Seconda Parte

Logica del Primo Ordine

Lezione 8

- Introduzione alla Logica del Primo Ordine
- Quantificatori

Introduzione alla Logica del Primo Ordine

Motivazioni

- Riprendiamo un paio di esempi introduttivi:

In Logica Proposizionale le proposizioni composte sono costruite combinando le proposizioni atomiche tramite i connettivi verofunzionali.

Se piove prendo l'ombrello

Non prendo l'ombrello

--

Dunque non piove

$P \rightarrow Q$

$\neg Q$

$\neg P$

Motivazioni

In Logica Proposizionale le proposizioni composte sono costruite combinando le proposizioni atomiche tramite i connettivi verofunzionali.

Ogni uomo è mortale

Socrate è un uomo

--

Dunque Socrate è mortale

?

Uomo(s)

Mortale(s)

Non sempre l'analisi proposizionale è adeguata al ragionamento che vogliamo descrivere.

Motivazioni

In Logica Proposizionale le proposizioni composte sono costruite combinando le proposizioni atomiche tramite i connettivi verofunzionali.

Ogni uomo è mortale

Socrate è un uomo

--

Dunque Socrate è mortale

P

U

M

Non sempre l'analisi proposizionale è adeguata al ragionamento che vogliamo descrivere.

Motivazioni

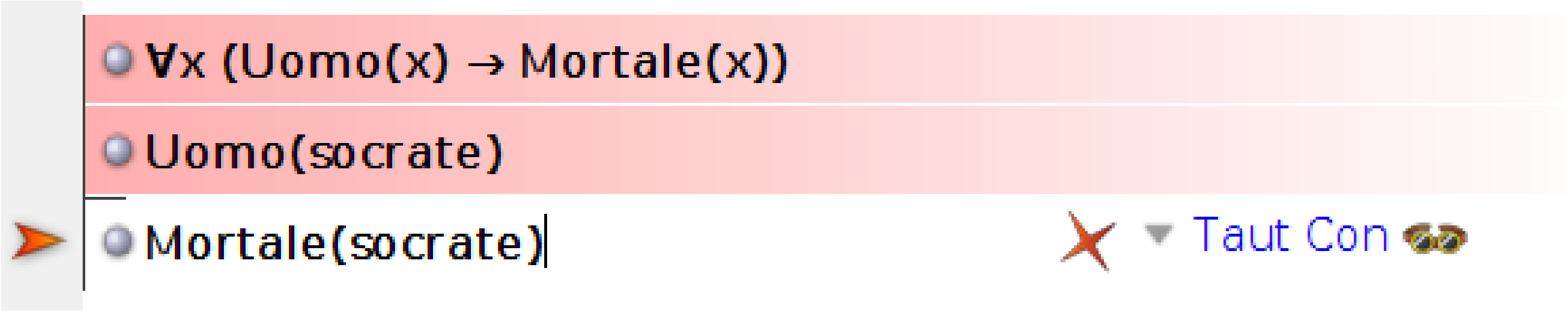
Dobbiamo usare un linguaggio e una semantica più espressivi.

Linguaggio naturale	Formalizzazione
Ogni uomo è mortale	$\forall x(U(x) \rightarrow M(x))$
Socrate è un uomo	$U(s)$
--	------------------------------
Dunque Socrate è mortale	$M(s)$

Introduciamo variabili (come x) e quantificatori (come $\forall$) per parlare di proprietà degli oggetti del dominio del discorso, in modo quantitativo (tutti gli oggetti, qualche oggetto, etc.)

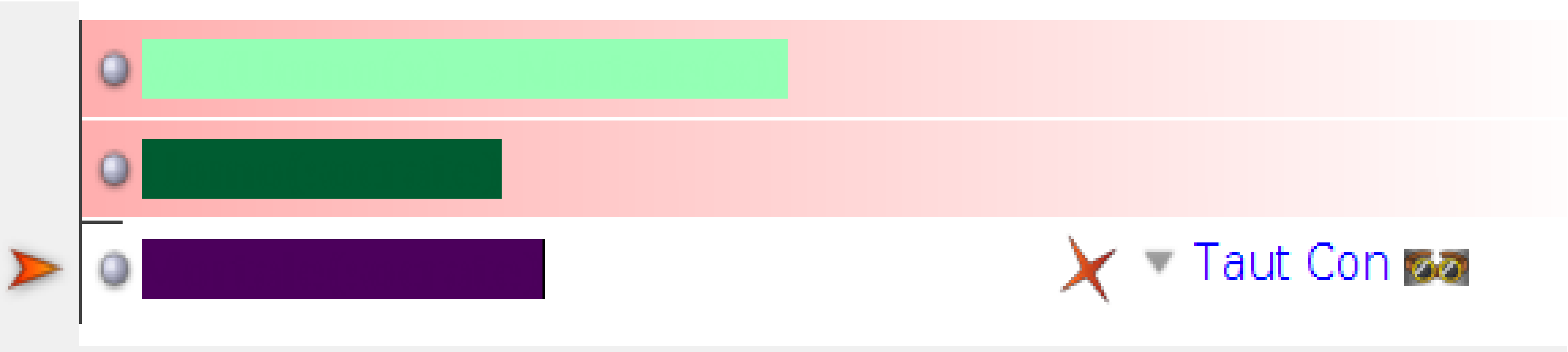
Motivazioni

Il calcolo $\mathcal{F}_T$ (**Fitch** proposizionale) non valida l'argomentazione.



