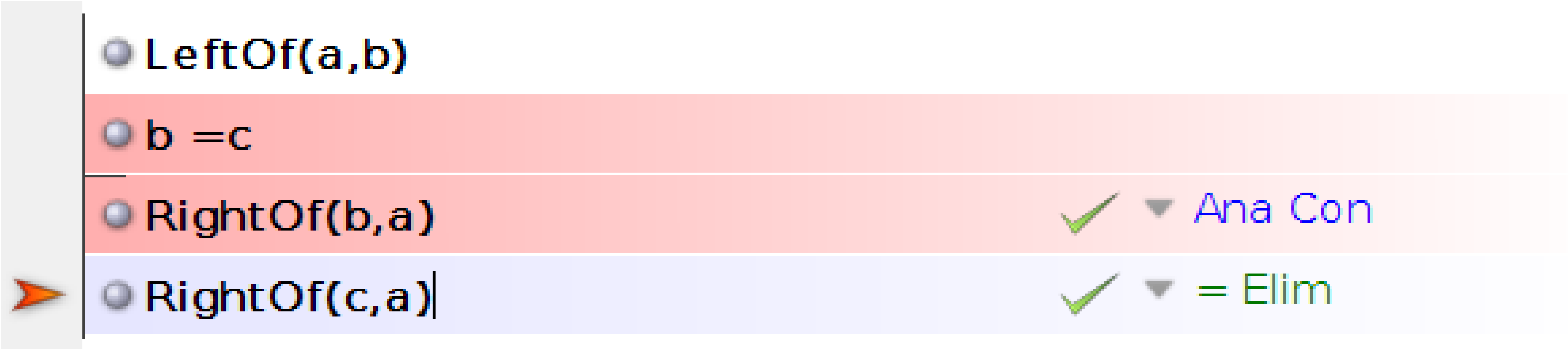
Cube(a)
a = b

Cube(b) = Elim

Dunque, questo ragionamento è valido in ogni contesto.

Identità e logica delle proposizioni atomiche

a giace a sinistra di b, b e c sono due nomi dello stesso oggetto. Dunque c giace a destra di a.



Questo ragionamento è valido nel contesto dei blocchi, ma vi sono contesti in cui non è valido.

I connettivi «e», «o», «non»

Vero-funzionalità

- La logica proposizionale riguarda le proposizioni (enunciati) e si occupa dei ***connettivi linguistici*** vero-funzionali.

  - ***Connettivo:*** costruisce enunciati composti a partire da enunciati più semplici, che chiameremo *componenti.*

  - Connettivo ***vero-funzionale :*** il valore di verità di un enunciato composto è funzione *solo* dei valori di verità degli enunciati componenti, cioè è definibile mediante una ***tavola di verità.***

Vero-funzionalità

- Esempio di connettivo vero-funzionale: **non** $\_\_\_\_\__1$.
  «**non** *piove*» è vero se «*piove*» è falso,
  «**non** *piove*» è falso se «*piove*» è vero

- Esempio di «connettivo» non vero-funzionale: **domani** $\_\_\_\_\__1$
  le verità di «**domani** *piove*» non dipende da quella di «*piove*»; che piova o meno, domani potrebbe piovere o meno.

I connettivi vero-funzionali «e», «o», «non».

Cominciamo dai connettivi le cui tavole di verità corrispondono in buona sostanza al loro significato nel linguaggio naturale:

- $\wedge$: congiunzione «e»
- $\vee$: disgiunzione inclusiva «o»
- $\neg$: negazione «non»

La negazione.

In italiano la negazione può essere espressa da «non» davanti a un predicato, da «in-» seguita da un aggettivo, ecc.

	In italiano	Traduzione in FOL
1	**non** *piove*	¬ Piove
2	*Gigi* **non** *ha la matita*	¬ Ha(gigi, matita)
3	Anna è **in**felice	¬ Felice(anna)

Connettivo «non»: La tavola di verità

La negazione «non P» è vera se P è falsa,
falsa se P è vera.

P	$\neg P$
T	F
F	T

La congiunzione.

