# SOTTOSPAZI VETTORIALI

(unione, somma, intersezione e sistemi di generatori)

$V$ spazio vettoriale su $\mathbb{K}$

(cioè $\exists + : V \times V \to V$

$\exists \cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ con certe proprietà)

$U \subseteq V$ è sottospazio vettoriale se:

① $\forall u_1, u_2 \in U \quad u_1 + u_2 \in U$ ⤳ chiuso rispetto somma

② $\forall k \in \mathbb{K}, \forall u \in U \quad k \cdot u \in U$ ⤳ chiuso rispetto prodotto

**Proprietà**: Sia $U$ un sottospazio vettoriale di $V$

$\Rightarrow \underline{0}_V \in U$

**Dim**: considero $\underline{u} \in U$, $0_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$ per la prop. ②

$0_{\mathbb{K}} \cdot \underline{u} \in U$

Abbiamo dimostrato che $0_{\mathbb{K}} \cdot \underline{u} = 0_V \Rightarrow 0_V \in U$

**es** $\mathbb{K} = \mathbb{R} \quad V = M_{2\times3}(\mathbb{R})$

$U = \{ M \in M_{2\times3}(\mathbb{R}) \mid m_{11} = 1 \}$ è sottospazio vett?

**No** poiché se $U$ fosse sottospazio

$\Rightarrow 0_{M_{2\times3}}(\mathbb{R}) \in U$

Ma $0_{M_{2\times3}}(\mathbb{R}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ che non soddisfa

$m_{11} = 1 \Rightarrow 0_{M_{2\times3}}(\mathbb{R}) \notin U$

**Oss**: Se $U$ non contiene $0_V \Rightarrow U$ non è sottospazio

**Oss**: Se $U, W$ sono sottospazi di $V$ non posso concludere che $U \cup W$ è sottospazio vettoriale

**Prop**: $U, W$ sono sottospazi vettoriali di $V \Rightarrow U \cap W$ è sottospazio vettoriale di $V$

**dim**: $v_1, v_2 \in U \cap W \Rightarrow \begin{cases} v_1 \in U, & v_1 \in W \\ v_2 \in U, & v_2 \in W \end{cases}$

$\Rightarrow v_1 + v_2 \in U$ ($U$ è sottospazio), $\quad v_1 + v_2 \in W$

$\Rightarrow v_1 + v_2 \in U \cap W$

$\forall k \in \mathbb{K} \ \forall \underline{u} \in U \cap W \Rightarrow \underline{u} \in U, \ \underline{u} \in W$

$\Downarrow$

$k\underline{u} \in U, \ k\underline{u} \in W$

$\Rightarrow k\underline{u} \in U \cap W$

**Def**: $U$ e $W$ due sottospazi vettoriali di $V$. Chiamo somma di $U$ e $W$, l'insieme:

$$U + W = \{ \underline{v} \in V \mid \exists \underline{u} \in U, \exists w \in W \text{ con } v = u + w \}$$

**Oss**: $U \subseteq U + W$

$\forall u \in U \qquad \underline{u} = \underset{\in U}{\underline{u}} + \underset{\in W}{\underline{0_V}} \in U + W$

$W \subseteq U + W$

$\forall w \in W \quad \underline{w} = \underset{W}{\underline{w}} + \underset{U}{\underline{0}_V} \in U + W$

$\Rightarrow U \cup W \subseteq U + W$

<u>Prop</u>: Se $U, W$ sono sottospazi di $V \Rightarrow U + W$ è sottospazio vettoriale

<u>Dim</u>: $v_1, v_2 \in U + W \Rightarrow v_1 = u_1 + w_1$

per definizione di $U + W$

$$v_1 + v_2 = (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) =$$

$$u_1 + w_1 + u_2 + w_2 = \underbrace{(u_1 + u_2) + (w_1 + w_2)}$$

(la somma di elementi in $U$ sta in $U$ perché $U$ è sottospazio)

$\forall k \in \mathbb{K} \ \forall \underline{v} \in U + W \Rightarrow$

$\underline{v} = \underline{u} + \underline{w} \Rightarrow k\underline{v} = k(u + w)$

$= \underset{U}{ku} + \underset{W}{kw} \in U + W$

es $M_{n\times n}(\mathbb{R}) = V$

$Sym(n) = \{ A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid A^T = A \}$

$A = [a_{ij}]$ $A^T [\underbrace{a_{ji}}_{\text{scambio righe con colonne}}]$

$A^T = A \iff a_{ij} = a_{ji}$

es

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = A \neq A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ & 4 \end{bmatrix} = A = A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$\cap$

$sym(2)$

$A, B \in Sym(n)$ $A + B \overset{?}{=} Sym(n)$

$A[a_{ij}]$ $B = [b_{ij}]$ e $a_{ij} = a_{ji}$

$b_{ij} = b_{ji}$

$C = A + B$ $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $c_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$

$c_{ij} = a_{ji} + b_{ji} = c_{ji}$ $\in Sym(n)$

$\forall k \in \mathbb{R}$ $\forall A \in Sym(n)$ $kA = [ka_{ij}]$

$(ka)_{ij} = k a_{ij} = k a_{ji} = (kA)_{ji}$

$kA \in Sym(n)$

$\Rightarrow Sym(n)$ è sottospazio

Es $V = \mathbb{R}[x] = \{$ polinomi a coeff. reali $\}$

$\mathbb{R}_{=d}[x] = \{$ polinomi di grado esattamente $d$ $\}$

$\mathbb{R}_{\leq d}[x] = \{$ polinomi di grado minore o uguale a $d$ $\}$

sono sottospazi?

$\mathbb{R}_{=d}[x]$ non è sottospazio

Def: $V$ è un sottospazio vettoriale, $\underline{v} \in V$ $\underline{v} \neq \underline{0}_V$

$$<\underline{v}> := \{ \underline{w} \in V \mid \exists k \in \mathbb{K} \ \ \underline{w} = k\underline{v} \}$$
$$= \{ k\underline{v} , k \in \mathbb{K} \}$$

spazio generato da $\underline{v}$

Prop: $\underline{v} \in V$, $\underline{v} \neq \underline{0}_V \Rightarrow <\underline{v}>$ è sottospazio vettoriale di $V$

dim: $\underline{u} \in <\underline{v}>$, $\underline{w} \in <\underline{v}> \Rightarrow \exists k \mid \underline{u} = k\underline{v}$, $\exists h \mid \underline{w} = h\underline{v}$

$\underline{u} + \underline{w} = k$ _