Esercizi su conseguenza logica in TW e tautologica

Dire se in $\vDash_?$? è **T** (e quindi anche **TW**), **TW ma non T** o **nessuno dei due**, usando le tavole di verità.

- $Tet(a), Cube(a) \vDash_? Large(a)$ **TW, no T**
- $\neg(Tet(a) \lor Cube(a)), Tet(a) \lor Cube(b) \vDash_? Cube(b)$ **T**
- $Tet(a), \neg(Tet(a) \lor Cube(a)) \vDash_? Large(a)$ **T**
- $\neg(Tet(a) \land Cube(a)), Tet(a) \lor Cube(b) \vDash_? Cube(b)$ **no TW, no T**
- $(Tet(a) \lor Cube(a) \lor Dodec(a)), \neg Tet(a) \vDash_? Cube(a) \lor Dodec(a)$ **T**
- $(Tet(a) \lor Cube(a) \lor Dodec(a)), Cube(a) \lor Dodec(a) \vDash_? \neg Tet(a)$ **TW, no T**
- $\neg Tet(a) \vDash_? Cube(a) \lor Dodec(a)$ **TW, no T**
- $Cube(a) \lor Dodec(a) \vDash_? \neg Tet(a)$ **TW, no T**

Lezione 7

- Teorema di validità e completezza
- Il calcolo **Fitch** proposizionale $\mathcal{F}_T$: ripasso ed esempi
- Conseguenze tautologiche notevoli

Teorema di validità e completezza

Il Calcolo $\mathcal{F}_T$

- Il calcolo Logico $\mathcal{F}_T$ consiste nelle argomentazioni provabili in **Fitch** usando tutte e sole le regole di introduzione ed eliminazione dei connettivi.
- Le regole di introduzione ed eliminazione dei connettivi sono 12 in tutto: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\perp$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
- Nota: una argomentazione è provabile in **Fitch** (a livello proposizionale) se e solo se è validata da TAUT CON.
- La notazione:

$$P_1,\dots,P_n \quad \vdash_T \quad Q$$

indica che ***esiste*** una prova in $\mathcal{F}_T$ con premesse $P_1,\dots,P_n$ e conseguenza Q.

TEOREMA di validità e completezza di $\mathcal{F}_{\mathrm{T}}$

- $P_1,\ldots,P_n \vdash_T Q$ indica che ***esiste*** una prova in $\mathcal{F}_{\mathrm{T}}$ con premesse $P_1,\ldots,P_n$ e conseguenza Q.

- Ricordate che $\models_T$ indica la conseguenza tautologica.

Teorema di validità (soundness).
Se $P_1,\ldots,P_n \vdash_T Q$, ***allora*** $P_1,\ldots,P_n \models_T Q$.

Teorema di completezza (completeness).
Se $P_1,\ldots,P_n \models_T Q$, ***allora*** $P_1,\ldots,P_n \vdash_T Q$.

TEOREMA di validità e completezza di $\mathcal{F}_T$

- ***Validità e completezza sono proprietà centrali di un sistema formale:***

  - **Validità:** Se ***abbiamo dato una prova in*** $\mathcal{F}_T$ ***di*** Q ***a partire da*** $P_1,\ldots,P_n$ è certo che Q ***è conseguenza tautologica di*** $P_1,\ldots,P_n$.

  - Contrapposta: se sappiamo che Q **non** ***è conseguenza tautologica delle premesse*** $P_1,\ldots,P_n$ (ad es. troviamo un controesempio con le tavole di verità), siamo certi che **non** ***ci può essere una prova in*** $\mathcal{F}_T$ ***di*** Q ***a partire da*** $P_1,\ldots,P_n$.

TEOREMA di validità e completezza di $\mathcal{F}_T$

- ***Validità e completezza sono proprietà centrali di un sistema formale:***

  - **Completezza:** Se sappiamo che *Q* ***è conseguenza tautologica*** delle premesse $P_1,\ldots,P_n$ (ad esempio facendo vedere con le tavole di verità che non ci sono controesempi), siamo certi che ***in*** $\mathcal{F}_T$ ***esiste una prova di*** Q ***a partire da*** $P_1,\ldots,P_n$.

  - Contrapposta: se facciamo vedere che **non** ***c'è una dimostrazione in*** $\mathcal{F}_T$ ***di*** *Q* ***a partire da*** $P_1,\ldots,P_n$ è certo che *Q* **non** è ***conseguenza tautologica*** di $P_1,\ldots,P_n$.

Uso del teorema di validità e completezza

Domanda: C'è una dimostrazione in Fitch di $P \vee Q \vdash_T P$?

Risposta: No, $P \vee Q \models_T P$ ha un controesempio: P=**F**, Q=**T**.

- La risposta è corretta: *per dimostrare che non ci può essere una prova si dimostra che non si tratta di una conseguenza logica*; la correttezza del procedimento si basa sul teorema di validità o di completezza?

Uso del teorema di validità e completezza

Domanda: C'è una dimostrazione in Fitch di $P \vee Q \vdash_T P$?

Risposta: No, $P \vee Q \vDash_T P$ ha un controesempio: P=**F**, Q=**T**.

- La risposta è corretta: *per dimostrare che non ci può essere una prova si dimostra che non si tratta di una conseguenza logica*; la correttezza del procedimento si basa sul teorema di validità o di completezza?

Sul teorema di validità, tramite contrapposizione:

Validità: Se $P_1,\ldots,P_n \vdash_T Q$, ***allora*** $P_1,\ldots,P_n \vDash_T Q$.

La contrapposta***: Se non*** $P_1,\ldots,P_n \vDash_T Q$, ***allora non*** $P_1,\ldots,P_n \vdash_T Q$.

Uso del teorema di validità e completezza

Domanda: $P \to R,\ Q \to R \vdash_T (P \vee Q) \to R$ è dimostrabile in Fitch? Rispondere senza esibire una prova, nel caso esista.

Risposta: Sì, se faccio la tavola di verità non trovo controesempi; infatti, la conseguenza è falsa per

R=**F**, P=**T**, Q=*any* in questo caso è falsa la premessa $P \to R$.
R=**F**, Q=**T**, P=*any* in questo caso è falsa la premessa $Q \to R$.

- La risposta è corretta: *per far vedere che una proposizione è dimostrabile dalle premesse senza esibire la prova, si fa vedere che è conseguenza logica usando le tavole di verità.*
  La correttezza del procedimento deriva dal teorema di validità o da quello di completezza?

Uso del teorema di validità e completezza

Domanda: $P \to R,\ Q \to R \vdash_T P \vee Q \to R$ è dimostrabile in Fitch?
Risposta: Sì, se faccio la tavola di verità non trovo controesempi.

