Lezione 11

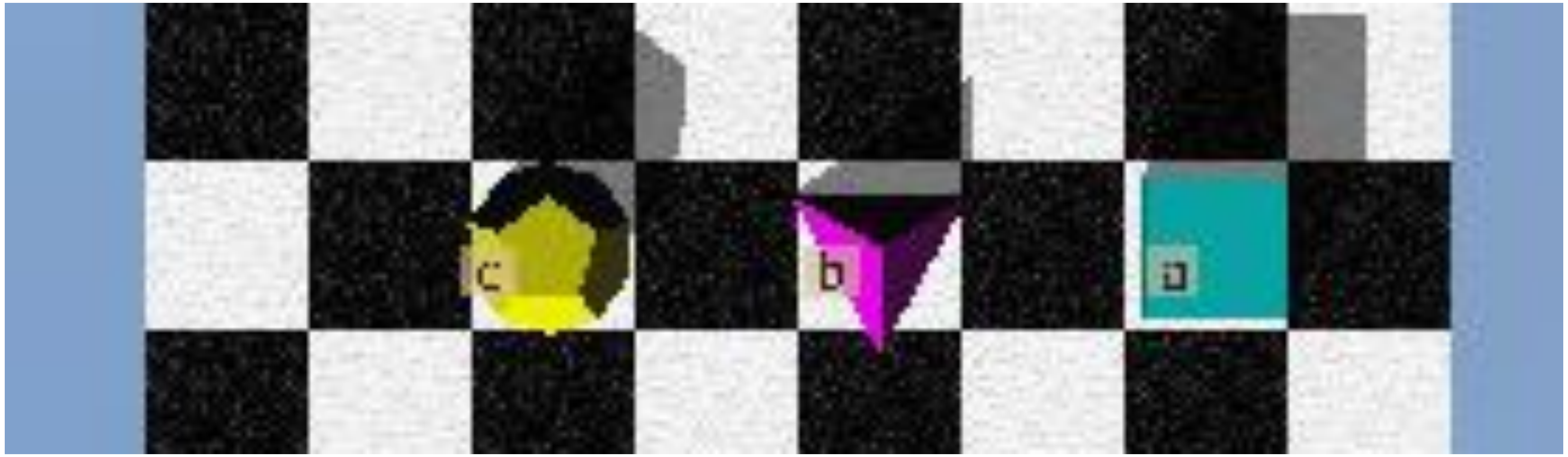
- Strutture ed interpretazioni su TW: Esempi
- Modelli e contromodelli
- Conseguenza logica: in FO, in TAUT, in un contesto

Strutture ed interpretazioni su TW: Esempi

Funzioni definite in **Tarski's World**

- Il testo introduce le funzioni lm (leftmost), rm (rightmost), fm (frontmost), bm (backmost) nel linguaggio di TW (ma non le rende disponibili nella applicazione).
- Il significato di lm(n) è il seguente: lm(n) è il blocco che si trova più a sinistra fra quelli giacenti sulla riga di n.

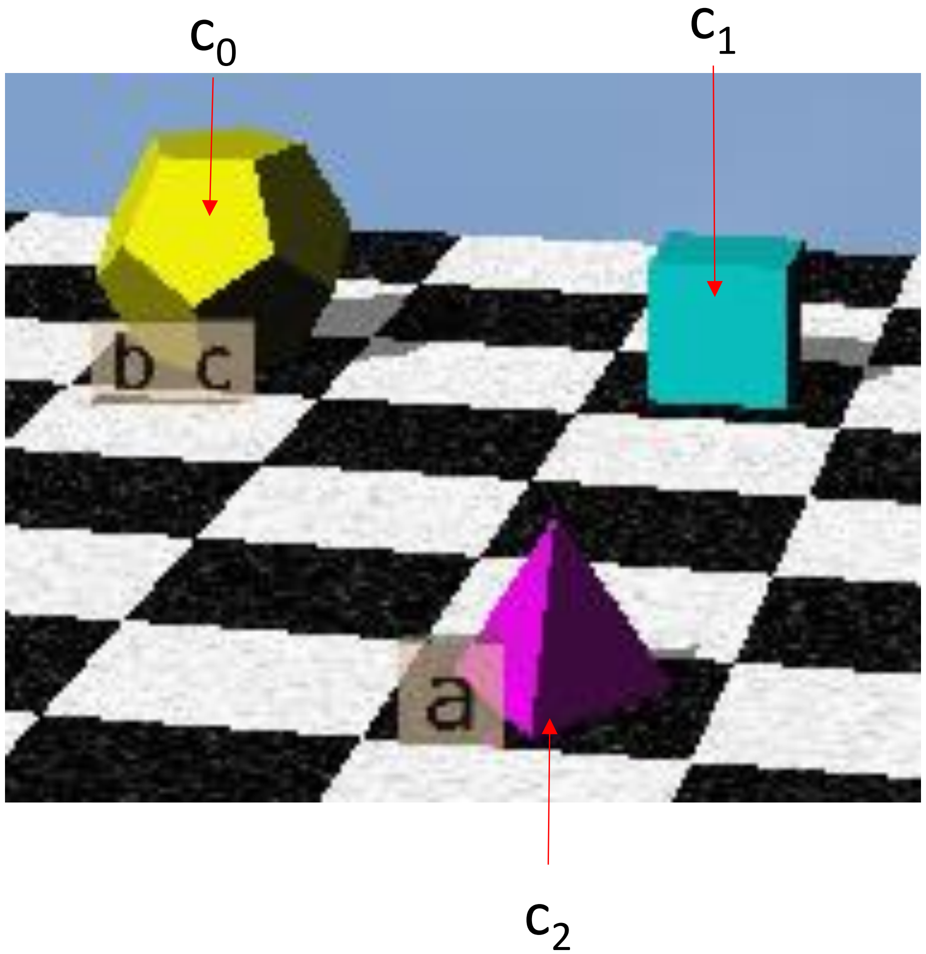
c_0 c_1 c_2



$$I(lm) = \{ (a_0, a_0), (a_1, a_0), (a_2, a_0) \}$$

lm mappa a_0, a_1, a_2 nel più a sinistra di essi, cioè in a_0.

Esempio: una TW-struttura



Struttura: $S = (U,I)$

Dove:

$U = \{a_0, a_1, a_2\}$

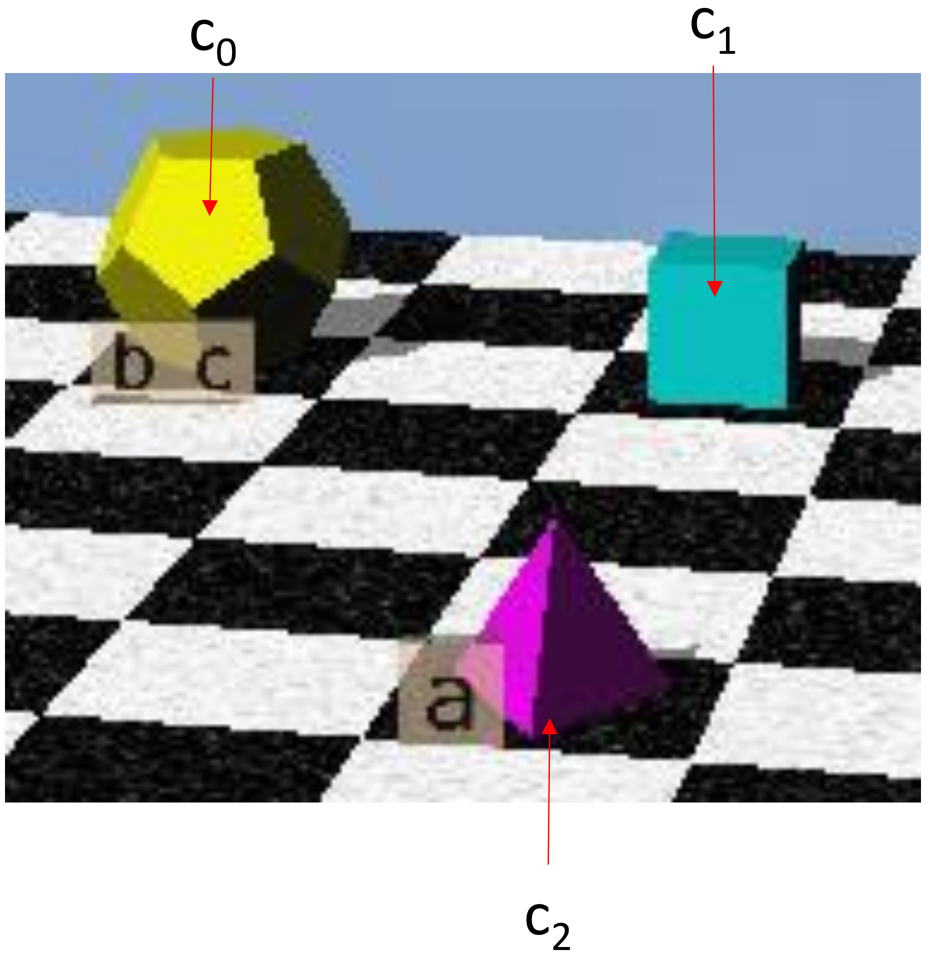
$I(\text{SameSize}) = ?$

$I(\text{lm}) = ?$

Ampliamo il linguaggio:

$I(c_0) = a_0$, $I(c_1) = a_1$, $I(c_2) = a_2$

Esempio: una TW-struttura



Struttura: $S = (U,I)$

Dove:

$U = \{a_0, a_1, a_2\}$

$I(SameSize) =$

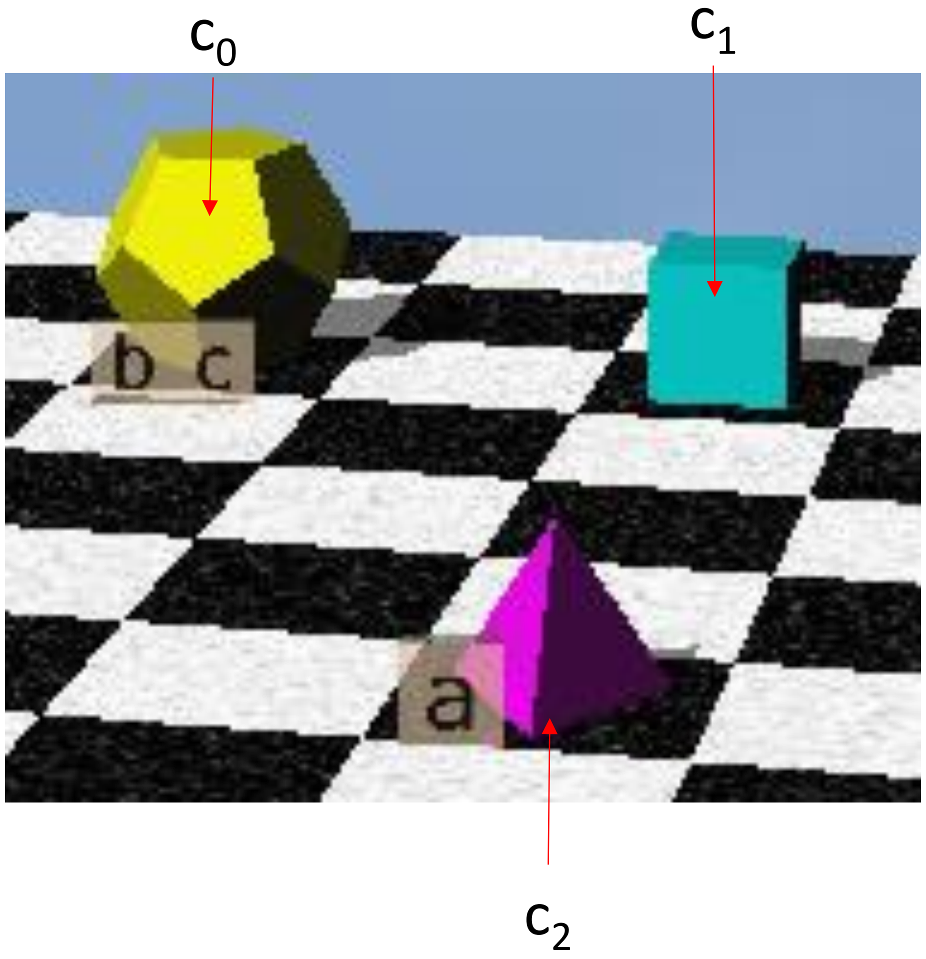
$\{ \ (a_0,a_0), (a_1,a_1), (a_2,a_2),$
$\quad (a_1,a_2), (a_2,a_1) \ \}$

