Lezione 10

- Semantica: Interpretazione dei termini chiusi
- Semantica: Interpretazione degli enunciati
- Le quattro forme aristoteliche
- Traduzione passo-passo

Semantica: Interpretazione dei termini chiusi

L-strutture

- **Def:** Sia L un linguaggio (dato da C(L), F(L), P(L)).
  - Allora una L-struttura è una coppia (U,I), dove
    - U è un insieme non vuoto (universo del discorso).
    - I è la funzione «interpretazione», definita come segue:
      - Per ogni $c \in C(L)$, $I(c) \in U$ (I(c) è un elemento di U).
      - Per ogni simbolo di funzione *n*-ario $f \in F(L)$,
        $I(f) : U^n \rightarrow U$ (I(f) è una funzione *n*-aria su U).
      - Per ogni predicato *n*-ario $P \in P(L)$,
        $I(P) \subseteq U^n$ (I(P) è una relazione *n*-aria su U).

Enunciati e termini chiusi su L_U

- Dato un linguaggio L, il nostro interesse precipuo è definire la semantica degli enunciati (o proposizioni) su L.

- Per «ragioni tecniche» dovute alla presenza di variabili libere nelle fbf che compongono gli enunciati, una volta che fissiamo S = (U,I), al posto di L consideriamo l'ampliamento L_U, determinato da

$$C(L_U) = C(L) \cup \{c_a : a \in U\}, \quad F(L_U) = F(L), \quad P(L_U) = P(L).$$

- Per dare la semantica degli enunciati su L_U, ci basta dare prima la semantica dei termini chiusi (o *ground*) su L_U.

Termini chiusi su L_U

Sia L un linguaggio. Sia S = (U,I) una L-struttura.

- L'insieme $GT(L_U)$ dei termini chiusi di L_U è definito *induttivamente*, come segue:
  - Ogni variabile x è un termine di L. ⟵ rimossa
  - Ogni costante c in $C(L_U) = C(L) \cup \{c_a : a \in U\}$, è un termine chiuso di L_U.
  - Se f è un simbolo di funzione n-ario in F(L) e $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sono termini chiusi di L_U, allora anche $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ è un termine chiuso di L_U.
  - Null'altro è un termine chiuso di L_U.

Interpretazione dei termini chiusi

Sia L un linguaggio, e sia S = (U,I) una L-struttura.

Allora, l'interpretazione I(t) di ogni termine $t \in GT(L_U)$, è data induttivamente:

- Per ogni $c \in C(L)$, I(c) è già definita.
- Per ogni $a \in U$, si pone $I(c_a) := a$.
- Se $f \in F(L)$, e $t_1, t_2, \ldots, t_n \in GT(L_U)$, allora
  $$I(f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) := (I(f))(I(t_1), I(t_2), \ldots, I(t_n)).$$

Interpretazione dei termini chiusi

Sia L un linguaggio, e sia S = (U,I) una L-struttura.

- La definizione induttiva di I(t) garantisce che per ogni termine $t \in GT(L_U)$:

$$I(t) \in U.$$

- t denota l'oggetto I(t).

Esempio.

Si consideri questo linguaggio L adeguato al contesto dell'Aritmetica:

- $C(L) = \{0, 1\}$,
- $F(L) = \{+, \times\}$ con entrambi i simboli di arità 2.

- Sia $N = (\mathbb{N}, I)$ una L-struttura ($\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$, proprio i numeri naturali), dove:
- $I(0) = 0$, $I(1) = 1$, $I(+) = \{(a,b,a+b) : a,b \in \mathbb{N}\}$, $I(\times) = \{(a,b,ab) : a,b \in \mathbb{N}\}$.

- $(1 + 0) \times (1 + (1 + 1))$ è un termine ground ($\in GT(L)$).
  - $I(\ (1 + 0) \times (1 + (1 + 1))\ ) = 3 \quad (3 \in \mathbb{N})$.
- $c_{12} + (c_{15} \times c_2)$ è un termine ground ($\in GT(L_N)$).
  - $I(\ c_{12} + (c_{15} \times c_2)\ ) = 42 \quad (42 \in \mathbb{N})$.

Esempio.

Si consideri questo linguaggio L adeguato al contesto dell'Aritmetica:

- $C(L) = \{0, 1\}$,
- $F(L) = \{+, \times\}$ con entrambi i simboli di arità 2.

- Sia $V = (\{pippo, pluto, topolino\}, J)$ una L-struttura, dove:
- $J(0) = pippo$, $J(1) = pluto$, $J(+) = \{(a,b,a) : a,b \in V\}$, $J(\times) = \{(a,b,b) : a,b \in V\}$.

- $(1 + 0) \times (1 + (1 + 1))$ è un termine ground ($\in GT(L)$).
  - $J(\ (1 + 0) \times (1 + (1 + 1))\ ) = pluto \quad (pluto \in V)$.
- $c_{pippo} + (c_{pluto} \times c_{topolino})$ è un termine ground ($\in GT(L_V)$).
  - $J(\ c_{pippo} + (c_{pluto} \times c_{topolino})\ ) = pippo \quad (pippo \in V)$.

Semantica: Interpretazione degli enunciati

Enunciati su L_U

Sia L un linguaggio, e sia S = (U,I) una L-struttura.

L'insieme $E(L_U)$ degli enunciati su L_U è l'insieme delle fbf su L_U prive di variabili libere: $E(L_U) = \{A \in FBF(L_U) : libere(A) = \emptyset\}$.

Se A e B sono enunciati ($A,B \in E(L_U)$), cioè $libere(A) = libere(B) = \emptyset$) allora anche $\bot$, $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ lo sono ($\in E(L_U)$).

Se A è un enunciato, e x una variabile, anche $\forall x\, A$ ed $\exists x\, A$ lo sono:

$$libere(\forall x\, A) = libere(\exists x\, A) = libere(A) \setminus \{x\} = \emptyset \setminus \{x\} = \emptyset.$$

Il caso interessante è quando A è una fbf con $libere(A) \subseteq \{x\}$.

Allora $\forall x\, A$ ed $\exists x\, A$ sono enunciati:

$$libere(\forall x\, A) = libere(\exists x\, A) = libere(A) \setminus \{x\} = \emptyset.$$

Interpretazione degli enunciati

Sia L un linguaggio, e sia S = (U,I) una L-struttura.

Allora, l'interpretazione I(A) di ogni enunciato $A \in E(L_U)$, è data induttivamente:

- Se $P \in P(L)$, e $t_1, t_2, \ldots, t_n \in GT(L_U)$, allora:

  $I(P(t_1, t_2, \ldots, t_n)) := T$ se $(I(t_1), I(t_2), \ldots, I(t_n)) \in I(P)$;

  $I(P(t_1, t_2, \ldots, t_n)) := F$ se $(I(t_1), I(t_2), \ldots, I(t_n)) \notin I(P)$.

Interpretazione degli enunciati

Sia L un linguaggio, e sia S = (U,I) una L-struttura.