Motivazioni

Il calcolo $\mathcal{F}_T$ (**Fitch** proposizionale) non valida l'argomentazione. Infatti la struttura proposizionale della frase non lo permette:



Motivazioni

Bisogna estendere logica e calcolo, in primo luogo dando la semantica delle proposizioni quantificate.

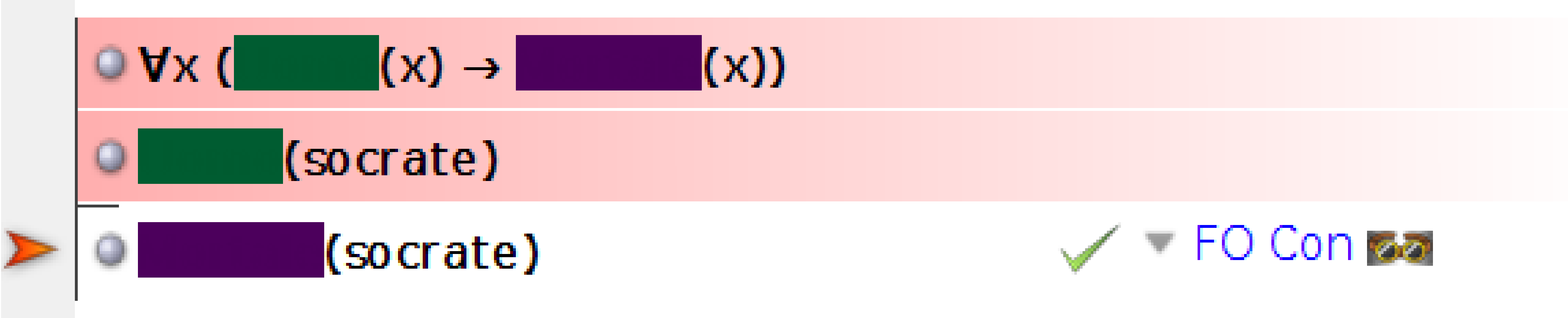
$\forall x\,(Uomo(x) \rightarrow Mortale(x))$

$Uomo(socrate)$

$Mortale(socrate)$ FO Con

Motivazioni

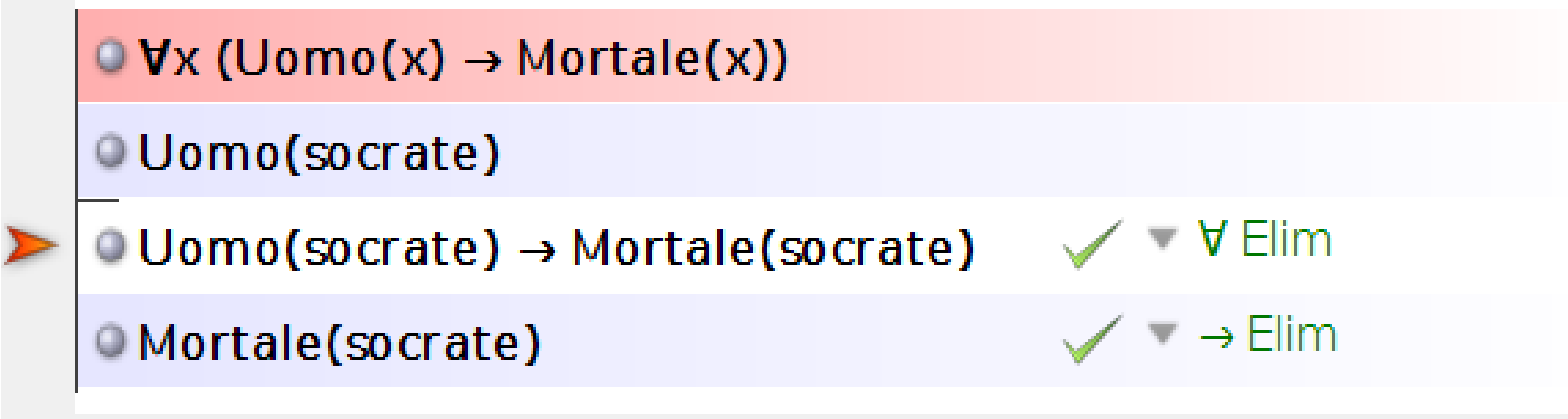
Bisogna estendere logica e calcolo, in primo luogo dando la semantica delle proposizioni quantificate.