$I(Im) = ?$

Ampliamo il linguaggio:

$I(c_0) = a_0$, $I(c_1) = a_1$, $I(c_2) = a_2$

Esempio: una TW-struttura



Struttura: S = (U,I)

Dove:

$U = \{a_0, a_1, a_2\}$

$I(\text{SameSize}) =$

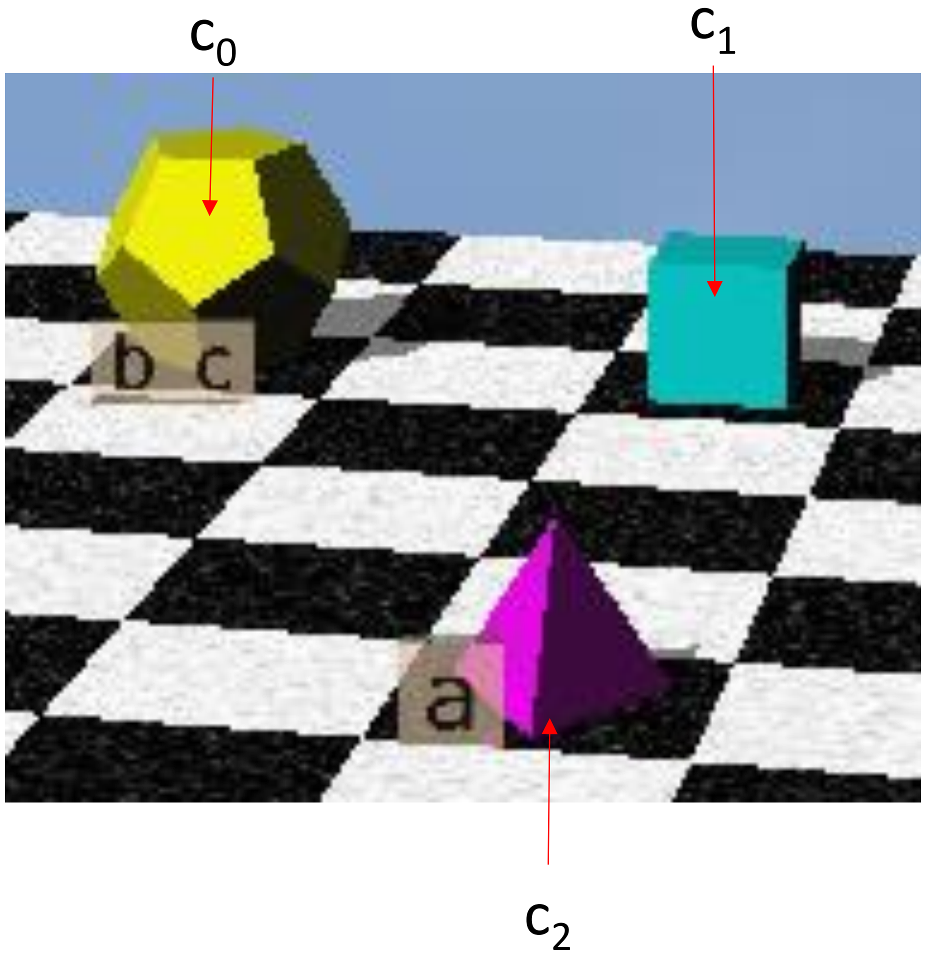
$\{ \ (a_0,a_0), (a_1,a_1), (a_2,a_2),$
$(a_1,a_2), (a_2,a_1) \ \}$

$I(\text{Im}) = \{(a_0,a_0), (a_1,a_0), (a_2,a_2)\}$

Ampliamo il linguaggio:

$I(c_0) = a_0$, $I(c_1) = a_1$, $I(c_2) = a_2$

Esercizio



Struttura: S = (U,I)

Dove:

U = $\{a_0, a_1, a_2\}$

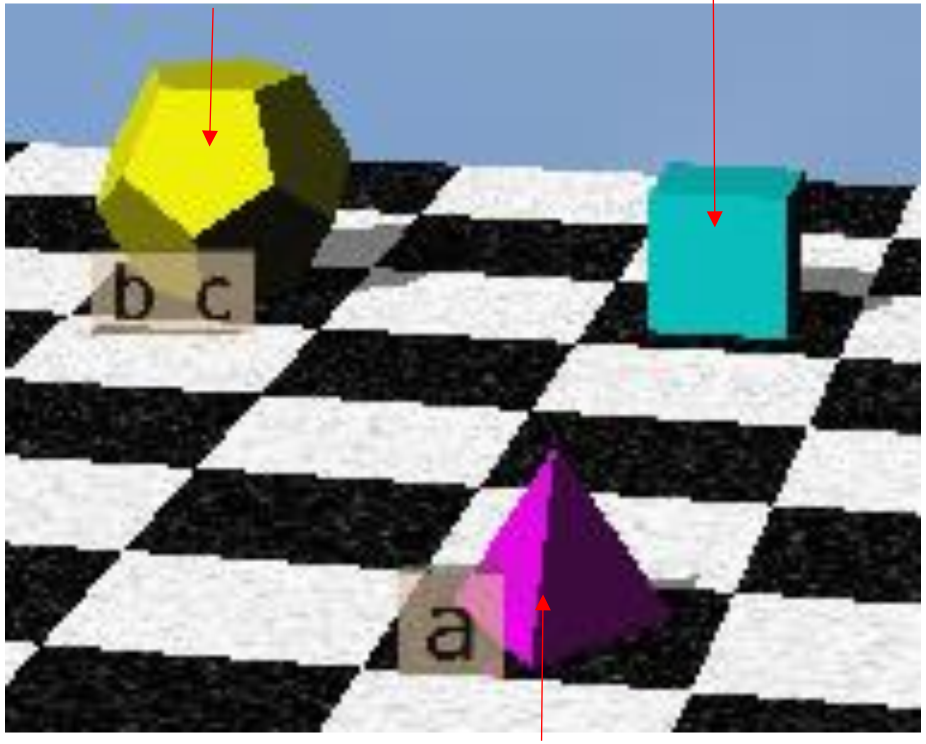
I(fm) = ?

Ampliamo il linguaggio:

$I(c_0) = a_0$, $I(c_1) = a_1$, $I(c_2) = a_2$

Esempio: interpretazione di un termine chiuso (su L_{TW})

c_0 c_1



c_2

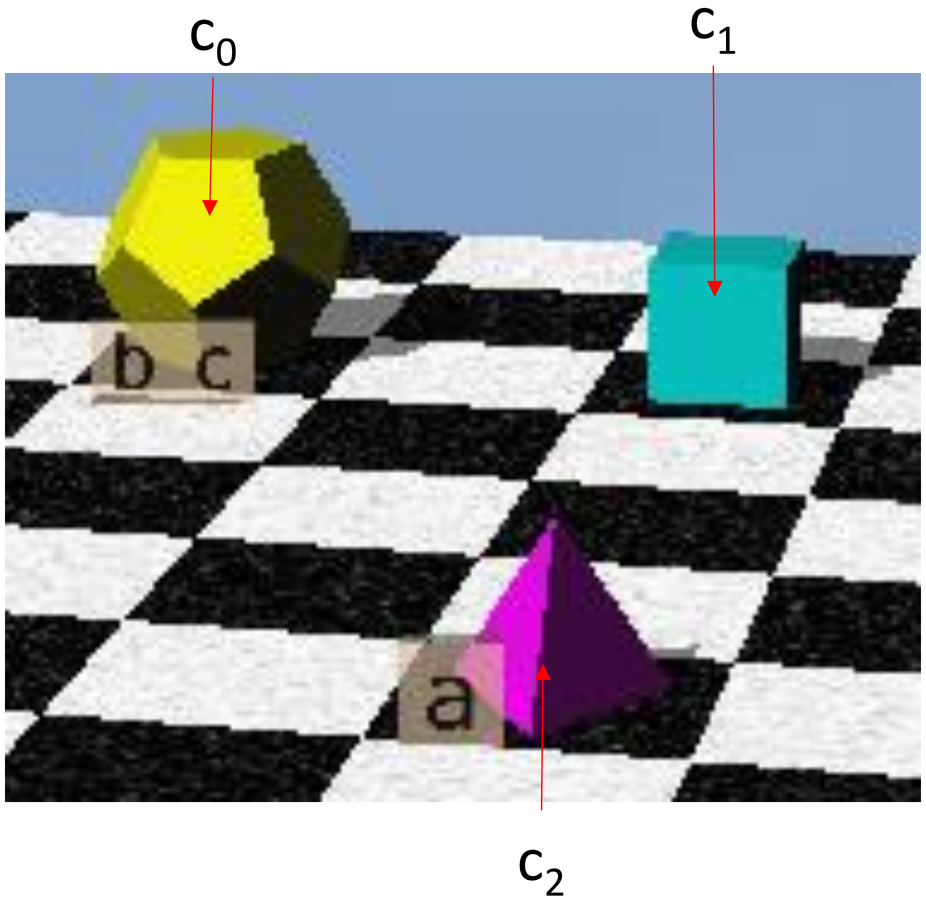
$U = \{a_0, a_1, a_2\}$

1) $I(a) = a_2$
2) $I(b) = a_0$
3) $I(c) = \mathbf{a_0}$
4) $I(fm) = \{(a_0,a_0), (a_1,a_2), (a_2,a_2)\}$
5) $I(rm) = \{(a_0,a_1), (a_1,a_1), (a_2,a_2)\}$

Ampliamo il linguaggio:
$I(c_0) = a_0$, $I(c_1) = a_1$, $I(c_2) = a_2$

$I(\ fm(rm(rm(\boxed{c})))\ ) =_3\ ?$

Esempio: interpretazione di un termine chiuso (su L_{TW})



