

SOTTOGRUPPI, OMOMORFISMI, ANELLI & CAMPI

Def: Sia G un gruppo e considero $H \subseteq G$.

Diciamo che H è SOTTOGRUPPO di G se:

① $H \neq \emptyset$

② $\forall x, y \in H \Rightarrow x \star y \in H$ (\star è operazione su H)

③ $e \in H$

④ $\forall x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$

P.S. \star associativa
su $H \rightarrow$ associativa
anche su G

Oss: Con queste condizioni H è gruppo

Def: Sia (G, \star) e (H, \square) , due gruppi

Una funzione $f: G \rightarrow H$ è detta OMOMORFISMO DI GRUPPI

se $\forall a, b \in G \quad \underbrace{f(a \star b)}_{\in H} = \underbrace{f(a) \square f(b)}_{\in H}$

Def: Sono (G, \star) e (H, \square) , 2 gruppi

Dico che $f: G \rightarrow H$ omomorfismo, è

ISOMORFISMO se f è biettiva

In questo caso dico che (G, \star) e (H, \square)

sono ISOMORFI.

→ Nei gruppi si possono definire le potenze

$a \in A$ a^{-1} è inverso di a

$a^0 := e$ (a^0 è neutro)

$$(\mathbb{Q}, +, \cdot) \sim (\mathbb{Q}, +) \text{ è gruppo}$$

$$(\mathbb{Q}/\{0\}, \cdot) \text{ è gruppo}$$

Notazione: Se $(A, +, \cdot)$ è anello, indico:

- con 0, è neutro di +
- con 1, è neutro di ·
- con -a, l'inverso di a rispetto +

Def: $(K, +, \cdot)$ è **CAMPO** se:

- ① è anello
- ② $(K - \{0\}, \cdot)$ è gruppo
- ③ · è commutativa

Es Sono campi $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$
 quelli ma no campi $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$

Insieme Quoziente

sia A un insieme

sia R una relazione di equivalenza

(da adesso in poi $R = \sim$)

- riflessiva
- Simm.
- transitive

Def: Chiamo **CLASSE DI EQUIVALENZA** di $a \in A$

l'insieme $[a]_{\sim} := \{ b \in A \text{ t.c. } a \sim b \}$

$:= \{ \text{gli elementi in relazione con } a \}$

Teorema: Sia X un insieme, \sim una relazione di equivalenza in X :

i) $\forall a \in X \quad a \in [a]_{\sim}$

ii) $a \sim b \Leftrightarrow [a]_{\sim} = [b]_{\sim}$

iii) $a \not\sim b \Leftrightarrow [a]_{\sim} \cap [b]_{\sim} = \emptyset$

dim i) $[a] = \{x \in X \mid a \sim x\}$
poiché \sim è a di equivalenza
 $\forall a \in X \quad a \sim a \Rightarrow a \in [a]$

dim ii) Mostro che $a \sim b \Rightarrow [a] = [b]$
cioè $[a] \subseteq [b]$ e $[b] \subseteq [a]$

so che $a \sim b$ mostro che $\forall x \in [a]$
si ha $x \in [b]$

$$x \in [a] \Rightarrow a \sim x \quad \text{inoltre so che } a \sim b \\ \Rightarrow a \sim x \text{ e } b \sim a$$

$$b \sim a, a \sim x \Rightarrow b \sim x \Rightarrow x \in [b]$$

↓
TRANSITIVA

Si mostra analogamente $[b] \subseteq [a] \Rightarrow [a] = [b]$

dim iii) \Leftarrow Mostro che $[a] = [b] \Rightarrow a \sim b$

$$b \in [b] = [a] \Rightarrow b \in [a] \Rightarrow a \sim b$$

↓
punto i)

dim iii) $\Rightarrow a \not\sim b \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$

per assurdo $x \in [a] \cap [b] \Rightarrow$

$$a \sim x, b \sim x \Rightarrow a \sim x, x \sim b \Rightarrow a \sim b$$

dim iii) $\Leftarrow [a] \cap [b] = \emptyset \Rightarrow a \not\sim b$

per assurdo $a \sim b \Rightarrow b \in [a]$

$b \in [b]$

$\Rightarrow b \in [a] \cap [b]$

ASSURDO!!!