Se A e B sono enunciati (A,B $\in$ E(L_U)) allora:

- I($\bot$) := F.
- I($\neg$A) := T se I(A) = F; I($\neg$A) := F se I(A) = T.
- I(A$\wedge$B) := T se I(A) = T e I(B) = T; I(A$\wedge$B) := F altrimenti.
- I(A$\vee$B) := T se I(A) = T o I(B) = T; I(A$\vee$B) := F altrimenti.
- I(A $\rightarrow$ B) := T se I(A) = F o I(B) = T; I(A $\rightarrow$ B) := F altrimenti.
- I(A $\leftrightarrow$ B) := T se I(A) = I(B); I(A $\leftrightarrow$ B) := F altrimenti.

Interpretazione degli enunciati

Sia L un linguaggio, e sia S = (U,I) una L-struttura.

- Sia A una formula ($A \in FBF(L_U)$).
- Sia x una variabile
- Sia c una costante ($c \in C(L_U)$).

- Allora con la scrittura A[x:c] intendiamo la formula ottenuta rimpiazzando in A, ogni occorrenza libera di x, con c.

- $A[x:c] \in FBF(L_U)$.
- x non occorre libera in A[x:c].
- Se libere(A) $\subseteq \{x\}$, allora A[x:c] è un enunciato, vale a dire che $A[x:c] \in E(L_U)$.

Interpretazione degli enunciati

Sia L un linguaggio, e sia S = (U,I) una L-struttura.

Se $\forall$x A è un enunciato (libere($\forall$x A)=$\emptyset$, cioè libere(A)$\subseteq$\{x\}) allora:

- I($\forall$x A) := T se per ogni a $\in$ U, I(A[x:c_a]) = T;
- I($\forall$x A) := F altrimenti.

Se $\exists$x A è un enunciato (libere($\exists$ x A)=$\emptyset$, cioè, libere(A)$\subseteq$\{x\}) allora:

- I($\exists$x A) := T se per almeno un a $\in$ U, I(A[x:c_a]) = T;
- I($\exists$x A) := F altrimenti.

Interpretazione degli enunciati

Remember

- Quantified sentences make claims about some non-empty intended domain of discourse.
- A sentence of the form $\forall x\, S(x)$ is true if and only if the wff $S(x)$ is satisfied by every object in the domain of discourse.
- A sentence of the form $\exists x\, S(x)$ is true if and only if the wff $S(x)$ is satisfied by some object in the domain of discourse.

La formalizzazione rigorosa è data nel capitolo 18!

Interpretazione degli enunciati

Sia L un linguaggio, e sia S = (U,I) una L-struttura.

- La definizione induttiva di I(A) garantisce che per ogni enunciato $A \in E(L_U)$:

$$I(A) \in \{ F, T \}.$$

- A è vera nella struttura S = (U,I), sse $I(A) = T$.

- In particolare, siamo interessati solo agli enunciati $A \in E(L)$:
  - Li possiamo scrivere per ogni L-struttura;
  - Gli enunciati in $E(L_U)$ sono solo strumentali a dare la semantica di quelli in $E(L)$.

Interpretazione degli enunciati

Sia L un linguaggio, e sia S = (U,I) una L-struttura.

- La definizione induttiva di I(A) garantisce che per ogni enunciato $A \in E(L_U)$:

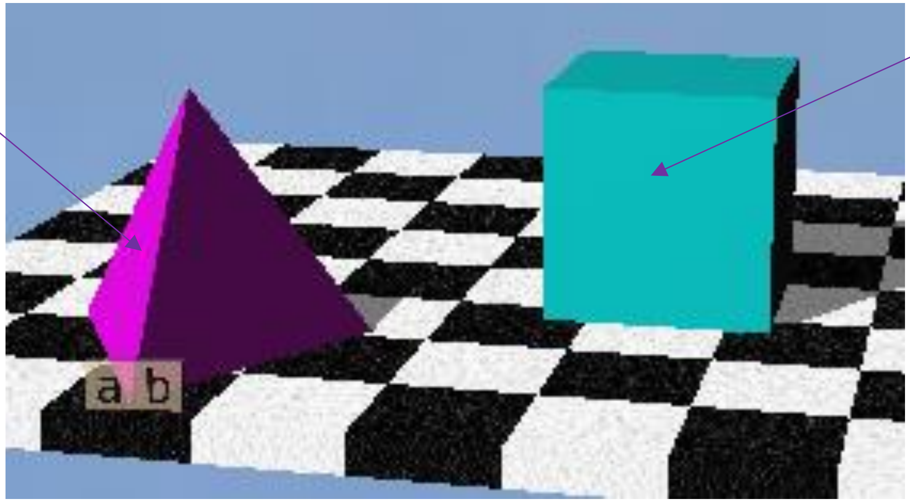
$$I(A) \in \{ F, T \}.$$

- A è vera nella struttura S = (U,I), sse $I(A) = T$.

- In ogni fissata L-struttura S, ogni L-enunciato ha un preciso valore di verità: o è vero oppure è falso.

Esempio.

c_0 c_1



Vista «concreta»: un mondo dei blocchi

$\exists$x Tet(x) è vera?

- Tet(c_0) = Tet(x)[x:c_0] è vera.
- Infatti I(c_0) = a_0 e $a_0 \in$ I(Tet).

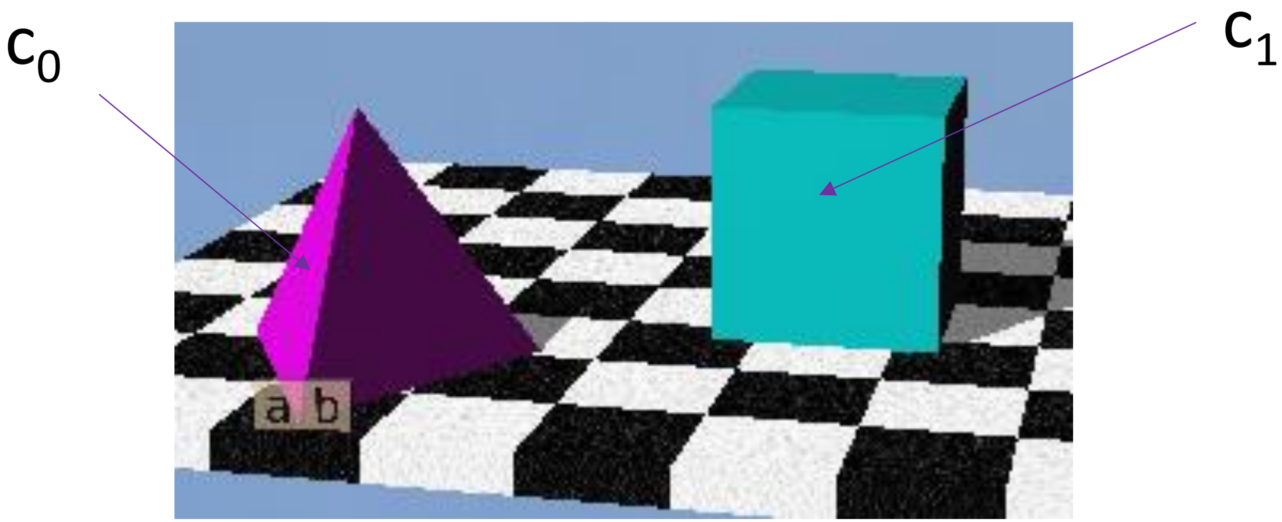
$\exists$x Tet(x) è vera perché è soddisfatta da almeno un oggetto di U.