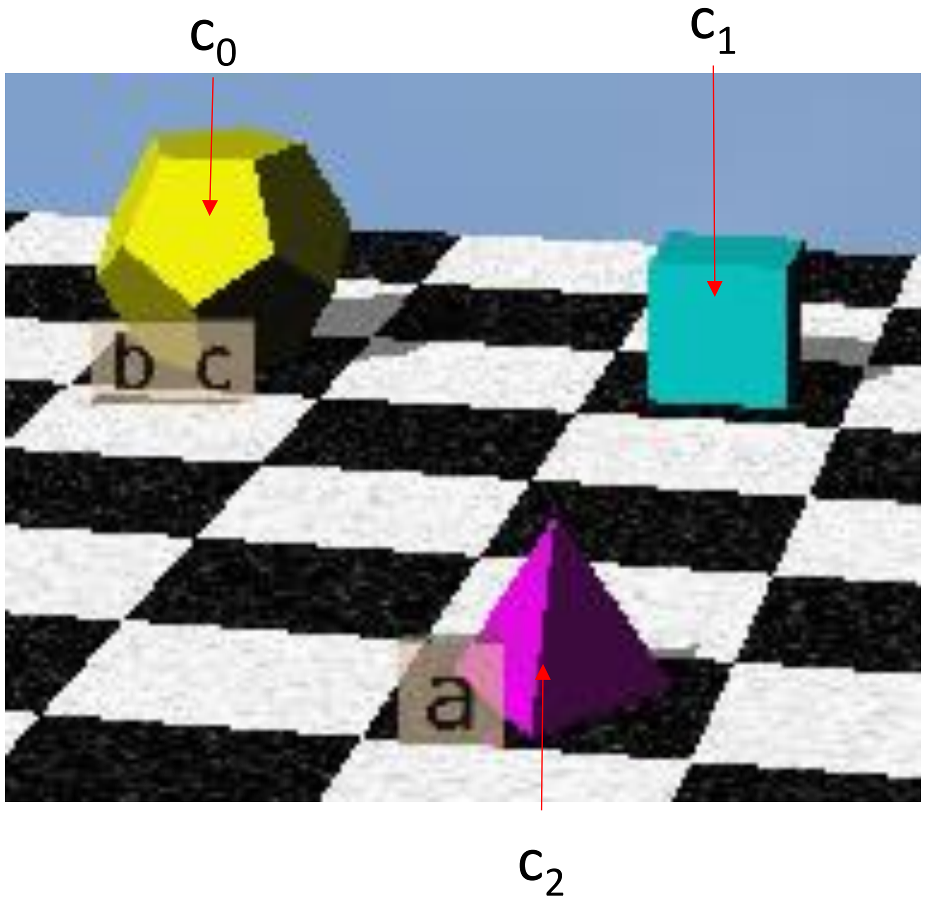
$U = \{a_0, a_1, a_2\}$

1) $I(a) = a_2$
2) $I(b) = a_0$
3) $I(c) = a_0$
4) $I(fm) = \{(a_0,a_0), (a_1,a_2), (a_2,a_2)\}$
5) $I(rm) = \{\mathbf{(a_0,a_1)}, (a_1,a_1), (a_2,a_2)\}$

$I(\ fm(rm(\boxed{rm(\ c_0)}))\ ) =_5\ ?$

Ampliamo il linguaggio:
$I(c_0) = a_0$, $I(c_1) = a_1$, $I(c_2) = a_2$

Esempio: interpretazione di un termine chiuso (su L_{TW})



$U = \{a_0, a_1, a_2\}$

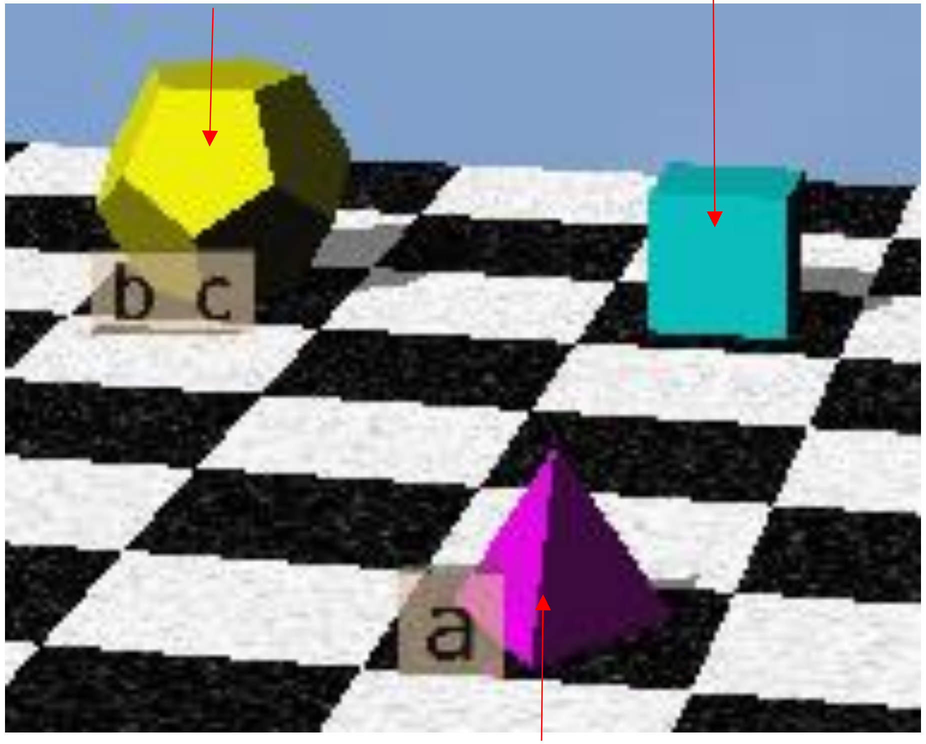
1) $I(a) = a_2$
2) $I(b) = a_0$
3) $I(c) = a_0$
4) $I(fm) = \{(a_0,a_0), (a_1,a_2), (a_2,a_2)\}$
5) $I(rm) = \{(a_0,a_1), \mathbf{(a_1,a_1)}, (a_2,a_2)\}$

$I(\ fm(\boxed{rm(\ c_1\ )})\ ) =_5 ?$

Ampliamo il linguaggio:
$I(c_0) = a_0$, $I(c_1) = a_1$, $I(c_2) = a_2$

Esempio: interpretazione di un termine chiuso (su L_{TW})

c_0 c_1



c_2

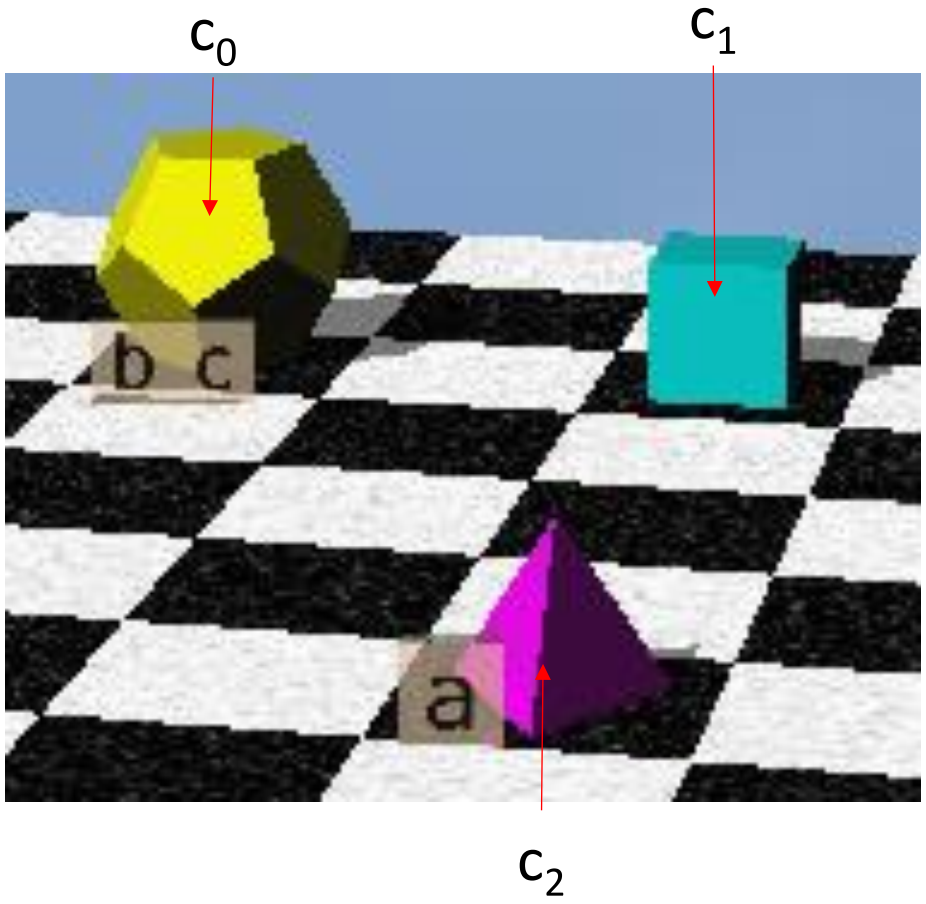
$U = \{a_0, a_1, a_2\}$

1) $I(a) = a_2$
2) $I(b) = a_0$
3) $I(c) = a_0$
4) $I(fm) = \{(a_0,a_0),$ **(a_1,a_2)**$, (a_2,a_2)\}$
5) $I(rm) = \{(a_0,a_1), (a_1,a_1), (a_2,a_2)\}$

$I(\boxed{fm(c_1)}) =_4 ?$

Ampliamo il linguaggio:
$I(c_0) = a_0$, $I(c_1) = a_1$, $I(c_2) = a_2$

Esempio: interpretazione di un termine chiuso (su L_{TW})



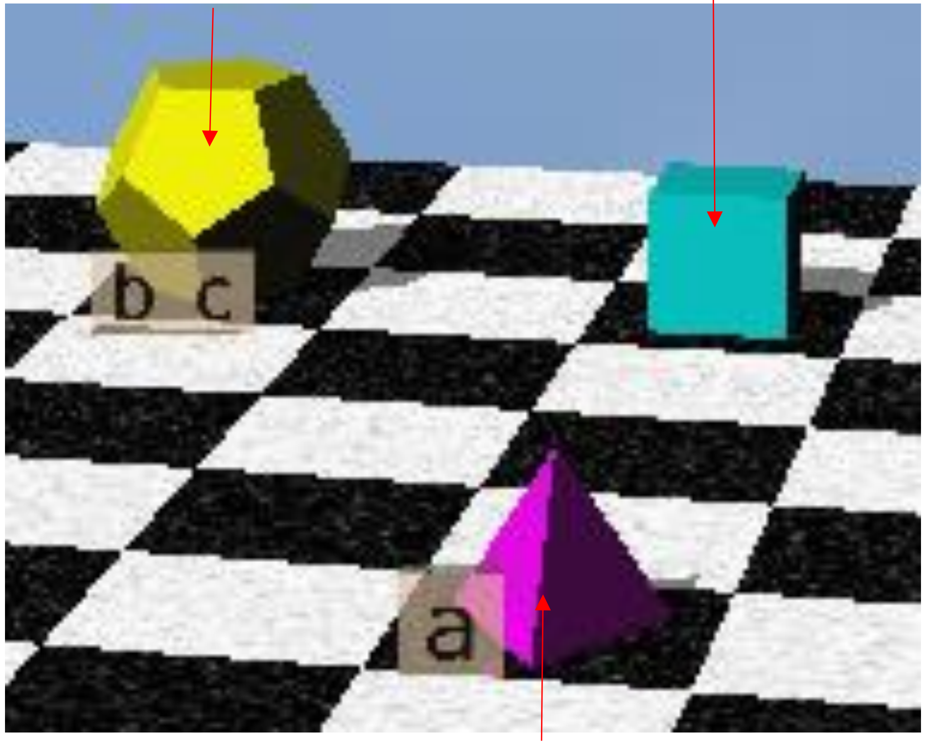
$U = \{a_0, a_1, a_2\}$

1) $I(a) = a_2$
2) $I(b) = a_0$
3) $I(c) = a_0$
4) $I(fm) = \{(a_0,a_0), (a_1,a_2), (a_2,a_2)\}$
5) $I(rm) = \{(a_0,a_1), (a_1,a_1), (a_2,a_2)\}$

Ampliamo il linguaggio:
$I(c_0) = a_0$, $I(c_1) = a_1$, $I(c_2) = a_2$

$I(c_2) = a_2$

Esempio: interpretazione di un termine chiuso (su L_{TW})