La risposta è corretta: *per far vedere che una proposizione è dimostrabile dalle premesse senza esibire la prova, si fa vedere che è conseguenza logica usando le tavole di verità.*

La correttezza del procedimento deriva dal teorema di validità o da quello di completezza?

Dal teorema di completezza:

Completezza: Se $P_1,\ldots,P_n \vDash_T Q$, ***allora*** $P_1,\ldots,P_n \vdash_T Q$.

Teorema di validità e completezza: forma generale

- Un insieme Γ, eventualmente infinito, di enunciati è detto **teoria**.

- Il teorema di validità e completezza vale anche per teorie infinite:

$$\Gamma \vdash_T \; Q \quad \textbf{\textit{se e solo se}} \quad \Gamma \vDash_T \; Q.$$

- Il teorema di deduzione in forma generale si esprime come segue:

$$\Gamma \cup \{P\} \vDash_T Q \quad \textbf{\textit{se e solo se}} \quad \Gamma \vDash_T \; P \rightarrow Q.$$

$$\Gamma \cup \{P\} \vdash_T Q \quad \textbf{\textit{se e solo se}} \quad \Gamma \vdash_T \; P \rightarrow Q.$$

Il calcolo **Fitch** proposizionale: $\mathcal{F}_T$: ripasso ed esempi

Strategie di prova

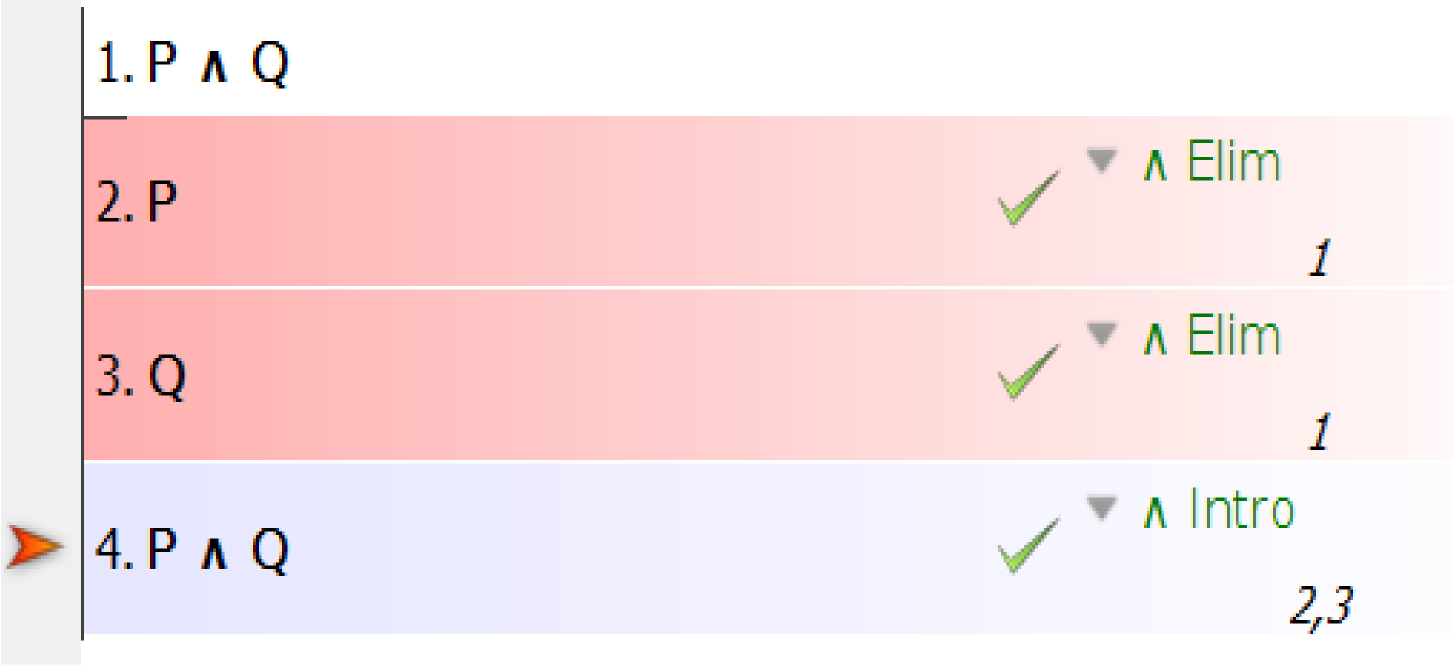
- Innanzitutto convincersi che l’argomentazione data è una conseguenza (tauto)logica attraverso un ragionamento informale:
  - Se si parte da un goal informale, aiuta molto una preliminare traduzione in formule.
- Poi procedere all’indietro, come illustrato nelle lezioni precedenti:
  - Si parte dal connettivo principale della conseguenza (o goal); la corrispondente regola di introduzione indica quali sono i sottogoal da ottenere.
  - Se vi sono più alternative, vedere se i sottogoal sono ottenibili dalle premesse, eventualmente ricorrendo a una dimostrazione per casi.
  - Ricordarsi di considerare le dimostrazioni per assurdo.

Strategie di prova

In assessing the validity of an argument, use the following method:

1. Understand what the sentences are saying.
2. Decide whether you think the conclusion follows from the premises.
3. If you think it does not follow, or are not sure, try to find a counterexample.
4. If you think it does follow, try to give an informal proof.
5. If a formal proof is called for, use the informal proof to guide you in finding one.
6. In giving consequence proofs, both formal and informal, don't forget the tactic of working backwards.
7. In working backwards, though, always check that your intermediate goals are consequences of the available information.