Si deve poter ragionare sui predicati usati nelle proposizioni quantificate.

Motivazioni

Bisogna estendere logica e calcolo, dando anche nuove regole per gestire le proposizioni quantificate.



Motivazioni

Ogni uomo è mortale

Il padre di un uomo è un uomo

Socrate è un uomo

--

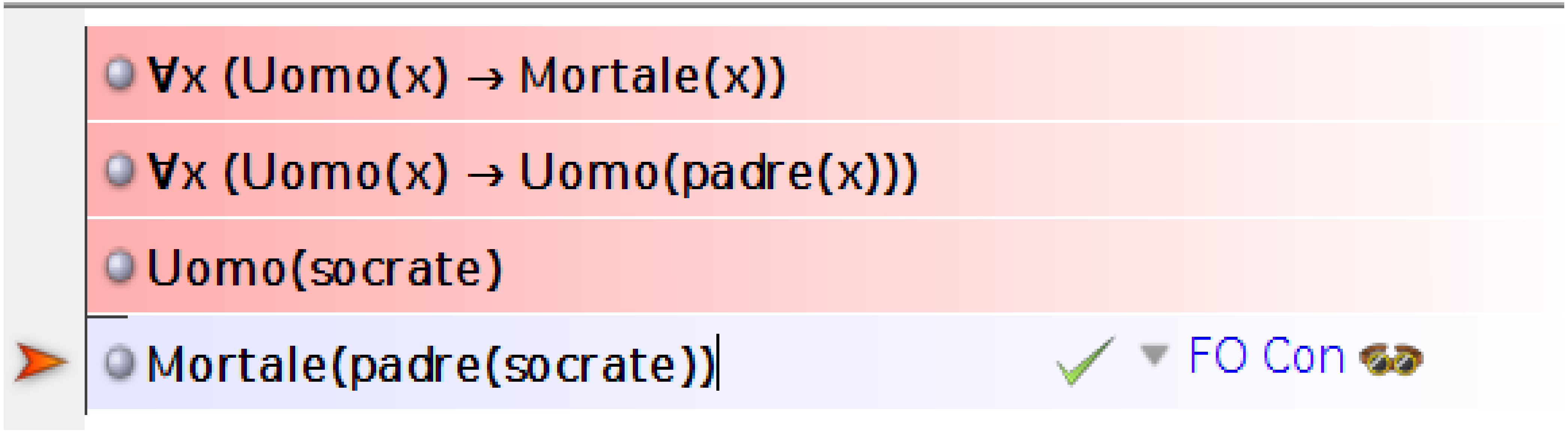
Dunque il padre di Socrate è mortale

$$\forall x(U(x) \to M(x))$$
$$\forall x(U(x) \to U(p(x)))$$
$$U(s)$$
$$\overline{}$$
$$M(p(s))$$

Introduciamo inoltre i simboli di funzione (come p(.)) per parlare di oggetti in maniera indiretta (non conosco il nome «diretto» del padre di Socrate) e funzionale («il padre di Socrate» è un preciso oggetto del discorso, poiché Socrate ha uno e un solo padre, così come ogni altro oggetto del discorso (es.: «il padre del padre di Socrate»).

Motivazioni

Bisogna estendere logica e calcolo, per gestire anche i simboli di funzione.



Motivazioni

Bisogna estendere logica e calcolo, per gestire anche i simboli di funzione.

$\forall x$ ([redacted](x) → [redacted](x))

$\forall x$ ([redacted](x) → [redacted](padre(x)))

[redacted](socrate)

[redacted](padre(socrate)) FO Con

Motivazioni

Bisogna estendere logica e calcolo, per gestire anche i simboli di funzione.

$\forall x\,(Uomo(x) \rightarrow Mortale(x))$	
$\forall x\,(Uomo(x) \rightarrow Uomo(padre(x)))$	
$Uomo(socrate)$	
$Uomo(socrate) \rightarrow Uomo(padre(socrate))$	$\forall$ Elim
$Uomo(padre(socrate))$	$\rightarrow$ Elim
$Uomo(padre(socrate)) \rightarrow Mortale(padre(socrate))$	$\forall$ Elim
$Mortale(padre(socrate))$	$\rightarrow$ Elim

Motivazioni

Ogni uomo è mortale

Il padre di un uomo è un uomo

Socrate è un uomo

Sofronisco è il padre di Socrate

Dunque Sofronisco è mortale

$\forall x(U(x) \rightarrow M(x))$

$\forall x(U(x) \rightarrow U(p(x)))$

$U(socrate)$

$sofronisco = p(socrate)$

$M(sofronisco)$

Poter ragionare sull'interazione fra i simboli di funzione, e l'identità e le sue regole (vi sono in genere più modi di denotare un oggetto del discorso. Nell'esempio diciamo qualcosa di generale sui padri, e la applichiamo a Sofronisco, in quanto è un padre).

