Prima Parte

Logica Proposizionale

Lezione 2

- Introduzione alla Logica Proposizionale
- La logica delle Proposizioni Atomiche
- L’identità e le sue regole.

Introduzione alla Logica Proposizionale

Una precisazione

- Tradizionalmente, per **logica proposizionale** si intende la logica dei **connettivi** e delle lettere proposizionali: P,Q,R,…
- A ogni lettera proposizionale si associa un valore di verità: T o F
- In questo corso, e nel libro di testo, intendiamo per **logica proposizionale**, sia la logica delle lettere proposizionali, sia la logica dei **predicati** (enunciati semplici, atomici) completamente istanziati (**senza variabili**).
- Chiameremo inoltre **logica delle proposizioni atomiche**, la logica degli enunciati semplici insieme alla relazione di **identità** (anche se, tecnicamente, questa logica *è già un frammento della logica del primo ordine*, e non proposizionale).

Logica degli **enunciati** e dei connettivi

- **Enunciato:** frase interpretata come vera o falsa in una data circostanza: **piove, Mario corre**, **Pippo ama Anna**, **piove e Mario corre**, **Pippo non ama Anna**, …
- **Enunciato semplice:** che non è composto da altri enunciati usando i connettivi: **piove, Mario corre, Pippo ama Anna**.
- Formalizzazione degli **enunciati semplici:**
  - Lettere proposizionali: P,Q,R (astrazione)
  - Proposizioni atomiche (di FOL), *completamente istanziate*:

    Piove, Corre(mario), Ama(pippo,anna).

Riprendiamo un esempio

Se piove prendo l'ombrello

Formalizzazione con lettere proposizionali:

$$P \rightarrow Q$$

Formalizzazione con proposizioni atomiche:

$$Piove \rightarrow Ombrello$$

Le proposizioni atomiche: sintassi e semantica

- Le ***proposizioni atomiche*** sono le più semplici «frasi con senso compiuto» interpretabili come ***vere o false*** in una data ***circostanza di un contesto.*** Un contesto sottende:
  - Un ***linguaggio*** , caratterizzato da
    - vocabolario, in informatica detto spesso ***segnatura.***
    - ***sintassi.***
  - Una ***semantica***, caratterizzata da
    - ***circostanze*** *possibili.*
    - ***interpretazione,*** procedimento attraverso il quale attribuiamo un ***valore di verità*** **T** (True) **o** **F** (False) alla proposizione ***in una data circostanza.***

Le proposizioni atomiche nel linguaggio naturale e in FOL

Esempi nel caso più semplice:

- **Piove**
  - affermazione (0-aria, ha 0 *posti*).
- Ugo **è alto**

  «$\_\_\_\__1$ **è alto**» ***predicato nominale***, stabilisce una proprietà del soggetto (è 1-aria, 1 solo posto).
- Ugo **vede** Gigi
  - «$\_\_\_\__1$ **vede** $\_\_\_\__2$» ***predicato verbale***; stabilisce una ***relazione binaria*** fra soggetto (posto 1) e complemento oggetto (posto 2).

Le proposizioni atomiche nel linguaggio naturale e in FOL

«Mario **ha ottenuto** 28 **nel** primo appello»

«____$_1$ **ha ottenuto** _____$_2$ **nel** _____$_3$» stabilisce una relazione ***ternaria*** (tre posti).

Vi hanno insegnato:

____$_1$ è il **soggetto**,

_____$_2$ è il **complemento oggetto**,

_____$_3$ è un **complemento indiretto.**

Qui non facciamo analisi grammaticale ma è fondamentale osservare che i ruoli non possono (in genere) scambiarsi senza stravolgere il senso: «28 **ha ottenuto** il primo appello **in** Mario» ?!

Le proposizioni atomiche nel linguaggio naturale e in FOL

- ***Sintassi:*** le ***proposizioni atomiche*** si ottengono riempiendo i posti dei predicati del linguaggio con dei nomi o più in generale dei sintagmi nominali, ad es.:

1. «*Fido* **è un cane**»
2. «*Fido* **rincorre** *il gatto di Piero*»
3. «*Gigi* **ha regalato** *un bel libro* **al** *padre di Carla*»

I sintagmi nominali possono essere dei semplici nomi (*Fido*, *Gigi, Carla*) o gruppi complessi con funzione di nome (*il gatto di Piero*, *un bel libro, padre di Carla*).