«Vista astratta»: L-struttura:

S = (U,I), dove:

U = { a_0, a_1 },
I(a) = a_0, I(b) = a_0,
I(c_0) = a_0, I(c_1) = a_1,
I(Tet) = {a_0},
I(Cube) = {a_1},
I(Dodec) = $\emptyset$,
I(BackOf) = { (a_1,a_0) },
I(FrontOf) = { (a_0,a_1) },
I(SameShape) =
{(a_0,a_0),(a_1,a_1)},
…

Esempio.



Vista «concreta»: un mondo dei blocchi

$\exists$x BackOf(x,a) è vera?

- BackOf(c_1,a) = BackOf(x,a)[x:c_1] è vera.
- Infatti I(c_1) = a_1, I(a) = a_0 e (a_1, a_0) $\in$ I(BackOf).

$\exists$x BackOf(x,a) è vera perché è soddisfatta da almeno un oggetto di U.

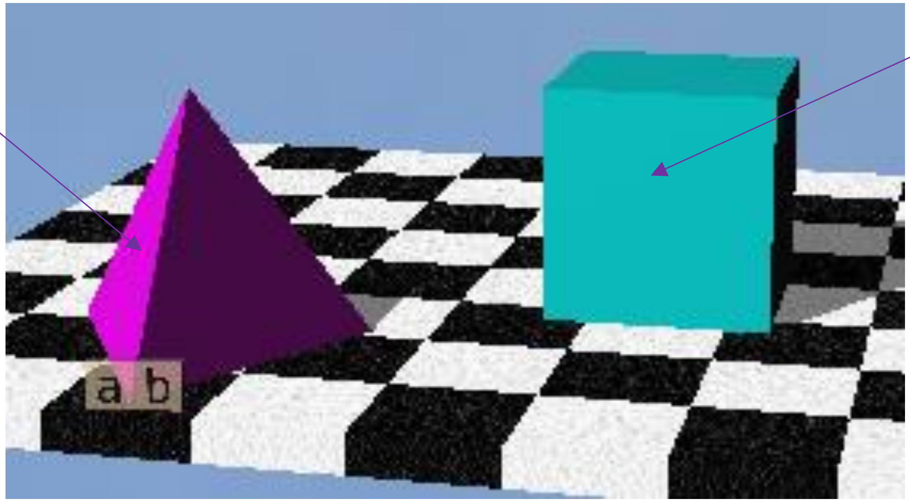
«Vista astratta»: L-struttura:

S = (U,I), dove:

U = { a_0, a_1 },
I(a) = a_0, I(b) = a_0,
I(c_0) = a_0, I(c_1) = a_1,
I(Tet) = {a_0},
I(Cube) = {a_1},
I(Dodec) = $\emptyset$,
I(BackOf) = { (a_1,a_0) },
I(FrontOf) = { (a_0,a_1) },
I(SameShape) =
{(a_0,a_0),(a_1,a_1)},
…

Esempio.

c_0 c_1



Vista «concreta»: un mondo dei blocchi

$\forall$x BackOf(x,a) è vera?

- BackOf(c_1,a) = BackOf(x,a)[x:c_1] è vera;
- BackOf(c_0,a) = BackOf(x,a)[x:c_0] è falsa.

$\forall$x BackOf(x,a) è falsa perché non è soddisfatta da tutti gli oggetti di U.

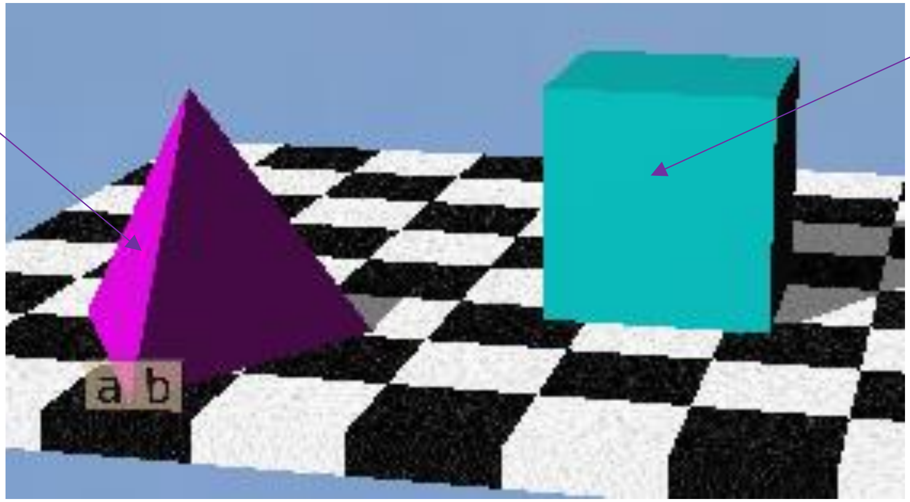
«Vista astratta»: L-struttura:

S = (U,I), dove:

U = { a_0, a_1 },
I(a) = a_0, I(b) = a_0,
I(c_0) = a_0, I(c_1) = a_1,
I(Tet) = {a_0},
I(Cube) = {a_1},
I(Dodec) = $\emptyset$,
I(BackOf) = { (a_1,a_0) },
I(FrontOf) = { (a_0,a_1) },
I(SameShape) =
{(a_0,a_0),(a_1,a_1)},
…

Esercizio: completare.

c_0



c_1

I(SameSize) = ?
I(RightOf) = ?
I(LeftOf) = ?
I(Larger) = ?
I(Smaller) = ?

$\forall x$ SameSize(x, b) è vera?
$\forall x\, \exists y$ SameSize(x, y) è vera?
$\forall x\, \forall y$ SameSize(x, y) è vera?
$\forall x$ SameSize(x, x) è vera?

Interpretazione delle formule aperte

Sia L un linguaggio, e sia S = (U,I) una L-struttura.

Se fossimo proprio interessati ad attribuire un valore di verità a una formula aperta $A \in FBF(L)$?

Si usa, per definizione, la chiusura universale di A:

- $I(A) := I(\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n A)$ dove $libere(A) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Nota: A è vera in S (cioè I(A) = T) sse $\neg A$ è insoddisfacibile, cioè non esiste $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in U^n$ tale che $\neg A(c_1, c_2, \dots, c_n)$ sia vera (dove c_i è il «nome nuovo» di a_i).

