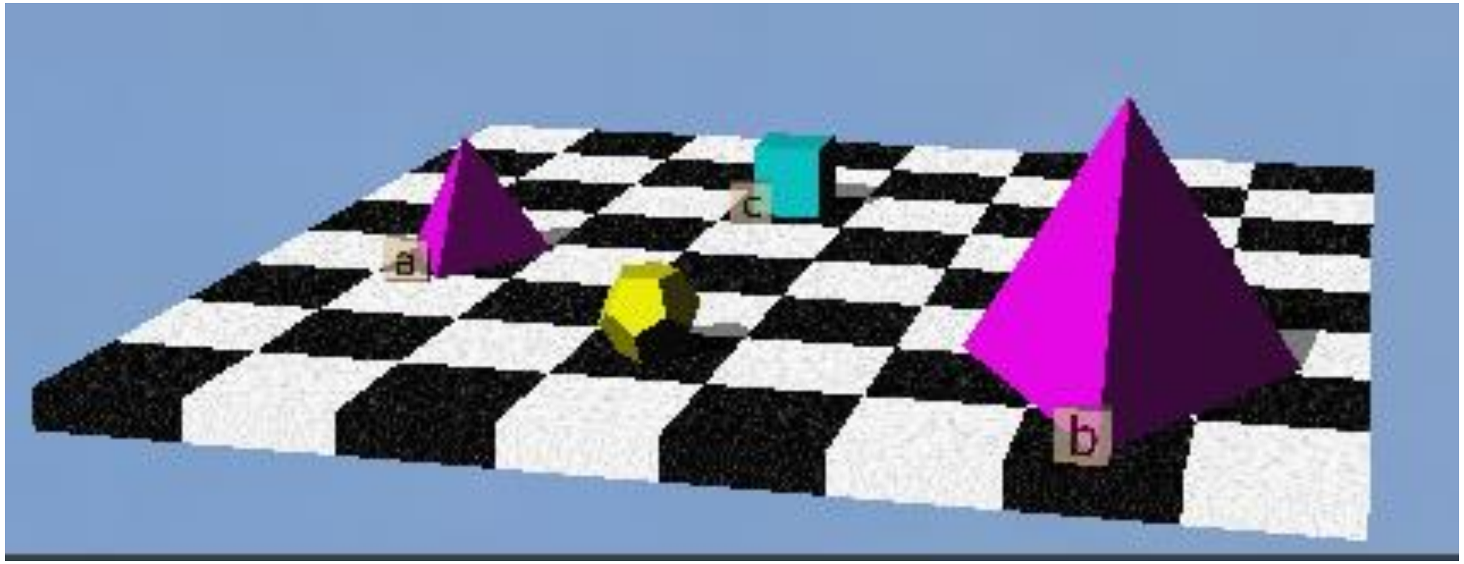
# Lezione 4

- Esempio di interpretazione
- Equivalenza logica
- Conseguenza logica e tautologica.
- Le regole per ragionare con «e» e «o»




Un mondo
NB. Il dodecaedro
non ha nome

L’interpretazione corrispondente

| | |
|---|---|
| T | 1. Tet(a) |
| T | 2. Tet(b) |
| F | 3. Tet(c) |
| F | 4. Cube(a) |
| F | 5. Cube(b) |
| T | 6. Cube(c) |
| F | 7. Dodec(a) |
| F | 8. Dodec(b) |
| F | 9. Dodec(c) |

| | |
|---|---|
| T | 10. SameShape(a,a) |
| T | 11. SameShape(a,b) |
| F | 12. SameShape(a,c) |
| T | 13. SameShape(b,a) |
| T | 14. SameShape(b,b) |
| F | 15. SameShape(b,c) |
| F | 16. SameShape(c,a) |
| F | 17. SameShape(c,b) |
| T | 18. SameShape(c,c) |

$A = \{x,y,z,w\}$, $I(a), I(b), I(c) \in A$,

$I(Tet) \subseteq A$, $I(Cube) \subseteq A$, $I(Dodec) \subseteq A$, $I(SameShape) \subseteq A^2$.

$I(a) = x$, $I(b) = y$, $I(c) = z$.