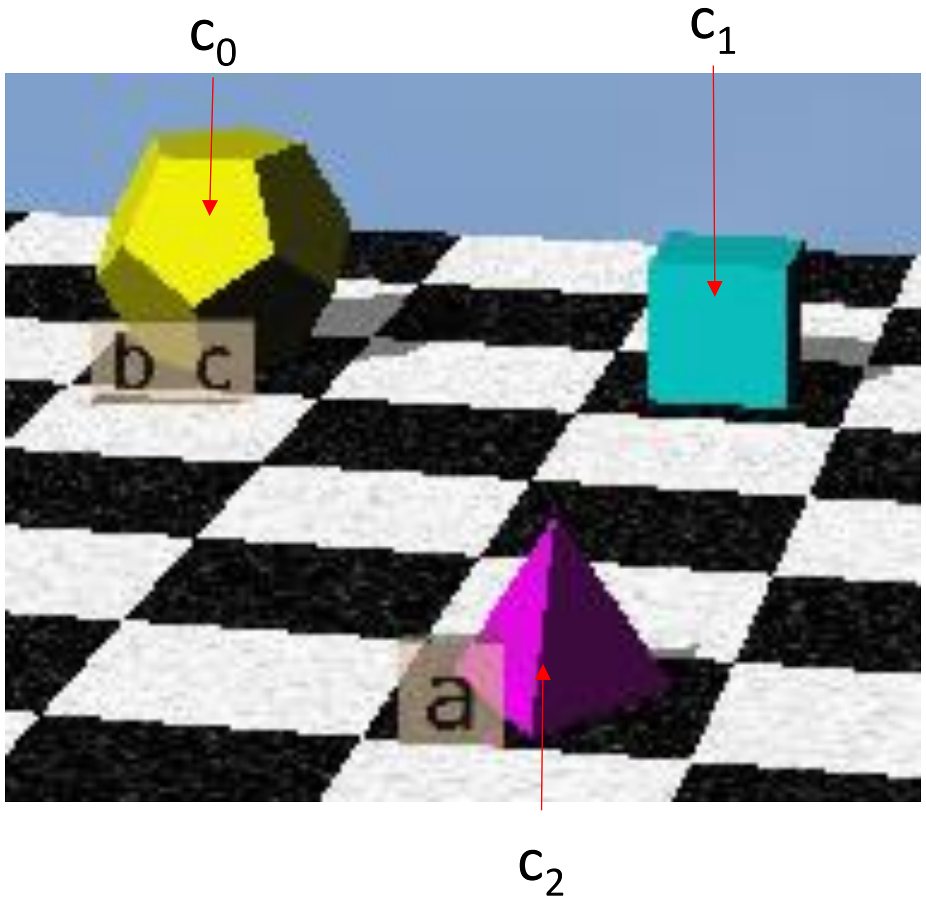
$U = \{a_0, a_1, a_2\}$

1) $I(a) = a_2$
2) $I(b) = a_0$
3) $I(c) = a_0$
4) $I(fm) = \{(a_0,a_0), (a_1,a_2), (a_2,a_2)\}$
5) $I(rm) = \{(a_0,a_1), (a_1,a_1), (a_2,a_2)\}$

Riassumendo, la sequenza di riscrittura è stata:

$I(fm(rm(rm(c)))) =_3 I(fm(rm(rm(c_0)))) =_5 I(fm(rm(c_1))) =_5 I(fm(c_1)) =_4 I(c_2) = a_2$

Esempio: Interpretazione di proposizione atomica (su L_{TW})

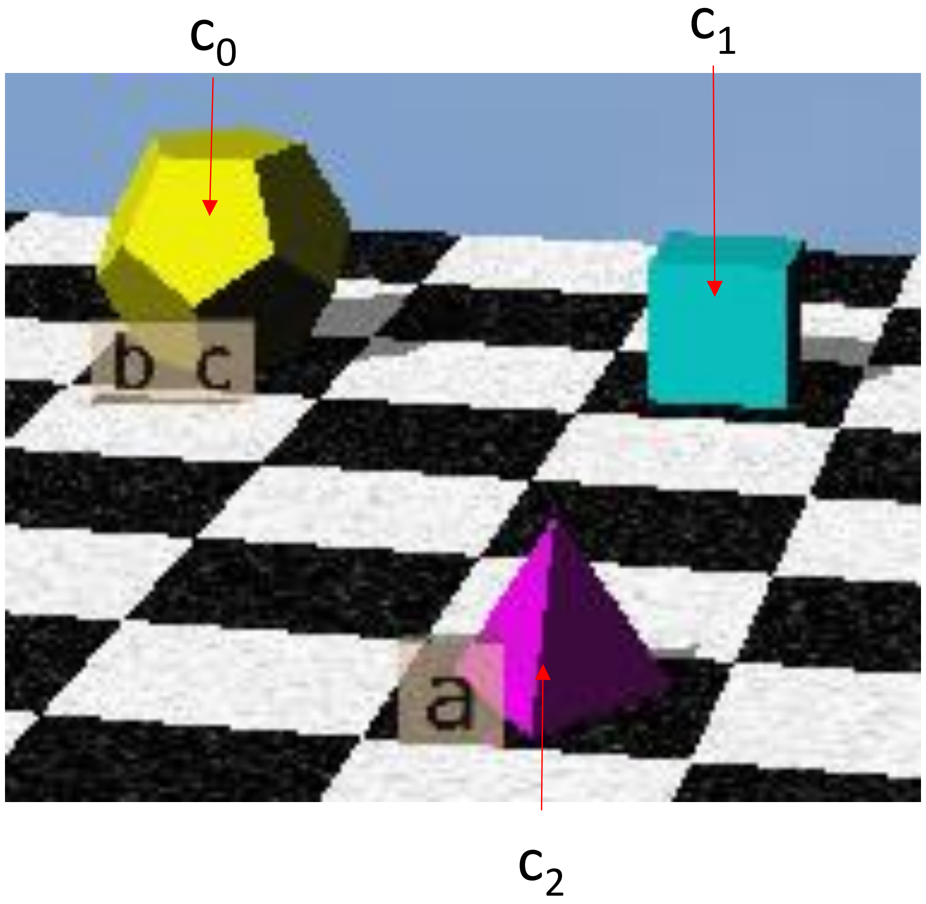


$U = \{a_0, a_1, a_2\}$

1) $I(a) = a_2$
2) $I(b) = a_0$
3) $I(c) = a_0$
4) $I(fm) = \{(a_0,a_0), (a_1,a_2), (a_2,a_2)\}$
5) $I(rm) = \{(a_0,a_1), (a_1,a_1), (a_2,a_2)\}$
6) $I(SameCol) = \{$
$(a_0,a_0), (a_1,a_1), (a_2,a_2),$
$(a_1,a_2),(a_2,a_1) \}$

$I(SameCol(rm(b), fm(rm(b)))) = ?$

Esempio: Interpretazione di proposizione atomica (su L_{TW})



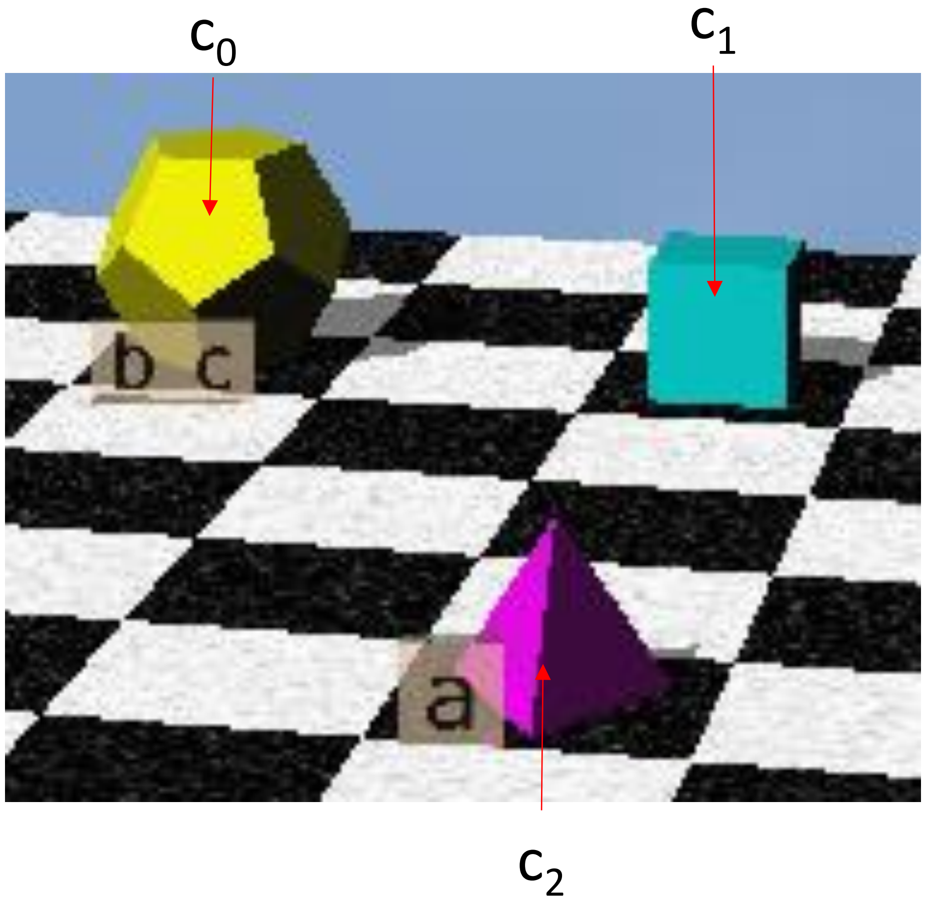
$U = \{a_0, a_1, a_2\}$

1) $I(a) = a_2$
2) $I(b) = a_0$
3) $I(c) = a_0$
4) $I(fm) = \{(a_0,a_0), (a_1,a_2), (a_2,a_2)\}$
5) $I(rm) = \{(a_0,a_1), (a_1,a_1), (a_2,a_2)\}$
6) $I(SameCol) = \{$
$(a_0,a_0), (a_1,a_1), (a_2,a_2),$
$(a_1,a_2),(a_2,a_1) \}$

$I(\ SameCol(rm(b), fm(rm(b)))\ ) = \ldots$

$= I\ (\ SameCol(c_1, c_2)\ ) = ?$

Esempio: Interpretazione di proposizione atomica (su L_{TW})