Le quattro forme aristoteliche

Le quattro forme aristoteliche

Le forme aristoteliche sono di fondamentale importanza nella traduzione dal linguaggio naturale:

Ogni P è Q	$\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$
Qualche P è Q	$\exists\, x\,(P(x) \wedge Q(x))$
Nessun P è Q	$\forall x\,(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$
Qualche P non è Q	$\exists\, x\,(P(x) \wedge \neg Q(x))$

Le quattro forme aristoteliche

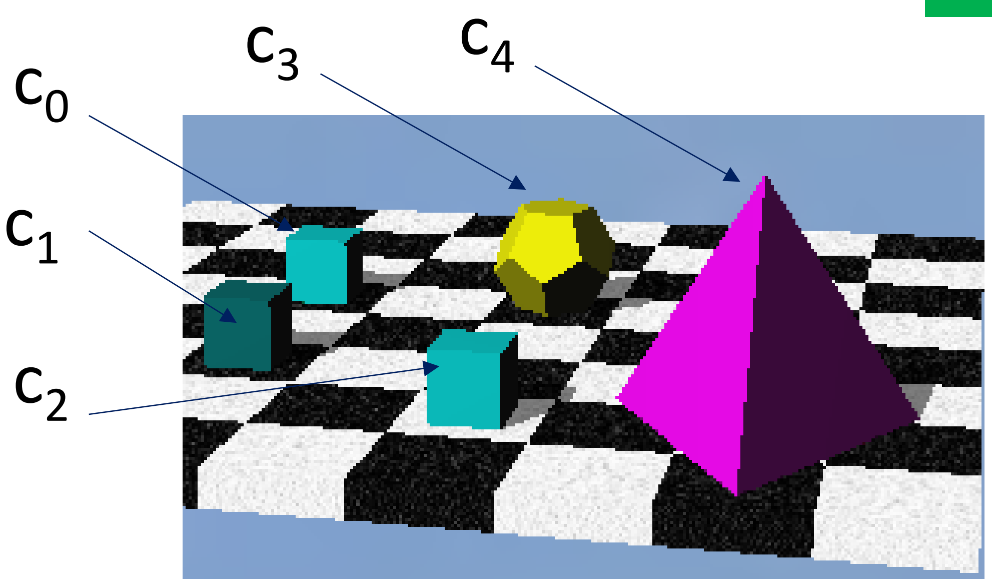
Remember

The four Aristotelian forms are translated as follows:

All P's are Q's.	$\forall x\,(P(x) \to Q(x))$
Some P's are Q's.	$\exists x\,(P(x) \land Q(x))$
No P's are Q's.	$\forall x\,(P(x) \to \neg Q(x))$
Some P's are not Q's.	$\exists x\,(P(x) \land \neg Q(x))$

Esempio: Forma 1.

- Tutti i cubi sono piccoli: vera (nel mondo in esempio)



$I(\forall x\,(Cube(x) \rightarrow Small(x))) = ?$

Guardo solo i cubi:

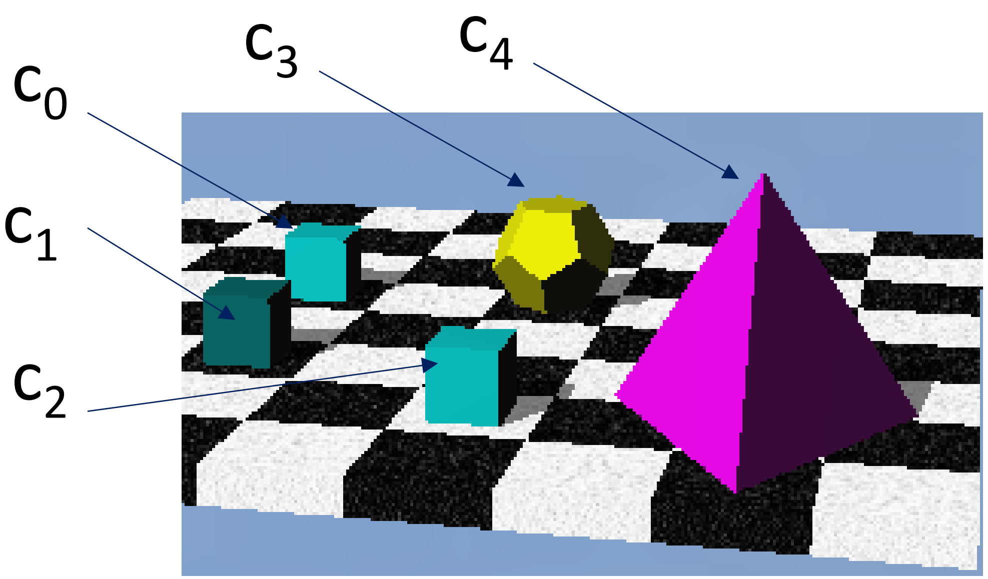
- $I(Cube(c_0) \rightarrow Small(c_0)) = T$
- $I(Cube(c_1) \rightarrow Small(c_1)) = T$
- $I(Cube(c_2) \rightarrow Small(c_2)) = T$

Gli altri non stiamo neanche a considerarli, l'antecedente è falso e quindi l'implicazione vera.

Spiegate perché la traduzione $\forall x\,(Cube(x) \land Small(x))$ è sbagliata.

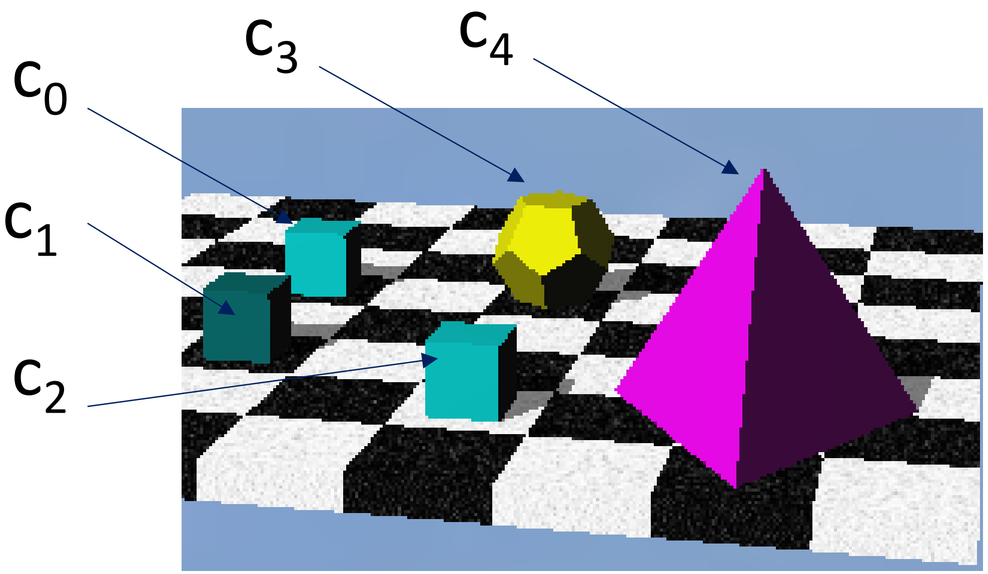
Esempio: Forma 1.

