APPLICAZIONI TRA INSIEMI (O FUNZIONI)

Una relazione $R \subseteq A \times B$ è una applicazione (o funzione) se $\forall a \in A$ esiste uno e un solo $b \in B$ tale che $(a,b) \in R$

ESERCIZIO 1

$\mathbb{Q}$ insieme dei numeri razionali

$f: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ definita da

$f(x,y) = (xy, x) \quad \forall x,y \in \mathbb{Q}$

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

1) $f^{-1}(1,0) = \emptyset$ NO $\quad f^{-1}(1,0) = \{(x,y) \mid f(x,y) = (1,0)\}$

2) $f(0,8) = (0,0)$ SÌ $\rightarrow f(0,8) = (0 \cdot 8, 0) = (0,0)$

3) $f^{-1}(0,0) = \{(0,0)\}$ NO $\rightarrow \{(x,y) \mid f(x,y) = (0,0)$

4) f iniettiva NO perché

$\hookrightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow (0,y)$

5) f suriettiva NO

xché $\hookrightarrow f^{-1}(1,0) = \emptyset$

$f^{-1}(0,0) \{(0,y) \mid y \in \mathbb{Q}\}$

ESERCIZIO 2

Sia $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri relativi e si considerino le applicazioni:

$g: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$g(x,y) = (2xy, x+y)$ e

$f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$f(a,b) = a \cdot b$

1) determinare $g(6,0) = (0,6)$

2) determinare $g^{-1}(0,3) = \begin{cases} 2xy = 0 \\ x+y = 3 \end{cases} = \begin{cases} (3,0) \\ (0,3) \end{cases}$

3) stabilire se g è iniettiva NO

4) stabilire se f è suriettiva

5) determinare $(f \circ g)(2,1)$

4) $f(a,b) = a \cdot b$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\quad \forall x \in \mathbb{Z}$

$f(1,x) = x \cdot 1 = x$

quindi è suriettiva

5) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$\xrightarrow{g} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$

$(2,1) \xrightarrow{g} (4,3) \xrightarrow{f} 12$

ESERCIZIO 3

Dati i due insiemi finiti

$I = \{x, y, z\}$ e

$L = \{a, b, c, d, e\}$ e le due relazioni:

$R = \{(x, a), (x, b), (y, c), (z, c)\} \subseteq I \times L$

$S = \{(a, y), (b, y), (c, x), (d, z), (e, z)\} \subseteq L \times I$

1) determinare le matrici di incidenza delle due relazioni

2) stabilire se R e/o S sono applicazioni e in caso affermativo se sono iniettive e/o suriettive

3) quante sono le applicazioni suriettive: $I \longrightarrow L$ e quante quelle iniettive $I \longrightarrow L$?

1)

	a	b	c	d	e
x	1	1	0	0	0
y	0	0	0	0	1
z	0	0	1	0	0

$R \subseteq I \times L$

è applicazione? NO

(x, a) (x, b)

2) $S \subseteq L \times I$

	x	y	z
a	0	1	0
b	0	1	0
c	1	0	0
d	0	0	1
e	0	0	1

è applicazione? SÌ

Iniettiva? NO

(a, y) (b, y)

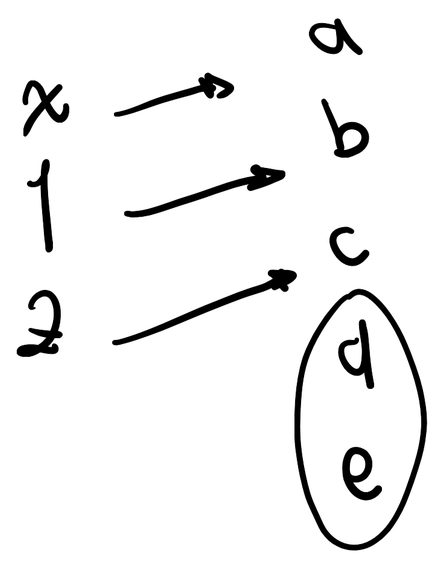
Suriettiva? SÌ

$S(a) = S(b) = y$

$S(c) = x$

$S(d) = S(e) = z$

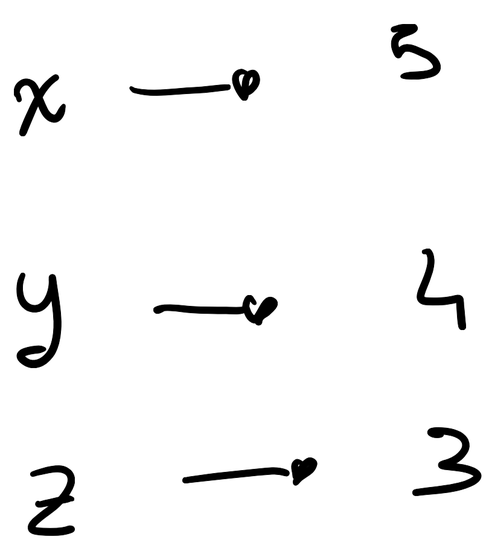
3) Suriettiva $I \to L$? NO



$|I| = 3$ $\forall f : I \to L$

$|f(x)| \leq 3 \Rightarrow f(I) \neq L$

Quante iniettive $I \to L$?



