Algoritmi e Strutture Dati

Lezione 24

23 novembre 2022

Programmazione dinamica

Problema Dato un vettore V di interi in $\mathbb{Z}$ trovare un sottovettore di somma massima

Esempio $1 \quad 2 \quad -4 \quad 8 \quad -2 \quad 3 \quad -1$

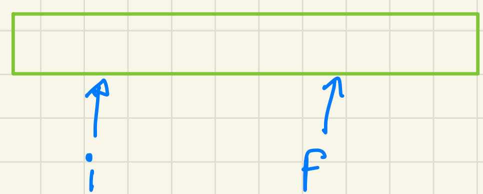
SOTTOVETTORE DI SOMMA MAX: soluzione "immediata"

Ricerca esaustiva: ispezioniamo tutti i possibili sottovettori

$V[1..n]$ vettore in input

sottovettore:
- indice di inizio i: $1 \le i \le n$
- indice di fine f: $i \le f \le n$

$\approx \frac{n^2}{2}$ sottovettori



```
ALGORITMO sottovettoreMax (Array V[1..n]) → (intero, intero)
    max ← V[1], inizio ← 1, fine ← 1
    FOR i ← 1 TO n DO
        FOR f ← i TO n DO
            somma ← somma di V[i..f]
            IF somma > max THEN
                max ← somma
                inizio ← i
                fine ← f
    RETURN (inizio, fine)
```

1   2   -4   8   -2   3   -1

```
somma ← 0
FOR k ← i TO f DO
    somma ← somma + k
```

Tempo $O(n^3)$

SOTTOVETTORE DI SOMMA MAX: soluzione "migliorata"

```
ALGORITMO sottovettoreMax (Array V[1..n]) → (intero, intero)
  max ← V[1], inizio ← 1, fine ← 1
  FOR i ← 1 TO n DO
    somma ← 0
    FOR f ← i TO n DO
      somma ← somma + V[f]
      IF somma > max THEN
        max ← somma
        inizio ← i
        fine ← f
  RETURN (inizio, fine)
```

1 2 -4 8 -2 3 -1

i f

Tempo $O(n^2)$

SOTTOVETTORE DI SOMMA MAX: soluzione "avanzata"

- CONSIDERO SOTTOPROBLEMI $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), \dots, \mathcal{P}(n)$, VIA VIA PIÙ DIFFICILI, DEL PROBLEMA $\mathcal{P}$ DATO   problemi vincolari
- RISOLVO I SOTTOPROBLEMI DAL PIÙ SEMPLICE $\mathcal{P}(1)$
- DALLE SOLUZIONI di $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), \dots, \mathcal{P}(n)$ RICAVO LA SOLUZIONE DI $\mathcal{P}$

in questo caso:

- $\mathcal{P}(i)$: TROVARE IL SOTTOVETTORE DI SOMMA MAX CHE TERMINA IN POSIZIONE i

- SOLUZIONE DI $\mathcal{P}$: SCELTA TRA LE SOLUZIONI DI $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), \dots, \mathcal{P}(n)$

Esempio

vettore	1	2	-4	8	-2	3	-1	V
indici	1	2	3	4	5	6	7	
valore della soluzione di P(i)	1	3	-1	8	6	9	8	5
				inizio		fine		

ALGORITMO sottovettoreMax (Array $V[1..n]$) $\rightarrow$ (intero, intero)

Sia $S[1..n]$ un vettore

$S[1] \leftarrow V[1]$

$max \leftarrow S[1]$, $fine \leftarrow 1$

FOR $i \leftarrow 2$ TO n DO

IF $S[i-1] \geq 0$ THEN

$S[i] \leftarrow S[i-1] + V[i]$

ELSE

$S[i] \leftarrow V[i]$

IF $S[i] > max$ THEN

$max \leftarrow S[i]$

$fine \leftarrow i$

Tempo $O(n)$

inizio ← fine

WHILE S[inizio] ≠ V[inizio] DO

  inizio ← inizio − 1

RETURN (inizio, fine)

al più n passi

Tempo $\Theta(n)$

→ Tempo TOT $\Theta(n)$

PROGRAMMAZIONE DINAMICA

Soluzione di un problema a partire da sottoproblemi più semplici

- Si individuano sottoproblemi del problema dato
- Si risolvono i sottoproblemi a partire dai più semplici
  - .. sottoproblemi "base": soluzione immediata → memorizzata in tabella
  - .. altri sottoproblemi: soluzione ottenuta utilizzando le soluzioni di sottoproblemi risolti in precedenza → consultazione e aggiornamento tabella
- Soluzione finale: ricavata dalle soluzioni dei sottoproblemi → funzione di alcuni elementi della tabella