Introduzione ed Eliminazione di ∧



Adattare questa prova per dimostrare:

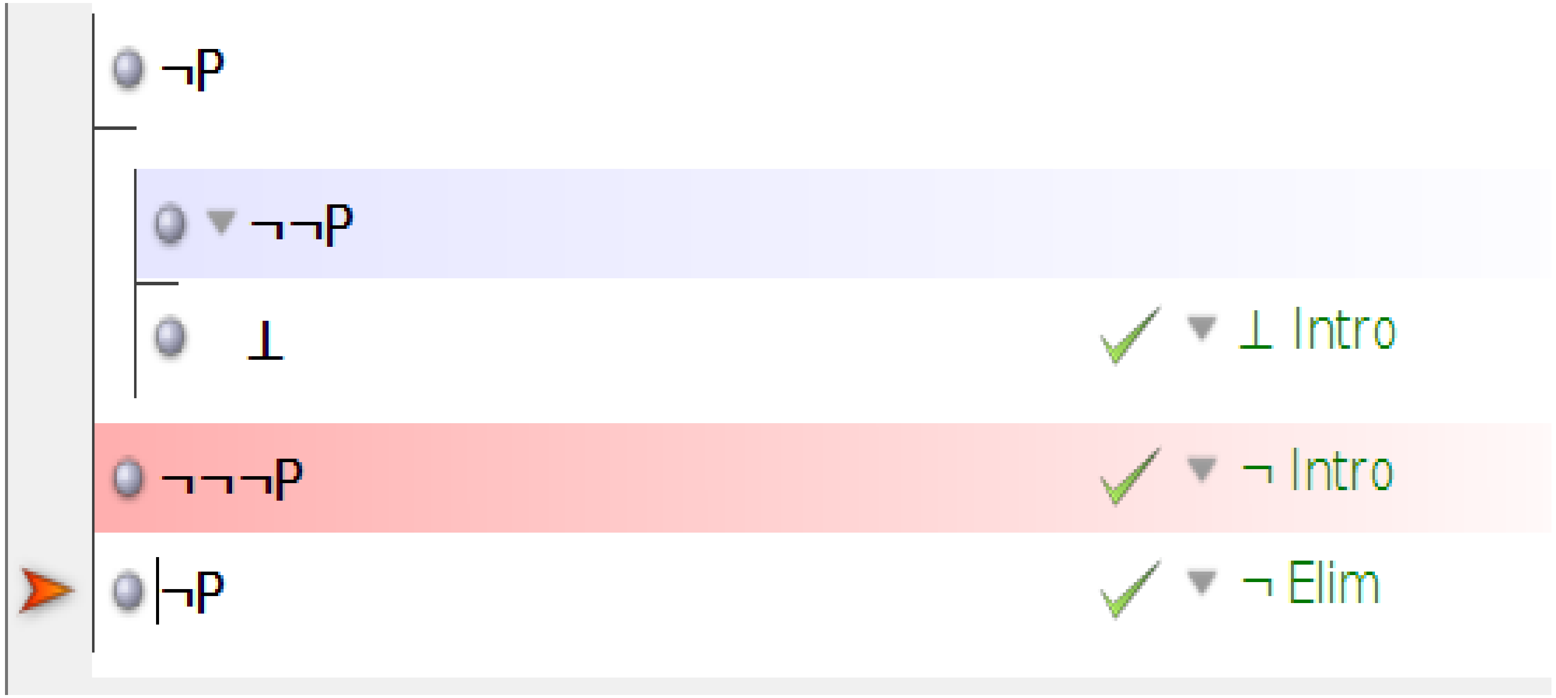
- Commutatività: $P \land Q \Leftrightarrow_T Q \land P$
- Associatività: $P \land (Q \land R) \Leftrightarrow_T (P \land Q) \land R$
- Idempotenza: $P \land P \Leftrightarrow_T P$

Introduzione ed Eliminazione di ∨

Adattare questa prova per dimostrare:

- Commutatività: $P \vee Q \Leftrightarrow_T Q \vee P$
- Associatività: $P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow_T (P \vee Q) \vee R$
- Idempotenza: $P \vee P \Leftrightarrow_T P$

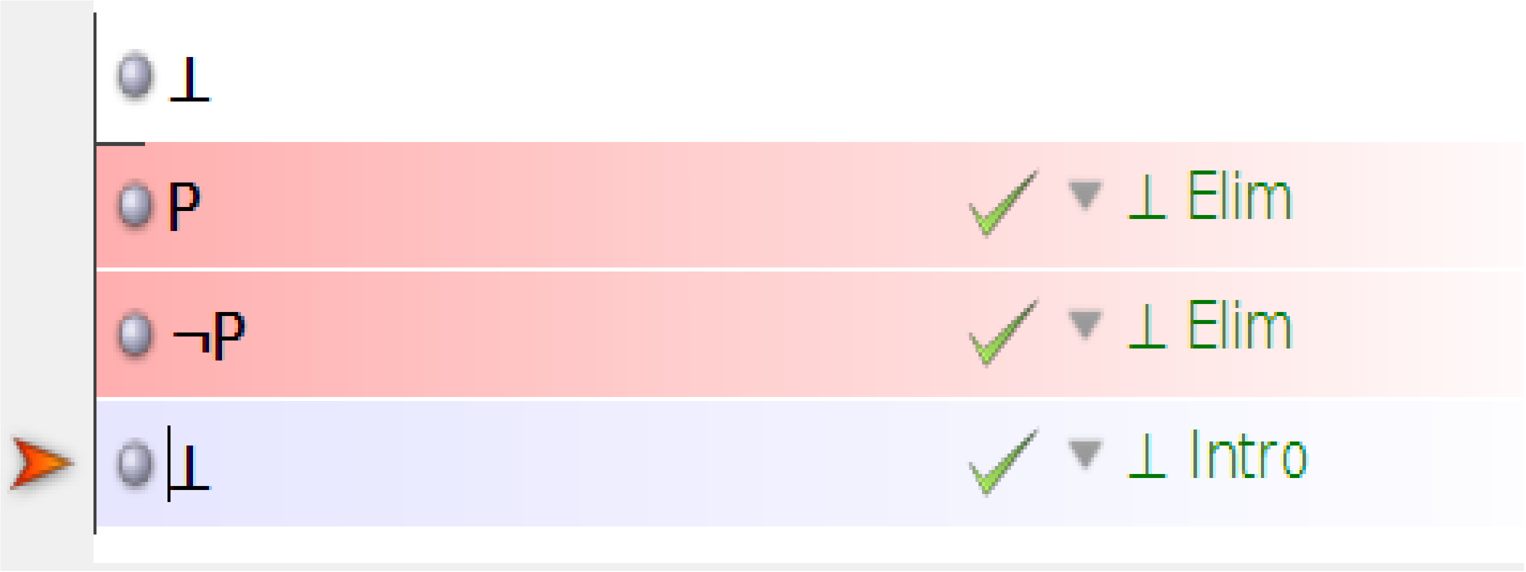
Introduzione ed Eliminazione di $\neg$



Usare le regole per mostrare:

- Legge della doppia negazione: $P \Leftrightarrow_T \neg\neg P$
- Che la regola di Reiterazione non è necessaria:
    - In una prova, posso ripetere una formula P già ottenuta e accessibile, usando opportunamente $\neg$ Intro e $\neg$ Elim.