$I(Tet) = \{x,y\}$, $I(Cube) = \{z\}$, $I(Dodec) = \{w\}$ ,

$I(SameShape) = \{(x,x),(x,y),(y,x),(y,y),(z,z),(w,w)\}$.

| | |
|---|---|
| T | 1. Tet(a) |
| T | 2. Tet(b) |
| F | 3. Tet(c) |
| F | 4. Cube(a) |
| F | 5. Cube(b) |
| T | 6. Cube(c) |
| F | 7. Dodec(a) |
| F | 8. Dodec(b) |
| F | 9. Dodec(c) |

| | |
|---|---|
| T | 10. SameShape(a,a) |
| T | 11. SameShape(a,b) |
| F | 12. SameShape(a,c) |
| T | 13. SameShape(b,a) |
| T | 14. SameShape(b,b) |
| F | 15. SameShape(b,c) |
| F | 16. SameShape(c,a) |
| F | 17. SameShape(c,b) |
| T | 18. SameShape(c,c) |

L'interpretazione corrispondente

**Ecco, qui sopra, la formalizzazione in termini di Relazioni e Costanti dell'interpretazione qui a sinistra.**

# Logica dei connettivi

# Nozioni semantiche fondamentali: terminologia nello stile del libro

- **P è logicamente vera** (in un contesto) sse **P** è vera in ***tutte le circostanze del contesto***
- **P è tautologicamente vera o tautologia** sse **P** è vera ***in tutte le interpretazioni booleane*** (in tutte le ***righe della tavola di verità***)
- **P è logicamente possibile** (in un contesto) sse ***esiste una circostanza del contesto*** in cui **P è** vera.
- **P è tautologicamente possibile (o soddisfacibile)** sse ***esiste una interpretazione booleana*** (esiste ***una riga della tavola***) in cui **P** è vera
- **P è logicamente impossibile** (in un contesto) sse **P** è falsa in ***tutte le circostanze del contesto***
- **P è tautologicamente impossibile (o insoddisfacibile)** sse **P** è falsa in ***tutte le interpretazioni booleane*** (in tutte le ***righe della tavola di verità***)

# Nozioni semantiche fondamentali: terminologia standard

- **P è logicamente vera** (in un contesto) sse **P** è **vera** in ***tutte le circostanze del contesto***
- **P è tautologicamente vera o tautologia** sse **P** è **vera *in tutte le interpretazioni booleane*** (in tutte le ***righe della tavola di verità***)
- **P è logicamente possibile** (in un contesto) sse ***esiste una circostanza del contesto*** in cui **P è vera**.
- **P** è **proposizionalmente possibile (o soddisfacibile)** sse ***esiste una interpretazione booleana*** (esiste ***una riga della tavola***) in cui **P** è **vera**
- **P è logicamente impossibile** (in un contesto) sse **P** è **falsa** in ***tutte le circostanze del contesto***
- **P** è **proposizionalmente impossibile (o insoddisfacibile)** sse **P** è **falsa** in ***tutte le interpretazioni booleane*** (in tutte le ***righe della tavola di verità***)

# Il contesto come sottoinsieme di interpretazioni booleane

- Un **contesto** determina un insieme di **circostanze,**
- Un **insieme di circostanze** corrisponde a un sottoinsieme di tutte le interpretazioni booleane: vale a dire, **un sottoinsieme di righe** della tabella di verità.

- **P è logicamente vera** (in un contesto) sse **P** è vera in ***tutte le circostanze del contesto*** (in tutte le righe della tabella che corrispondono al contesto)
- **P è logicamente possibile** (in un contesto) sse ***esiste una circostanza del contesto*** (esiste una riga nel sottoinsieme corrispondente al contesto) in cui **P** è vera
- **P è logicamente impossibile** (in un contesto) sse **P** è **falsa** in ***tutte le circostanze del contesto*** (in tutte le righe della tabella che corrispondono al contesto)

# Formule logicamente vere (in un contesto)

Esprimono proprietà generali valide nel contesto e sono conoscenze utilizzabili nel ragionamento.