- Tutti i cubi sono piccoli:
- Traduzione: $\forall x\ (Cube(x) \to Small(x))$.
- Verifica della traduzione con l'interpretazione:
- $S = (U,I)$, con $U = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\}$.
- $I(\ \forall x\ (Cube(x) \to Small(x))\ ) = T$ se e solo se
  - Per ogni $a_i \in U$:
  - $I\ ((Cube(x) \to Small(x))\ [x:c_i]) = T$.
    - a_0: $I(\ Cube(c_0) \to Small(c_0)\ ) = T$,
    - a_1: $I(\ Cube(c_1) \to Small(c_1)\ ) = T$,
    - a_2: $I(\ Cube(c_2) \to Small(c_2)\ ) = T$,
    - a_3: $I(\ Cube(c_3) \to Small(c_3)\ ) = T$,
    - a_4: $I(\ Cube(c_4) \to Small(c_4)\ ) = T$.
- $I(\ \forall x\ (Cube(x) \to Small(x))\ ) = T$, e dunque:
- $\forall x\ (Cube(x) \to Small(x))$ è vera in S.



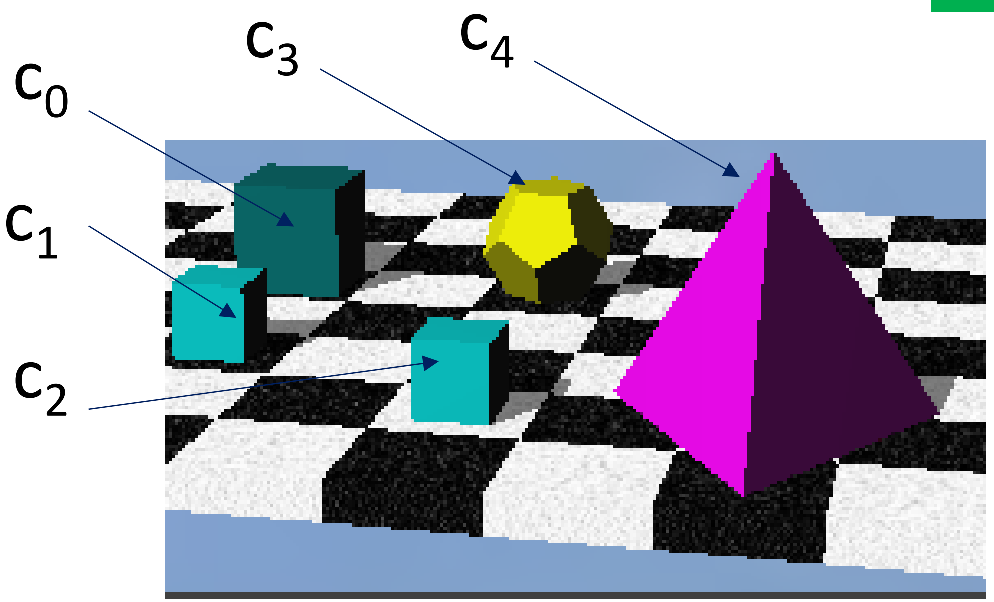
Esempio: Forma 1.

- Tutti i cubi sono piccoli:
- Traduzione (errata): $\forall x\ (Cube(x) \wedge Small(x))$.
- Verifica della traduzione con l'interpretazione:
- $S = (U,I)$, con $U = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\}$.
- $I(\ \forall x\ (Cube(x) \wedge Small(x))\ ) = T$ se e solo se
  - Per ogni $a_i \in U$:
  - $I\ ((Cube(x) \wedge Small(x))\ [x{:}c_i]) = T$.
    - a_0: $I(\ Cube(c_0) \wedge Small(c_0)\ ) = T$,
    - a_1: $I(\ Cube(c_1) \wedge Small(c_1)\ ) = T$,
    - a_2: $I(\ Cube(c_2) \wedge Small(c_2)\ ) = T$,
    - a_3: $I(\ Cube(c_3) \wedge Small(c_3)\ ) = F$,
    - a_4: $I(\ Cube(c_4) \wedge Small(c_4)\ ) = F$.
- $I(\ \forall x\ (Cube(x) \wedge Small(x))\ ) = F$, e dunque:
- $\forall x\ (Cube(x) \wedge Small(x))$ è falsa in S.



Esempio: Forma 2.

- Qualche cubo è piccolo: vera (nel mondo in esempio)



$I(\exists x\,(Cube(x) \wedge Small(x))) = ?$

Guardo che ci sia almeno un cubo che sia anche piccolo:

- $I(Cube(c_1) \wedge Small(c_1)) = T$

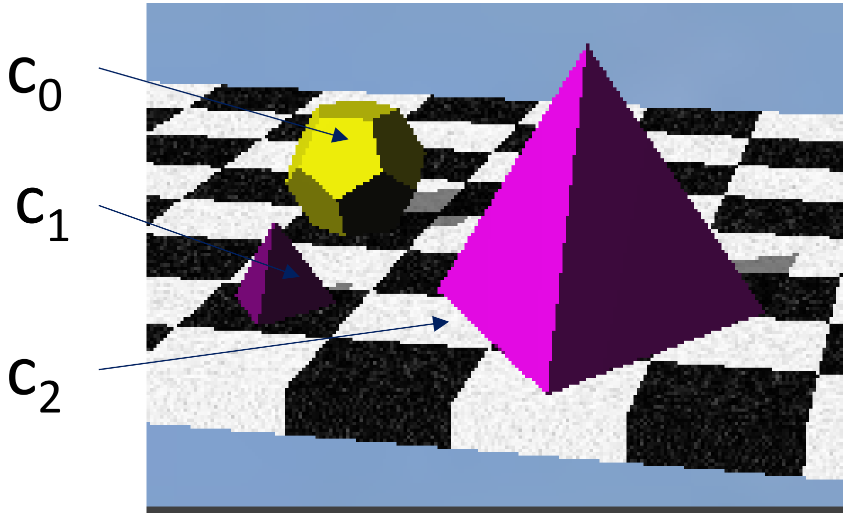
Se c'è, il risultato è T,

(se non ce ne sono il risultato è F)

Spiegate perché la traduzione $\exists x\,(Cube(x) \rightarrow Small(x))$ è sbagliata.

Esempio: Forma 2.

- Qualche cubo è piccolo: falsa (nel mondo in esempio)



$I\,(\exists x\,(Cube(x) \wedge Small(x))\,) = ?$

- $I(\,Cube(c_0) \wedge Small(c_0)\,) = F$
- $I\,(Cube(c_1) \wedge Small(c_1)\,) = F$
- $I\,(Cube(c_2) \wedge Small(c_2)\,) = F$

Dunque il risultato è F.