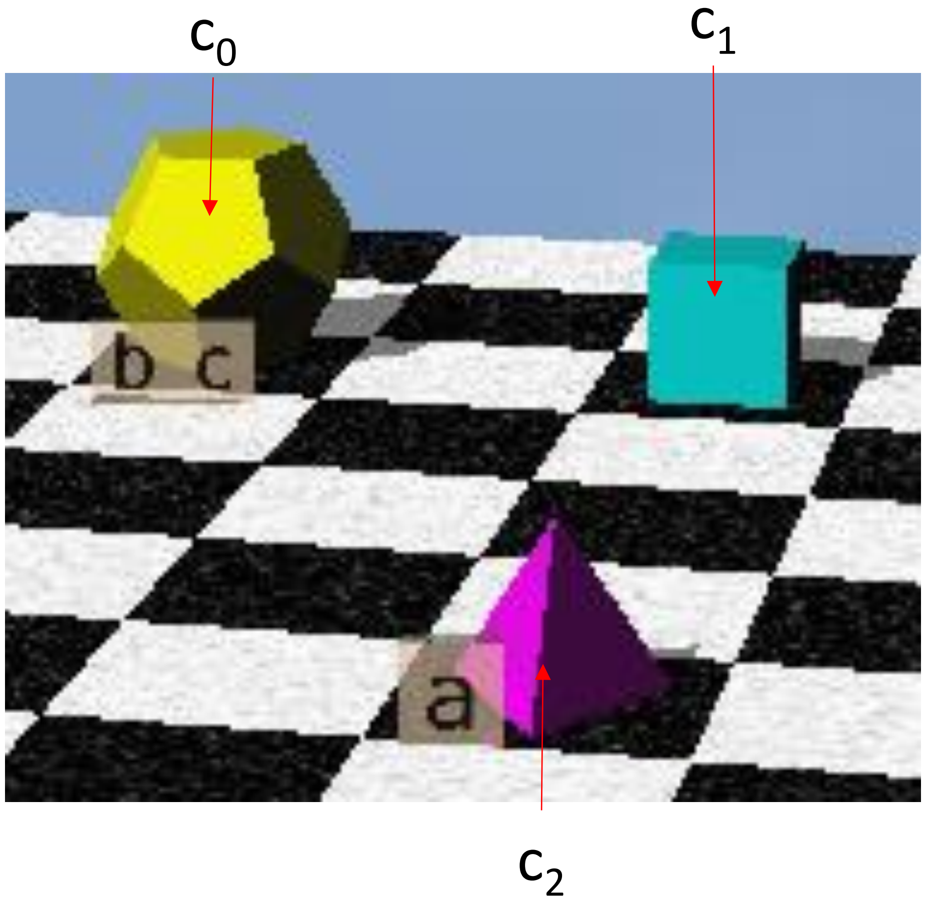
$U = \{a_0, a_1, a_2\}$

1) $I(a) = a_2$
2) $I(b) = a_0$
3) $I(c) = a_0$
4) $I(fm) = \{(a_0,a_0), (a_1,a_2), (a_2,a_2)\}$
5) $I(rm) = \{(a_0,a_1), (a_1,a_1), (a_2,a_2)\}$
6) $I(SameCol) = \{$
   $(a_0,a_0), (a_1,a_1), (a_2,a_2),$
   $\mathbf{(a_1,a_2)},(a_2,a_1) \}$

$I(\ SameCol(rm(b), fm(rm(b)))\ ) = \ldots$

$= I\ (\ SameCol(c_1, c_2)\ ) =_6 T$

Esempio: Interpretazione di proposizione atomica (su L_{TW})



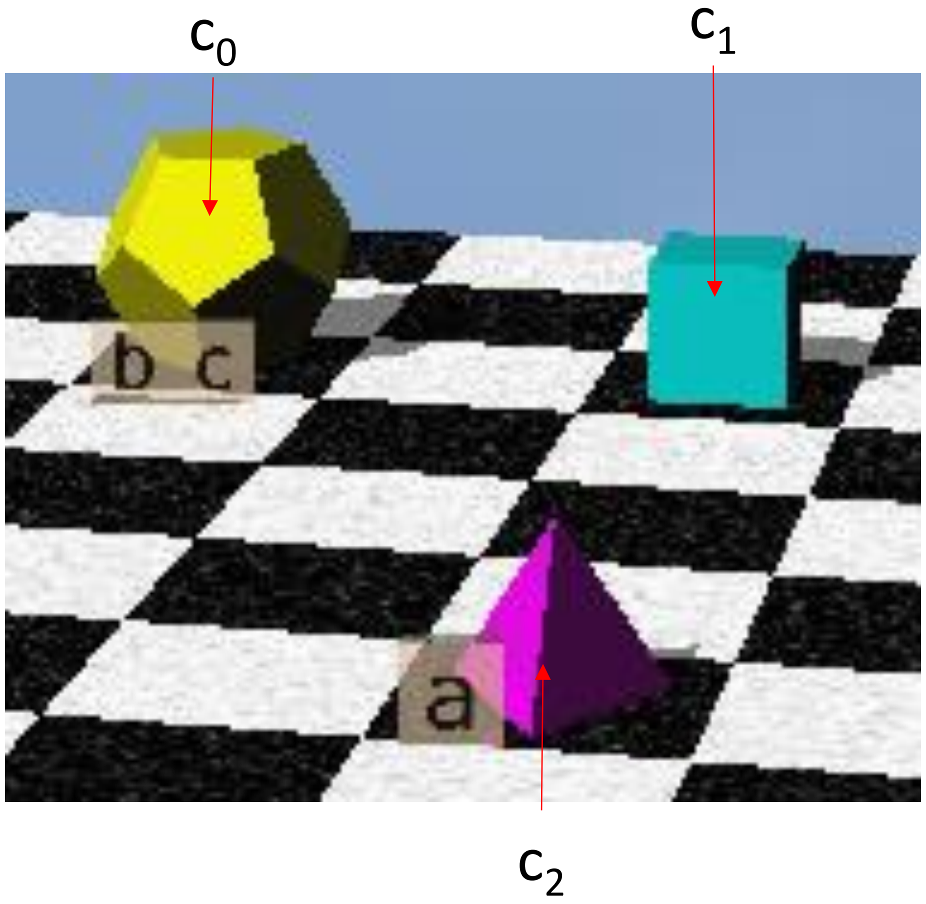
$U = \{a_0, a_1, a_2\}$

1) $I(a) = a_2$
2) $I(b) = a_0$
3) $I(c) = a_0$
4) $I(fm) = \{(a_0,a_0), (a_1,a_2), (a_2,a_2)\}$
5) $I(rm) = \{(a_0,a_1), (a_1,a_1), (a_2,a_2)\}$
6) $I(SameCol) = \{$
$(a_0,a_0), (a_1,a_1), (a_2,a_2),$
$(a_1,a_2),(a_2,a_1) \}$

$I(SameCol(rm(b), fm(rm(b)))) = T.$

Dunque: SameCol(rm(b), fm(rm(b))) è vera in S = (U,I).

Esercizio



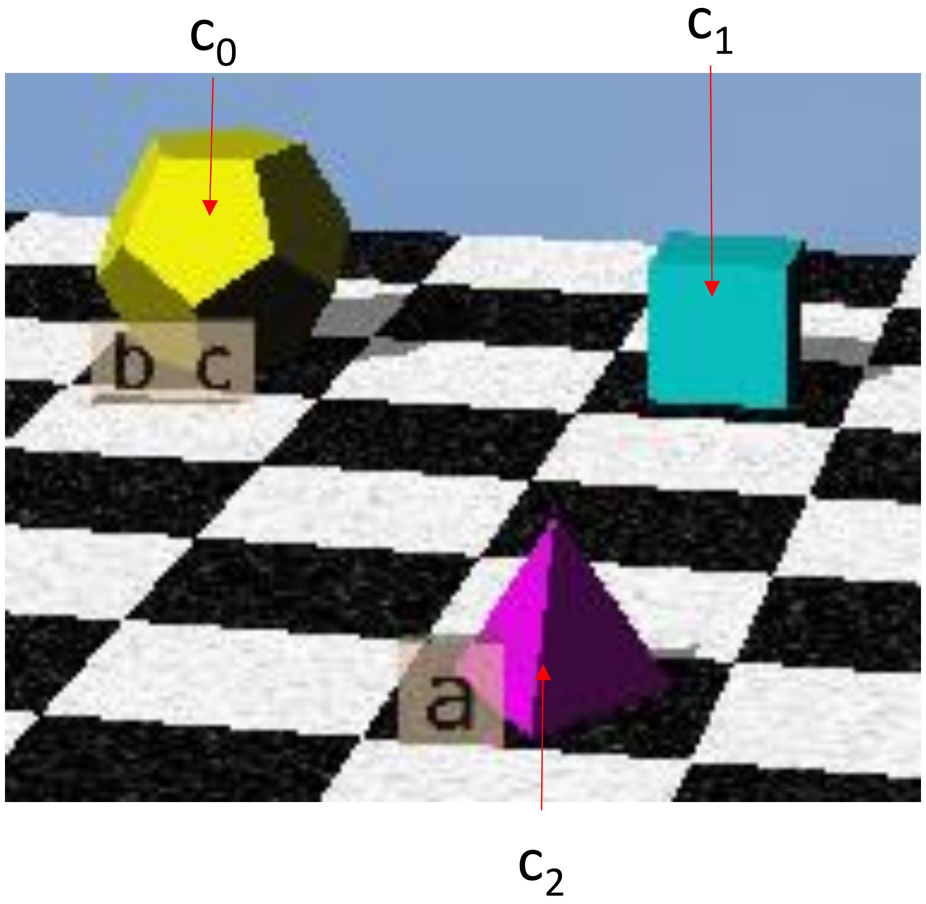
$U = \{a_0, a_1, a_2\}$

1) $I(a) = a_2$
2) $I(b) = a_0$
3) $I(c) = a_0$
4) $I(fm) = \{(a_0,a_0), (a_1,a_2), (a_2,a_2)\}$
5) $I(rm) = \{(a_0,a_1), (a_1,a_1), (a_2,a_2)\}$
6) I(SameRow) = ?

I(SameRow(bm(b), bm(lm(a)))) = ?

I(SameRow(lm(a), lm(bm(a)))) = ?

Esempio: Interpretazione di enunciato (su L_{TW})

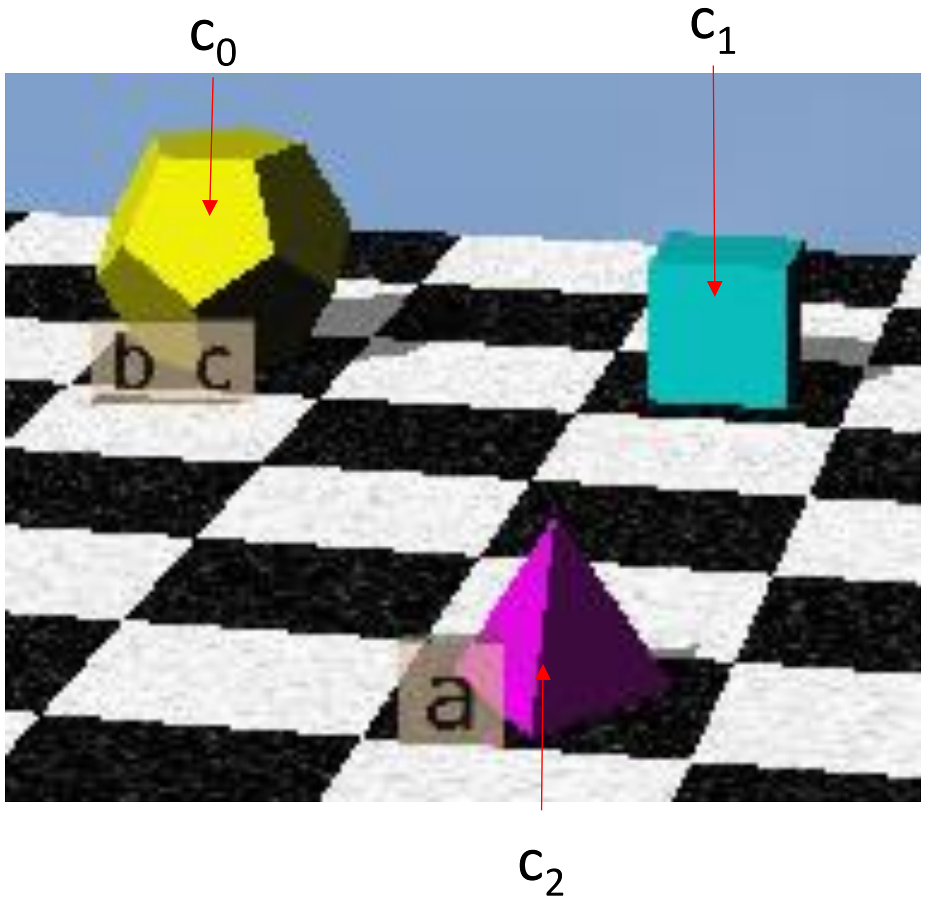


$U = \{a_0, a_1, a_2\}$

1) $I(a) = a_2$
2) $I(b) = a_0$
3) $I(c) = a_0$
4) $I(fm) = \{(a_0,a_0), (a_1,a_2), (a_2,a_2)\}$
5) $I(rm) = \{(a_0,a_1), (a_1,a_1), (a_2,a_2)\}$
6) $I(SameCol) = \{$
   $(a_0,a_0), (a_1,a_1), (a_2,a_2),$
   $(a_1,a_2),(a_2,a_1) \}$