Introduzione ed Eliminazione di ⊥



Allungare di un passo la prova per mostrare:

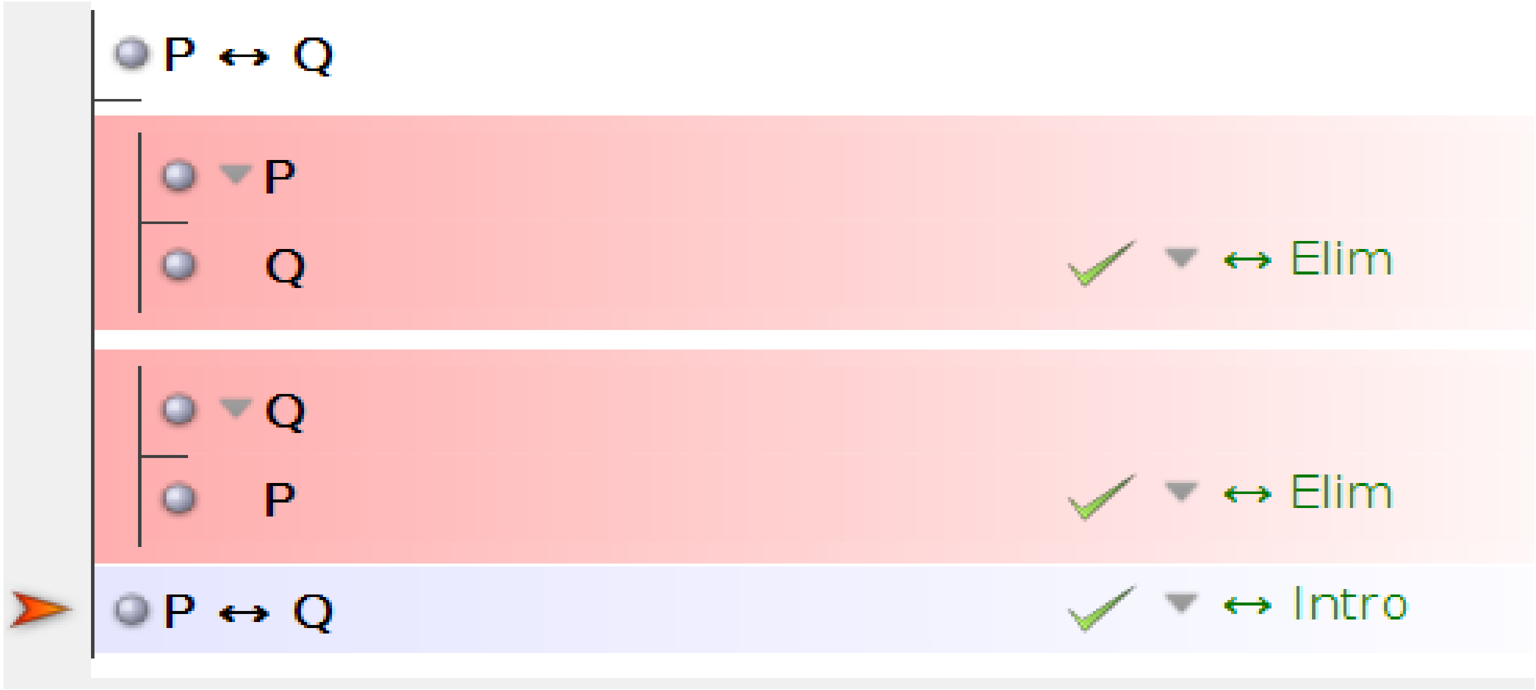
- che da una contraddizione segue che «i cani hanno 13 zampe».

Introduzione ed Eliminazione di →

Adattare questa prova per dimostrare:

- Riflessività: $\vDash_T P \to P$
- Transitività: $P \to Q, Q \to R \vDash_T P \to R$
- Indebolimento: $P \vDash_T Q \to P$

Introduzione ed Eliminazione di $\leftrightarrow$



Adattare questa prova per trasformare:

- una prova di $P \vDash_T Q$,
- e una prova di $Q \vDash_T P$,
    - in una prova di $\vDash_T P \leftrightarrow Q$

      (e viceversa. Cfr: prova del principio di contrapposizione, vedi lez. 6).

Conseguenze tautologiche notevoli

Principio del terzo escluso: $\mathbf{P} \vee \neg\mathbf{P}$

1.			
2.	$\neg(P \vee \neg P)$		
3.	P		
4.	$P \vee \neg P$	∨ Intro	3
5.	$\perp$	⊥ Intro	2,4
6.	$\neg P$	¬ Intro	3-5
7.	$P \vee \neg P$	∨ Intro	6
8.	$\perp$	⊥ Intro	2,7
9.	$\neg\neg(P \vee \neg P)$	¬ Intro	2-8
10.	$P \vee \neg P$	¬ Elim	9

È una prova senza assunzioni (è una tautologia).

Dobbiamo usare una regola di **Fitch** che necessita solo di sottoprove (e nessuna assunzione).

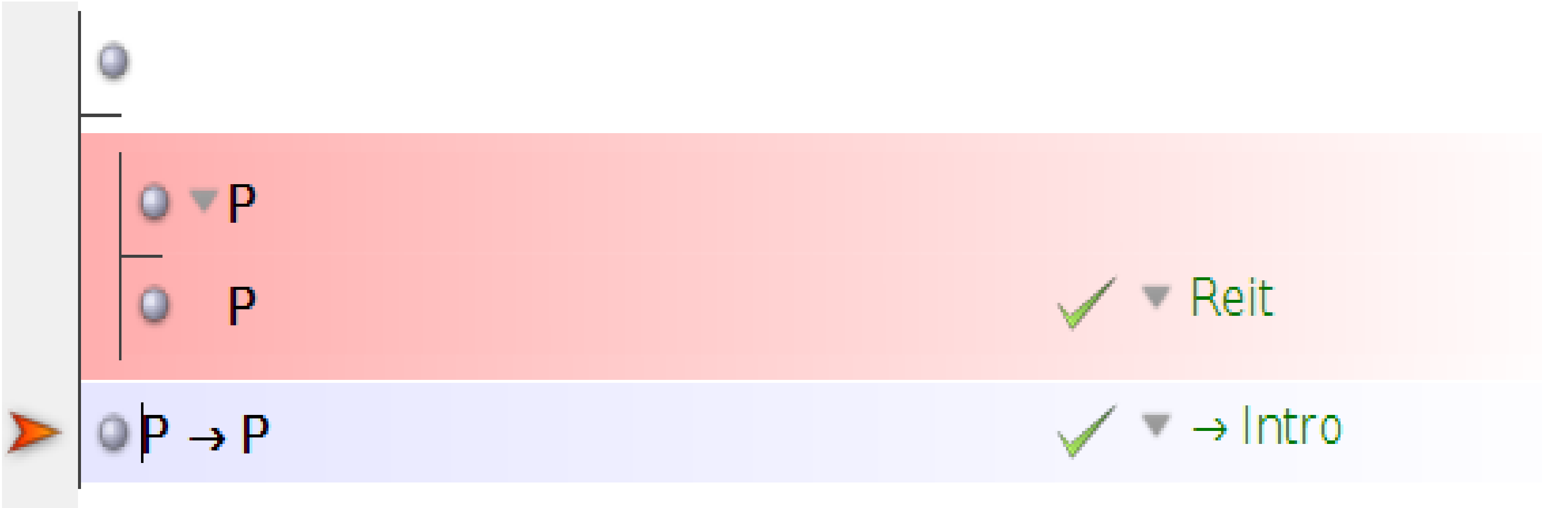
Si basa su due (**¬ Intro**) innestati.

