ESERCIZIO 3

$$\underset{3\times3}{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \underset{3\times2}{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{2\times2}{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \underset{2\times2}{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Stabilire se i seguenti prodotti riga per colonna possono essere effettuati e in caso affermativo calcolarli

$A \cdot B$ sí

$B \cdot A$ NO

$B \cdot C$ sí

$C \cdot B$ NO

$C \cdot D$ sí

$D \cdot C$ sí

$$\underset{3\times 2}{A \cdot B} = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \underset{3\times 2}{B \cdot C} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \qquad \underset{2\times 2}{C \cdot D} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{2\times 2}{D \cdot C} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

no commutativo

ESERCIZIO 4

Date le matrici

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad B_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mostrare che

$$(A_0 + B_0)^2 \neq A_0^2 + 2 A_0 B_0 + B_0^2$$

come possiamo correggere la formula

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

affinché valga per tutte le matrici quadrate 2×2 ?

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A_0 + B_0)^2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^2$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -14 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\neq$$

$$A_0^2 + 2A_0B_0 + B_0^2 = \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$A_0^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$2A_0B_0 = 2 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B_0^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A_0 + B_0)^2 = (A_0 + B_0)(A_0 + B_0)$$

$$= A_0^2 + B_0A_0 + A_0B_0 + B_0^2 \quad \checkmark$$

ESERCIZIO 5

- Determinare due matrici A, B tali che AB esiste ma BA no
- Determinare due matrici A, B tali che AB e BA esistono ma $AB \neq BA$
- Determinare due matrici A e B con $A \neq 0$ e $B \neq 0$ ma $A \cdot B = 0$
- Determinare una matrice A quadrata, $A \neq I$ con $A^2 = A$
- Determinare $A \neq 0$ con $A^2 = 0$
- Determinare $A \neq I$ quadrata con $A^2 = I$

1)

$A_{m \times n} \quad B_{n \times p}$ con $m \neq p$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

---

2)

$A, B = Mat_{2 \times 2}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

---

3)

$A, B = Mat_{2 \times 2}$

$$A \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \qquad A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

oppure

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

---

4)

$A \in Mat_{2 \times 2} \qquad A \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e non nulla

$$A^2 = A \qquad \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^2+yz & xy+yt \\ zx+tz & zy+t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

---

5)

$A \in Mat_{2\times 2}$

$A^2 = 0$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

---

6)

$A \in Mat_{2\times 2} \quad A \neq I$

$A^2 = I \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

FORMA DI GAUSS e SISTEMI LINEARI

ESERCIZIO 1

Ridurre le seguenti matrici alla forma di Gauss:

$$M_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$M_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 7 \end{array}\right]$$

$$M_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -5 \\ 4 & -3 & -2 & -3 \\ 8 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

scambio R_1 con R_2 $= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ -1 & 7 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

$R_2 = R_2 - 2R_1$ $= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \\ -1 & 7 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

$R_3 = R_3 + R_1$ $= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$R_2 = R_2 / 5$ $= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/5 & 3/5 \\ 0 & 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$R_3 = R_3 - 6R_2$ $= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & -1-18/5 & -1-18/5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & -23/5 & -\frac{23}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3/-\frac{23}{5}]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow R_2 - 2R_1 \;/\; R_3 - 3R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow R_3 - R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -5 \\ 4 & -3 & -2 & -3 \\ 8 & -1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 4R_1}]{R_1/2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 & -5/2 \\ 0 & -5 & 0 & 7 \\ 0 & -5 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow R_2/-5 \;\backslash\; R_3 - R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & 0 & -7/5 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2

Risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 11x_3 + 9x_4 = 5 \\ -x_1 - 4x_2 + 10x_3 - 5x_4 = -1 \end{cases}$$

4 eq. 4 inc.