In italiano la congiunzione è «e», ma vi sono molti altri modi di esprimerla: «ma», «mentre», «inoltre», ecc.

	In italiano	Traduzione in FOL
1	*Gigi ha 5 anni* **e** *Mario ha 7 anni*	Anni(gigi,5) $\wedge$ Anni(mario,7)
2	*Lea è stata promossa* **mentre** *Ugo è stato respinto*	Promossa(lea) $\wedge$ Respinto(ugo)
3	Anna ha 90 anni **ma** è lucida	Anni(anna,90) $\wedge$ Lucida(anna)
4	*Gigi ha la media del 29;* **inoltre** *ha tre lodi*	Media(gigi,29) $\wedge$ Lodi(gigi,3)

Connettivo «e»: La tavola di verità

La congiunzione «P e Q» è vera se entrambi i congiunti P, Q sono veri, falsa se almeno uno è falso.

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

La disgiunzione.

In italiano la disgiunzione è «o», «oppure»,…

	In italiano	**Traduzione in FOL**
1	*Gigi ha 5* **o** *6 anni*	$\text{Anni(gigi,5)} \vee \text{Anni(gigi,6)}$
2	*Lea è al lavoro* **oppure** *è ammalata*	$\text{Lavora(lea)} \vee \text{Ammalata(lea)}$

Connettivo «o»: La tavola di verità

Una disgiunzione «P o Q» è vera se almeno uno dei disgiunti P, Q è vero, falsa se entrambi sono falsi.

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

NOTA: la disgiunzione $\vee$ è *inclusiva.*

Sintassi: le formule ben formate (fbf)

DEF. Una ***fbf di un linguaggio (associato a un contesto)*** è

- (base) una proposizione ***atomica*** del linguaggio;
- (passo) o si ottiene riempiendo con ***fbf del linguaggio*** i posti dei costrutti: $\bot$, $(\neg \_\_)$, $(\_\_ \wedge \_\_)$, $(\_\_ \vee \_\_)$, $(\_\_ \rightarrow \_\_)$, $(\_\_ \leftrightarrow \_\_)$.

Nient'altro è una fbf del linguaggio.

Sintassi: le formule ben formate (fbf)

La definizione è ricorsiva. Come conseguenza ogni fbf è generabile per strati:

Strato 0: le atomiche;

Strato 1: riempio i posti di $(\neg \_\_)$, $(\_\_ \wedge \_\_)$, $(\_\_ \vee \_\_)$ con fbf di strato 0;

Strato 2: riempio i posti di $(\neg \_\_)$, $(\_\_ \wedge \_\_)$, $(\_\_ \vee \_\_)$ con fbf di strato 0 o 1;

…

Nient'altro è una fbf: se non è generabile per strati, non è una fbf.

Esempio

Mostriamo che $((\neg P) \wedge (P \vee (\neg S)))$ è una fbf.

Strato 0: P, S sono atomiche

Strato 1: $(\neg P)$, $(\neg S)$ generate da P, S dello strato 0

Strato 2: $(P \vee (\neg S))$ generata da P: strato 0 e $(\neg S)$:strato 1

Strato 3: $((\neg P) \wedge (P \vee (\neg S)))$

generata da $(\neg P)$:strato 1 e $(P \vee (\neg S))$:strato 2

Semantica: verità di una fbf in una circostanza

Il valore di verità di una fbf in una circostanza si ottiene come segue:

1. Si sostituiscono le atomiche con i rispettivi valori di verità
2. Si calcola il valore della espressione booleana così ottenuta applicando le tavole di verità.

