ESERCIZIO 1

Si considerino i sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ così definiti:

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x - y = 2 \right\},$$ a)

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + z = y \right\},$$ b)

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid xz = 0 \right\}.$$ c)

Si stabilisca se R, S e T sono, o meno, sottospazi di $\mathbb{R}^3$, determinando, in caso di risposta affermativa, la dimensione e una base del sottospazio.

① a)

$\mathcal{U} \subseteq V$ $\quad$ V spazio vettoriale

$\mathcal{U}$ è sottospazio $\iff$ $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in U$

$\Rightarrow \lambda \underline{v}_1 + \mu \underline{v}_2 \in \mathcal{U}$

Se $\mathcal{U} \subseteq V$ sottospazio $\Rightarrow \underline{0}_V \in \mathcal{U}$

$\underline{0}_V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin R \qquad 0-0=2$ NO

$\Rightarrow \mathcal{U}$ NON è sottospazio

b)

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\underline{V}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1+z_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \qquad \underline{V}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2+z_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \in S$

$\lambda \underline{v}_1 + \mu \underline{V}_2 \overset{?}{\in} S$

$\lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1+z_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2+z_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda (x_1+z_1)+\mu(x_2+z_2) \\ \lambda z_1 + \mu z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ (\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda z_1 + \mu z_2) \\ \lambda z_1 + \mu z_2 \end{bmatrix}$

$\cap$
S

$\Rightarrow$ è sottospazio

$$\begin{bmatrix} x \\ x+z \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\underline{u}_1 \qquad \underline{u}_2$

$\Rightarrow$ $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ sono generatori di S

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha+\beta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = 0$$

sono indipendenti

$\langle u_1, u_2 \rangle$ è base di S

$\Rightarrow \dim S = 2$

c) $\underline{0}_V \in T$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in T$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin T$$

$\Rightarrow$ T <u>non</u> è sottospazio

OSSERVAZIONE 1

$V = \mathbb{R}^n$. Sia $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$. Si verifica che $\underline{u}$ è combinazione lineare di k vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ se il sistema $A\underline{x} = \underline{u}$ in cui la matrice dei coefficienti è

$$A = [\underline{v}_1 | \dots | \underline{v}_k]$$

e la matrice completa è $[A | \underline{u}]$ ha almeno una soluzione $\underline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}$

In questo caso

$$\underline{u} = c_1 \underline{v}_1 + \dots + c_k \underline{v}_k$$

OSSERVAZIONE 2

$V = \mathbb{R}^m$. Per verificare se $\underline{v}_1, \dots \underline{v}_k$ sono linearmente dipendenti / indipend. devo risolvere il sistema omogeneo che ha come matrice $A = [\underline{v}_1, \dots \underline{v}_k]$

$$A\underline{v} = \underline{0}$$

Se opero la riduzione a scalini su A
- se ho solo la soluzione nulla sono indipendenti
- se il sistema ha soluzioni non nulla sono dipendenti

Quindi i vettori $\underline{v}_1 \dots \underline{v}_k$ sono indipendenti $\Leftrightarrow$ $rk(A) = k$ (rk = n° di pivot) (= n° colonne della matrice)

OSSERVAZIONE 3:

$\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ sono una base di $\mathbb{R}^m$ $\Leftrightarrow$ $rk(A) = n$

Qui $A = [\underline{v}_1 | \cdots | \underline{v}_n]$ è quadrata quindi $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.

ESERCIZIO 2

Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

i) Si dimostri che $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^4$

ii) Si scriva il vettore $\mathbf{u}$ come combinazione lineare di $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}$.

$$p = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad q = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix} \quad r = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix} \quad s = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

Base $\iff$ 1) sono indipendenti $\quad (\dim \mathbb{R}^4 = 4)$

se trovo $\underline{4}$ vettori indipendenti $\Rightarrow$ base

$$\lambda \underline{p} + \mu \underline{q} + \eta \underline{r} + J \underline{s} = \underline{0} \iff \lambda = \mu = \eta = J = 0$$