$$\underset{4\times 4}{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 2 & 5 & -11 & 9 & 5 \\ -1 & -4 & 10 & -5 & -1 \end{array}\right] = [A \mid b]_{4\times 5}$$

$$\underbrace{}_{= \underline{b}}$$

$$\Big\downarrow \begin{array}{l} R_2 - R_1 \\ R_3 - 2R_1 \mid R_4 + R_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 7 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

scambio R_2 e R_3

$$\Big\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 7 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-R_3 \\ R_4+R_2}]{R_2/3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -5/3 & 1/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_4 - 2R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -5/3 & 1/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cancel{2}\ 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow R_4/2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_2 - \frac{5}{3}x_3 \ \frac{1}{3}x_4 = \frac{5}{3} \\ x_3 - x_4 = 2 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$x_3 = 2$

$$x_2 - \frac{10}{3} = \frac{5}{3} \qquad x_2 = 5$$

$$x_1 + 5 - 6 = 0 \qquad x_1 = 1$$

Soluzione $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

ESERCIZIO 3

Date le matrici

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e il vettore $\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

risolvere il sistema lineare

$$M \underline{x} = N \underline{a}$$

con $\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

ESERCIZIO 4

- Si dia un esempio di sistema **DETERMINATO** con 3 equazioni e 2 incognite

Se ha 1 sol.

- Si dia un esempio di sistema **INDETERMINATO** con 3 equazioni e 2 incognite

Se ha sol. infinite det. da parametri

- Si dia un esempio di sistema **IMPOSSIBILE** con 3 equazioni e 2 incognite

Non ha sol

1) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \\ -2y = -2 \end{cases}$

↳ con Gauss viene riga $\emptyset$

3) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \\ 2x = 5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 4y = 2 \\ -x + 2y = -1 \end{cases}$

ESERCIZIO 5

Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, si stabilisca se il seguente sistema lineare è determinato, indeterminato o impossibile

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + y + 2z = 1 \\ 2x - 2y - az = 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO 6

Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si discuta l'esistenza di soluzioni per il seguente sistema (non è richiesto di risolverlo)

$$\begin{cases} x \qquad\qquad - w = 0 \\ \quad y - 2z + 2w = 1 \\ x + y - 2z + w = \alpha \end{cases}$$

ESERCIZIO 7

Siano dati la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$ e i vettori

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ a \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{con } a \in \mathbb{R}$$

al variare del parametro a stabilire se il sistema lineare

$$A\,\underline{x} = \underline{b}$$

è determinato, indeterminato o impossibile.

ESERCIZIO 8

Data la matrice $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

determinare tutte le matrici

$X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ tali che valga:

$$M X = X M$$

ESERCIZIO 9

Sia

$$M \underline{x} = \underline{b}$$

un sistema lineare di m equazioni in n incognite

Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono Vere o False:

a) se $\underline{b} = \underline{0}$ il sistema ha soluzioni

b) se $\text{rk}\, M = m$ allora il sistema ha soluzione

c) se $n \geq m$ allora il sistema ha soluzione

ESERCIZIO 10

Determinare il rango della matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 11

Discutere, al variare del parametro k, la risolubilità del sistema

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + kx_3 = -1 \\ 4kx_1 - 4kx_2 = 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 12

Si consideri il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x + (k+1)y = -1 \\ kx + 2y = -1 \\ -x - 2y = 1 \end{cases}$$

1. Si discuta la risolubilità al variare del parametro k
2. Si risolva il sistema per $k = 1$

Esercizi

$$x - y + t = -1$$
$$2x - 2y + z + 3t = 2$$
$$-x + y + 3z - t = 3$$

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 + R_1]{R_2 - 2R_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - 3R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & +10 \end{array}\right] \leftarrow -R_3$$

$$\begin{cases} x - y + t = -1 \\ z + t = 4 \\ t = 10 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x = y - 11 \\ z = -6 \\ t = 10 \end{array}$$

$$\text{Sol} = \begin{pmatrix} y - 11 \\ y \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \infty^1$$

Esercizio

$$\begin{cases} y + 2z = 3 \\ 2x + 3y + 6z = 0 \\ 4x + 7y + 14z = 6 \end{cases}$$

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 0 \\ 4 & 7 & 14 & 6 \end{array}\right] \quad \text{scambio}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 14 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1/2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 14 & 6 \end{array}\right]$$

$$R_3 - 4R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

IMPOSSIBILE