Motivazioni

Simboli di funzione e regole per l’identità:

$\forall x\,(Uomo(x) \rightarrow Mortale(x))$	
$\forall x\,(Uomo(x) \rightarrow Uomo(padre(x)))$	
$Uomo(socrate)$	
$padre(socrate) = sofronisco$	
$Uomo(socrate) \rightarrow Uomo(padre(socrate))$	$\forall$ Elim
$Uomo(padre(socrate))$	$\rightarrow$ Elim
$Uomo(padre(socrate)) \rightarrow Mortale(padre(socrate))$	$\forall$ Elim
$Mortale(padre(socrate))$	$\rightarrow$ Elim
$Mortale(sofronisco)$	$=$ Elim

Esempio: un ulteriore confronto tra **Taut Con** e **FO Con**

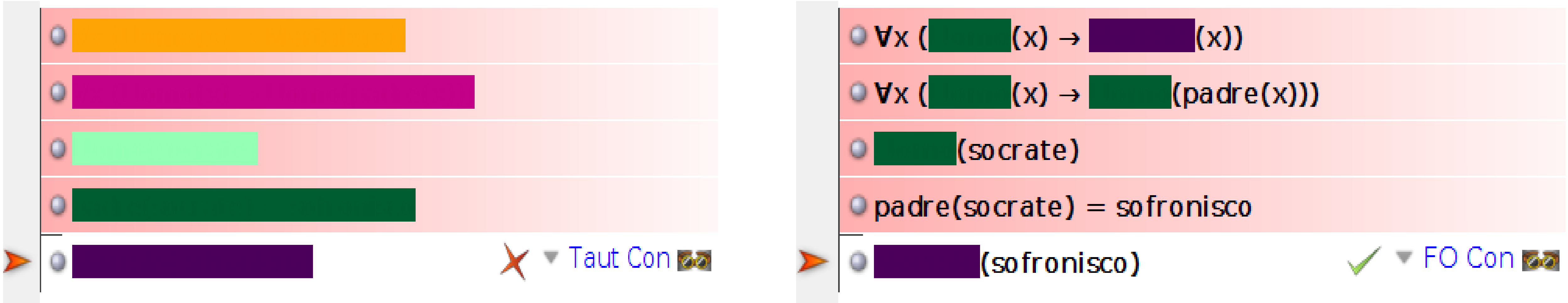
$\forall x\,(Uomo(x) \to Mortale(x))$

$\forall x\,(Uomo(x) \to Uomo(padre(x)))$

$Uomo(socrate)$

$padre(socrate) = sofronisco$

$Mortale(sofronisco)$



Quantificatori

Esempi di espressioni quantificate:

……..

- *every cube,*
- *some man from Indiana,*
- *most children in the class,*
- *three blind mice,*
- *no student of logic.*

*Logicians call noun phrases of this sort **quantified expressions**, and sentences containing them **quantified sentences.** They are so called because they allow us to talk about quantities of things - every cube, most children, and so forth -.*

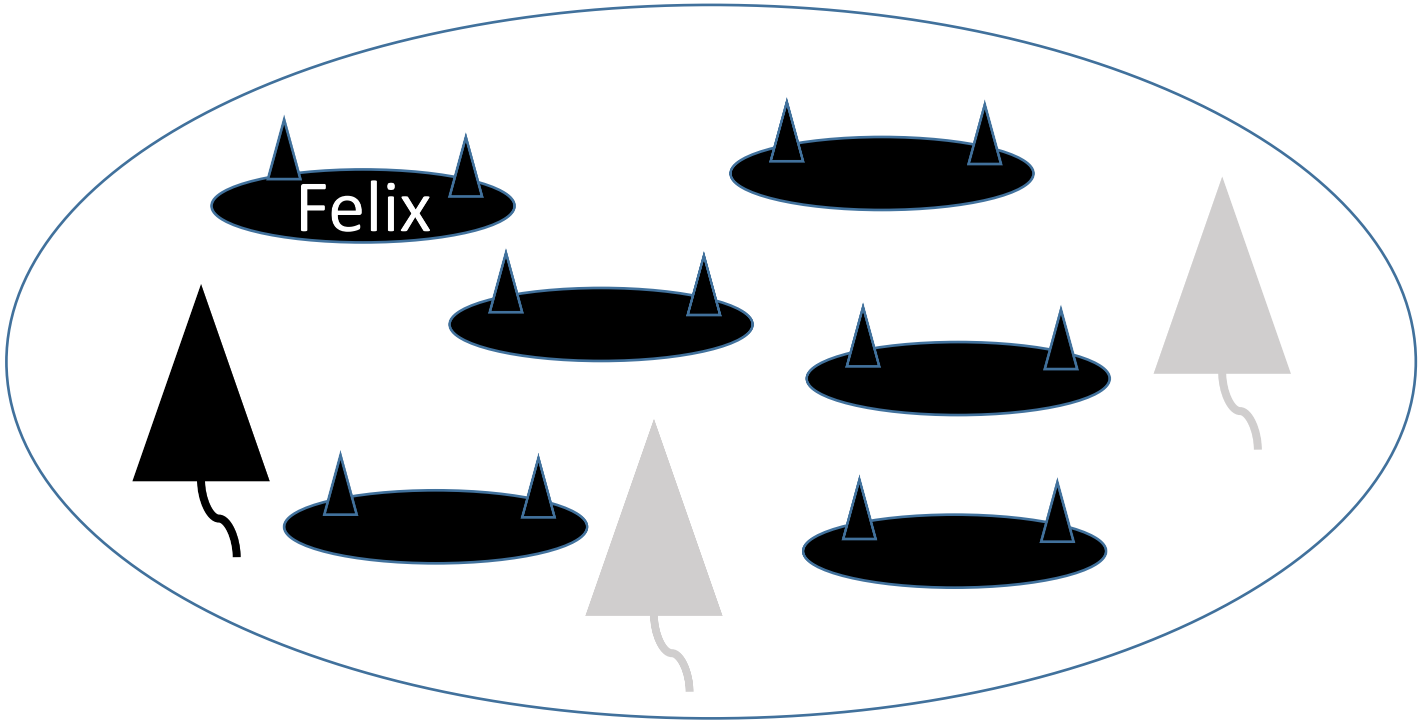
Significato intuitivo di alcuni quantificatori

