

Teoria della calcolabilità

Domanda:

Esiste un problema che non ammette soluzione automatica?

Notazione per i programmi

$w \in \{0,1\}^*$ è la sintassi

$F_w: \{0,1\}^* \rightarrow \{0,1,1\}$ è la semantica

NOTA: i nostri programmi o non terminano oppure danno in uscita 0 o 1

$F_w(x) \downarrow$ su input x termina

$F_w(x) \uparrow$ su input x non termina

$F_w(x) = 0$

$F_w(x) = 1$

Definizione

La funzione caratteristica di un linguaggio L è:

$$\chi_L(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in L \\ 0 & \text{se } x \notin L \end{cases}$$

↓
si chiama funzione caratteristica di L
risposta alla domanda: $x \in L$?

Esiste sempre $\forall L$!

Definizione:

Un linguaggio L è detto **ricorsivo** quando:
esiste un algoritmo w t.c.:

$$f_w(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in L \\ 0 & \text{se } x \notin L \end{cases}$$

Inoltre:

Se L è ricorsivo allora:

- P_L è detto **DECIDIBILE**

↳ (risolvibile in maniera automatica)
si usa algoritmo per L

- L ammette un sistema riconoscente

ESEMPI

- Problemi decidibili:

- numeri pari

Utilizziamo la funzione $\text{mod } 2$

- numeri primi

Diamo l'input per ogni numero

da 2 a \sqrt{n} , dove n è input

- Linguaggi ricorsivi

- $a^*b^* = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0\}$

- $\{a^n b^n \mid n > 0\}$

↙
≠ a^+b^+

Definizione

Un linguaggio L è ricorsivamente enumerabile quando:

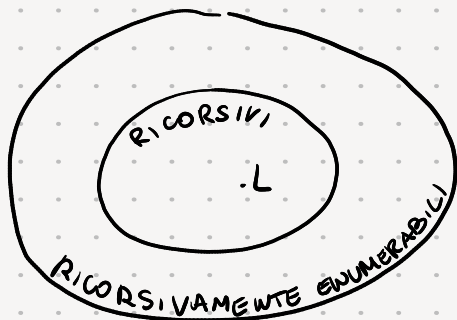
esiste una procedura w.t.c.

$$F_w(x) = \begin{cases} 1 & x \in L \\ \uparrow & x \notin L \end{cases}$$

Se L è ricorsivamente enumerabile allora:

- P_L è detto SEMIDECIDIBILE
(ho una risposta solo in certi casi.)
- L ammette un sistema generativo

Relazione:

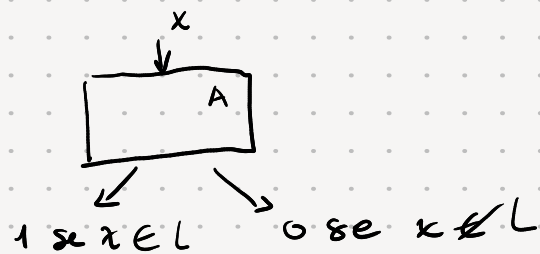


Teorema:

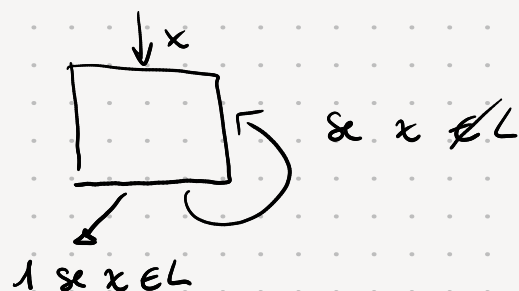
Se L è ricorsivo, allora L è anche ricorsivamente enumerabile

Dimostrazione:

Per ipotesi so che L è ricorsivo



devo mostrare l'esistenza di una procedura P l.c.



Procedura $P(x)$

```

{  y = A(x); // A esiste perché
    L è ricorsivo
  IF (y = 1) then return(1);
  loop;
}

```

dim. di correttezza

$$\underline{x \in L} \Rightarrow A(x) = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \underline{P(x) = 1}$$

$$\underline{x \notin L} \Rightarrow A(x) = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \underline{P(x) \uparrow}$$

segue che L è ricorsivamente enumerabile

Domande:

È vero il viceversa?

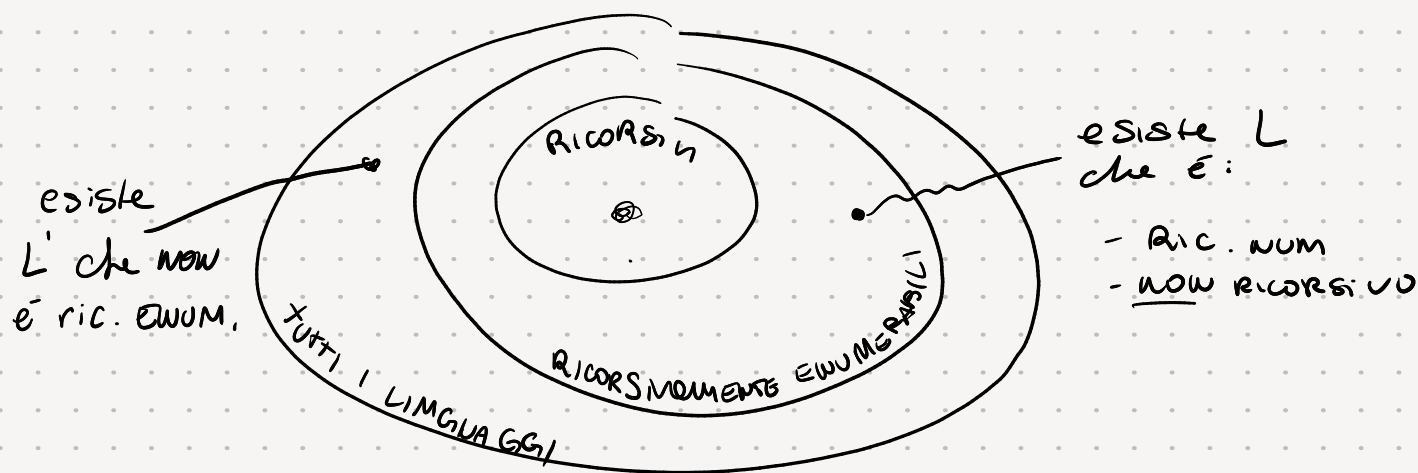
Risposta: no

Intuitivamente non sempre riesco a riconoscere un algoritmo da una procedura quindi

Esistono linguaggi: ricorsivamente enumerabili che non sono ricorsivi.

Attenzione: manca dimostrazione

Risultati della teoria della calcolabilità



Conseguenze:

-) non è possibile verificare per una automatica la correttezza semantica dei programmi

Teorema di Rice
1950

oppure non è possibile verificare per una automatica l'equivalenza di due programmi. Ad esempio v e w :

$$\forall x \quad \neq_v L(x) = F_w(x)$$

-) non è possibile verificare per via automatica la terminazione dei programmi
noto come: PROBLEMA DELL'ARRESTO

Problema dell'arresto

Input: programma w , dato x

Output: la risposta alle domande

$$\dagger w(x) \downarrow ?$$

non c'è un programma per risolvere questo problema

TURING 1936

-) Ci sono fatti veri della matematica che non ammettono dimostrazione

Risultato di completezza di Goedel 1930

ESERCIZIO

Dato L ricorsivo, cosa posso dire di L^c (linguaggio complemento)?