Linguaggio del primo ordine (di un contesto)

In FOL, il linguaggio di un contesto comprende

- ***costanti*** = *nomi per indicare oggetti* ad es. «luigi», «45», «pluto», ecc.
- ***predicati (n-ari)*** per definire proprietà o mettere in relazione oggetti. Esempi:
  - «**Cane**($\_\_{1}$)» ***predicato unario***, 1 'posto';
    *corrisponde a frasi del tipo «___ è un cane», «il cane ___», …; esprime una **proprietà** degli individui.*
  - «**Rincorre**($\_\_\_{1}$, $\_\_\_{2}$)» ***predicato binario***, 2 'posti' _____;
    *corrisponde a frasi del tipo «__ rincorre __», esprime una **relazione** fra chi rincorre, nel posto 1, e chi è rincorso, nel posto 2.*
  - «**Regalato**($\_\_\_{1}$,$\_\_\_{2}$, $\_\_\_{3}$)» ***predicato ternario***, 3 'posti' _____;
    *corrisponde a frasi come «__ha regalato ___ a ___», esprime una **relazione** fra chi ha regalato (posto 1) qualcosa (posto 2) a chi (posto 3).*
  - … *(ci possono essere predicati di ogni arità).*
- ***funzioni (n-arie)*** per indicare oggetti indirettamente (lo vedremo). Es: *padre di _*

Sintassi delle proposizioni atomiche in un linguaggio

- ***Sintassi delle proposizioni atomiche in FOL:***

  si ottengono ***riempiendo i posti*** dei predicati **del linguaggio,**

  con delle costanti, ad esempio:

  «Gatto(felix)», «Rincorre(fido, felix)», «Regalato(gigi,fuffi, maria)», «Piove»

- **«**Rincorre(fido,felix)» ha, in genere, lo stesso significato di «Rincorre(felix,fido)?

- **Esercizio:** **«**Rincorre(fido, Gatto(felix))» ***non*** è sintatticamente corretta in FOL. Spiegare perché.

La logica delle proposizioni atomiche

L’importanza del CONTESTO

Un **contesto** **è un** **insieme** **di** **circostanze.**

Esempio: Cube(a) → Dodec(a)

Se a è un cubo è anche un dodecaedro

è falsa nel *contesto* dei blocchi in ogni circostanza in cui a è un cubo.

C’è una lingua papuasica dove sia **cube** sia **dodec** significano: **pangolino**.

In questo *contesto* la formula risulta vera
(è vera in ogni circostanza del contesto).

L’importanza del CONTESTO

In genere è difficile stabilire completamente un *contesto*
(ma non è responsabilità della logica farlo):

Esempio: **I dinosauri sono tutti estinti.**

Vera nel *contesto della paleontologia* fino a 100 anni fa (abbondiamo)

Falsa nel *contesto della paleontologia* oggi (è assodato: gli uccelli sono dinosauri).

I due contesti sono distinti, anche se potrebbero sembrare lo stesso.

Logica «pura» e FOL

- IMPORTANTE: fissare un contesto (il mondo dei blocchi, la paleontologia oggi, etc…) è una operazione *extra-logica*.
- Noi dobbiamo solo assumere che un contesto fissi un insieme di circostanze (nel mondo dei blocchi un cubo non può essere un tetraedro, etc…), a noi ben noto.

- IMPORTANTE: quando si lavora nella logica «pura» (FOL), si devono considerare *tutte* le circostanze (di ogni possibile contesto)
- vale a dire, tutti i modi matematicamente validi di interpretare i simboli del linguaggio. Non vi è alcuna informazione di contesto.
- Se **nessun contesto** è specificato (o sottointeso) si intende che si sta ragionando nella **logica pura (FOL)**.

Il linguaggio dei BLOCCHI [sintassi]: i predicati di forma

- **Costanti**:
  - per nominare i blocchi si usano le lettere {a, b, c, d, e, f} o un sottoinsieme di esse.
- **Predicati** di forma
  - Tet(_)
  - Cube(_)
  - Dodec(_)
  - SameShape(__,   __)
- **Proposizioni atomiche**. Al solito, si ottengono riempiendo i posti dei predicati con costanti.