Alcuni esempi di proprietà logicamente vere in TW:

**Proprietà di forma** (per ogni blocco a):

- $Tet(a) \lor Cube(a) \lor Dodec(a)$
- $\neg(Tet(a) \land Cube(a))$
- $\neg(Tet(a) \land Dodec(a))$
- $\neg(Dodec(a) \land Cube(a))$

# Esercizio

A) Le seguenti proprietà sono logicamente vere in TW; scrivetele in formule.

- Un *dodecaedro* **a** non può essere un *cubo*
- Un blocco **a** *grande* non è *piccolo*
- Non può essere che **a** si trovi *fra* **b** e **c**, ma non *fra* **c** e **b**
- Non può essere che un blocco **a** sia contemporaneamente *davanti* e *dietro* a un blocco **b**

B) Trovate altre proprietà logicamente vere in TW.

# TAUTOLOGIE

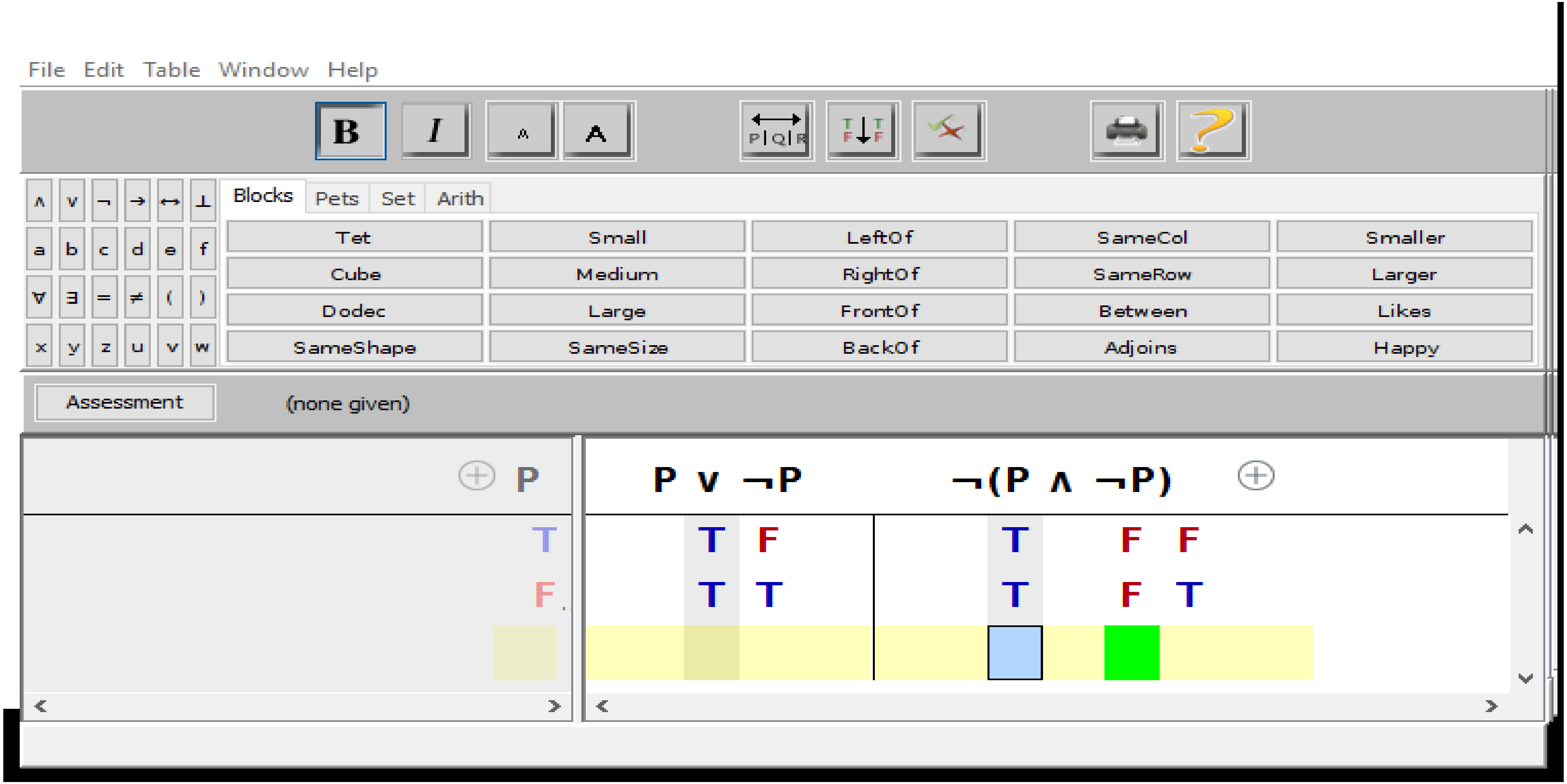
- Rappresentano ***LEGGI di ragionamento generali*** poiché sono vere *in **ogni** circostanza e contesto.