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \eta + J = 0 \\ 2\mu + 2\eta + 2J = 0 \\ 3\eta + 3J = 0 \\ 4J = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \\ \eta = 0 \\ J = 0 \end{cases} \quad S_1$$

$\Rightarrow$ sono una base

$$\underline{u} = a\underline{p} + b\underline{q} + c\underline{r} + d\underline{s}$$

cercare a, b, c, d t.c.

$$\begin{cases} a + b + c + d = \\ 2b + 2c + 2d = \\ 3c + 3d = \\ 4d = \end{cases} \underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}}_{\underline{u}} \longrightarrow \begin{matrix} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -1/4 \\ d = 1/4 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$

ESERCIZIO 3

Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{c}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha - 1 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Si dica giustificando brevemente la risposta se le seguenti affermazioni sono V(vere), F(false):

i) per ogni valore di α i vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}_\alpha$ e $\mathbf{c}_\alpha$ generano $\mathbb{R}^3$
ii) i vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}_\alpha$ e $\mathbf{c}_\alpha$ sono linearmente indipendenti se e solo se $\alpha \neq 0$
iii) nel caso $\alpha = 1$, $\mathbf{a}$ è combinazione lineare di $\mathbf{b}_1$ e $\mathbf{c}_1$
iv) nel caso $\alpha = 0$, $\mathbf{a}$ è combinazione lineare di $\mathbf{b}_0$ e $\mathbf{c}_0$
v) nel caso $\alpha = 2$, il sottospazio generato da $\mathbf{a}, \mathbf{b}_2$ e $\mathbf{c}_2$ ha dimensione 2
vi) nel caso $\alpha = 1$, il sottospazio generato da $\mathbf{a}, \mathbf{b}_1$ e $\mathbf{c}_1$ ha dimensione 2.

1) $\forall \alpha \quad \mathbb{R}^3 = \langle \underline{a}, \underline{b}_\alpha, \underline{c}_\alpha \rangle$? **NO**

se $\alpha = 0 \quad \underline{b}_0 = \underline{0} \qquad \underline{a}, \; \underline{c}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\mathbb{R}^3 \overset{?}{=} \langle \underbrace{\underline{a}, \underline{c}_0}_{} \rangle$ no

$\text{Dim } \mathbb{R}^3 = \overset{\neq}{③}$

$$\beta \underline{a} + \gamma \underline{c} = \begin{bmatrix} \beta \\ -\gamma \\ \beta \end{bmatrix}$$ NON generano tutti i vettori $\mathbb{R}^3$

2) $\underline{a}, b_\alpha, c_\alpha$ sono linearmente indipend. $\iff \alpha \neq 0$

se $\alpha = 0 \quad \underline{a}, \underline{b}_0, \underline{c}_0$ sono dipendenti perché

il vettore nullo è sempre dipendente

sono indipendenti $\Rightarrow \alpha \neq 0$

↳ Dim:

Sono indipendenti $\iff$

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\alpha R_2 - (\alpha-1)R_3} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & -(\alpha-1) \end{bmatrix}$$

ha rango 3

se $\alpha \neq 1$ sono indipendenti

se $\alpha = 1$

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \underline{b}_1 \quad \underline{c}_1 \quad \underline{a} \end{array} \leftarrow \text{riga tutti } 0 \Rightarrow \text{sono dipendenti}$$

3) $\textcircled{\text{ə}}$

4) Se $\alpha = 0$ $\quad a \in \langle \underline{b}_0, \underline{c}_0 \rangle$?

$\qquad\qquad\qquad\qquad \langle 0, \underline{c}_0 \rangle$?

$\iff \underline{a} = \beta\, \underline{c}_0$?

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{NO} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

5) $\alpha = 2$ $\quad \langle a, b_2, c_2 \rangle$ ha dim 2 ? NO

$\hookrightarrow$ sono indipendenti $\Rightarrow \dim \langle \underline{a}, \underline{b}_2, \underline{c}_2 \rangle = 3$

6) $\alpha = 1$ $\quad \langle \underline{a}, \underline{b}_1, \underline{c}_1 \rangle$ ha dim 2 ?

