Teoria della calcolabilità

Domanda:

Esiste un problema che non ammette soluzione automatica?

Notazione per i programmi

$w \in \{0,1\}^*$ è la sintassi

$F_w : \{0,1\}^* \to \{0,1,1\}$ è la semantica

NOTA: i nostri programmi o non terminano oppure danno in uscita 0 o 1

$F_w(x)\downarrow$ su input x termina

$F_w(x)\uparrow$ su input x non termina

$F_w(x) = 0$

$F_w(x) = 1$

Definizione

La funzione caratteristica di un linguaggio L è:

$$\chi_L(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in L \\ 0 & \text{se } x \notin L \end{cases}$$

si chiama funzione caratteristica di L

risposta alla domanda: $x \in L$?

Esiste sempre $\forall L$!

Definizione:

Un linguaggio L è detto ricorsivo quando:
esiste un algoritmo ω t.c.:

$$F_\omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in L \\ 0 & \text{se } x \notin L \end{cases}$$

Inoltre:

Se L è ricorsivo allora:

- P_L è detto DECIDIBILE
  - ↳ (risolvibile in maniera automatica)
  - si usa algoritmo per L
- L ammette un sistema riconoscitivo

ESEMPI

- Problemi decidibili:
  - numeri pari
    Utilizziamo la funzione mod 2
  - numeri primi
    Dividiamo l'input per ogni numero da 2 a $\sqrt{n}$, dove n è input
- Linguaggi ricorsivi
  - $a^* b^* = \{ a^n b^m \mid n, m \geq 0 \}$
  - $\{ a^n b^n \mid n > 0 \}$

$\neq a^+ b^+$

Definizione

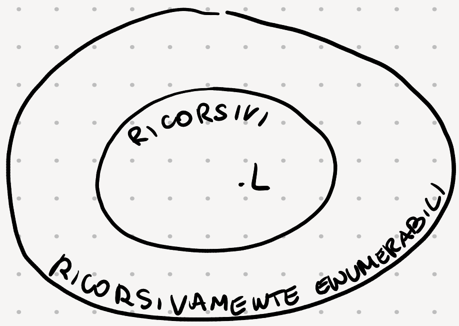
Un linguaggio L é ricorsivamente enumerabile quando:
esiste una procedura w t.c.

$$F_w(x) = \begin{cases} 1 & x \in L \\ \uparrow & x \notin L \end{cases}$$

Se L è ricorsivamente enumerabile allora:

- P_L é detto SEMIDECIDIBILE
  (ho una risposta solo in certi casi)
- L ammette un <u>sistema generativo</u>

Relazione:

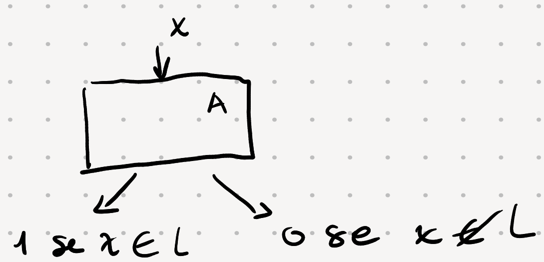


Teorema:

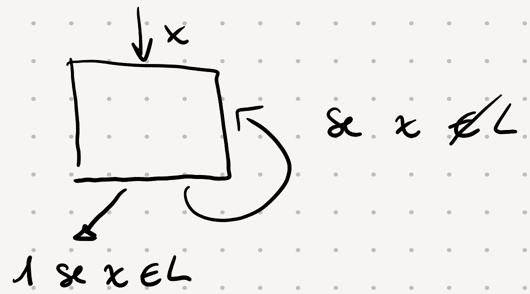
Se L é ricorsivo, allora L é anche ricorsivamente enumerabile

DIMOSTRAZIONE:

Per ipotesi so che L é ricorsivo



devo mostrare l'esistenza di una procedura P t.c.



Procedura P(x)

```
{  y = A(x);  // A esiste perché
              // L è ricorsivo

   IF (y = 1) then return(1);
   loop;
}
```

dim. di correttezza

$\underline{x \in L} \Rightarrow A(x) = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \underline{P(x) = 1}$

$\underline{x \notin L} \Rightarrow A(x) = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \underline{P(x) \uparrow}$

segue che L è ricorsivamente enumerabile

Domande:

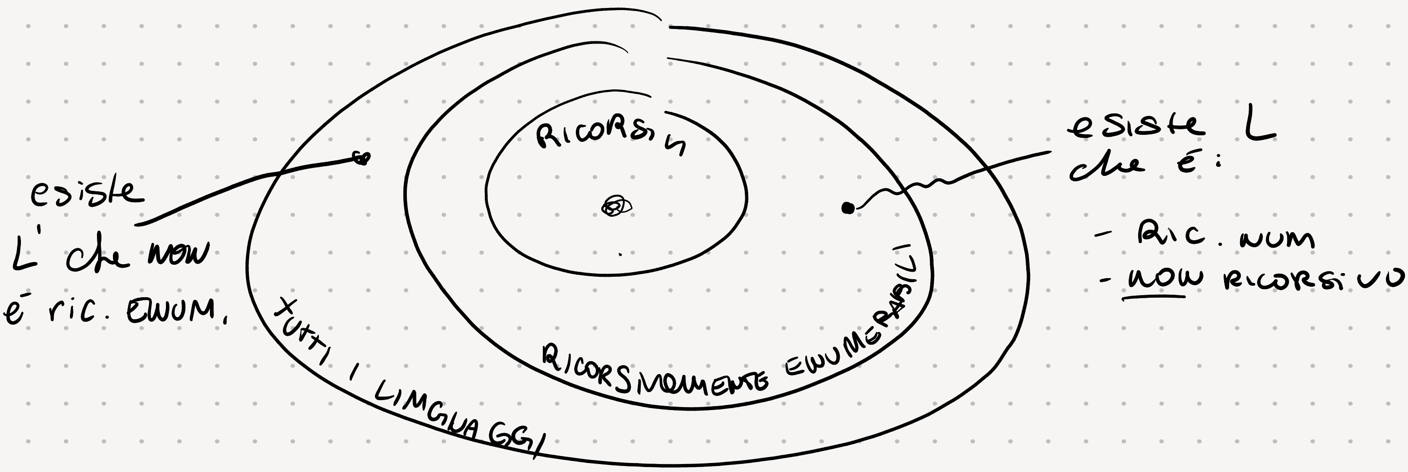
È vero il viceversa?

Risposta: <u>no</u>

Intuitivamente non sempre riesco a ricavare un algoritmo da una procedura quindi
Esistono linguaggi ricorsivamente enumerabili che non sono ricorsivi

Attenzione: manca dimostrazione

Risultati della teoria della calcolabilità



Conseguenze:

•) non è possibile verificare per via automatica la correttezza semantica dei programmi

Teorema di Rice 1950

oppure non è possibile verificare per via automatica l'equivalenza di due programmi. Ad esempio v e w:

$$\forall x \quad F_v(x) = F_w(x)$$

•) non è possibile verificare per via automatica la terminazione dei programmi
noto come : PROBLEMA DELL'ARRESTO

Problema dell'arresto

Input : programma w, dato x

Output : la risposta alla domanda

$$F_w(x) \downarrow ?$$

non c'è un programma per risolvere questo problema

TURING 1936

•) Ci sono fatti veri della matematica che non ammettono dimostrazione

Risultato di completezza di Goedel 1930

ESERCIZIO

Dato L ricorsivo, cosa posso dire di L^c (linguaggio complemento) ?