Principio del terzo escluso: $\mathbf{P \lor \neg P}$

Nota: per definizione di implicazione materiale
(e commutatività di $\lor$) :

$$P \lor \neg P \;\Leftrightarrow_T\; \neg P \lor P \;\Leftrightarrow_T\; P \to P$$

ma provare $\vDash_T P \to P$ è molto più semplice: come mai? (lucido successivo)

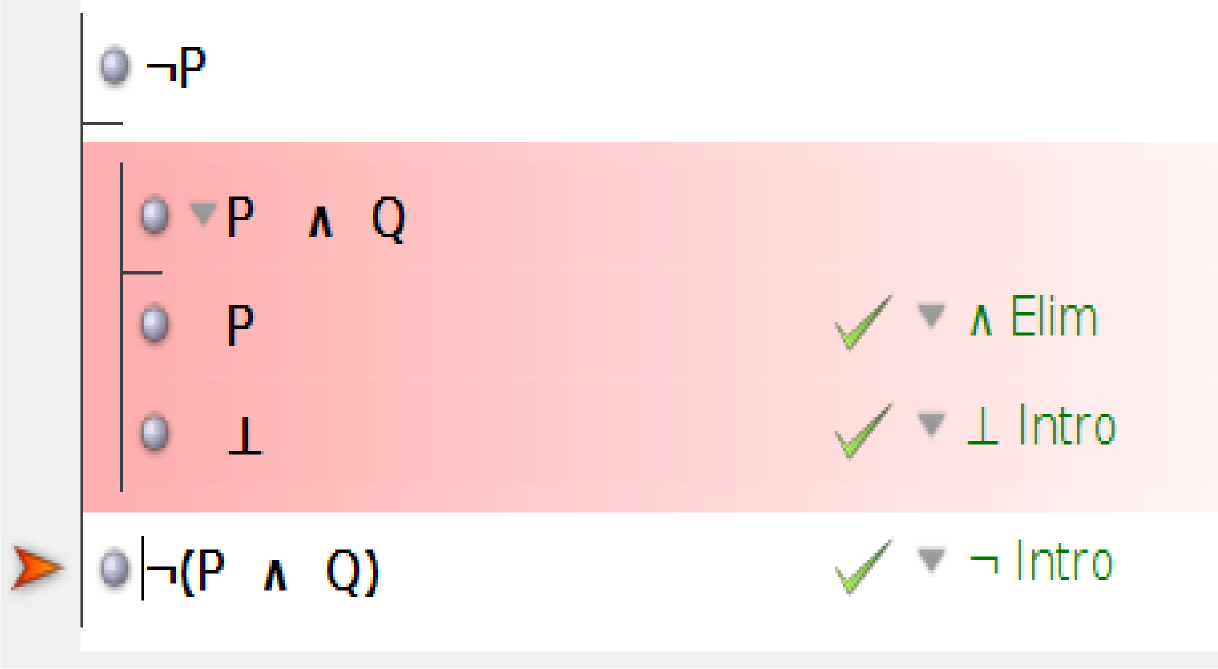


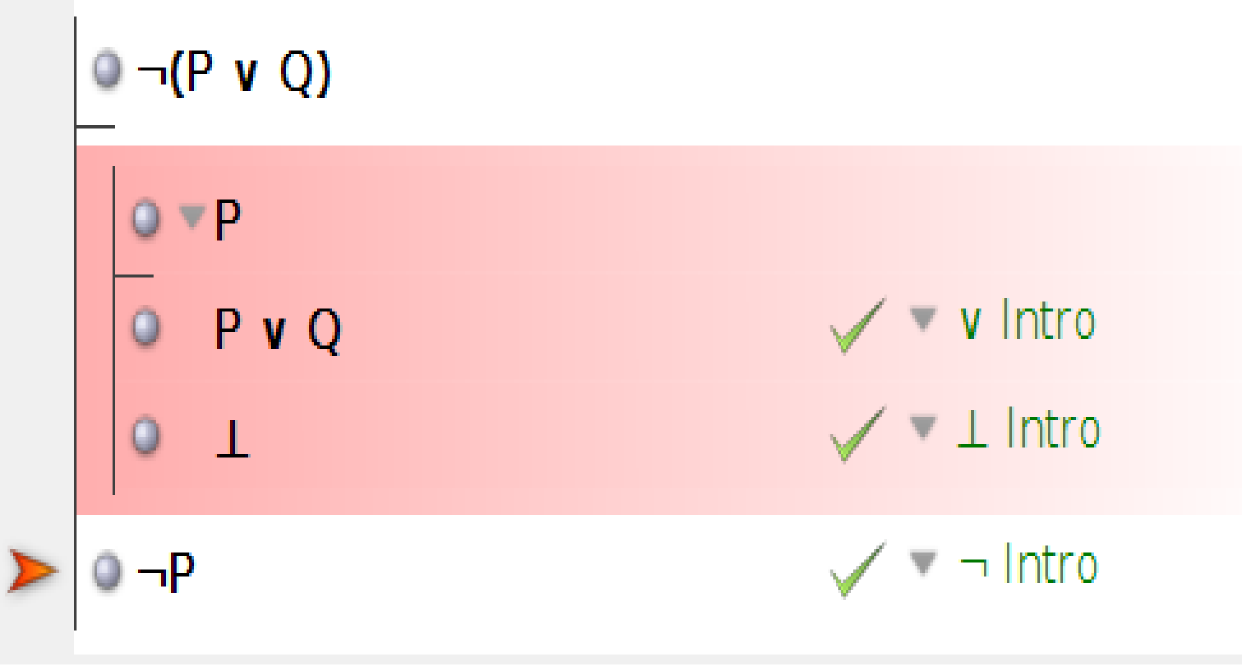
Definizione dell’implicazione materiale: $P \rightarrow Q \Leftrightarrow_T \neg P \vee Q$