$\Rightarrow 5 \cdot 4 \cdot 3$

applicazioni iniettive

ESERCIZIO 4

$X = \{1, 2, 3\}$

$Y = \{a, b, c, d\}$

1. Determinare il numero delle applicazioni da X a Y

2. Determinare il numero delle applicazioni iniettive da X a Y

3. Determinare il numero delle applicazioni suriettive da X a Y

OPERAZIONI e STRUTTURE ALGEBRICHE

<u>Operazione</u> : $*$: $A \times A \longrightarrow A$

$(a, b) \longrightarrow a * b$

<u>Associativa</u> : $(a * b) * c = a * (b * c)$

<u>Commutativa</u> : $a * b = b * a$

$\forall a, b, c \in A$

El. neutro (sinistro e/o destro)

El. inverso (sinistro e/o destro)

- Se $*$ ha un elemento neutro u, questo è unico

$u_s * a = a$

$a * u_d = a$

- Se $*$ è associativa con elemento neutro u, un elemento $x \in A$ ha al più un inverso

---

<u>Monoide</u> $(M, *)$

$*$ associativa con elemento neutro

<u>Gruppo</u> $(G, *)$: monoide in cui ogni elemento ha inverso

<u>Sottogruppo</u> : $H \subseteq G$, $(G, *)$ gruppo

1) $\forall x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$
2) u el. neutro di G , $u \in H$
3) $\forall x \in H$, $x^{-1} \in H$

ESERCIZIO 1

Sia $G = \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q} = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0\}$

dove $\mathbb{Q}$ è l'insieme dei n$^{\circ}$ razionali e $\mathbb{Q}^*$ l'insieme dei n$^{\circ}$ razionali diversi da 0.

Sia $* : G \times G \longrightarrow G$ l'operazione

$$(a,b) * (c,d) = (ac, bc+d)$$

1) Si dimostri che $*$ è associativa

2) Si determini l'elemento neutro di $(G, *)$

3) Si dimostri che ogni elemento di G ammette inverso rispetto a $*$

4) Si provi che $*$ non è commutativa

1) $(a,b) * (c,d) = (ac, bc+d)$

$((a,b) * (c,d)) * (e,f) =$

$(ac, bc+d) * (e,f) =$

$(ace, (bc+d)e + f) = (ace, bce + de + f)$

é associativa

$(a,b) * ((c,d) * (e,f))$

$(a,b) * (ce, de+f)$

$(ace, b(ce) + de + f) = (ace, bce + de + f)$

2) $u = (c,d)$ é elemento neutro se

$(a,b) * (c,d) = (a,b)$

$\parallel$

$(ac, bc+d) = (a,b)$

$\begin{cases} ac = a \longrightarrow c = 1 \\ bc + d = b \end{cases}$

$b + d = b \Rightarrow d = 0$

$\Rightarrow u_d = (1,0)$

É unità a sinistra?

$(1,0) * (a,b) = (a, 0+b) = (a,b)$ <u>sí</u>

$\Rightarrow u_d = u_s = u = (1,0)$ <u>unico</u>

3) $(a,b) \in \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}$ e vediamo se ha inverso (c,d) se

$(a,b) * (c,d) = (1,0)$

$\parallel$

$(ac, bc+d) = (1,0)$ cioè:

$$\begin{cases} ac = 1 & c = a^{-1} \ (\text{in } \mathbb{Q}^*) \\ bc + d = 0 & d = -ba^{-1} \ (\text{in } \mathbb{Q}) \end{cases}$$

$\Rightarrow (a, b)^{-1} = (a^{-1}, -ba^{-1})$ | inv. anche a sx. verificare

4) $(1,2) * (3,4) = (3, 6+4)$
$= (3, 10)$

$(3,4) * (1,2) = (3, 4+2)$
$= (3, 6)$

NON è commutativa!

ESERCIZIO 2

$S = \{a, b, c\}$ e sia $\#$ l'operazione su S con questa tavola di composizione:

#	a	b	c
a	a	b	b
b	a	a	a
c	b	c	a

$a * c = b$

Stabilire se sono Vere o False:

1) $\#$ è commutativa NO $b * c \neq c * b$

2) $(b \overset{a}{\#} b) \overset{b}{\#} b = b \overset{a}{\#} (b \overset{a}{\#} b)$ NO

3) $\#$ ammette elemento neutro NO

4) $(c \underset{a}{\#} c) \overset{b}{\#} b = c \overset{a}{\#} (c \underset{c}{\#} b)$ NO

5) $\#$ è associativa NO

3) Se x è elem. neutro s

$x \# a = a$
$x \# b = b$
$x \# c = c$

Se x è el. neutro d

$a \# x = a$
$\vdots$

ESERCIZIO 3

Si consideri in $\mathbb{Z}$ l'operazione

$$* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$(a, b) \longrightarrow a * b = a + b^2$$

Stabilire se sono Vere o False:

1) 0 è elemento neutro

2) $*$ non è associativa

3) $*$ è commutativa

4) esiste elemento neutro a sinistra ma non a destra

$a * b = a + b^2$

1) 0 é el. neutro?