$I\,(\exists x\,(Cube(x) \rightarrow Small(x))\,) = ?$

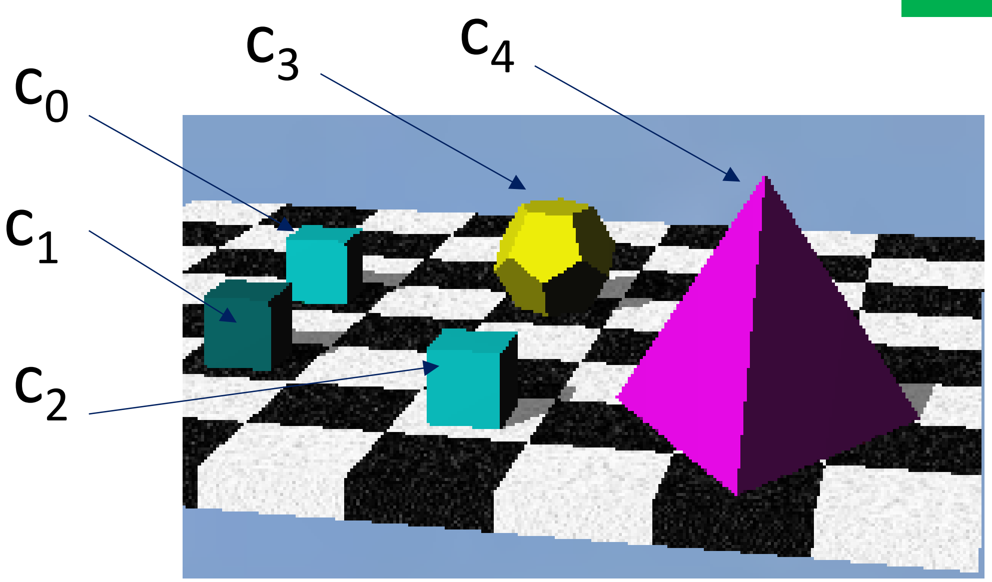
- $I(\,Cube(c_0) \rightarrow Small(c_0)\,) = T$

Dunque il risultato è T.

(Questo mostra che la traduzione $\exists x\,(Cube(x) \rightarrow Small(x))$ è errata).

Esempio: Forma 3.

- Nessun cubo è grande: vera (nel mondo in esempio)



$I\,(\forall x\,(Cube(x) \rightarrow \neg Large\,(x))\,) = ?$

Guardo solo i cubi, nessuno deve essere grande:

- $I\,(Cube(c_0) \rightarrow \neg Large(c_0)\,) = T$
- $I\,(Cube(c_1) \rightarrow \neg Large(c_1)\,) = T$
- $I\,(Cube(c_2) \rightarrow \neg Large(c_2)\,) = T$

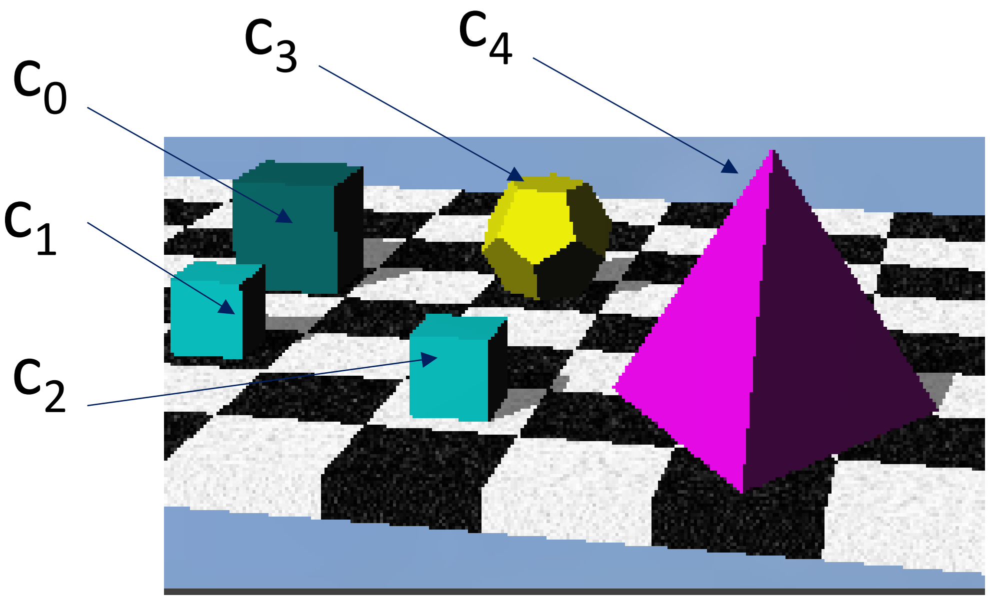
Dunque il risultato è T.

Spiegate perché la traduzione $\forall x\,(Cube(x) \wedge \neg Large(x))$ è sbagliata.

La traduzione $\neg\exists x(Cube(x) \wedge Large(x))$ è corretta?

Esempio: Forma 4.

- Qualche cubo non è piccolo: vera (nel mondo in esempio)



I($\exists x$ (Cube(x) $\wedge$ $\neg$Small(x))) = ?
Guardo che ci sia almeno un cubo e che non sia piccolo:

- I (Cube(c_0) $\wedge$ $\neg$Small(c_0)) = T

Se c'è, il risultato è T;
se non ce ne sono il risultato è F.

Spiegate perché la traduzione $\exists x$ (Cube(x) $\rightarrow$ $\neg$Small(x)) è sbagliata.

Esempio: Nella struttura N = (ℕ, I):

- L un linguaggio adeguato per l'Aritmetica.
- C(L) = {0}, F(L) = {s/1, +/2, $\times$/2},
- P(L) = {=/2, Even/1, Odd/1}.
- N = (ℕ, I), dove ℕ = {0,1,2,…}, e
- I(0) = 0,
- I(s) = {(a, a+1) : a $\in$ ℕ}, I(+) = {(a,b,a+b) : a,b $\in$ ℕ}, I($\times$) = {(a,b,ab) : a,b $\in$ ℕ},
- I(=) = {(a,a) : a $\in$ ℕ},
- I(Even) = {a : a divisibile per 2},
- I(Odd) = {a : a non divisibile per 2}.

con «simbolo/*n*» intediamo che simbolo è *n*-ario.

NB: questa è l'interpretazione fissata di «=» in ogni struttura.

$\forall$x (Even(x) $\to$ Odd(s(x))): Cosa traduce questo enunciato?

E' vero o falso in N?

Esempio: Nella struttura N = ($\mathbb{N}$, I):

- L un linguaggio adeguato per l'Aritmetica.
- C(L) = {0}, F(L) = {s/1, +/2, $\times$/2},
- P(L) = {=/2, Even/1, Odd/1}.
- N = ($\mathbb{N}$, I), dove $\mathbb{N}$ = {0,1,2,…}, e
- I(0) = 0,
- I(s) = {(a, a+1) : a $\in \mathbb{N}$}, I(+) = {(a,b,a+b) : a,b $\in \mathbb{N}$}, I($\times$) = {(a,b,ab) : a,b $\in \mathbb{N}$},
- I(=) = {(a,a) : a $\in \mathbb{N}$},
- I(Even) = {a : a divisibile per 2},
- I(Odd) = {a : a non divisibile per 2}.

con «simbolo/*n*» intediamo che simbolo è *n*-ario.

NB: questa è l'interpretazione fissata di «=» in ogni struttura.