1.	$P \rightarrow Q$		
2.	$\neg(\neg P \vee Q)$		
3.	P		
4.	Q	→ Elim	1,3
5.	$\neg P \vee Q$	∨ Intro	4
6.	$\perp$	⊥ Intro	5,2
7.	$\neg P$	¬ Intro	3-6
8.	$\neg P \vee Q$	∨ Intro	7
9.	$\perp$	⊥ Intro	8,2
10.	$\neg P \vee Q$	¬ Intro	2-9

1.	$\neg P \vee Q$		
2.	P		
3.	$\neg P$		
4.	$\perp$	⊥ Intro	2,3
5.	Q	⊥ Elim	4
6.	Q		
7.	Q	∨ Elim	3-5,6-6,1
8.	$P \rightarrow Q$	→ Intro	2-7

Prova delle «macroregole»: **(¬∧ Intro)** e **(¬∨ Elim)**





La prova della «macroregola» (¬∨ **Intro**):

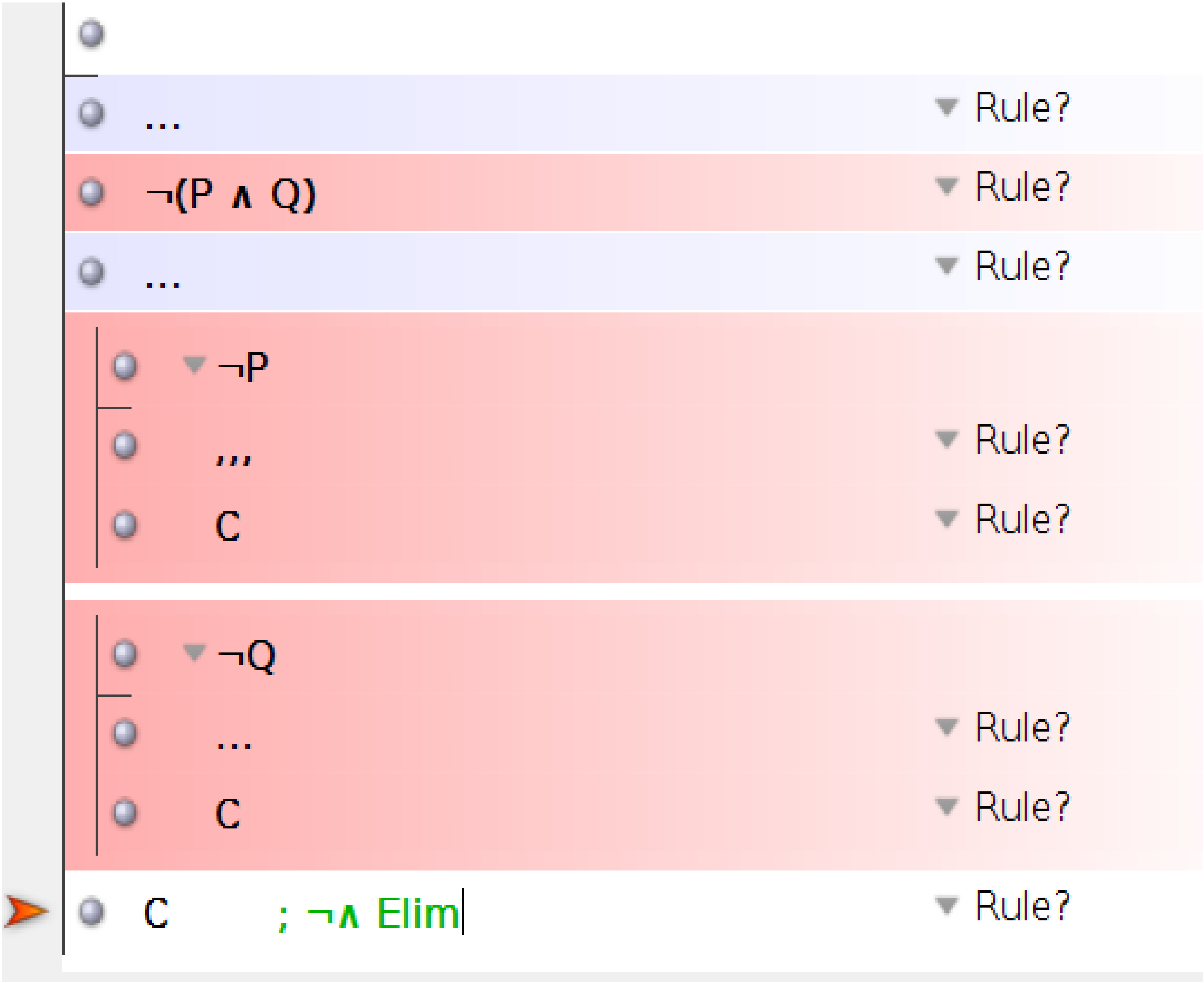
$$\neg P, \neg Q \vDash_T \neg(P \vee Q)$$

è sostanzialmente identica alla prova della legge di DeMorgan

$$\neg P \wedge \neg Q \vDash_T \neg(P \vee Q)$$

data nella lez. 6.

E la «macroregola»: (¬∧ **Elim**) ?