Tutti i gatti sono neri

Felix è un gatto

Felix è nero

Non trovate controesempi



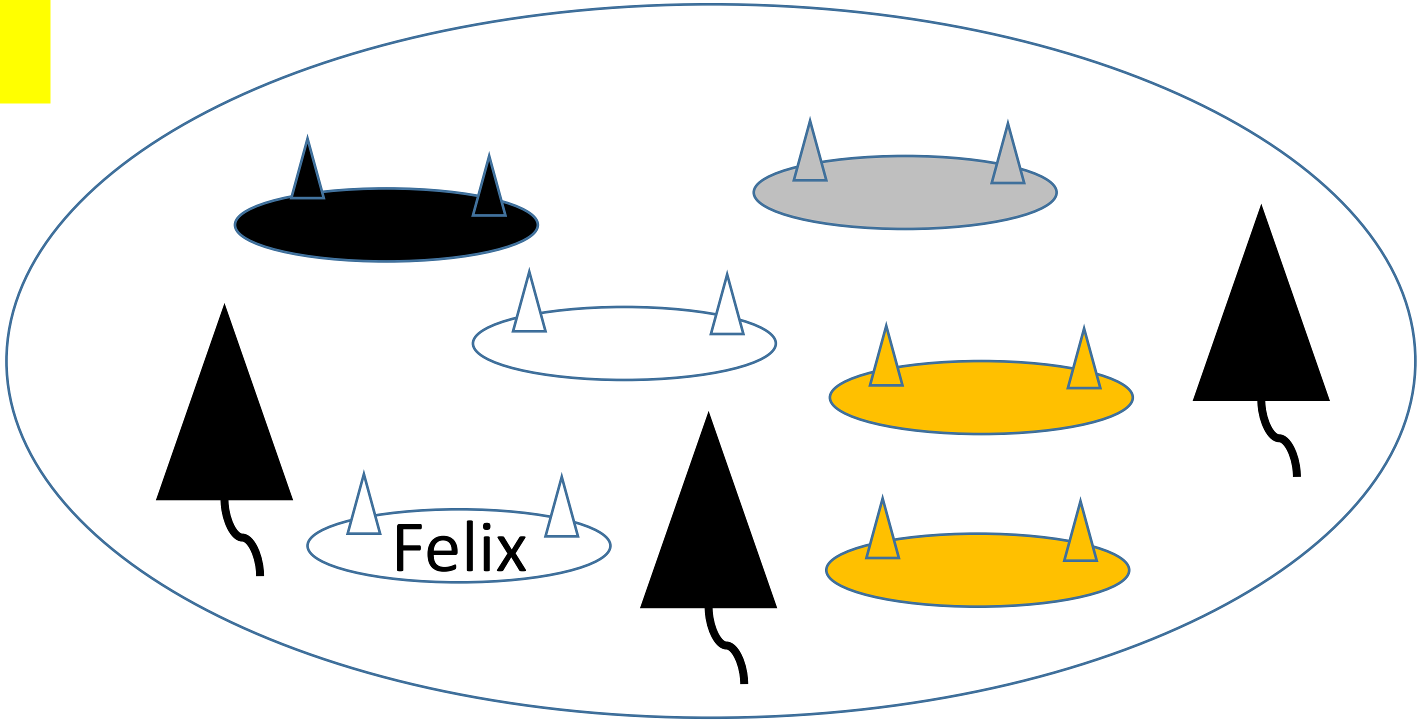
Significato intuitivo di alcuni quantificatori