***Tautologie Importanti:***

- **Terzo escluso:** $P \vee \neg P$
- **Non contraddizione:** $\neg(P \wedge \neg P)$

- ***Vedremo altre tautologie significative quando introdurremo*** $\rightarrow$.

# Esempio: Tautologie con **Boole**



# Le proprietà logicamente/proposizionalmente impossibili

A volte è più intuitivo ragionare in termini di impossibilità:

*È impossibile che un blocco* ***a*** *si trovi contemporaneamente davanti e dietro a un blocco* ***b.***

***L'impossibilità logica/proposizionale è riconducibile alla verità logica/tautologica attraverso la negazione:***

**Teorema. P** *è logicamente impossibile in un contesto C* **sse** $\neg$**P** *è logicamente vera in C.*

**Teorema. P** *è proposizionalmente impossibile* **sse** $\neg$**P** *è tautologicamente vera.*

# Il metodo delle tavole di verità

- ***La tavola di verità di una fbf*** F mostra il valore di verità di F per tutte le interpretazioni booleane delle atomiche di F.

- Ricordare che con n atomiche si hanno $2^n$ interpretazioni booleane.

- Si costruisce gradualmente, riempiendo prima le colonne di strato 0, poi quelli di strato 1, e così via sino al connettivo principale.

# Esempio con **Boole**

**Tutte** le interpretazioni delle atomiche (strato 0)

| Tet(a) | Cube(a) | (Tet(a) ∧ Cube(a)) ∨ ¬Tet(a) |
|---|---|---|
| T | T | |
| T | F | |
| F | T | |
| F | F | |

| Tet(a) | Cube(a) | (Tet(a) ∧ | Cube(a)) ∨ | ¬Tet(a) |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | | F |
| T | F | F | | F |
| F | T | F | | T |
| F | F | F | | T |

Calcolo del valore di verità dello strato 1

| Tet(a) | Cube(a) | | (Tet(a) ∧ | Cube(a)) ∨ | ¬Tet(a) |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | ✓ | T | T | F |
| T | F | ✓ | F | F | F |
| F | T | ✓ | F | T | T |
| F | F | ✓ | F | T | T |

Calcolo del valore di verità dello strato 2

# Uso delle tavole di verità

Se nella tavola di una fbf F sotto al connettivo principale si trovano:

1. Tutti **T** : F è una tautologia.
2. Tutti **T** nelle interpretazioni possibili in un contesto:
   F è logicamente vera nel contesto.
3. Almeno un **T**: F è possibile proposizionalmente.
4. Almeno un **T** fra le interpretazioni possibili in un contesto: F è possibile in quel contesto.

# Esempio

| P | Q | | $(P \land Q)$ | $\lor$ | $\neg P$ | $\lor$ | $\neg Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | ✓ | T | T | F | T | F |
| T | F | ✓ | F | F | F | T | T |
| F | T | ✓ | F | T | T | T | F |
| F | F | ✓ | F | T | T | T | T |

È una tautologia

# Esempio

Non è una tautologia

| Tet(a) | Cube(a) | Dodec(a) | (¬Tet(a) ∧ ¬Cube(a)) ∨ ¬Dodec(a) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ~~T~~ | ~~T~~ | ~~T~~ | ~~F~~ | ~~F~~ | ~~F~~ | ~~F~~ | ~~F~~ |
| ~~T~~ | ~~T~~ | ~~F~~ | ~~F~~ | ~~F~~ | ~~F~~ | ~~T~~ | ~~T~~ |
| ~~T~~ | ~~F~~ | ~~T~~ | ~~F~~ | ~~F~~ | ~~T~~ | ~~F~~ | ~~F~~ |
| T | F | F | F | F | T | T | T |
| ~~F~~ | ~~T~~ | ~~T~~ | ~~T~~ | ~~F~~ | ~~F~~ | ~~F~~ | ~~F~~ |
| F | T | F | T | F | F | T | T |
| F | F | T | T | T | T | T | F |
| ~~F~~ | ~~F~~ | ~~F~~ | ~~T~~ | ~~T~~ | ~~T~~ | ~~T~~ | ~~T~~ |

ma è una verità logica in TW: cancellando le interpretazioni impossibili in TW, risulta vera in tutte le altre