Il linguaggio dei BLOCCHI [sintassi]: i predicati di forma

Con 3 costanti a,b,c e i predicati di forma abbiamo 18 possibili proposizioni atomiche:

1. Tet(a)
2. Tet(b)
3. Tet(c)
4. Cube(a)
5. Cube(b)
6. Cube(c)
7. Dodec(a)
8. Dodec(b)
9. Dodec(c)

10. SameShape(a,a)
11. SameShape(a,b)
12. SameShape(a,c)
13. SameShape(b,a)
14. SameShape(b,b)
15. SameShape(b,c)
16. SameShape(c,a)
17. SameShape(c,b)
18. SameShape(c,c)

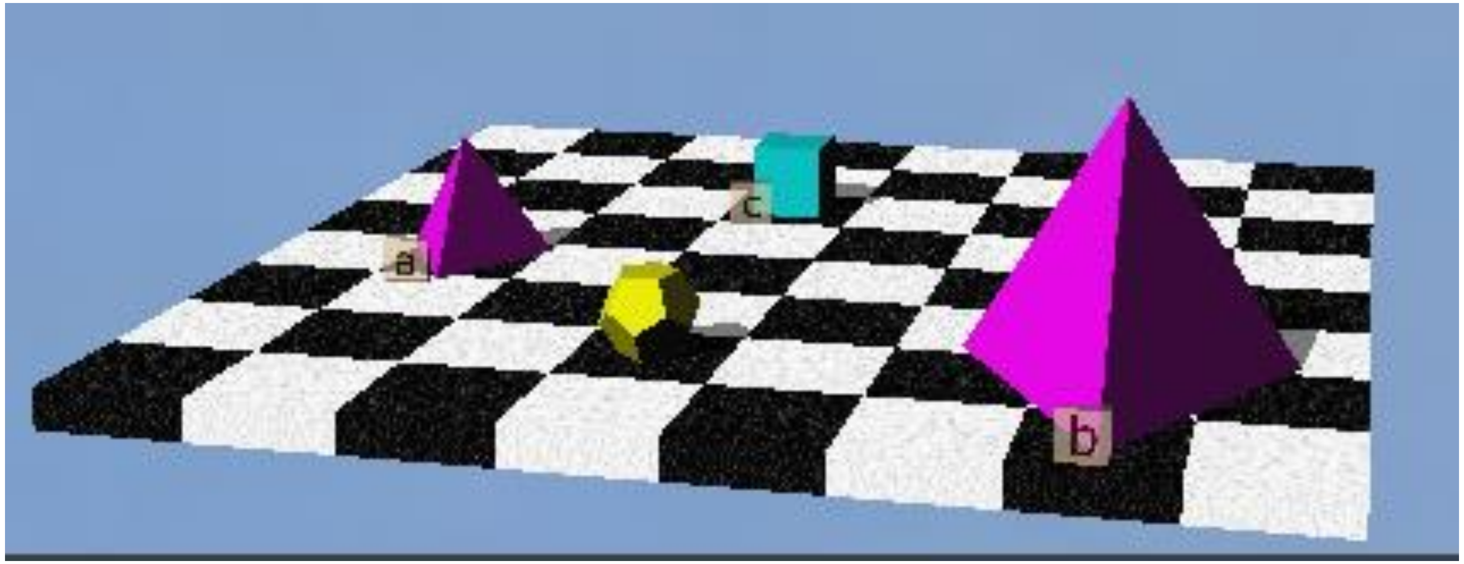
Semantica delle proposizioni atomiche = interpretazione

Ricordiamo che le proposizioni atomiche si ottengono riempiendo con delle costanti i posti dei predicati, che esprimono proprietà o relazioni.

- ***Semantica:*** le circostanze possibili dipendono dal contesto.
  In una circostanza:
  - *una costante denota un **unico*** oggetto.
  - *un proposizione atomica* è ***vera*** se *la proprietà o relazione espressa dal predicato vale per gli oggetti indicati dalle costanti,* altrimenti è ***falsa.***

Semantica e interpretazioni nel contesto dei blocchi

- Significato dei simboli della segnatura
  - a,b,…,f : nomi di blocchi
  - Tet(a): «a ha la forma di tetraedro»
  - Cube(a): «a ha la forma cubo»
  - Dodec(a): «a ha la forma di dodecaedro»
  - SameShape(a, b): «a e b hanno la stessa forma»
- Le ***circostanze*** sono le griglie che riusciamo a costruire e sono chiamate ***mondi*** (***worlds***).
- Il procedimento interpretativo è implementato in **Tarski's World**: l'applicazione segna con **T** le proposizioni vere e con **F** quelle false nel mondo considerato.



