

$\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  alfabeto

$\Sigma^*$  - insieme di parole

$\cdot$  = prodotto di concatenazione

$(\Sigma^*, \cdot, \varepsilon)$  è monoidale  
non è commutativo

Un linguaggio formale su  $\Sigma$ :  $L \subseteq \Sigma^*$

$L$  - limiti  $\emptyset, \{\varepsilon\}, L_n = \{a^i \mid i \leq n\}$   
infiniti  $L = \{\varepsilon, a^1, a^2, \dots, a^n, \dots\} = \{a\}^*$

Operazione sui linguaggi

insiemistiche

$$A \cup B$$

$$A \cap B$$

$$A^c$$

tipiche

$\cdot$

$*, +$

$L^k$

Dati  $A$  e  $B$  linguaggi su  $\Sigma$

• UNIONE:

$$A \cup B = \{w \in \Sigma^* \mid w \in A \vee w \in B\}$$

• INTERSEZIONE

$$A \cap B = \{w \in \Sigma^* \mid w \in A \wedge w \in B\}$$

- COMPLEMENTO

$$A^c = \{ w \in \Sigma^* \mid w \notin A \}$$



## OPERAZIONI TIPICHE SU LINGUAGGI

- PRODOTTO

$A, B$  linguaggi su  $\Sigma$  il loro prodotto è

$$A \cdot B = \{ w \in \Sigma^* \mid w = xy \text{ con } x \in A \text{ e } y \in B \}$$

$$= \{ xy \in \Sigma^* \mid x \in A \text{ e } y \in B \}$$

non si può invertire  $xy$  con  $yx$

- Potenza (alla  $n$ )  $L \subseteq \Sigma^*$

$$L^n = \underbrace{L \cdot L \cdot L \cdot \dots \cdot L}_{n \text{ volte}}$$

es:  $L^3 \Rightarrow \exists w \in L^3 \text{ } w = xyz \text{ dove}$   
 $x, y, z \in L$

Def. ricorsiva di  $L^n$

$$\begin{cases} L^0 = \{\epsilon\} \\ L^n = L \cdot L^{n-1} \end{cases}$$

- CHIUSURA DI KLEENE :  $*$ ,  $+$

$$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \dots \cup L^k \cup L \dots = \bigcup_{k=0}^{\infty} L^k$$

$$L^+ = L^1 \cup L^2 \cup \dots \cup L^k \cup \dots = \bigcup_{k=1}^{\infty} L^k$$

### ESERCIZI

- $L^+ \stackrel{?}{=} L^* \setminus \{\epsilon\}$

- $A = \{mo, se\} \quad B = \{ra, re\}$

$$A \cdot B = \{mora, more, sera, sere\}$$

$$B \cdot A = \{ramo, rase, remmo, rese\}$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

- Numeri binari :  $1 \{0, 1\}^*$

$$A = \{1\} \quad B = \{0, 1\}^*$$

$$A \cdot B = \{1\} \cdot \{0, 1\}^* = 1 \{0, 1\}^*$$

abuso di notazione

- $L = \{a, b\}$  su  $\Sigma = \{a, b\}$

$$L = \Sigma$$

$$L^k = \Sigma^k = \underbrace{\Sigma \cdot \Sigma \cdot \dots \cdot \Sigma}_{k \text{ volte}}$$

$$\Sigma^k = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| = k\}$$

- $\Sigma^* =$  insieme delle parole su  $\Sigma$  inclusa  $\epsilon$  ①

$$\Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \dots \cup \Sigma^k \cup \dots$$

$$\textcircled{2} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Sigma^k$$

$$\Sigma^0 = \{\epsilon\} \quad \Sigma^1 = \{a, b\} \dots$$

$$\Sigma^k = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| = k\}$$

= ok si verifica che le due scritte sono uguali

$$\textcircled{1} = \textcircled{2}$$

$$\bullet A = \{bb\} \quad \text{su } \Sigma = \{b\}$$

$$A^* = \{w \in \{b\}^* \mid |w| = 2n \quad n \geq 0\}$$

$$= \{b^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$\bullet \bar{A} = \{b, bb\} \quad \Sigma = \{b\}$$

$$\bar{A}^* = \{b^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{b\}^*$$

$$\bar{A}^+ = \{b\}^* \setminus \{\epsilon\} = \{b\}^+$$

$bbbb \in \bar{A}^+$  si può scomporre in parole di  $\bar{A}$  in questo modo:

$$\left. \begin{array}{l} bb \cdot b \\ b \cdot bb \\ b \cdot b \cdot b \end{array} \right\} \bar{A} \text{ non è} \\ \text{in codice}$$

---

## Codice

---

**Definizione:** Un linguaggio  $L$  è un codice quando ogni parola in  $L^+$  è decomponibile in un unico modo in parole di  $L$

es  $L = \{aa, ab, b\}$

parola in  $L^+$ :

abbaabb  
 $\uparrow$   
 $L$

si ha che  $L$  è un codice

Definizione:  $L$  è un codice PREFISSO o  
ISTANTANEO quando è un codice  
per cui ogni parola di  $L$  non  
è prefisso di altre parole di  $L$

es  $\{aa, ab, b\}$  è un codice  
ed è prefisso

$\{0, 01\}$  è un codice  
ma non è prefisso  
perché 0 è prefisso di 01

---

### Codice ASCII ESTESO

---

codifica ogni carattere della tastiera:

$\{A, \dots, Z, a, \dots, z, 0, 1, \dots, 9, \dots, @, \{, |, \dots\}$

in sequenza di 8 bit

$$C_A = \{x \in \{0, 1\}^* \mid |x| = 8\}$$

ogni carattere è codificato con 8 bit

$C_A^+$  = "File binario"

Perché è importante che  $C_A$  sia un codice?