$I(\exists x \ SameCol(rm(x), fm(rm(x)))) = ?$

Esempio: Interpretazione di enunciato (su L_{TW})



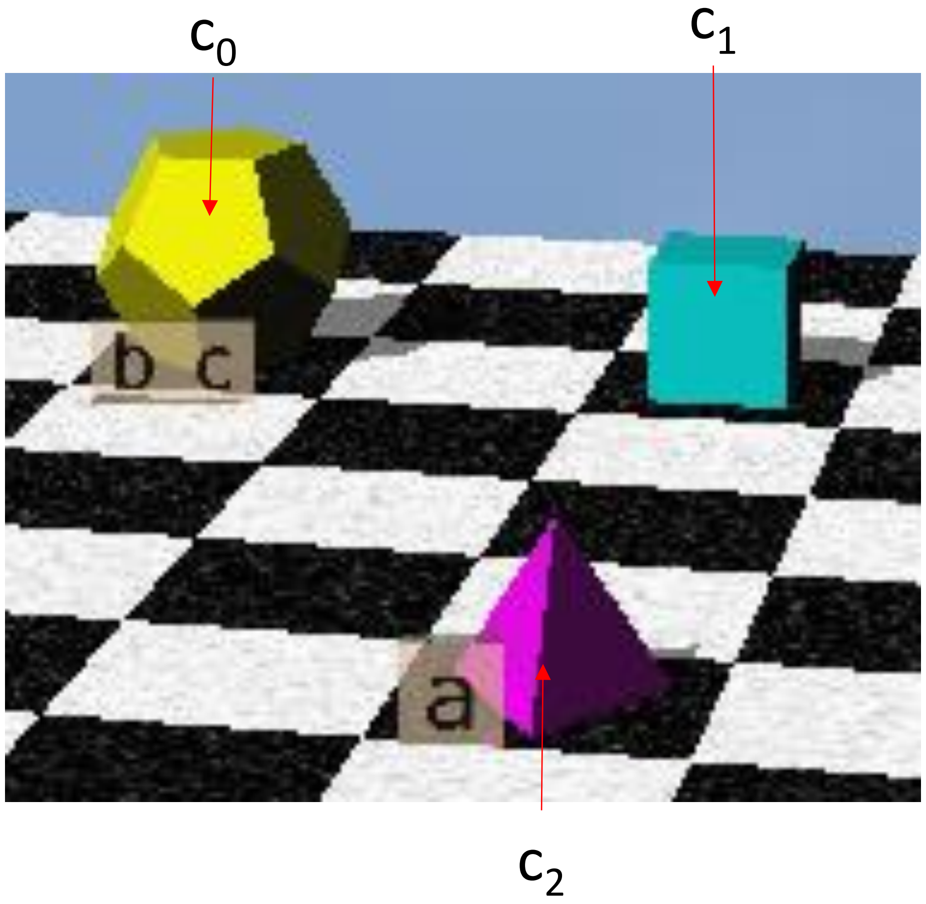
$U = \{a_0, a_1, a_2\}$

1) $I(a) = a_2$
2) $I(b) = a_0$
3) $I(c) = a_0$
4) $I(fm) = \{(a_0,a_0), (a_1,a_2), (a_2,a_2)\}$
5) $I(rm) = \{(a_0,a_1), (a_1,a_1), (a_2,a_2)\}$
6) $I(SameCol) = \{$
$(a_0,a_0), (a_1,a_1), (a_2,a_2),$
$(a_1,a_2),(a_2,a_1) \}$

$I(\ SameCol(rm(x), fm(rm(x)))[x{:}c_0]\ ) = \ldots$

$I(\ SameCol(rm(c_0), fm(rm(c_0)))\ ) = I\ (SameCol(c_1,c_2)\ ) = \ T$

Esempio: Interpretazione di enunciato (su L_{TW})



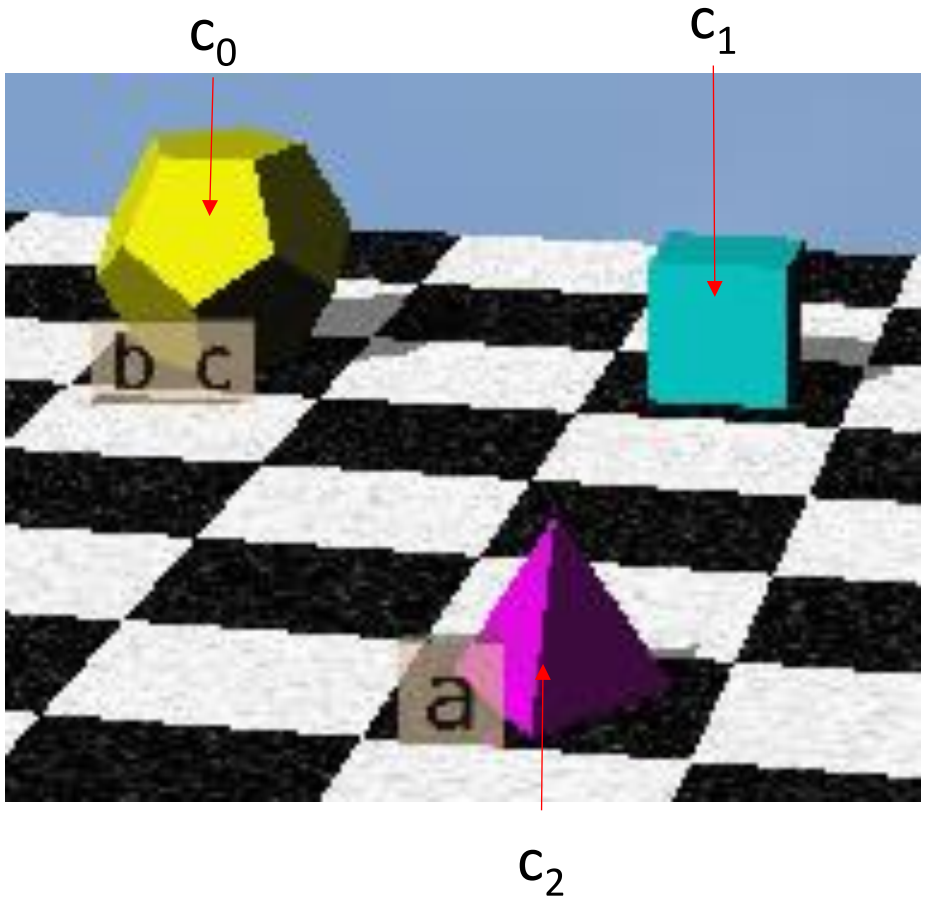
$U = \{a_0, a_1, a_2\}$

1) $I(a) = a_2$
2) $I(b) = a_0$
3) $I(c) = a_0$
4) $I(fm) = \{(a_0,a_0), (a_1,a_2), (a_2,a_2)\}$
5) $I(rm) = \{(a_0,a_1), (a_1,a_1), (a_2,a_2)\}$
6) $I(SameCol) = \{$
$(a_0,a_0), (a_1,a_1), (a_2,a_2),$
$(a_1,a_2),(a_2,a_1) \}$

$I(\ SameCol(rm(x), fm(rm(x)))[x{:}c_0]\ ) = T,$

Dunque: $I(\ \exists x\ \ SameCol(rm(x), fm(rm(x)))\ )\ = T.$

Esempio: Interpretazione di enunciato (su L_{TW})



$U = \{a_0, a_1, a_2\}$

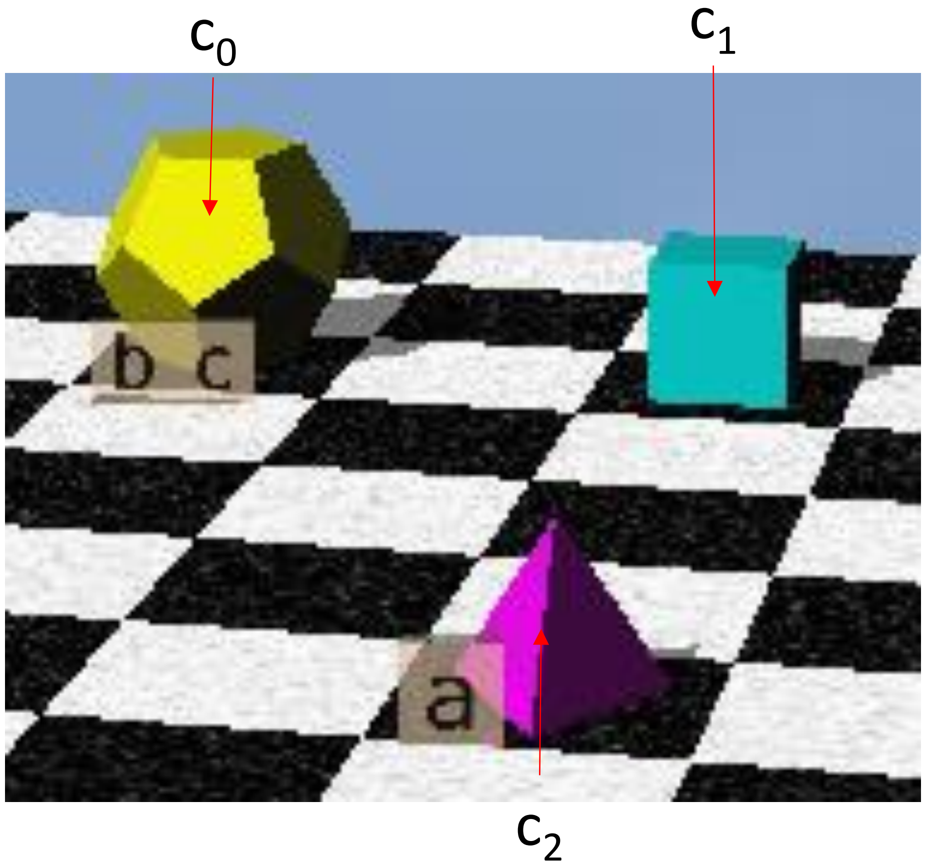
1) $I(a) = a_2$
2) $I(b) = a_0$
3) $I(c) = a_0$
4) $I(fm) = \{(a_0,a_0), (a_1,a_2), (a_2,a_2)\}$
5) $I(rm) = \{(a_0,a_1), (a_1,a_1), (a_2,a_2)\}$
6) $I(SameCol) = \{$

$(a_0,a_0), (a_1,a_1), (a_2,a_2),$

$(a_1,a_2),(a_2,a_1) \}$

$I(\forall x \; SameCol(rm(x), fm(rm(x)))) = ?$

Esempio: Interpretazione di enunciato (su L_{TW})



$U = \{a_0, a_1, a_2\}$

1) $I(a) = a_2$
2) $I(b) = a_0$
3) $I(c) = a_0$
4) $I(fm) = \{(a_0,a_0), (a_1,a_2), (a_2,a_2)\}$
5) $I(rm) = \{(a_0,a_1), (a_1,a_1), (a_2,a_2)\}$
6) $I(SameCol) = \{$
$(a_0,a_0), (a_1,a_1), (a_2,a_2),$
$(a_1,a_2),(a_2,a_1) \}$