# Proprietà importanti

a) **Se** ***P*** *è una tautologia* **allora** ***P*** *è logicamente vera in ogni contesto,*
b) **ma** vi sono formule logicamente vere (ad es.) in TW, che non sono tautologie.
c) **Se** ***P*** è possibile in un contesto **allora** è anche proposizionalmente possibile,
d) **ma** vi sono formule proposizionalmente possibili ma impossibili (ad es.) in TW.

**Esercizio 1.** a), c) sono abbastanza ovvi, provatelo con una vostra dimostrazione informale (ragionate sulle tavole di verità).

**Esercizio 2.** Mostrate una formula di TW che verifica b).

**Esercizio 3.** Mostrate una formula di TW che verifica d).

# Equivalenza logica

# Equivalenza (tauto)logica

Due proposizioni sono

- ***tautologicamente*** (o, ***proposizionalmente***) ***equivalenti*** , scritto $P \Leftrightarrow_{T} Q$,
  **sse** hanno lo stesso valore di verità in tutte le interpretazioni booleane
- ***logicamente equivalenti*** in un contesto C, scritto $P \Leftrightarrow_{C} Q$
  **sse** hanno lo stesso valore di verità in tutte le interpretazioni possibili nel contesto

Al solito, se P e Q sono tautologicamente equivalenti, allora sono logicamente equivalenti in ogni contesto.

| A | B | $\neg(A \wedge B)$ | | $\neg A \vee \neg B$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | T | F | F | F |
| T | F | T | F | F | T | T |
| F | T | T | F | T | T | F |
| F | F | T | F | T | T | T |

Le colonne sotto a

$\neg (A \wedge B)$

$\neg A \vee \neg B$

coincidono, per cui

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow_T \neg A \vee \neg B$

| Tet(a) | Dodec(a) | Cube(a) | Tet(a) $\vee$ Dodec(a) | | $\neg$Cube(a) | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | F | F | ✓ | T | ✓ | T |
| F | T | F | ✓ | T | ✓ | T |
| F | F | T | ✓ | F | ✓ | F |

Ci sono solo 3 interpretazioni booleane che rappresentano circostanze possibili in TW; in esse le colonne sotto alle due fbf coincidono, per cui

$\text{Tet}(a) \vee \text{Dodec}(a) \Leftrightarrow_{TW} \neg\text{Cube}(a)$

# Equivalenza logica e rimpiazzamento (o riscrittura)

- ***Rimpiazzamento (o riscrittura):*** se $P \Leftrightarrow Q$, posso rimpiazzare P con Q in una formula F, ottenendo una formula $G \Leftrightarrow F$
  - Non abbiamo riportato il pedice perché la proprietà vale sia per $\Leftrightarrow_T$ , sia per $\Leftrightarrow_C$ in un contesto C.

- La riscrittura serve per dire una stessa cosa in modi diversi, se ritenuti più chiari o più adatti in un ragionamento o più convenienti.

# Esempio

Usiamo le equivalenze:

a) $Tet(a) \lor Dodec(a) \Leftrightarrow_{TW} \neg Cube(a)$

b) $Small(a) \lor Medium(a) \Leftrightarrow_{TW} \neg Large(a)$

c) $\neg(A \land B) \Leftrightarrow_{T} \neg A \lor \neg B$

1. $\mathbf{Tet(a) \lor Dodec(a)} \lor Small(a) \lor Medium(a)$
2. $\neg Cube(a) \lor \mathbf{Small(a) \lor Medium(a)}$
3. $\mathbf{\neg Cube(a) \lor \neg Large(a)}$
4. $\neg(Cube(a) \land Large(a))$