I($\forall$x (Even(x) $\rightarrow$ Odd(s(x)))) = T   se e solo se:

Per ogni $n \in \mathbb{N}$:   I(Even(x) $\rightarrow$ Odd(s(x))[x:c_n])= T:

Esempio: Nella struttura N = ($\mathbb{N}$, I):

- L un linguaggio adeguato per l'Aritmetica.
- C(L) = {0}, F(L) = {s/1, +/2, $\times$/2},
- P(L) = {=/2, Even/1, Odd/1}.
- N = ($\mathbb{N}$, I), dove $\mathbb{N}$ = {0,1,2,…}, e
- I(0) = 0,
- I(s) = {(a, a+1) : a $\in \mathbb{N}$}, I(+) = {(a,b,a+b) : a,b $\in \mathbb{N}$}, I($\times$) = {(a,b,ab) : a,b $\in \mathbb{N}$},
- I(=) = {(a,a) : a $\in \mathbb{N}$},
- I(Even) = {a : a divisibile per 2},
- I(Odd) = {a : a non divisibile per 2}.

con «simbolo/*n*» intediamo che simbolo è *n*-ario.

NB: questa è l'interpretazione fissata di «=» in ogni struttura.

I($\forall$x (Even(x) $\rightarrow$ Odd(s(x)))) = T   se e solo se:

Per ogni $n \in \mathbb{N}$:   I(Even(c_n) $\rightarrow$ Odd(s(c_n)))= T:

Esempio: Nella struttura N = ($\mathbb{N}$, I):

- L un linguaggio adeguato per l'Aritmetica.
- C(L) = {0}, F(L) = {s/1, +/2, $\times$/2},
- P(L) = {=/2, Even/1, Odd/1}.
- N = ($\mathbb{N}$, I), dove $\mathbb{N}$ = {0,1,2,…}, e
- I(0) = 0,
- I(s) = {(a, a+1) : a $\in \mathbb{N}$}, I(+) = {(a,b,a+b) : a,b $\in \mathbb{N}$}, I($\times$) = {(a,b,ab) : a,b $\in \mathbb{N}$},
- I(=) = {(a,a) : a $\in \mathbb{N}$},
- I(Even) = {a : a divisibile per 2},
- I(Odd) = {a : a non divisibile per 2}.

con «simbolo/*n*» intediamo che simbolo è *n*-ario.

NB: questa è l'interpretazione fissata di «=» in ogni struttura.

I($\forall$x (Even(x) $\rightarrow$ Odd(s(x)))) = T se e solo se:

Per ogni $n \in \mathbb{N}$: I(Even(c_n) $\rightarrow$ Odd(c_{n+1}))= T:

Esempio: Nella struttura N = ($\mathbb{N}$, I):

- L un linguaggio adeguato per l'Aritmetica.
- C(L) = {0}, F(L) = {s/1, +/2, $\times$/2},
- P(L) = {=/2, Even/1, Odd/1}.
- N = ($\mathbb{N}$, I), dove $\mathbb{N}$ = {0,1,2,…}, e
- I(0) = 0,
- I(s) = {(a, a+1) : a $\in \mathbb{N}$}, I(+) = {(a,b,a+b) : a,b $\in \mathbb{N}$}, I($\times$) = {(a,b,ab) : a,b $\in \mathbb{N}$},
- I(=) = {(a,a) : a $\in \mathbb{N}$},
- I(Even) = {a : a divisibile per 2},
- I(Odd) = {a : a non divisibile per 2}.

con «simbolo/*n*» intediamo che simbolo è *n*-ario.

NB: questa è l'interpretazione fissata di «=» in ogni struttura.

I($\forall$x (Even(x) $\rightarrow$ Odd(s(x)))) = T se e solo se:

Per ogni $n \in \mathbb{N}$: I(Even(c_n)) = F o I(Odd(c_{n+1}))= T:

Esempio: Nella struttura N = ($\mathbb{N}$, I):

- L un linguaggio adeguato per l'Aritmetica.
- C(L) = {0}, F(L) = {s/1, +/2, $\times$/2},
- P(L) = {=/2, Even/1, Odd/1}.
- N = ($\mathbb{N}$, I), dove $\mathbb{N}$ = {0,1,2,…}, e
- I(0) = 0,
- I(s) = {(a, a+1) : a $\in \mathbb{N}$}, I(+) = {(a,b,a+b) : a,b $\in \mathbb{N}$}, I($\times$) = {(a,b,ab) : a,b $\in \mathbb{N}$},
- I(=) = {(a,a) : a $\in \mathbb{N}$},
- I(Even) = {a : a divisibile per 2},
- I(Odd) = {a : a non divisibile per 2}.

con «simbolo/*n*» intediamo che simbolo è *n*-ario.

NB: questa è l'interpretazione fissata di «=» in ogni struttura.

I($\forall$x (Even(x) $\rightarrow$ Odd(s(x)))) = T   se e solo se:

Per ogni $n \in \mathbb{N}$:   I(c_n) $\notin$ I(Even) o I(c_{n+1}) $\in$ I(Odd):

Esempio: Nella struttura N = ($\mathbb{N}$, I):

- L un linguaggio adeguato per l'Aritmetica.
- C(L) = {0}, F(L) = {s/1, +/2, $\times$/2},
- P(L) = {=/2, Even/1, Odd/1}.
- N = ($\mathbb{N}$, I), dove $\mathbb{N}$ = {0,1,2,…}, e
- I(0) = 0,
- I(s) = {(a, a+1) : a $\in \mathbb{N}$}, I(+) = {(a,b,a+b) : a,b $\in \mathbb{N}$}, I($\times$) = {(a,b,ab) : a,b $\in \mathbb{N}$},
- I(=) = {(a,a) : a $\in \mathbb{N}$},
- I(Even) = {a : a divisibile per 2},
- I(Odd) = {a : a non divisibile per 2}.

con «simbolo/*n*» intediamo che simbolo è *n*-ario.

NB: questa è l'interpretazione fissata di «=» in ogni struttura.

I($\forall$x (Even(x) $\rightarrow$ Odd(s(x)))) = T   se e solo se:

Per ogni $n \in \mathbb{N}$: $n \notin$ {a : a divisibile per 2} o n+1 $\in$ {a : a non divisibile per 2}.

Esempio: Nella struttura $N = (\mathbb{N}, I)$:

- L un linguaggio adeguato per l'Aritmetica.
- $C(L) = \{0\}$, $F(L) = \{s/1, +/2, \times/2\}$,
- $P(L) = \{=/2, Even/1, Odd/1\}$.
- $N = (\mathbb{N}, I)$, dove $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$, e
- $I(0) = 0$,
- $I(s) = \{(a, a+1) : a \in \mathbb{N}\}$, $I(+) = \{(a,b,a+b) : a,b \in \mathbb{N}\}$, $I(\times) = \{(a,b,ab) : a,b \in \mathbb{N}\}$,
- $I(=) = \{(a,a) : a \in \mathbb{N}\}$,
- $I(Even) = \{a : a$ divisibile per $2\}$,
- $I(Odd) = \{a : a$ non divisibile per $2\}$.

con «simbolo/*n*» intediamo che simbolo è *n*-ario.