Un mondo
NB. Il dodecaedro non ha nome

T	1. Tet(a)
T	2. Tet(b)
F	3. Tet(c)
F	4. Cube(a)
F	5. Cube(b)
T	6. Cube(c)
F	7. Dodec(a)
F	8. Dodec(b)
F	9. Dodec(c)

T	10. SameShape(a,a)
T	11. SameShape(a,b)
F	12. SameShape(a,c)
T	13. SameShape(b,a)
T	14. SameShape(b,b)
F	15. SameShape(b,c)
F	16. SameShape(c,a)
F	17. SameShape(c,b)
T	18. SameShape(c,c)

L’interpretazione corrispondente

Il linguaggio completo del contesto dei blocchi

Per brevità ci siamo limitati ai predicati di forma.
Nel seguito useremo il linguaggio completo, che comprende anche:

Predicati di dimensione

Small(a)	*a* è piccolo
Medium(a)	*a* è medio
Large(a)	*a* è grande
SameSize(a, b)	*a* ha la stessa dimensione di b
Larger(a, b)	*a* è più grande di *b*
Smaller(a, b)	*a* è più piccolo di *b*

Predicati di posizione

SameCol(a, b)	*a* e b sulla stessa colonna
SameRow(a, b)	*a* e b sulla stessa riga
Adjoins(a, b)	*a* e *b* su quadrati adiacenti (ma non in diagonale)
LeftOf(a, b)	*a* più vicino di b al lato sinistro della griglia
RightOf(a, b)	*a* più vicino di b al lato destro della griglia
FrontOf(a, b)	*a* più vicino di b al lato frontale della griglia
BackOf(a, b)	*a* più vicino di b al lato posteriore della griglia
Between(a, b, c)	*a*, *b* e *c* sulla stessa riga, colonna o diagonale e *a* è fra *b* e *c*

Fissiamo le idee:

- **Contesto**: insieme di circostanze. Gli si associa un **Linguaggio** (NB: contesti diversi possono essere associati allo stesso linguaggio).
- **Linguaggio:** dato da **costanti + predicati** (n-ari) + funzioni (n-arie).
- **Proposizioni atomiche:** predicati completamente istanziati (in ogni posto) con costanti.
- **Interpretazione** (in una circostanza): fissato l'**universo** del discorso **A:**
  - **Costanti:** elementi dell'**universo** del discorso: **$I(c) \in A$.**
  - **Predicati** (n-ari): relazioni (n-arie) sull'**universo del discorso**:

    $I(P) \subseteq A^n$.
  - **Proposizione atomica: $P(c_1,\dots,c_n)$:** è **vera** (nella data circostanza = nella data interpretazione) sse **$(I(c_1),\dots,I(c_n)) \in I(P)$.**

La logica si occupa delle leggi del ragionamento

Ragionamento: serie di frasi riferite ad un contesto, in cui una, detto ***conseguente***, segue dalle altre, dette ***premesse*.**

- Un ragionamento si dice ***logicamente valido*** *in un contesto* **sse** *il conseguente è vero in* ***tutte*** *le circostanze del contesto in cui sono vere le premesse; si dice anche che*
  - *il conseguente è* ***conseguenza logica*** *delle premesse.*

- Un ragionamento è ***fondato in una circostanza*** **sse** è valido **e** le premesse sono vere in essa.

Metodi per analizzare la validità di un ragionamento: il metodo dei **controesempi**

- Per dimostrare che un ragionamento ***non è valido*** si mostra un ***controesempio***, cioè una circostanza in cui ***il conseguente è falso pur essendo vere le premesse.***

- Il metodo dei controesempi si può usare anche per ***dimostrare la validità*** di un ragionamento dimostrando che ***non ci sono controesempi.***
  - Infatti, se non ci sono controesempi, in tutte le circostanze in cui le premesse sono vere il conseguente non è falso (altrimenti fornirebbe un controesempio) e quindi è vero.

- NB: negli esempi seguenti si usano ragionamenti «informali». Esercizio: introducete un linguaggio associato al contesto e formalizzate le frasi usate con proposizioni atomiche.

Esempio: consideriamo le proposizioni

1. *Ugo e Ada non sono parenti*
2. *Gigi è il padre di Ada*
3. *Gigi non è il padre di Ugo*

- Qual è il contesto inteso e quali le circostanze possibili?
- 1 segue logicamente da 2, 3   (in FOL? Nel contesto inteso?)
    - **No, controesempio:** Gigi è padre di Ada e il nonno di Ugo e Ada è la madre di Ugo; in questa circostanza le premesse 2, 3 sono vere, ma la conseguenza 1 è falsa (madre e figlio sono parenti)
    - NB: il fatto che madre e figlio siano parenti è una informazione contestuale.