Si può valutare più rapidamente con le ***regole di riscrittura***:

a) $\mathbf{T} \wedge$ Espr = Espr   Espr $\wedge \mathbf{T}$ = Espr

b) $\mathbf{F} \vee$ Espr = Espr   Espr $\vee \mathbf{F}$ = Espr

c) $\mathbf{T} \vee$ Espr = $\mathbf{T}$ Espr $\vee \mathbf{T} = \mathbf{T}$ b), d) ***duali*** di a),c), risp.

d) $\mathbf{F} \wedge$ Espr = $\mathbf{F}$ Espr $\wedge \mathbf{F} = \mathbf{F}$

e) $\neg \mathbf{T} = \mathbf{F}$ $\neg \mathbf{F} = \mathbf{T}$

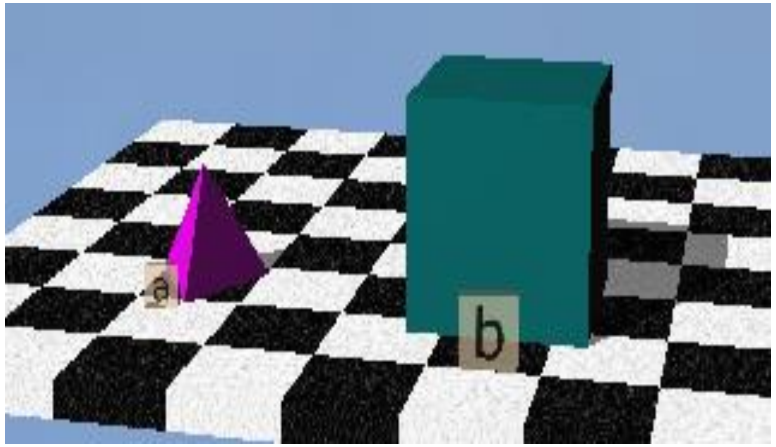
Esempio

$I(\neg(Tet(a) \wedge Large(a)) \wedge Cube(b))=$

$= \neg(T \wedge F) \wedge T$

$= \neg(T \wedge F)$

$= \neg F \quad = \; T$

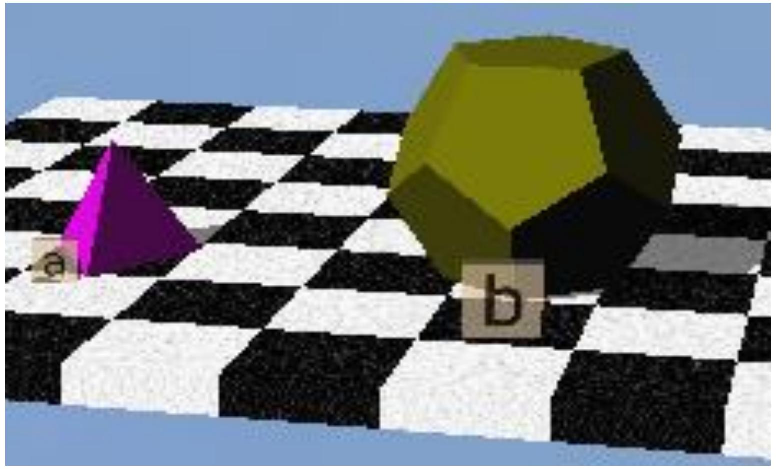


:I

$J(\neg(Tet(a) \wedge Large(a)) \wedge Cube(b)) =$

$= \neg(T \wedge F) \wedge F$

$= F$



:J

Esercizio

1. In TW, esiste una griglia che falsifichi
   $Tet(a) \lor Cube(a) \lor Dodec(a)$?
2. E se prendiamo un TW esteso, in cui ci sono anche altri tipi di blocchi, ad es. aggiungiamo i cilindri?

3. In TW, esiste una griglia che falsifichi
   $(Tet(a) \land Large(a)) \lor \neg Tet(a) \lor \neg Large(a)$?
4. E se prendiamo un TW esteso in cui ci sono anche altri tipi di blocchi e altre dimensioni?

Intermezzo matematico

Insiemi, tuple, prodotti cartesiani

Insiemi:

$S = \{2,3,5,7\}$, $T = \{pippo,pluto,topolino\}$, $X = \{ k \in \mathbb{N} : k < 11 \}$

Tuple:

(3,2,2,5), (topolino, pluto, pippo, pluto)

Prodotti cartesiani:

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$$

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i\}$$

Relazioni: sottoinsiemi di un prodotto cartesiano

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

Relazioni

Relazioni: sottoinsiemi di un prodotto cartesiano

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

Relazioni unarie: $R \subseteq A$:

Es: $P \subseteq \mathbb{N}$, $P = \{ a \in \mathbb{N} : a = 2b \text{ per qualche } b \in \mathbb{N}\}$

Relazioni binarie $R \subseteq A \times B$:

Es: Persone = {Ada, Bruno, Carla}, Cibi = {Pizza, Pasta, Carne, Uova}

PiaceA $\subseteq$ Cibi $\times$ Persone =

{(Pizza,Ada),(Pizza,Bruno),(Carne,Bruno),(Uova,Bruno),(Pasta,Ada)}

Relazioni di Equivalenza e di Ordine

Relazioni di Equivalenza: $R \subseteq A \times A$ $\quad (R \subseteq A^2)$

- R riflessiva: $(a,a) \in R$ per ogni $a \in A$;
- R simmetrica: $(a,b) \in R$ implica $(b,a) \in R$ per ogni $a,b \in A$;
- R transitiva: $(a,b) \in R$ e $(b,c) \in R$ implicano $(a,c) \in R$, per ogni $a,b,c \in A$.

Relazioni di Ordine (parziale): $R \subseteq A \times A$ $\quad (R \subseteq A^2)$

- R riflessiva: $(a,a) \in R$ per ogni $a \in A$;
- R antisimmetrica: $(a,b) \in R$ e $(b,a) \in R$ implicano $a = b$, per ogni $a,b \in A$;
- R transitiva: $(a,b) \in R$ e $(b,c) \in R$ implicano $(a,c) \in R$, per ogni $a,b,c \in A$.

Funzioni

Funzioni (totali):

$$f : A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \longrightarrow B$$

Sono relazioni

$$f \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times B$$

tali che, **per ogni** n-pla $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$

esiste un unico $b \in B$

per cui $(a_1, a_2, \ldots, a_{n,} b) \in f$

Si scrive: $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = b$ (o anche: $f:(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mapsto b$)

Per le interpretazioni (lo vedremo)

Useremo:

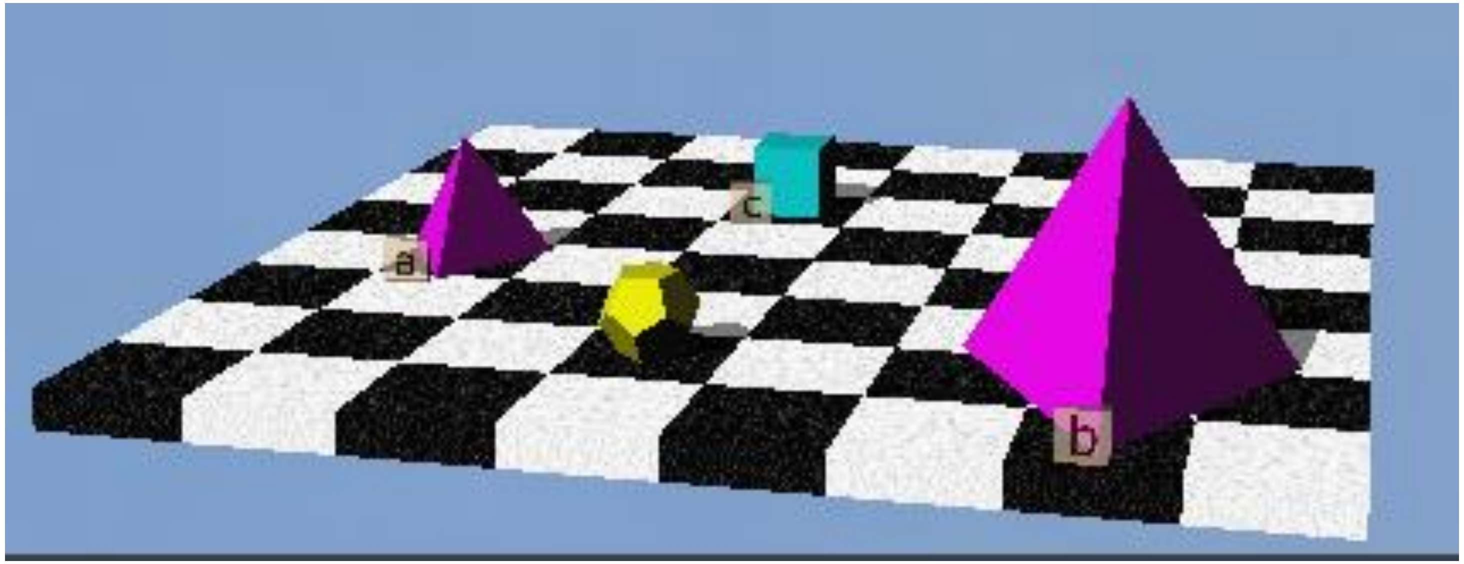
Relazioni n-arie $R \subseteq A^n$
per interpretare simboli di predicato con n posti.