# Alcune equivalenze tautologiche notevoli

Doppia Negazione $\neg\neg A \Leftrightarrow_T A$

DeMorgan: $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow_T \neg A \vee \neg B$ $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow_T \neg A \wedge \neg B$

Associatività: $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow_T A \wedge (B \wedge C)$ $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow_T A \vee (B \vee C)$

Commutatività: $A \wedge B \Leftrightarrow_T B \wedge A$ $A \vee B \Leftrightarrow_T B \vee A$

Idempotenza: $A \wedge A \Leftrightarrow_T A$ $A \vee A \Leftrightarrow_T A$

Assorbimento: $A \Leftrightarrow_T A \wedge (A \vee B)$ $A \Leftrightarrow_T A \vee (A \wedge B)$

Distributività: $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow_T (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow_T (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

# Esercizi importanti

1. Date una formula che sia una tautologia e dimostratelo con le tavole di verità
2. Date una formula che sia logicamente vera in TW ma non sia una tautologia e dimostratelo con le tavole di verità
3. Date una formula che sia possibile in TW ma non sia logicamente vera in TW e dimostratelo con le tavole di verità. La formula è anche proposizionalmente possibile? È una tautologia?
4. Date una formula proposizionalmente possibile ma impossibile in TW e dimostratelo con le tavole di verità.

# Conseguenza logica e tautologica

# Conseguenza logica e tautologica: le definizioni

***DEF. Conseguenza logica:*** Q segue logicamente da $P_1,\ldots,P_n$ in un contesto **C sse** Q è vera in tutte le interpretazioni nel contesto, in cui $P_1,\ldots,P_n$ sono vere.

Notazione: $P_1,\ldots,P_n \vDash_{\mathbf{C}} Q$

***DEF. Conseguenza tautologica:*** Q segue tautologicamente da $P_1,\ldots,P_n$ **sse** Q è vera in ogni interpretazione booleana in cui $P_1,\ldots,P_n$ sono vere.

Notazione: $P_1,\ldots,P_n \vDash_{T} Q$

Siccome le interpretazioni possibili in un contesto sono un sotto-insieme di quelle booleane:

- $P_1,\ldots,P_n \vDash_{T} Q$ implica $P_1,\ldots,P_n \vDash_{\mathbf{C}} Q$ , ma non vale in genere il viceversa.

# Stabilire la conseguenza logica con le tavole di verità

Siano $P_1, \dots, P_n$ le premesse e C la conseguenza. Costruiamo la tavola di verità di $P_1, \dots, P_n$ , C e analizziamo i valori di verità ottenuti nelle varie interpretazioni booleane (le righe della tabella).

1. Se non troviamo 'righe controesempio', ovvero interpretazioni booleane in cui C è ***falsa*** e le premesse sono ***tutte vere*** , allora C è conseguenza tautologica delle premesse.
2. Se vi sono righe controesempio, ma ***nessuna*** *di queste corrisponde ad una interpretazione possibile nel contesto*, allora C è conseguenza logica delle premesse nel contesto ma non è conseguenza tautologica.
3. Se 1,2 non valgono, C non è neppure conseguenza logica nel contesto.

# Esempio

Dire se si tratta di conseguenza tautologica,
o logica in TW ma non tautologica,
o nessuno dei due casi:

**Premesse:**

1. $Tet(a) \vee Cube(b)$
2. $Dodec(b)$

**Conseguenza:**

3. $Tet(a)$

| | Tet(a) | Cube(b) | Dodec(b) | Tet(a) $\vee$ Cube(b) | Dodec(b) | Tet(a) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | F | F | F | F | F | F |
| 2 | F | F | T | F | T | F |
| 3 | F | T | F | T | F | F |
| 4 | F | T | T | T | T | F |

Siccome cerco i controesempi considero solo le circostanze in cui la conseguenza è falsa;   in esse la 4 è un controesempio.
Dunque Tet(a) ***non è conseguenza tautologica delle premesse***.
Però la 4 non è possibile in TW, dunque in TW non ci sono contro-esempi e Tet(a) ***è conseguenza logica delle premesse in TW.***

**Premesse:**

1. $Tet(a) \vee Cube(b)$
2. $\neg Cube(b)$

**Conseguenza:**

3. $Tet(a)$

Invece in questo caso
si ha conseguenza tautologica

| | Tet(a) | Cube(b) | Tet(a) ∨ Cube(b) | ¬Cube(b) | Tet(a) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | F | F | F | T | F |
| 2 | F | T | T | F | F |

Considero le circostanze in cui la conseguenza è falsa;
nessuna di esse è un controesempio.
Dunque Tet(a) ***è conseguenza tautologica delle premesse***.