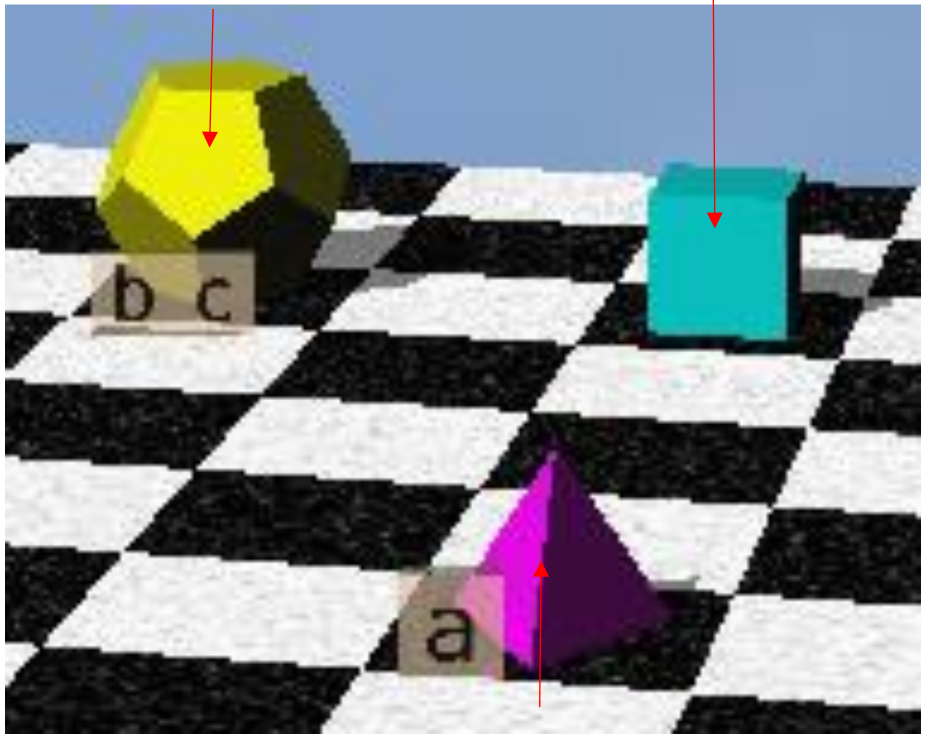
$I(\ SameCol(rm(x), fm(rm(x)))[x:c_0]\ ) = T,$

$I(\ SameCol(rm(x), fm(rm(x)))[x:c_1]\ ) = T,$

$I(\ SameCol(rm(x), fm(rm(x)))[x:c_2]\ ) = T.$

Esempio: Interpretazione di enunciato (su L_{TW})

c_0 c_1



c_2

$U = \{a_0, a_1, a_2\}$

1) $I(a) = a_2$
2) $I(b) = a_0$
3) $I(c) = a_0$
4) $I(fm) = \{(a_0,a_0), (a_1,a_2), (a_2,a_2)\}$
5) $I(rm) = \{(a_0,a_1), (a_1,a_1), (a_2,a_2)\}$
6) $I(SameCol) = \{$
$(a_0,a_0), (a_1,a_1), (a_2,a_2),$
$(a_1,a_2),(a_2,a_1) \}$

$I(SameCol(rm(x), fm(rm(x)))[x:c_i]) = T,$
per ogni $a_i \in U$.

Dunque: $I(\forall x\ SameCol(rm(x), fm(rm(x)))) = T.$

Esempio: Interpretazione di enunciato (su L_{TW})

- Abbiamo visto che nel mondo delle slide precedenti, o meglio, nella struttura $S = (U,I)$, con $U = \{a_0, a_1, a_2\}$:
- $\forall x$ SameCol(rm(x), fm(rm(x))) è vero poiché:
  - I(SameCol(rm(x), fm(rm(x)))[x:c_0]) = T,
  - I(SameCol(rm(x), fm(rm(x)))[x:c_1]) = T,
  - I(SameCol(rm(x), fm(rm(x)))[x:c_2]) = T.
  - Cioè: Per tutti gli $a_i \in U$, I(SameCol(rm(x), fm(rm(x)))[x:c_i]) = T.
- $\exists x$ SameCol(rm(x), fm(rm(x))) è vero poiché:
  - I(SameCol(rm(x), fm(rm(x)))[x:c_0]) = T.
  - Cioè: Per almeno un $a_i \in U$, I(SameCol(rm(x), fm(rm(x)))[x:c_i]) = T.

- In realtà entrambi gli enunciati sono sempre veri in ogni mondo dei blocchi, a causa del significato attribuito a simboli di funzione e predicati.

Esercizio: enunciati con simboli di funzione (su L_{TW})

«Un blocco x è il più a sinistra sulla sua riga se e solo se nessun blocco sulla stessa riga di x è più a sinistra di x».

- Dire quali delle seguenti traduzioni vi sembrano corrette:

- $\forall x(x = lm(x) \leftrightarrow \forall y\, (SameRow(y,x) \rightarrow \neg LeftOf(y,x)))$
- $\forall x(x = lm(x) \leftrightarrow \neg\exists y\, (SameRow(y,x) \rightarrow LeftOf(y,x)))$
- $\forall x(x = lm(x) \leftrightarrow \neg\exists y\, (SameRow(y,x) \wedge LeftOf(y,x)))$

- Esercizio: generate le fbf sopra riportate per strati, generando prima i termini e poi le fbf.
- Esercizio: interpretatele in TW (provate a considerare cosa succede in *tutti* i mondi di TW).

Modelli e contromodelli

Modelli

Sia dato un Linguaggio L.

Def. Una struttura $S = (U,I)$ è un modello di un L-enunciato A sse A è vero in S, cioè $I(A) = T$. Si scrive:

$$S \models A.$$

Def. Un insieme di L-enunciati Γ è detto L-teoria.

Def. Una struttura $S = (U,I)$ è un modello di una teoria Γ sse A è vera in S per ogni $A \in \Gamma$. Si scrive:

$$S \models \Gamma.$$

Def. Una struttura $S = (U,I)$ è un contromodello di una teoria Γ sse A è falsa in S per qualche $A \in \Gamma$.

Verità logiche

Sia dato un Linguaggio L.

Def. Un L-enunciato A è una verità logica (in FO) sse $S \vDash A$ per ogni L-struttura $S = (U,I)$.
In tal caso, si scrive:

$$\vDash_{FO} A.$$

Def. Un L-enunciato A è vero in una L-teoria Γ (in FO) sse, per ogni L-struttura $S = (U,I)$, vale che:

$$\text{Se } S \vDash \Gamma \text{, allora } S \vDash A.$$

In tal caso si scrive:

$$\Gamma \vDash_{FO} A.$$

Costruzione di interpretazioni (modelli e contromodelli)

Consideriamo il linguaggio L costituito dal solo predicato P/2.

- C'è una L-struttura che verifica $\exists x \forall y\, P(x,y)$?
- $\forall y\, P(x,y)$ deve essere verificata da almeno un oggetto; chiamiamolo a_0. Deve valere $(\forall y\, P(x,y))[x{:}c_0] = \forall y\, P(c_0,y)$.
- Prendiamo come universo provvisorio $U := \{a_0\}$. Vogliamo rendere vera $\forall y\, P(c_0,y)$ su U; siccome c'è solo a_0, ci basta rendere vera

  $P(c_0,y)[y{:}c_0] = P(c_0,c_0)$.
- Dunque un modello $S = (U,I)$ di $\exists x \forall y\, P(x,y)$ è:

$$U := \{a_0\}$$

$$I(P) := \{(a_0,a_0)\}$$

Costruzione di interpretazioni (modelli e contromodelli)

Consideriamo il linguaggio L costituito dal solo predicato P/2.

- C'è una L-struttura che falsifica $\exists x \forall y\, P(x,y)$?
- Per falsificare $\exists x \forall y\, P(x,y)$ su un universo U dobbiamo mostrare che non ci sono a_k che rendono vera $(\forall y\, P(x,y))[x{:}c_k] = \forall y\, P(c_k,y)$, cioè che essa è falsa per ogni a_k.
- Prendiamo come universo provvisorio $U := \{a_0\}$. Siccome c'è solo a_0, ci basta rendere falsa $(\forall y\, P(x,y))[x{:}c_0] = \forall y\, P(c_0,y)$, rendendo falsa $P(c_0,y)[y{:}c_0] = P(c_0,c_0)$.
- Dunque un contromodello $S = (U,I)$ per (che falsifica) $\exists x \forall y\, P(x,y)$ è:

$$U := \{a_0\}$$

$$I(P) := \varnothing$$

Costruzione di interpretazioni (modelli e contromodelli)

NOTA BENE:

- Se devo mostrare che un L-enunciato A non è una verità logica, o che non è vero nella teoria Γ, basta costruire un contromodello.

- Se devo mostrare invece che un L-enunciato A è una verità logica, devo far vedere che tutte le L-strutture sono modelli.

- Analogamente, se devo mostrare che un L-enunciato A è vero nella teoria Γ, devo mostrare che tutti i modelli di Γ sono modelli di A.

«Paradosso» dell’uomo col cappello.

«Esiste un uomo che quando indossa il cappello tutti indossano il cappello».

- E’ vera o falsa?

- Traduzione:

$$\exists x(P(x) \rightarrow \forall y P(y))$$

«Paradosso» dell'uomo col cappello.

- Si consideri una struttura $S = (U,I)$ in cui interpretare

$$\exists x(P(x) \rightarrow \forall y P(y)).$$

- Allora:

$I(\ \exists x(P(x) \rightarrow \forall y P(y))\ ) = T$, sse
esiste $a_i \in U$ tale che $I(\ P(c_i) \rightarrow \forall y P(y)\ ) = T$, sse
esiste $a_i \in U$ tale che $(\ I(\ P(c_i)\ ) = F$ o $I(\ \forall y P(y)\ ) = T\ )$, sse
esiste $a_i \in U$ tale che
$(I(\ P(c_i)\ ) = F$ o per ogni $a_j \in U$ vale che $I(\ P(c_j)\ ) = T\ )$, sse
esiste $a_i \in U$ tale che
$(a_i \notin I(P)$ o per ogni $a_j \in U$ vale che $a_j \in I(P)\ )$.

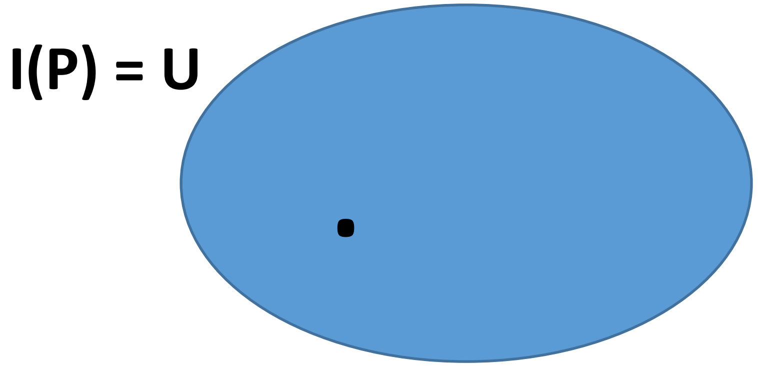
«Paradosso» dell'uomo col cappello.