Dim: Sia X un insieme, una partizione di X è una collezione di sottoinsiemi di X , $\{A_i\}_i$

① $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$

② $\bigcup A_i = X$

(③ $A_i \neq \emptyset$)

Teorema: Se X è insieme e \sim è relazione di equivalenza

$\{[a], a \in X\} = \{[a]\}_{a \in X}$ } insieme delle classi di equivalenza di elem. in X

è partizione

infatti $[a] = A_i$ $A_j = [b]$ $i \neq j$ significa $\hookrightarrow [a] \neq [b]$

$A_i = [a] \neq \emptyset$ (infatti $a \in [a]$)
per ②

$A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$ diventa \rightarrow

$[a] \cap [b] = \emptyset$ se $[a] \neq [b]$ cioè

se $a \not\sim b$ (per iii)

\Rightarrow per (iii) dice che $[a] \cap [b] = \emptyset$

$$X = \bigcup A_i \quad A_i \subseteq X \quad \text{è ovvio che} \quad \bigcup_i A_i = X$$

Voglio dimostrare che $X \subseteq \bigcup A_i$:

$$\bullet \text{ cioè } X \subseteq \bigcup [a]$$

$\forall x \in X \quad x \in [x] \Rightarrow x \in \text{all' unione delle classi di equivalenza}$

Def: Sia X un insieme, \sim una relazione di equivalenza
l' INSIEME QUOZIENTE di X rispetto a $\sim \rightarrow$

$$X/\sim := \{ [a], \text{ al variare di } a \in X \}$$

è l'insieme delle classi di equivalenza di X rispetto a \sim

$$X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\}$$

$$(h, k) \sim (m, n) \Leftrightarrow hn = km$$

$$\rightarrow \text{è riflessiva } (h, k) \sim (h, k) \rightarrow hk = kh$$

$$\rightarrow \text{è simmetrica } (h, k) \sim (m, n) \rightarrow hn = km \rightarrow mk = nh \Rightarrow (m, n) \sim (h, k)$$

$$\rightarrow \text{è transitiva } (h, k) \sim (m, n), (m, n) \sim (a, b)$$

$$\Rightarrow hn = km, \quad mb = na \Rightarrow m = \frac{hn}{k} \quad (k \neq 0)$$

$$\Rightarrow \frac{hnb}{k} = na \Rightarrow hb = ka$$

$$\Rightarrow (h, k) \sim (a, b)$$

$$\begin{aligned}
 [(h, k)] &= \{ (n, d) \mid (h, k) \sim (n, d) \} \\
 &= \{ (n, d) \mid hd = kn \} \\
 &= \{ (n, d) \mid \frac{h}{k} = \frac{n}{d} \}
 \end{aligned}$$

$\rightarrow \frac{n}{d}$ è **FRAZIONE EQUIVALENTE** a $\frac{h}{k}$

es $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$

$\Rightarrow X_{/\sim} = \mathbb{Q}$ l'insieme delle frazioni

———— L'INSIEME \mathbb{Z}_n DELLE CLASSI DI RESTO DI MODULO n ————

Def: Considero l'insieme \mathbb{Z} , scelgo $n \in \mathbb{N}$ $n > 0$.
Definisco la relazione \sim_n :

$$x \sim_n y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid x - y = kn$$

es $n = 3$

$$1 \sim_3 -2 \quad (\text{infatti } 1 - (-2) = 3 \quad (k=1))$$

$$1 \not\sim_3 2 \quad (\text{infatti } 1 - 2 = -1 \rightarrow \text{non è multiplo di } 3)$$

$$27 \sim_3 81 \quad (\text{infatti } 27 - 81 = 3 \cdot (-18))$$

Teorema: \sim_n è relazione di equivalenza

dimostrazione: \sim_n è **riflessiva** $x \sim_n x$

perché $x - x = 0 \cdot n$

\sim_n è **simmetrica** infatti se

$$x \sim_n y \Rightarrow x - y = kn \Rightarrow y - x = (-k)n \Rightarrow y \sim_n x$$

\sim_n e transitive infatti, $x \sim_n y$ $y \sim_n z$

$$\Rightarrow x - y = kn \text{ e } y - z = hn$$

$$\Rightarrow x - z = x - y + y - z = kn + hn = (k+h)n$$

$$\Rightarrow x \sim_n z$$

✓