Vi è almeno un gatto nero

Felix è un gatto

Felix è nero

controesempio



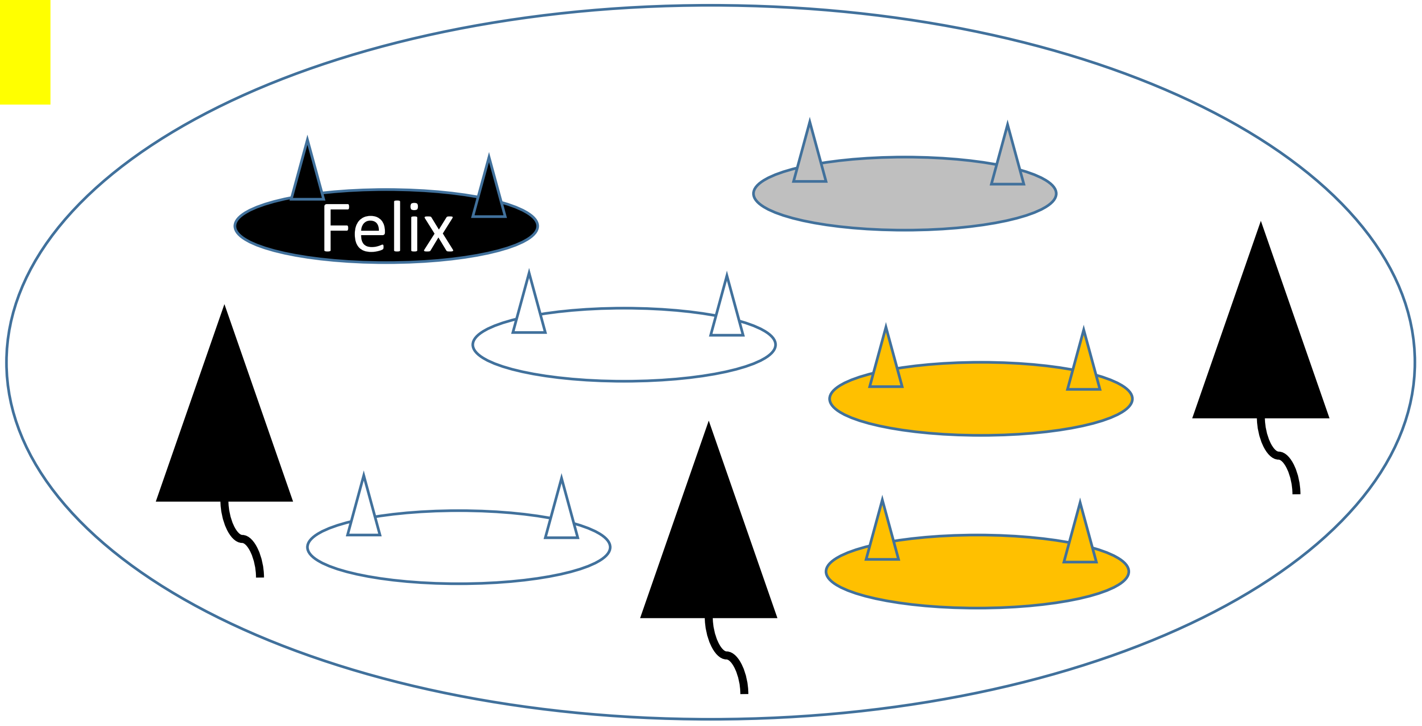
Significato intuitivo di alcuni quantificatori