$\underline{a} = \underline{b}_1 + \underline{c}_1$

$= \langle \underline{b}_1, \underline{c}_1 \rangle$ ha dim 2

se $\underline{b}_1$ e $\underline{c}_1$ sono indipendenti

(lo sono)

ESERCIZIO 4

Sia X lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2, e si consideri il seguente sottoinsieme di X

$$Y = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + b = c - d\}$$

I) Si provi che Y è un sottospazio di X.
II) Si provi determini la dimensione e una base di Y.

$$\emptyset = \begin{bmatrix} a & b \\ a+b+d & d \end{bmatrix}$$ è sottospazio $\Leftrightarrow$

$$\alpha \begin{bmatrix} a & b \\ a+b+d & d \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} a & b \\ a+b+d & d \end{bmatrix} \in Y$$

$$\begin{bmatrix} \alpha a + \beta x & \alpha b + \beta y \\ \alpha(a+b+d) + \beta(x+y+z) & \alpha d + \beta z \end{bmatrix} \in Y \quad \text{sì}$$

Base ?

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a+b+d & d \end{bmatrix} = a \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{u}_1} + b \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{u}_2} + d \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{u}_3}$$

generatori di Y

sono anche indipendenti

$$= \left(= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow a = b = d = 0 \right)$$

$\Rightarrow Y$ ha per base $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\Rightarrow \dim Y = 3$

ESERCIZIO 5

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottoinsieme

$$S_k = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \mid a+b=0,\ c-d=k-1 \right\},$$

con k parametro reale.

i) Si determini il valore del parametro k tale che S_k risulti un sottospazio di $\mathbb{R}^4$.

ii) Per il valore di k trovato al punto i) si determini un sistema di generatori di S_k.

Se $k \neq 1$ S_k <u>NON</u> è sottospazio

Se $k = 1$ devo verificarlo:

$$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \mid a+b=0 \quad c-d=0 \right\} = \begin{bmatrix} a \\ -a \\ c \\ c \end{bmatrix}$$

$$\alpha \begin{bmatrix} a \\ -a \\ c \\ c \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} x \\ -x \\ y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a + \beta x \\ -(\alpha a + \beta x) \\ \alpha c + \beta y \\ \alpha c + \beta y \end{bmatrix} \in S_1$$

S_k è sottospazio $\iff k = 1$.

$$S_1 = \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle}_{\text{sono generatori lin. indipendenti}}$$

sono generatori
lin. indipendenti
($\dim S_1 = 2$)

ESERCIZIO 6

2

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, si consideri il seguente sottoinsieme

$$Z = \{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mid b = 3a, \ c = 2d \}$$

Si dica, giustificando brevemente la risposta, se le seguenti affermazioni sono V(vere), F(false):

i) Z non è un sottospazio. F

ii) Z è un sottospazio di dimensione 2. V

iii) Z è il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$Z = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 3a \\ 2d \\ d \end{bmatrix} . \ a, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$Z = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$ base $\to$ generatori indipendenti

$\dim Z = 2$

$$Z = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad ?$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ 3\alpha \\ 2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \right\} \subseteq Z$$

ESERCIZIO 7

Sia $V = \mathbb{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a due a coefficienti reali.

Si dica giustificando brevemente la risposta se le seguenti affermazioni sono V(vere), F(false):

no perché dim $\mathbb{R}_2[x] = 3$

1) $V = < 2 + x, 1 + x^2 >$;
2) $V = < 5 - x + 3x^2, 1 + x^2, 1 - x - x^2, 2 - x >$;
3) $< 5 - x + 3x^2, 1 + x^2 > = < 1 - x - x^2, 2 - x >$.

$\mathbb{R}_2[x]$ ha dim 3

base = $< 1, x, x^2 >$

2) $p_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ $p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $p_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

mi bastano 3 indipendenti

Verifico $\{ \underline{p_1}, \underline{p_2}, \underline{p_3}, \underline{p_4} \}$ contiene 3

pol. lin. ind. $\Rightarrow$ base $\Rightarrow \{ p_1, \ldots, p_4 \}$

è sist. gen.

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss?}}$$

se rg = 3