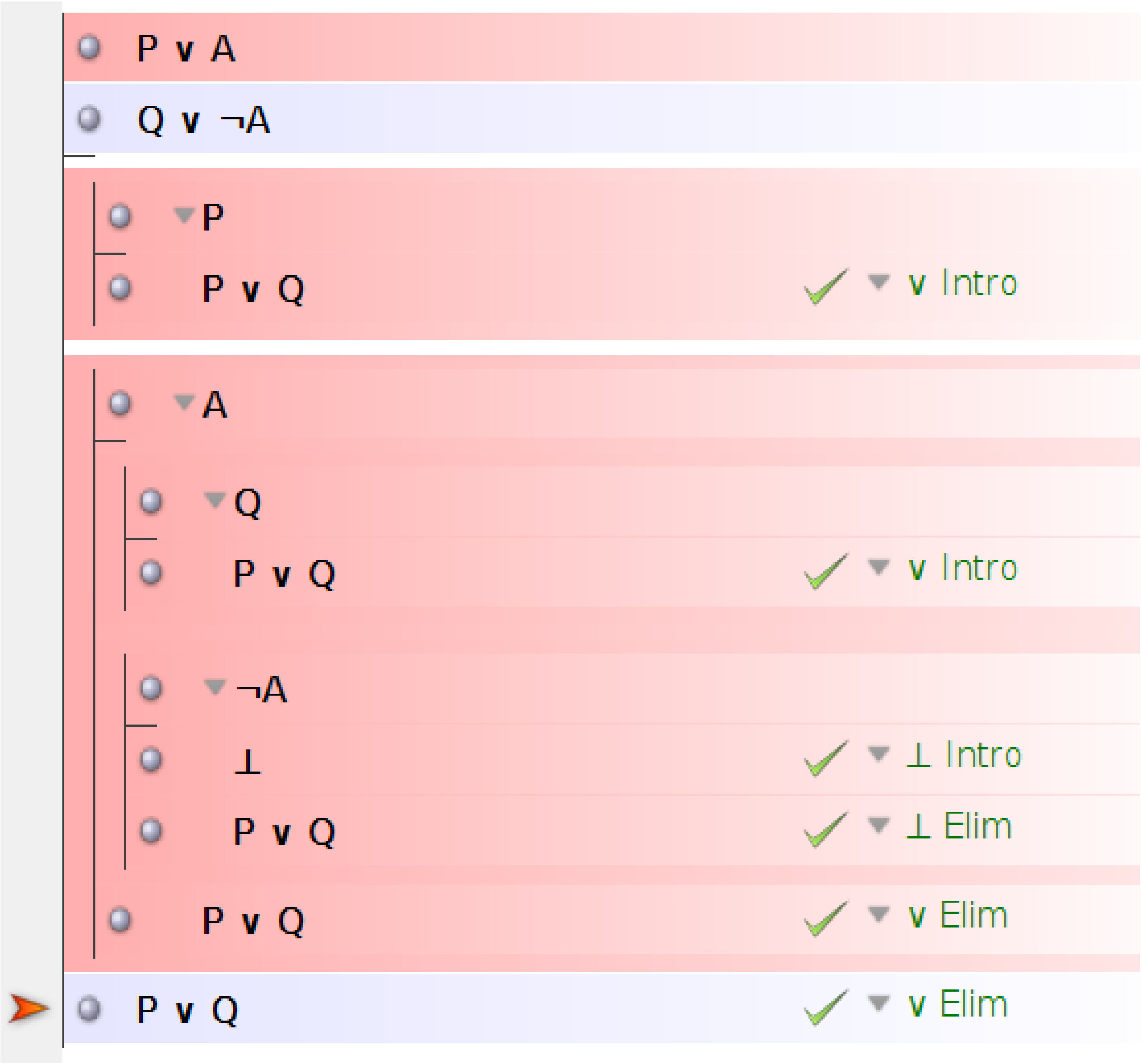
(¬∧ **Elim**) è una variante della prova per casi.

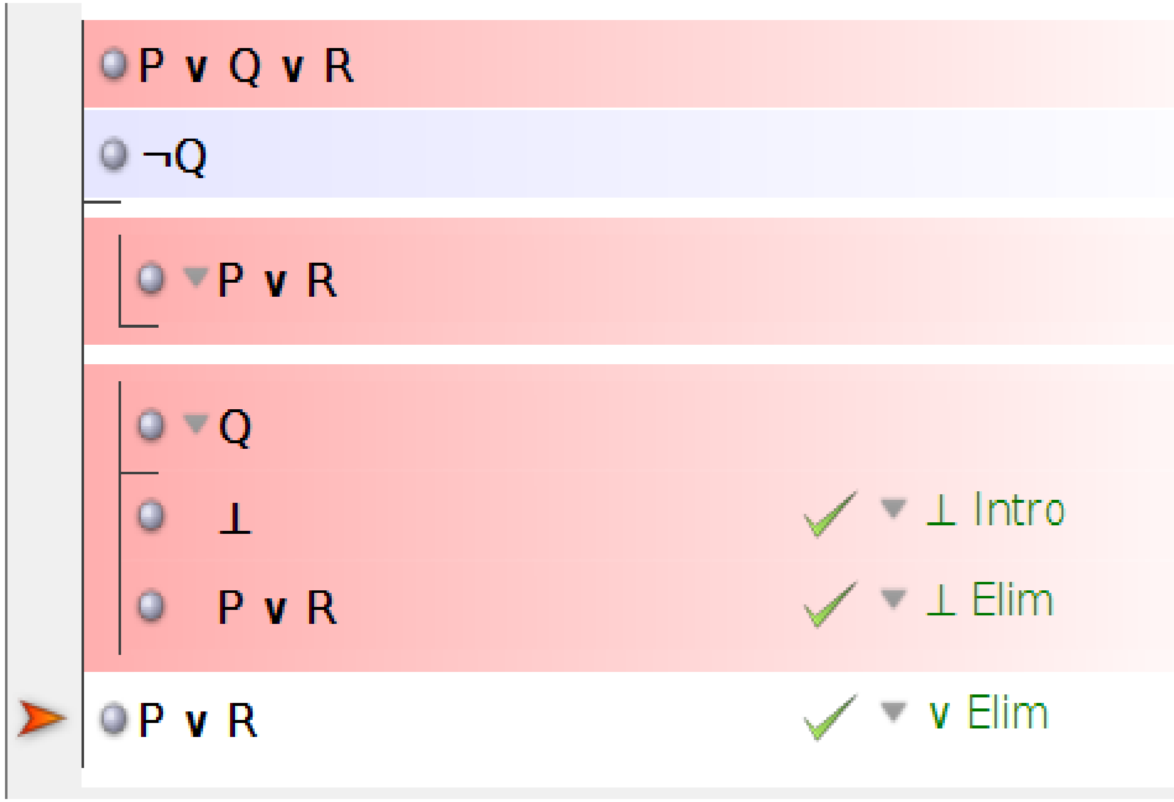
Infatti deriva facilmente dall'applicazione della legge di DeMorgan:

$\neg(P \wedge Q) \vDash_T \neg P \vee \neg Q$

NOTA BENE: non è supportata da **Fitch**, neanche tramite TAUT CON.

Principio di risoluzione: un paio di varianti.





Transitività dell'implicazione

$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vDash_T \; P \rightarrow R$

1.	$P \rightarrow Q$	
2.	$Q \rightarrow R$	
3.	P	
4.	Q	$\rightarrow$ Elim 1,3
5.	R	$\rightarrow$ Elim 4,2
6.	$P \rightarrow R$	$\rightarrow$ Intro 3-5

Esercizio (facile):

Se ho:

$P_1 \rightarrow P_2,$
$P_2 \rightarrow P_3,$
…
$P_{n-1} \rightarrow P_n$
$\vDash_T P_1 \rightarrow P_n$

come diventa la prova?

