SISTEMI

Un sistema di α equazioni in β incognite è:

$$\begin{cases} m_{11}x_1 + m_{12}x_2 + \dots + m_{1\beta}x_\beta = k_1 \\ m_{21}x_1 + m_{22}x_2 + \dots + m_{2\beta}x_\beta = k_2 \\ \vdots \\ m_{\alpha 1}x_1 + m_{\alpha 2}x_2 + \dots + m_{\alpha\beta}x_\beta = k_\alpha \end{cases} \qquad m_{i,j}, k \in \mathbb{R}$$

$M[i,j] \in M_{\alpha\times\beta}(\mathbb{R})$ $\qquad \underline{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^\alpha$

$\downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad \searrow$

matrice dei coefficienti $\qquad$ colonna termini noti

$$x_1, \dots, x_\beta \rightsquigarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^\beta$$

$$M\underline{x} = \underline{k} \qquad M \in M_{\alpha\times\beta}(\mathbb{R}) \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^\beta = M_{\beta\times 1}(\mathbb{R})$$

$$M\underline{x} \in M_{\alpha\times\beta}(\mathbb{R}) \times M_{\beta\times 1}(\mathbb{R}) \rightsquigarrow M_{\alpha\times 1}(\mathbb{R}) \ni k$$

Def: Le soluzioni di un sistema sono le β-tuple di valori che sostituiti $x_1, x_2, \dots x_\beta$ rendono vere tutte le equazioni del sistema. Cioè sono i vettori $\underline{s} \in \mathbb{R}^\beta$ t.c. $M\underline{s} = \underline{k}$

$\rightsquigarrow Mx = \underline{k}$ $\qquad$ M è la matrice dei coefficienti, $\underline{k}$ è la colonna dei termini noti, $[M \mid k]$ è la matrice orlata o completa del sistema

es
Ⓐ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$ è un sistema con 2 eq. con 2 incog x_1, x_2

$M \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ $\underline{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$[M|k] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right]$

$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 \\ 2(1-x_2) + 2x_2 = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 \\ 2 - \cancel{2x_2} + \cancel{2x_2} = 2 \end{cases}$ vera

$\begin{cases} x_2 \text{ è libero} \quad (x_2 \in \mathbb{R}) \\ x_1 = 1 - x_2 \end{cases}$

soluzioni: $\begin{pmatrix} 1-x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$ es. $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

Ⓑ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$ 2 eq, 2 incogn.

$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ $k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$[M|k] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$

$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 \\ 2(1-x_2) + 2x_2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 - x_2 \\ \underbrace{2 - \cancel{2x_2} + \cancel{2x_2} = 1}_{\text{IMPOSSIBILE}} \end{cases}$

Il sistema non ha soluzioni

Ⓓ $\{ x_1 + x_2 = 1$ sistema con 1 eq. 2 incogn.

$\downarrow$

$x_1 = 1 - x_2$ $\quad \begin{pmatrix} 1 - x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$ sono soluzioni

<u>Def</u>: Diciamo che 2 sistemi sono equivalenti se hanno lo stesso insieme di soluzioni

Diciamo che un sistema è compatibile o risolubile se ammette almeno una soluzione

Diciamo che un sistema è impossibile se non ammette soluzioni

$$Sol(M|k) = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^{\beta} \text{ t.c. } M\underline{x} = \underline{k} \}$$

↳ è l'insieme delle soluzioni del sistema che ha M come matrice dei coeff. e $\underline{k}$ come colonna dei termini noti

se $\underline{K} = 0$
diciamo che il sistema è omogeneo

Considero un sistema → associo la matrice $[M|K]$ completa

Chiamo trasformazioni di Gauss o trasformazioni ammissibili le seguenti "operazioni" su $[M|K]$

→ Scambiare fra loro due righe
→ Moltiplicare una riga per un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda \neq 0$

→ Sommare a una riga un multiplo di un'altra

Prop: Se $[M'|k']$ è ottenuta da $[M|\underline{k}]$ tramite trasformazioni ammissibili $\Rightarrow$ i sistemi

$$M\underline{x} = \underline{k} \qquad M'x = \underline{k}' \quad \text{sono equivalenti}$$

es
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \rightsquigarrow 2 \text{ eq. } 3 \text{ inc.}$$

$$M \in M_{2\times3}(\mathbb{R}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[M|k] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

sostituisco alla seconda riga più (-1) · prima riga

$R_2 \rightsquigarrow R_2 - R_1$

$$\underbrace{1\ 2\ 1\ |\ 1}_{R_2} - \underbrace{1\ 1\ 1\ |\ 1}_{R_1} = 0\ 1\ 0\ |\ 0$$

$$[M'|k'] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_1 = 1 - x_3 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$$

Le soluzioni sono $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 - x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Il sistema ottenuto tramite trasformazioni di gauss è equivalente, ma non necessariamente più facile

→ Posso usare le trasformazioni di gauss per ottenere una forma "più bella" della matrice, che si chiama forma di gauss

→ nella prima riga il primo valore non nullo è 1

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \end{bmatrix}$$

tutte le colonne sotto gli 0 precedenti son nulle.