Funzioni n-arie $f : A^n \longrightarrow A$
per interpretare simboli di funzioni con n posti.

Fissiamo le idee:

- **Contesto**: insieme di circostanze. Gli si associa un **Linguaggio** (NB: contesti diversi possono essere associati allo stesso linguaggio).
- **Linguaggio:** dato da **costanti + predicati** (n-ari) + funzioni (n-arie).
- **Proposizioni atomiche:** predicati completamente istanziati (in ogni posto) con costanti.
- **Interpretazione** (in una circostanza): fissato l'**universo** del discorso **A**:
  - **Costanti:** elementi dell'**universo** del discorso: $\mathbf{I(c) \in A}$.
  - **Predicati** (n-ari): relazioni (n-arie) sull'**universo del discorso**:

    $$\mathbf{I(P) \subseteq A^n}.$$
  - **Proposizione atomica: $\mathbf{P(c_1,\ldots,c_n)}$:** è **vera** (nella data circostanza = nella data interpretazione) sse $\mathbf{(I(c_1),\ldots,I(c_n)) \in I(P)}$.



Un mondo
NB. Il dodecaedro
non ha nome

T	1. Tet(a)
T	2. Tet(b)
F	3. Tet(c)
F	4. Cube(a)
F	5. Cube(b)
T	6. Cube(c)
F	7. Dodec(a)
F	8. Dodec(b)
F	9. Dodec(c)

T	10. SameShape(a,a)
T	11. SameShape(a,b)
F	12. SameShape(a,c)
T	13. SameShape(b,a)
T	14. SameShape(b,b)
F	15. SameShape(b,c)
F	16. SameShape(c,a)
F	17. SameShape(c,b)
T	18. SameShape(c,c)

L'interpretazione corrispondente

$A = \{x,y,z,w\}$, $I(a), I(b), I(c) \in A$,

$I(Tet) \subseteq A$, $I(Cube) \subseteq A$, $I(Dodec) \subseteq A$, $I(SameShape) \subseteq A^2$.

$I(a) = x$, $I(b) = y$, $I(c) = z$.

$I(Tet) = \{x,y\}$, $I(Cube) = \{z\}$, $I(Dodec) = \{w\}$,

$I(SameShape) = \{(x,x),(x,y),(y,x),(y,y),(z,z),(w,w)\}$.

T	1. Tet(a)
T	2. Tet(b)
F	3. Tet(c)
F	4. Cube(a)
F	5. Cube(b)
T	6. Cube(c)
F	7. Dodec(a)
F	8. Dodec(b)
F	9. Dodec(c)

T	10. SameShape(a,a)
T	11. SameShape(a,b)
F	12. SameShape(a,c)
T	13. SameShape(b,a)
T	14. SameShape(b,b)
F	15. SameShape(b,c)
F	16. SameShape(c,a)
F	17. SameShape(c,b)
T	18. SameShape(c,c)

L'interpretazione corrispondente

Ecco, qui sopra, la formalizzazione in termini di Relazioni e Costanti dell'interpretazione qui a sinistra.

Riferimenti al libro di testo

- Chapter 3: fino a sec. 3.3 inclusa, poi 3.5, 3.7.

- Per l'intermezzo matematico: qualunque testo di algebra, analisi, logica matematica, matematica discreta, etc., dovrebbe avere una sezione, spesso introduttiva, su relazioni e funzioni.