Bicondizionali, condizioni equivalenti e cicli di implicazioni

Nei testi matematici si trovano spesso affermazioni del tipo:

«Le seguenti condizioni sono equivalenti: $P_{1,}$ $P_{2,}$ $P_{3.}$»

In logica: $P_1 \leftrightarrow P_2$, $P_2 \leftrightarrow P_3$, $P_1 \leftrightarrow P_3$.

Per provare che tutte e tre siano vere basta provare un ciclo di implicazioni, ad esempio:

$$P_1 \rightarrow P_3,\ P_3 \rightarrow P_2,\ P_2 \rightarrow P_1,$$

infatti le «frecce mancanti» seguono per transitività di $\rightarrow$,
ad esempio: $P_1 \rightarrow P_2$ segue da $P_1 \rightarrow P_3$ e $P_3 \rightarrow P_2$.

Esempio dalla matematica

Le seguenti proposizioni, quale che sia n

i. n è pari

ii. n^2 è pari

iii. n^2 è divisibile per 4

sono tutte fra loro ***logicamente equivalenti nel contesto dell'aritmetica.***

Che ciclo di implicazioni dimostrare?

Osserviamo: i $\rightarrow$ iii e iii $\rightarrow$ ii sono facili;

quindi proviamo i $\rightarrow$ iii $\rightarrow$ ii $\rightarrow$ i.

Esempio dalla matematica

Dimostriamo i: «n è pari» $\rightarrow$ **iii:** «n^2 è divisibile per 4»

Assumiamo i: «n è pari»; quindi, per m opportuno: $2m = n$;

elevando al quadrato ambo i membri: $4m^2 = n^2$;

abbiamo ottenuto iii: «n^2 è divisibile per 4». CVD

Dimostriamo iii: «n^2 è divisibile per 4» $\rightarrow$ **ii:** «n^2 è pari»

Assumiamo iii: «n^2 è divisibile per 4»; quindi per m opportuno:

$4m = n^2$; da cui: $2(2m)=n^2$;

abbiamo ottenuto ii: «n^2 è pari». CVD

Esempio dalla matematica

Dimostriamo ii $\rightarrow$ **i** *dimostrando la* ***contrapposta*** $\neg$**i** $\rightarrow$ $\neg$**ii**.

Assumiamo non i: «n non è pari».

quindi per m opportuno: $n = 2m+1$;

Elevando al quadrato ambo i membri: $n^2 = 4m^2 + 4m + 1 =$

$2(2m^2 + 2m) + 1$;

Abbiamo ottenuto non ii: «n^2 non è pari». CVD.

Abbiamo chiuso il ciclo: **i** $\rightarrow$ **iii** $\rightarrow$ **ii** $\rightarrow$ **i**.

Equivalenza logica, rimpiazzamento, e bicondizionali.

Dalla Lez. 4:

- ***Rimpiazzamento (o riscrittura):***
- se $P \Leftrightarrow Q$, posso rimpiazzare P con Q (o Q con P) in una formula F, ottenendo una formula G, tale che $G \Leftrightarrow F$.

- Lo stesso principio vale se l'equivalenza è espressa con un enunciato bicondizionale: se $P \leftrightarrow Q$, posso rimpiazzare P con Q (o Q con P) in una formula F, ottenendo una formula G tale che $G \Leftrightarrow F$.

Esempio

Usiamo i seguenti enunciati bicondizionali:

a) $Tet(a) \vee Dodec(a) \leftrightarrow \neg Cube(a)$ (vero in TW)

b) $Small(a) \vee Medium(a) \leftrightarrow \neg Large(a)$ (vero in TW)

c) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ (tautologicamente vero)

I seguenti sono tra loro logicamente equivalenti (in TW)

1. **Tet(a) $\vee$ Dodec(a)** $\vee$ Small(a) $\vee$ Medium(a)
2. $\neg$Cube(a) $\vee$ **Small(a) $\vee$ Medium(a)**
3. **$\neg$Cube(a) $\vee$ $\neg$Large(a)**
4. $\neg$(Cube(a) $\wedge$ Large(a))

Bicondizionali e rimpiazzamento: NOTA

- **Fitch** non supporta con regole dirette il rimpiazzamento dettato da bicondizionali (o equivalenze logiche).

- Quando si vuole usare il rimpiazzamento dettato da $P \leftrightarrow Q$, su una formula F si possono usare le regole di eliminazione dei connettivi (o, nel caso, $\neg$ Intro) al fine di isolare P.
- Dopodiché si usa ($\leftrightarrow$ Elim) per ottenere Q.
- Infine si usano le regole di introduzione in ordine simmetrico (o, nel caso, $\vee$ Elim) per ottenere la formula desiderata G, tale che $G \Leftrightarrow F$.

Esempio

$P \leftrightarrow Q$	
$A \wedge (B \vee (C \rightarrow P))$	
A	$\wedge$ Elim
$B \vee (C \rightarrow P)$	$\wedge$ Elim
│ B	
│ $B \vee (C \rightarrow Q)$	$\vee$ Intro
│ $C \rightarrow P$	
│ │ C	
│ │ P	$\rightarrow$ Elim
│ │ Q	$\leftrightarrow$ Elim
│ $C \rightarrow Q$	$\rightarrow$ Intro
│ $B \vee (C \rightarrow Q)$	$\vee$ Intro
$B \vee (C \rightarrow Q)$	$\vee$ Elim
$A \wedge (B \vee (C \rightarrow Q))$	$\wedge$ Intro

Semantica a giochi per la logica proposizionale

- In **Tarski's World** è implementata la semantica a giochi, sia a livello proposizionale, sia a livello predicativo (I^o ordine).

- L'utente sceglie se un dato enunciato è vero o meno nel mondo corrente.
- **Tarski's World** giocherà contro l'utente supportando la scelta opposta.
- Se **Tarski's World** ha ragione vincerà sempre il gioco.
- Se l'utente ha ragione vincerà il gioco se non farà mosse sbagliate.

Semantica a giochi per la logica proposizionale: le regole

Form	Your commitment	Player to move	Goal
$P \vee Q$	TRUE FALSE	you Tarski's World	Choose one of P, Q that is true.
$P \wedge Q$	TRUE FALSE	Tarski's World you	Choose one of P, Q that is false.
$\neg P$	either	—	Replace $\neg P$ by P and switch commitment.

$P \rightarrow Q$ viene rimpiazzato dalla sua definizione come implicazione materiale: $\neg P \vee Q$.

$P \leftrightarrow Q$ viene rimpiazzato da $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$.

Riferimenti al libro di testo

- Per chi è interessato al Teorema di completezza per la logica proposizionale, Il libro lo tratta nel Chapter 17: 17.1 e 17.2.

- Le ultime due slide, non commentate a lezione, sulla semantica a giochi, sono facoltative.