ESEMPIO: Cammini di valore minimo su matrici

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 8 & 5 & 16 & 22 \\ 4 & 2 & 7 & 6 & & 20 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & & 14 \\ & & & & 6 & \\ 9 & 8 & 2 & 3 & & \end{array}$$

Problema

Data una matrice $n \times n$ di interi determinare un "cammino" dalla prima all'ultima colonna di valore minimo

"Cammino"

INIZIO: posizione qualunque della prima colonna

DA UNA POSIZIONE:

si può raggiungere la posizione nella colonna successiva:

- sulla riga sopra
- sulla stessa riga
- sulla riga sotto

FINE: posizione qualunque dell'ultima colonna

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 8 & 5 \\ 4 & 2 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 9 & 8 & 2 & 3 \end{matrix}$$

"valore" somma dei valori lungo il cammino

CAMMINO DI VALORE MINIMO SU MATRICI

Ricerca esaustiva: esamino tutti i possibili cammini

Quanti sono?

1	3	8	5
4	2	7	6
2	1	5	1
9	8	2	3

1ª colonna $\rightarrow$ n scelte

2ª colonna $\rightarrow$ 2 o 3 scelte

⋮

nª colonna $\rightarrow$ 2 o 3 scelte

almeno $n \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = n \cdot 2^{n-1}$ scelte

CAMMINO DI VALORE MINIMO SU MATRICI

Programmazione dinamica

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 8 & 5 \\ 4 & 2 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 9 & 8 & 2 & 3 \end{matrix}$$

P: problema del cammino di valore in una matrice $n \times n$

Per $i, j = 1, \dots, n$ considero il problema:

$P(i,j)$: trovare il cammino di valore minimo che inizia nella colonna 1 e termina nella posizione (i,j)

problema vincolato

La soluzione di P si ricava dalle soluzioni di $P(1,n), P(2,n), \dots, P(n,n)$

CAMMINO DI VALORE MINIMO SU MATRICI: Programmazione dinamica

MATRICE C DEI RISULTATI DEI PROBLEMI $P(i,j)$

$C[i,j]$ = costo cammino minimo che inizia nella colonna 1 e termina nella posizione (i,j)

IL VALORE DEL CAMMINO MINIMO SULLA MATRICE E'

$$\min \{ C[i,n] \mid i = 1, \dots, n \}$$

ultima colonna

CALCOLO DI $C[i,j]$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & 5 \\ 4 & 2 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 9 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

input

1^a colonna

$$C[i,1] = M[i,1] \qquad i=1,\dots,n$$

j-esima colonna

$$\begin{array}{ll} (i-1,j-1) \searrow & \\ (i,j-1) \rightarrow & \boxed{} \\ (i+1,j-1) \nearrow & (i,j) \end{array}$$

$$C[i,j] = M[i,j] + \min\{C[i-1,j-1], C[i,j-1], C[i+1,j-1]\}$$

$j>1$

$i=1..n$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & 5 \\ 4 & 2 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 9 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 & 15 \\ 4 & 3 & 10 & 14 \\ 2 & 3 & 8 & 6 \\ 9 & 10 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$C[i,1] = M[i,1] \quad i=1,\dots,n$

$C[i,j] = M[i,j] + \min\{ C[i-1,j-1],\ C[i,j-1],\ C[i+1,j-1] \}$

$j>1$
$i=1,\dots,n$

ALGORITMO camminoMinimo (matrice M[1..n, 1..n]) → intero

Tempo

```
Sia C[1..n, 1..n] una matrice
FOR i ← 1 TO n DO
    C[i, 1] ← M[i,1]
FOR j ← 2 TO n DO
    FOR i ← 1 TO n DO
        min ← C[i, j-1]
        IF i>1 AND C[i-1, j-1] < min THEN min ← C[i-1, j-1]
        IF i<n AND C[i+1, j-1] < min THEN min ← C[i+1, j-1]
        C[i, j] ← M[i, j] + min
min ← C[1, n]
FOR i ← 2 TO n DO
    IF C[i, n] < min THEN
        min ← C[i, n]
RETURN min
```

$C[i,1] = M[i,1] \quad i=1,\dots,n$ — $O(n)$

$j>1$, $i=1..n$

$C[i,j] = M[i,j] + \min\{C[i-1,j-1], C[i,j-1], C[i+1,j-1]\}$

$O(n^2)$

$O(n)$

$O(n^2)$