Anche sotto al primo 1 compaiono solo 0

→ Nella seconda riga deve valere lo stesso

→ In ogni riga vale lo stesso

$$\begin{bmatrix} 1 & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & 1 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

→ tutti 0

Chiamo "pivot" il primo 1 di ogni riga e chiamo rango di una matrice in forma di gauss il numero di pivot

Il rango è minore o uguale al numero di righe

Es $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$

voglio ottenere uno 0 sotto

$R_2 \rightsquigarrow R_2 - R_1$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$

pivot! pivot! 2 pivot, rango 2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$R_2 \rightsquigarrow R_2 - R_1$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$

pivot

equivalenti

$R_2 \rightsquigarrow R_2/2$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \qquad [M \mid k] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

voglio degli 0 sotto

$R_2 \rightsquigarrow R_2 - 2R_1$ $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right]$

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 1 \\ \cancel{0 x_1 + 0 x_2 = 0} \end{cases}$$

è equivalente a $[1 \ 1 \mid 1]$

In una forma di gauss posso eliminare le righe tutte **NULLE**.
Nelle forma di gauss <u>non</u> ho righe nulle (le cancello)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \qquad [M|k] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

voglio 0 sotto

$$R_2 \to R_2 - 2R_1 \quad \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = -1 \end{cases} \to \quad 0 = -1$$

<u>IMPOSSIBILE</u>

una riga $0 \; 0 \; 0 \; \dots \mid 1$

mi da un sistema impossibile

$0 \cdot \text{incognite} = 1$

$0 \neq 1$

Se applicando le trasformazioni di gauss trovo una riga tutta di zeri → la elimino
Se trovo una riga con tutti zeri nella matrice dei coefficienti e un numero <u>non nullo</u> come termine noto → il sistema é impossibile

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 \quad\quad + x_4 = 2 \\ \quad\; x_2 - x_3 \quad\quad = k \end{cases} \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & k \end{array}\right]$$

voglio 0 sotto

$$R_2 = R_2 - R_1 \to \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & k \end{array}\right]$$

voglio 0 sotto

$$R_3 = R_3 - R_2 \to \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k-1 \end{array}\right]$$

Risolvo prima la riga in cui compare l'ultimo pivot

• Se $K-1=0 \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & 0 \end{array}\right]$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ +x_2-x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1+(1+x_3)+x_3+x_4=1 \\ x_2=1+x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1=\cancel{1}-\cancel{1}-2x_3-x_4 \\ x_2=1+x_3 \end{cases}$$

x_3, x_4 libere

$x_2=1+x_3$, $x_1=-2x_3-x_4$

$$\begin{pmatrix} -2x_3-x_4 \\ 1+x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

• Se $K-1 \neq 0$ $[0\,0\,0\,0 \mid K-1]$

divido per $K-1$ $[0\,0\,0\,0 \mid 1] \to$ <u>impossibile</u>

Teorema: (Teorema di Rouché-Capelli)

Sia $M \in M_{\alpha \times \beta}(\mathbb{R})$, sia $\underline{k} \in \mathbb{R}^{\alpha}$

Il sistema $Mx=\underline{k}$ (di α equazioni e β incognite)

Considero $[M'|k]$ forma di Gauss di $[M|k]$. Allora valgono:

a) Il sistema è risolubile $\iff$ rango(M') = rango$([M'|k'])$
(cioè il num. di pivot di M' è uguale a quello di $[M'|k']$)

b) Se il sistema è risolubile, allora il sistema ha un'unica soluzione $\iff$ rango$(M')=\beta$

(cioè il numero di pivot è = al num. di incognite)

c) Se il sistema è risolubile, allora ha infinite soluzioni che dipendono da j parametri $\iff \beta - \text{rango}(M') = j > 0$

FORMA DI GAUSS SISTEMA IMPOSSIBILE

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \cdots & & & & \cdots \\ \cdots & & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ \cdots & & & & \cdots \end{array}\right] \rightarrow \text{pivot nei termini noti}$$

$\Rightarrow$ i pivot di M' non sono gli stessi dei pivot di $[M'|k']$

cioè $\text{rango}[M'|k'] = \text{rango}[M'] + 1$

c'è un pivot che non sta in M'

(A) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$ $\{ x_1 + x_2 = 1$ ha come soluz. $\begin{pmatrix} 1 - x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

ha infinite soluzioni che dipendono da 1 parametro x_2

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \underbrace{\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}$$

rango $M' = 1 =$ rango $[M'|k'] = 1$

$j = 2 - 1$

\# incognite β

(C) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$ $[M|k] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$

$\Big($

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{array}$$

2 pivot $\Rightarrow$ rango $M' = 2$

\# incognite $\beta = 2$

$\Rightarrow$ il sistema ha un'unica soluzione