$0 * b = b^2$ <u>No</u>

$a * 0 = a$ <u>sí</u>

$\Rightarrow$ 0 é n_d mas não n_s $\Rightarrow$ não é el. neutro

2) $(a * b) * c = (\overset{a}{a} + \overset{*}{b}^2) * \overset{b}{c} = a + b^2 + c^2$

$a * (b * c) = a * (b + c^2) = a + (b + c^2)^2$

<u>diversi</u>

$\Rightarrow$ não é associativa

ESERCIZIO 4

Sia $(S, \circ)$ la struttura algebrica in cui $S = \{x, y, z, w\}$ e $\circ$ è l'operazione (associativa) definita da:

$\circ$	x	y	z	w
x	y	w	x	z
y	w	z	y	x
z	x	y	z	w
w	z	x	w	y

$x^{-1} = w$
$y^{-1} = y$
$z^{-1} = z$
$w^{-1} = x$

1) Stabilire se $(S, \circ)$ è un gruppo e se è abeliano

Sì

op. è commutativa
$u = z$
ogni el. ha inverso

2) Calcolare y^4 → $y^2 \circ y^2 = z \circ z = z$

3) Calcolare w^{-3} → $(w^{-1})^3 = x^3 = y \circ x = w$

ESERCIZIO 5 ASSEGNATO

Sia $\#$ l'operazione in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definita da:

$$(n, m) \# (p, q) = (n+q, m+p)$$

$\forall\, n, m, p, q \in \mathbb{Z}$

Stabilire se

1) $\#$ è associativa
2) $\#$ è commutativa
3) $\#$ ha elemento neutro
4) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \#)$ è un gruppo

ESERCIZIO 6 :

Sia $\mathbb{R}_2[x]$ l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 2.

e $\otimes$ l'operazione definita da

$$(ax^2+bx+c)\otimes(a'x^2+b'x+c') = \underline{aa'x^2+bb'x+cc'}$$

Stabilire se :

1) $\otimes$ è associativa

2) $\otimes$ ha elemento neutro

3) esiste l'inverso di x^2-1 rispetto a $\otimes$

1) $((ax^2+bx+c) \otimes (ex^2+fx+g)) \otimes (mx^2+nx+p) =$

$(aex^2+bfx+cg) \otimes (mx^2+nx+p) =$

$aemx^2+bfnx+cgp = \dots$

<u>è associativa</u>

2) $\underbrace{(ax^2+bx+c) \otimes (ux^2+vx+t)}_{} = (ax^2+bx+c)$

$\shortparallel$

$aux^2+bvx+ct = ax^2+bx+c$

$u = (1x^2+1x+1)$

3) $\underbrace{(x^2-1) \otimes (ax^2+bx+c)}_{} = x^2+x+1$

$ax^2-c \underset{?}{=} x^2+x+1$

$\nexists$ e quindi (x^2-1) non ha inverso

ESERCIZIO 7

Sia $(\mathbb{Z}[x], +)$ l'insieme dei polinomi a coefficienti interi con la struttura di gruppo definita dalla somma.

1) Sia $I_1[x]$ il sottoinsieme di $\mathbb{Z}[x]$ dei polinomi con il termine noto pari

stabilire se $I_1[x]$ è un sottogruppo di $(\mathbb{Z}[x], +)$

2) Siano $F : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}$ l'applicazione che associa ad ogni polinomio il coefficiente del termine di 1° grado e

$G : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}$ quella che associa ad ogni polinomio il suo termine noto.

Verificare se F e G sono omomorfismi di anelli da $(\mathbb{Z}[x], +, \cdot)$ a $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

CLASSI DI RESTO $\mathbb{Z}_n$

$\mathbb{Z}_n = \{ [0]_n, \dots [n-1]_n \}$ che sono le classi di equivalenza individuate dalla relazione in $\mathbb{Z}$

$a \equiv b \pmod{n} \iff a - b = hn$

$\forall a, b \in \mathbb{Z}$ (relazione di equiv.)

su $\mathbb{Z}_n$ abbiamo $+$ e $\cdot$ e una struttura di anello

$(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$

ESERCIZIO 1

scrivere le tavole di composizione di $+$ e $\cdot$ in $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_5$

e determinare:

$[2]^{-1}$, $-[2]$ in $\mathbb{Z}_3$