NB: questa è l'interpretazione fissata di «=» in ogni struttura.

$I(\ \forall x\ (Even(x) \to Odd(s(x)))\ ) = T$ se e solo se:

Per ogni $n \in \mathbb{N}$: n non è divisibile per 2 o $n+1$ non è divisibile per 2.

Esempio: Nella struttura N = ($\mathbb{N}$, I):

Rivediamo i passaggi:

$\forall x\,(\mathrm{Even}(x) \rightarrow \mathrm{Odd}(s(x)))$ vera in N = ($\mathbb{N}$, I) se e solo se

$I(\ \forall x\,(\mathrm{Even}(x) \rightarrow \mathrm{Odd}(s(x)))\ ) = T$ se e solo se:

Per ogni $n \in \mathbb{N}$: $I(\ \mathrm{Even}(x) \rightarrow \mathrm{Odd}(s(x))[x{:}c_n]\ )= T$:

Per ogni $n \in \mathbb{N}$: $I(\ \mathrm{Even}(c_n) \rightarrow \mathrm{Odd}(s(c_n))\ )= T$:

Per ogni $n \in \mathbb{N}$: $I(\ \mathrm{Even}(c_n) \rightarrow \mathrm{Odd}(c_{n+1})\ )= T$:

Per ogni $n \in \mathbb{N}$: $I(\ \mathrm{Even}(c_n)\ ) = F$ o $I(\ \mathrm{Odd}(c_{n+1})\ )= T$:

Per ogni $n \in \mathbb{N}$: $I(c_n) \notin I(\mathrm{Even})$ o $I(c_{n+1}) \in I(\mathrm{Odd})$:

Per ogni $n \in \mathbb{N}$: $n \notin \{a : a$ divisibile per $2\}$ o

$n+1 \in \{a : a$ non divisibile per $2\}$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$: n non è divisibile per 2 o $n+1$ non è divisibile per 2.

Esempio. Nella struttura $N = (\mathbb{N}, I)$:

$I(\ \forall x\ (Even(x) \rightarrow Odd(s(x)))\ ) = T$ se e solo se:

Per ogni $n \in \mathbb{N}$: n non è divisibile per 2 o n+1 non è divisibile per 2.

Dunque $\forall x\ (Even(x) \rightarrow Odd(s(x)))$ traduce:

«se n è divisibile per 2 allora n+1 non è divisibile per 2», cioè:

«se n è pari allora n+1 è dispari».

E' una forma aristotelica del primo tipo: «ogni P è Q».

«Ogni x pari è tale che x+1 è dispari».

Esercizio. Nella struttura N = ($\mathbb{N}$, I):

$\forall x\,(Even(x) \rightarrow Odd(s(x)))$ è vera in N.

Traduce «se n è pari allora n+1 è dispari».

$\exists x\,(Even(x) \wedge Odd(s(x)))$ è vera in N?

Cosa traduce?

$\forall x\,(Odd(x) \rightarrow \neg Even(x)))$ è vera in N?

Cosa traduce?

$\exists x\,(Even(x) \wedge \neg Odd(s(x)))$ è vera in N?

Cosa traduce?

Esercizio. Nella struttura $N = (\mathbb{N}, I)$:

$\forall x\,(Even(x) \land Odd(s(x)))$ è vera in N?

Cosa traduce?

$\exists x\,(Even(x) \rightarrow Odd(s(x)))$ è vera in N?

Cosa traduce?

$\forall x\,(Odd(x) \land \neg Even(x))$ è vera in N?

Cosa traduce?

$\exists x\,(Even(x) \rightarrow \neg Odd(s(x)))$ è vera in N?

Cosa traduce?

Esercizio. Nella struttura N = ($\mathbb{N}$, I):

Traducete: «se n è pari anche il suo quadrato lo è».

E’ vera in N?

Traducete: «se n è dispari il suo doppio non lo è».

E’ vera in N?

Traducete: «nessun n pari è tale che il suo successore ne è il doppio».

E’ vera in N?

Traducete: «esiste n dispari tale che il suo successore ne è il doppio».

E’ vera in N?

Traduzione passo-passo

Forme aristoteliche annidate e traduzione passo-passo

Alcune frasi contengono più quantificazioni annidate, espresse in forme aristoteliche.

Un approccio sistematico consente di tradurle in FOL, trattando una quantificazione alla volta (*step-by-step translation method).*

Ogni cubo è a sinistra di un tetraedro:

Ogni cubo ha la proprietà (di essere a sinistra di un tetraedro):

$\forall$x (Cube(x) $\rightarrow$ (*x è a sinistra di un tetraedro*)):

$\forall$x (Cube(x) $\rightarrow$ (*c'è un tetraedro tale che x è alla sua sinistra*)):

$\forall x\,(\mathrm{Cube}(x) \rightarrow \exists y(\mathrm{Tet}(y) \wedge \mathrm{LeftOf}(x,y)))$.

Forme aristoteliche annidate. Esempio

Ogni blocco a destra di un cubo grande è piccolo:

Per ogni blocco x che ha la proprietà di essere a destra di un cubo grande $\rightarrow$ *x è piccolo :*

$\forall$x (*x ha la proprietà di essere a destra di un cubo grande)* $\rightarrow$ Small(x)):

$\forall$x (*c'è un cubo grande tale che x è alla sua destra)* $\rightarrow$ Small(x)):

$\forall$x ($\exists$y(Cube(y) $\land$ Large(y) $\land$ RightOf(x,y)) $\rightarrow$ Small(x)).

Forme aristoteliche annidate. Esempio

Qualche cubo è posto a destra di tutti i tetraedri:

Esiste un cubo x tale che per ogni tetraedro y, x è a destra di y:

Esiste un blocco che è un cubo x e che per ogni tetraedro y, x è a destra di y:

$\exists x\ (Cube(x) \land \forall y(Tet(y) \ \rightarrow RightOf(x,y)))$.

Forme aristoteliche annidate. Esempio

Nessun blocco è più grande di ogni blocco:

Ogni blocco è tale che non è vero che sia più grande di ogni blocco:

Ogni blocco x è tale che non è vero che per ogni blocco y, x è più grande di y:

$\forall x\ (\text{Blocco}(x) \rightarrow \neg\forall y(\text{Blocco}(y) \rightarrow \text{Larger}(x,y)))$:

Dato che non c'è bisogno del predicato Blocco (*ogni elemento di un mondo di blocchi è già un blocco)*:

$\forall x\ \neg\forall y\ \text{Larger}(x,y)$.

Riferimenti al libro di testo

- Chapter 9: 9.5, 9.6.
- Chapter 11: 11.3. Facoltativi 11.4, 11.5 (ulteriori aspetti del processo di traduzione dal linguaggio naturale).
- L’interpretazione formale degli enunciati nelle L-strutture, chiamate nel testo First-order structures è data, in modo diverso ma equivalente, in Chapter 18, 18.2.