Vi è almeno un gatto nero

Felix è un gatto

Felix è nero

non è un
controesempio



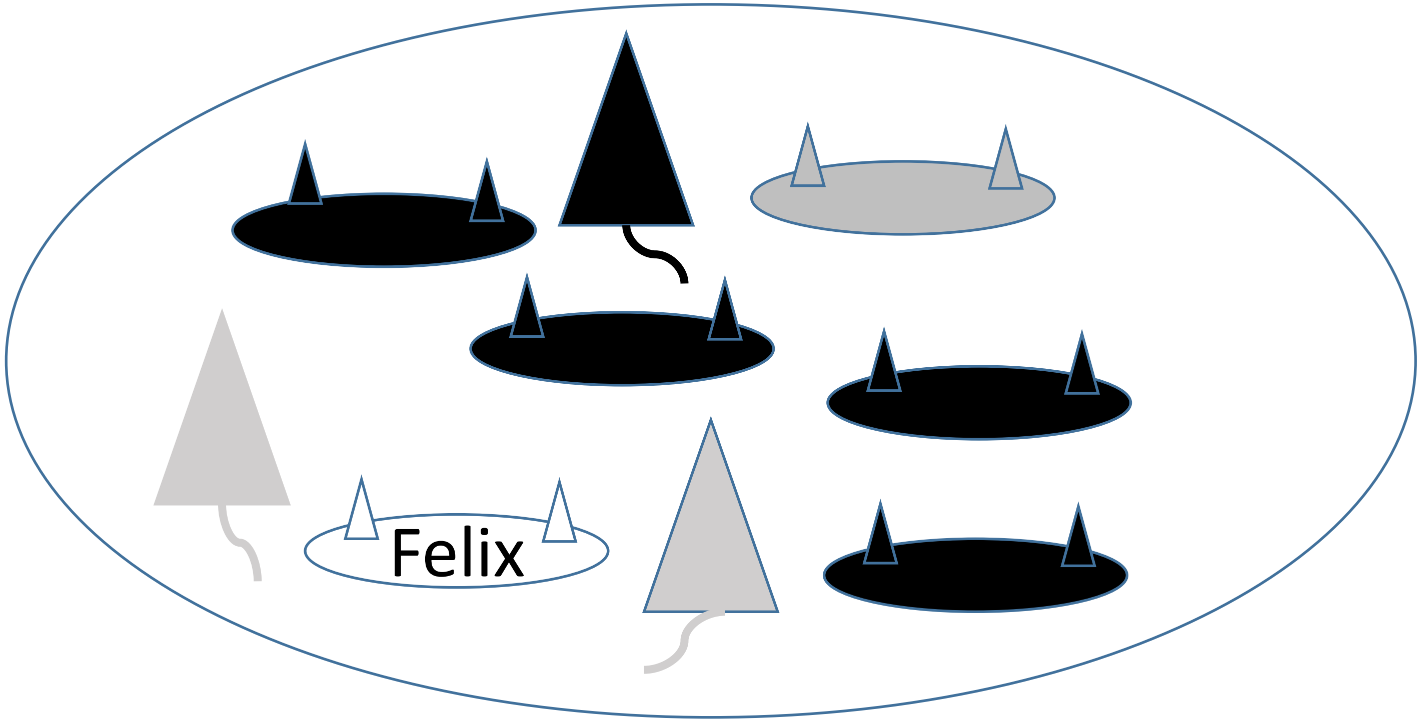
Significato intuitivo di alcuni quantificatori

Molti gatti sono neri

Felix è un gatto

Felix è nero

controesempio



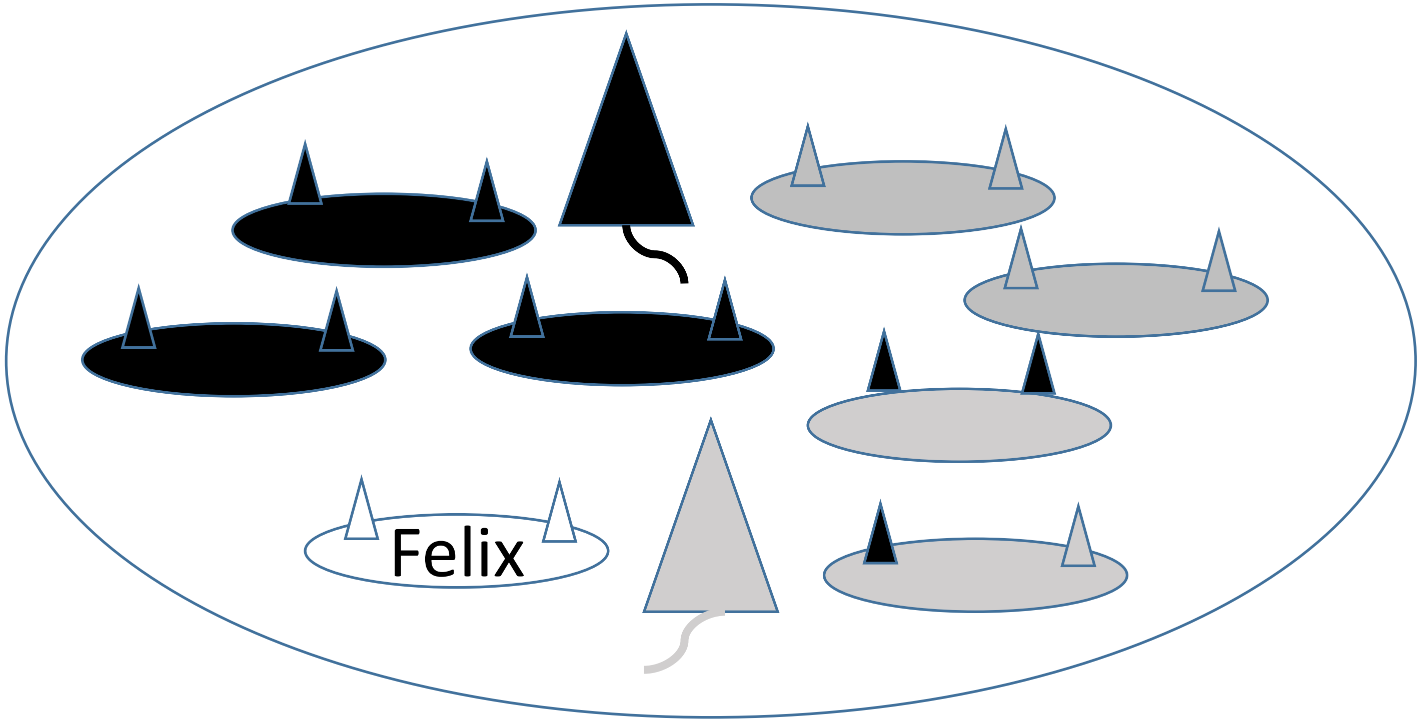
Significato intuitivo di alcuni quantificatori

Molti gatti sono neri

Felix è un gatto

Felix è nero

controesempio?