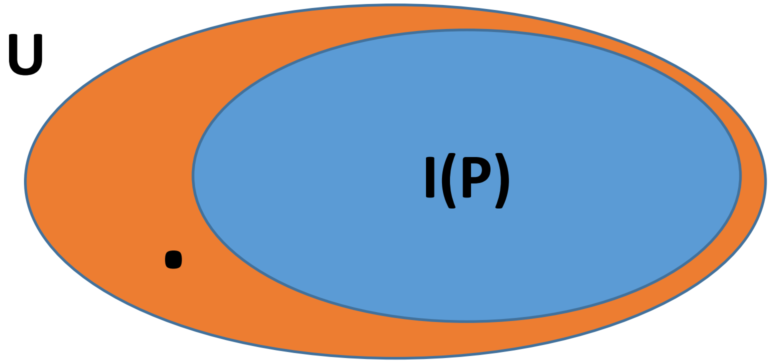
- Dunque: $\exists x(P(x) \rightarrow \forall y P(y))$ è vera in $S = (U,I)$ sse esiste $a_i \in U$ tale che
  ($a_i \notin I(P)$ o per ogni $a_j \in U$ vale che $a_j \in I(P)$)).

- Ragioniamo per casi su $I(P)$:
  - $I(P) = U$ oppure $I(P) \neq U$.
    - Se $I(P) = U$ allora per ogni $a_j \in U$ vale che $a_j \in I(P)$
      - Dunque $\exists x(P(x) \rightarrow \forall y P(y))$ è vera.
    - Se $I(P) \neq U$ allora esiste $a_i \in U$ tale che $a_i \notin I(P)$
      - Dunque $\exists x(P(x) \rightarrow \forall y P(y))$ è vera.
  - Dunque $\exists x(P(x) \rightarrow \forall y P(y))$ è vera in ogni struttura $S = (U,I)$.

«Paradosso» dell'uomo col cappello.

- Ragioniamo per casi su $I(P)$:
  - $I(P) = U$ oppure $I(P) \neq U$.
    - Se $I(P) = U$ allora per ogni $a_j \in U$ vale che $a_j \in I(P)$
      - Dunque $\exists x(P(x) \to \forall y P(y))$ è vera.
    - Se $I(P) \neq U$ allora esiste $a_i \in U$ tale che $a_i \notin I(P)$
      - Dunque $\exists x(P(x) \to \forall y P(y))$ è vera.
  - Dunque $\exists x(P(x) \to \forall y P(y))$ è vera in ogni struttura $S = (U,I)$.





«Paradosso» dell’uomo col cappello.

«Esiste un uomo che quando indossa il cappello tutti indossano il cappello».

- La sua traduzione:

$$\exists x(P(x) \rightarrow \forall y P(y))$$

è vera in ogni L-struttura, dunque la frase è logicamente vera!

Soluzione del «paradosso»: nella lettura intuitiva sono presenti elementi di causalità (il tizio «causa» il comportamento di tutti gli altri) e di persistenza temporale (si assume intuitivamente che il tizio sia sempre lo stesso in tutte le possibili «istantanee» del mondo). Entrambi gli aspetti sono ignorati nella lettura logica.

«Paradosso» dell'uomo col cappello: un enunciato simile che non è sempre vero.

$\exists x(P(x) \rightarrow \forall y P(y))$ è sempre vera.

E per quanto riguarda $\exists x P(x) \rightarrow \forall y P(y)$?

$I(\exists x P(x) \rightarrow \forall y P(y)) = T$, sse

$I(\exists x P(x)) = F$ o $I(\forall y P(y)) = T$, sse

non (esiste a_i tale che $I(P(c_i)) = T$) o per ogni a_j,$I(P(c_j)) = T$, sse

non esiste a_i tale che $a_i \in I(P)$, o ogni $a_j \in I(P)$.

«Paradosso» dell’uomo col cappello: un enunciato simile che non è sempre vero.

- Dunque: $\exists x P(x) \rightarrow \forall y P(y)$ è vera sse

  non esiste a_i tale che $a_i \in I(P)$, o ogni $a_j \in I(P)$.

  E’ facile costruire un controesempio (contromodello):

$$S := (U,I),$$

$$U := \{a_0,a_1\},$$

$$I(P) := \{a_0\}.$$

- non esiste a_i tale che $a_i \in I(P)$: falsificata da $a_{0;}$
- ogni $a_j \in I(P)$: falsificata da $a_{1.}$

«Paradosso» dell'uomo col cappello: si può provare ad aggiungere il tempo.

$\exists x(P(x) \rightarrow \forall y P(y))$ è sempre vera.

Se si vuole dire che «c'è un qualcuno *fissato* che *in ogni momento,* se indossa il cappello allora tutti indossano il cappello», dobbiamo formalizzare anche l'aspetto temporale: ad esempio:

$\exists x \forall t(P(t,x) \rightarrow \forall y P(t,y))$

ma a questo punto agli elementi dell'universo si aggiungono nuovi elementi pensati come istanti di tempo ($\forall t$): la gestione «tecnica» di questa modellizzazione non è semplice.

Conseguenza logica: in FO, in TAUT, in un contesto

Le definizioni semantiche fondamentali, in FOL

Dato un Linguaggio L.

Def. Q è una *conseguenza logica* delle premesse $P_1, \ldots, P_n$, scritto

$$P_1, \ldots, P_n \vDash_{FO} Q,$$

sse Q è vera nella teoria $\{P_1, \ldots, P_n\}$.

Equivalentemente: per ogni L-struttura S = (U,I):

$$\text{se } I(P_1) = I(P_2) = \ldots = I(P_n) = T \text{ allora } I(Q) = T.$$

Def. P e Q sono *logicamente equivalenti*, scritto

$$P \Leftrightarrow_{FO} Q,$$

sse i valori di verità di P e di Q coincidono in ogni interpretazione.

Equivalentemente: per ogni L-struttura S = (U,I),

$$S \vDash P \text{ sse } S \vDash Q, \qquad \text{cioè } I(P) = T \text{ sse } I(Q) = T.$$

Le definizioni fondamentali, riferite a un contesto C.

Un contesto C (su un linguaggio L) è un insieme di L-strutture.

Def. Q è una *conseguenza logica* in C delle premesse $P_1, \ldots, P_n$, scritto

$$P_1, \ldots, P_n \vDash_C Q,$$

sse Q è vera in ogni L-struttura S = (U,I) che appartiene a C e che è modello della teoria $\{P_1, \ldots, P_n\}$.

Def. P è *logicamente vera* in C, scritto $\vDash_C P$,
sse P è vera in vera in ogni L-struttura S = (U,I) che appartiene a C.

Def. P e Q sono *logicamente equivalenti* in C, scritto $P \Leftrightarrow_C Q$,
sse i valori di verità di P e di Q coincidono in ogni L-struttura S = (U,I) che appartiene a C.

Conseguenza logica ai vari «livelli».

- La logica si occupa delle leggi generali del pensiero, che valgono indipendentemente dal contesto specifico.
- Allo scopo utilizza una nozione astratta di circostanza, che consenta di rappresentare astrattamente ***qualsiasi*** circostanza concreta.
- In questo modo, se un ragionamento vale in tutte le circostanze astratte, a maggior ragione varrà in tutte le circostanze di un qualsiasi contesto concreto; si tratta cioè di una legge del pensiero razionale.
- Vediamo ora un quadro complessivo:

Quadro complessivo (dal libro di testo).

Propositional logic	First-order logic	General notion
Tautology	*FO validity*	*Logical truth*
Tautological consequence	*FO consequence*	*Logical consequence*
Tautological equivalence	*FO equivalence*	*Logical equivalence*

Nozione astratta di circostanza: Interpretazione proposizionale.

Nozione astratta di circostanza: Interpretazione del primo ordine, o L-struttura.

Le circostanze dipendono dal contesto; ad es. in TW sono i mondi dei blocchi.

Quadro complessivo (dal libro di testo).

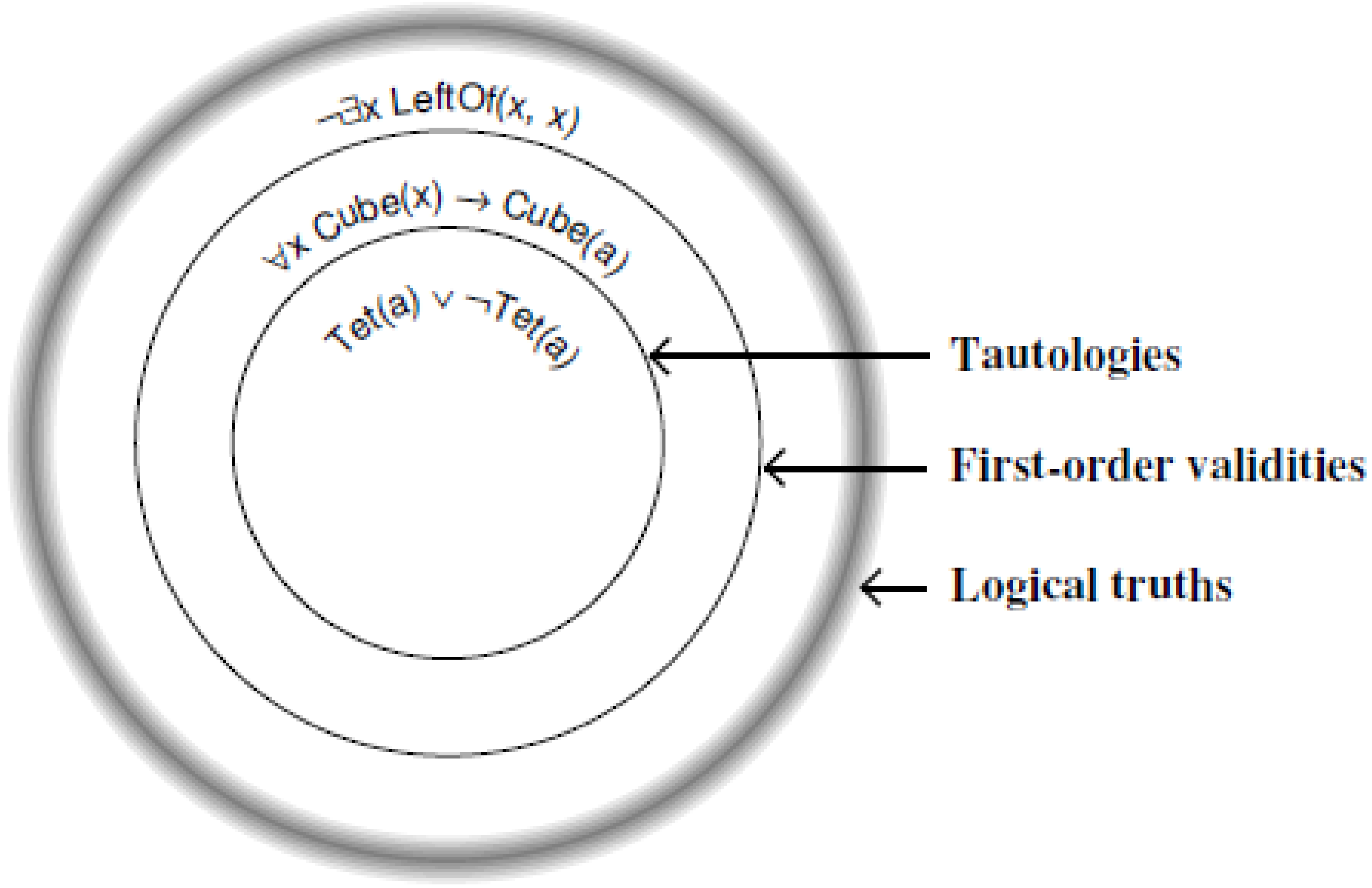


Figure 10.2: The relation between tautologies, first-order validities, and logical truths

Riferimenti al libro di testo

- Chapter 9: 9.7. (Si veda anche Chapter 1: 1.5, per una prima introduzione, nel testo, dei simboli di funzione).

- Chapter 10: 10.2.