# Conseguenze fondamentali per i connettivi $\wedge$, $\vee$

$\wedge$ Intro) $A, B \vDash_T A \wedge B$

$\wedge$ Elim) $A \wedge B \vDash_T A$ $\qquad$ $A \wedge B \vDash_T B$

$\vee$ Intro) $A \vDash_T A \vee B$ $\qquad$ $B \vDash_T A \vee B$

(e per quanto riguarda «$\vee$ Elim»?, Lo vedremo)

# Le regole per ragionare con «e» e «o»

## Introduzione ed eliminazione di ∧: si applicano le conseguenze tautologiche fondamentali:

∧ Intro) $P_1,..,P_n \models_T P_1 \wedge ... \wedge P_n$

**Conjunction Introduction (∧ Intro):**

$$\begin{array}{l|l} & P_1 \\ & \Downarrow \\ & P_n \\ & \vdots \\ \triangleright & P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \end{array}$$

∧ Elim) $P_1 \wedge ... \wedge P_n \models_T P_i$

**Conjunction Elimination (∧ Elim):**

$$\begin{array}{l|l} & P_1 \wedge \ldots \wedge P_i \wedge \ldots \wedge P_n \\ & \vdots \\ \triangleright & P_i \end{array}$$

## Regola di introduzione di $\vee$

$\vee$ Intro) $P_i \vDash_T \; P_1 \vee \ldots \vee P_n$

**Disjunction Introduction ($\vee$ Intro):**

$$\begin{array}{l|l} & P_i \\ & \vdots \\ \triangleright & P_1 \vee \ldots \vee P_i \vee \ldots \vee P_n \end{array}$$

**E la Regola di eliminazione di «o»?**

***Da «P o Q» cosa posso inferire ?***

- *Si procede per casi: cosa posso inferire nel caso P e cosa nel caso Q; se in entrambi i casi posso inferire C, allora C segue da «P o Q».*

# Esempio

- Prima di vedere l'eliminazione di $\lor$ vediamo come operano le regole $\land$ Intro, $\land$ Elim, $\lor$ Intro.

  Dimostriamo $P \land Q \vDash_T Q \land (P \lor \neg R)$.

- Al primo passo scriviamo il nostro «goal»:

$$\begin{array}{|ll} P \land Q & \text{è la premessa} \\ \hline Q \land (P \lor \neg R) & \text{è la conclusione, il nostro goal} \end{array}$$

# Esempio

- La regola   ci dice che per dimostrare $Q \wedge (P \vee \neg R)$ dobbiamo dimostrare separatamente Q e $(P \vee \neg R)$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $P \wedge Q$ | |
| 2. | $Q$ | Rule? |
| 3. | $P \vee \neg R$ | Rule? |
| 4. | $Q \wedge (P \vee \neg R)$ | $\wedge$ Intro 2, 3 |

Osserviamo che smontando $P \wedge Q$ in P, Q con $\wedge$ Elim, otteniamo Q direttamente; per quanto riguarda $P \vee \neg R$, la possiamo ottenere per $\vee$ Intro da P.

# Esempio

- Quindi la prova è

| | |
|---|---|
| 1. $P \wedge Q$ | |
| 2. $Q$ | $\wedge$ Elim 1 |
| 3. $P$ | $\wedge$ Elim 1 |
| 4. $P \vee \neg R$ | $\vee$ Intro 3 |
| 5. $Q \wedge (P \vee \neg R)$ | $\wedge$ Intro 2, 4 |

# Riferimenti al libro di testo

- Chapter 3: Sezione 3.6

- Chapter 4: fino a Sezione 4.3 inclusa;  Sezione 4.5