Quantificazioni linguistiche che corrispondono a quantificatori nella logica del primo ordine

- Fra i vari «quantificatori» del linguaggio naturale, FOL si concentra solo su:
  - ∃: esiste, almeno un, qualche, un, …
    - C'è un treno che collega Milano a Bergamo.
    - Qualche studente ha dimenticato il cellulare in aula.
    - Un cane sta abbaiando.
  - ∀: ogni, tutti, un (nel senso di «qualsiasi»), …
    - Tutti i passeggeri sono scesi dal treno.
    - Ogni uomo è mortale.
    - Un cane (o «il cane») ha quattro zampe (nel senso di «ogni cane»).
    - I cani hanno quattro zampe.

Quantificazioni linguistiche che non corrispondono alla quantificazione nella logica del primo ordine

- Molti «quantificatori» presenti nel linguaggio naturale non sono considerati:

  - La maggior parte degli studenti vive a Milano.
  - Molti gatti sono neri.
  - Ci sono molti interi n < 100 tali che n è divisibile per 2, per 3 e per 5.
  - Esistono infiniti numeri primi.
  - C’è poco denaro in cassa.
  - Quasi tutti gli studenti passano l’esame.

Quantificazioni linguistiche realizzabili nella logica del primo ordine

- Alcuni «quantificatori» presenti nel linguaggio naturale sono riconducibili a $\exists$ e $\forall$ (lo vedremo):
  - Ci sono almeno due mele nel cesto.
  - Possiamo comprarne al massimo sei confezioni.
  - C'è una e una sola risposta esatta.
  - Nessun uomo è un'isola.
  - Esattamente tre topini ciechi.
  - Trentatrè trentini entrarono a Trento.
  - …

Come determinare il significato intuitivo

- Nella logica proposizionale, conoscendo il significato dei simboli di predicato sappiamo interpretare le atomiche come vere o false;
- Dall’interpretazione delle atomiche, con le tavole di verità, sappiamo interpretare (giudicare la verità de)le proposizioni non atomiche.
- Ma come arriviamo a interpretare:
  - «nel cortile ci sono un gatto e una gatta che miagolano» ?
  - Delle tavole di verità non ce ne facciamo nulla. Il procedimento interpretativo dovrà considerare l’***esistenza*** o meno, ***fra tutti gli individui che popolano il cortile nella circostanza considerata***, di un gatto e una gatta che miagolano.
  - Per convincere un interlocutore dovremmo indicarglieli: «Ci sono ***lui*** e ***lei*** (***lui*** è un gatto **e** ***lei*** una gatta) **e** ***lui*** **e** ***lei*** miagolano».

Come esprimere il significato intuitivo

- Al posto di «*lui*» e «*lei*» in FOL si usano le variabili:

$$\exists x\ \exists y(Gatto(x) \wedge Gatta(y) \wedge Miagola(x) \wedge Miagola(y))$$

- Le variabili sono dei «segna-posto», che consentono riferirsi allo *stesso individuo in diverse parti di una formula*.

- Non possiamo indicare gli individui con delle costanti nel momento stesso in cui «quantifichiamo»: *per stabilire se la proprietà vale per tutti o per qualcuno, dobbiamo far variare l'individuo indicato dalla variabile su tutti gli individui che popolano il nostro mondo.*

Come esprimere il significato intuitivo

- Al posto di «***lui***» e «***lei***» in FOL si usano le variabili:

$$\exists x\ \exists y(Gatto(x) \land Gatta(y) \land Miagola(x) \land Miagola(y))$$

- Abbiamo anche usato i quantificatori: $\exists x\ \exists y$.
- Non potrebbero bastare le variabili da sole a catturare il significato?

$$Gatto(x) \land Gatta(y) \land Miagola(x) \land Miagola(y)$$

- Ovviamente NO!

Come esprimere il significato intuitivo

- Consideriamo la circostanza in cui in cortile ci sono sia un gatto che un cane.

- Allora:

  $\exists x$ Gatto(x) è vera, esprimendo «c'è un gatto in cortile».

  Mentre:

  $\forall x$ Gatto(x) è falsa, esprimendo «in cortile ci sono solo gatti».

- Ma **Gatto(x)** che oggetto sintattico è? (E che frase esprimerebbe?)

Riferimenti al libro di testo

- Chapter 9, fino a 9.2 incluso.