Esempio (prosegue)

1. *Ugo e Ada non sono parenti*
2. *Gigi è il padre di Ada*
3. *Gigi non è il padre di Ugo*

- 3 segue logicamente da 1,2 (nel contesto inteso?)
- **Sì,** *dimostriamo che non ci sono controesempi.* Se ce ne fosse uno, dovremmo avere le premesse 1, 2 vere e la conseguenza 3 falsa;

  ma se 3 è falsa, Gigi è il padre di Ugo e quindi le premesse 1 e 2 non possono essere entrambe vere.
  - O la 2 è falsa, oppure, se vera, Gigi è il padre di Ada e di Ugo e quindi Ugo e Ada sono fratello e sorella ed è falsa la 1.

- 3 segue logicamente da 1,2 (in FOL)?

(suggerimento: interpretate «essere parenti» come «avere la stessa altezza»)

Metodi per analizzare la validità di un ragionamento: Prove

- *Una prova dimostra la conseguenza a partire dalle premesse attraverso una **successione di passaggi la cui validità logica è evidente**;*

  - *un **passaggio (o inferenza)** introduce una nuova conseguenza logica delle premesse, utilizzabile in passaggi successivi.*
  - *l'ultimo passaggio introduce la conseguenza desiderata.*

- *Si hanno **diversi stili di prova:***

Stili di prova

Prove informali: *linguaggio naturale o gergo specialistico; passaggi (o **inferenze**) rigorosi, giustificati informalmente ma rigorosamente.*

Prove formali: *avvengono in un **sistema formale** costituito da*

- ***linguaggio formale** per le formule,*
- ***regole di inferenza** formali; sono le regole che governano i passaggi.*

NOTA. In una prova informale la correttezza dei singoli passaggi deve essere giudicabile dal «pubblico a cui è destinata» in modo inequivocabile.
In un sistema formale la correttezza dei singoli passaggi deve essere giudicabile da un umano e deve essere definita algoritmicamente (e quindi automatizzabile).

Esempio di prova informale (**nel contesto: parentele**)

Premesse: (i) Ugo e Ada non sono parenti

(ii) Gigi è il padre di Ada

Conseguenza: Gigi non è il padre di Ugo

Dim.

Supponiamo ***per assurdo*** che ***Gigi sia il padre di Ugo***.

Siccome sappiamo (da (ii)) che Gigi è il padre di Ada, ***Gigi è il padre di Ugo e di Ada***. Dunque ***Ugo e Ada sono fratello e sorella***. Ma ciò è ***assurdo*** poiché sappiamo (da (i)) che Ugo e Ada non sono parenti.

Quindi ***Gigi non è il padre di Ugo***. CVD

WARNING!

Abbiamo introdotto la nozione, di origine **extra-logica** di **CONTESTO** per essere immediatamente operativi con esercizi nel contesto del mondo dei blocchi.

Ma, in genere la logica lavora **a prescindere da contesti specificati** (si considerano tutte le circostanze possibili: tutte le interpretazioni possibili dei predicati, delle costanti, delle funzioni).

NEGLI ESERCIZI: a meno che il testo non **richieda esplicitamente di prendere in considerazione un contesto** (nel qual caso è di solito il contesto del mondo dei blocchi), non si richiede quasi mai di ragionare relativamente a un contesto, per cui, prima di dare risposte tipo «dipende dal contesto» pensateci molte volte: quasi sempre è la risposta sbagliata!

L’identità e le sue regole di inferenza

Linguaggi con identità

In FOL il predicato binario _ = _ ha una interpretazione prefissata:

a = b è vero in una circostanza se e solo se in quella circostanza a, b sono nomi dello stesso individuo/oggetto.

Valgono le seguenti regole di inferenza:

(= Intro) la proposizione **n = n** è vera per qualsiasi costante **n** in qualsiasi contesto e circostanza, per cui la posso inferire in qualunque punto della prova.

(= Elim) se nelle premesse o in passaggi precedenti ho ottenuto **n = m,** allora posso ***sostituire*** **m** al posto di **qualche occorrenza** di **n** in una proposizione **P(n)** già dimostrata, ***inferendo*** *una nuova proposizione* **P(m)**.

Regole Formali per l'identità **(= Intro)** e **(= Elim)** in **Fitch**

Identity Introduction (= Intro):

$$\triangleright \;\; | \;\; n = n$$

Riflessività dell'identità

Identity Elimination (= Elim):

$$\begin{array}{l|l} & P(n) \\ & \vdots \\ & n = m \\ & \vdots \\ \triangleright & P(m) \end{array}$$

Identità degli indiscernibili
(indiscernibilità degli identici)

ESEMPIO di dimostrazioni: dimostriamo che l'identità è una relazione di equivalenza.

riflessiva (a arbitraria costante):

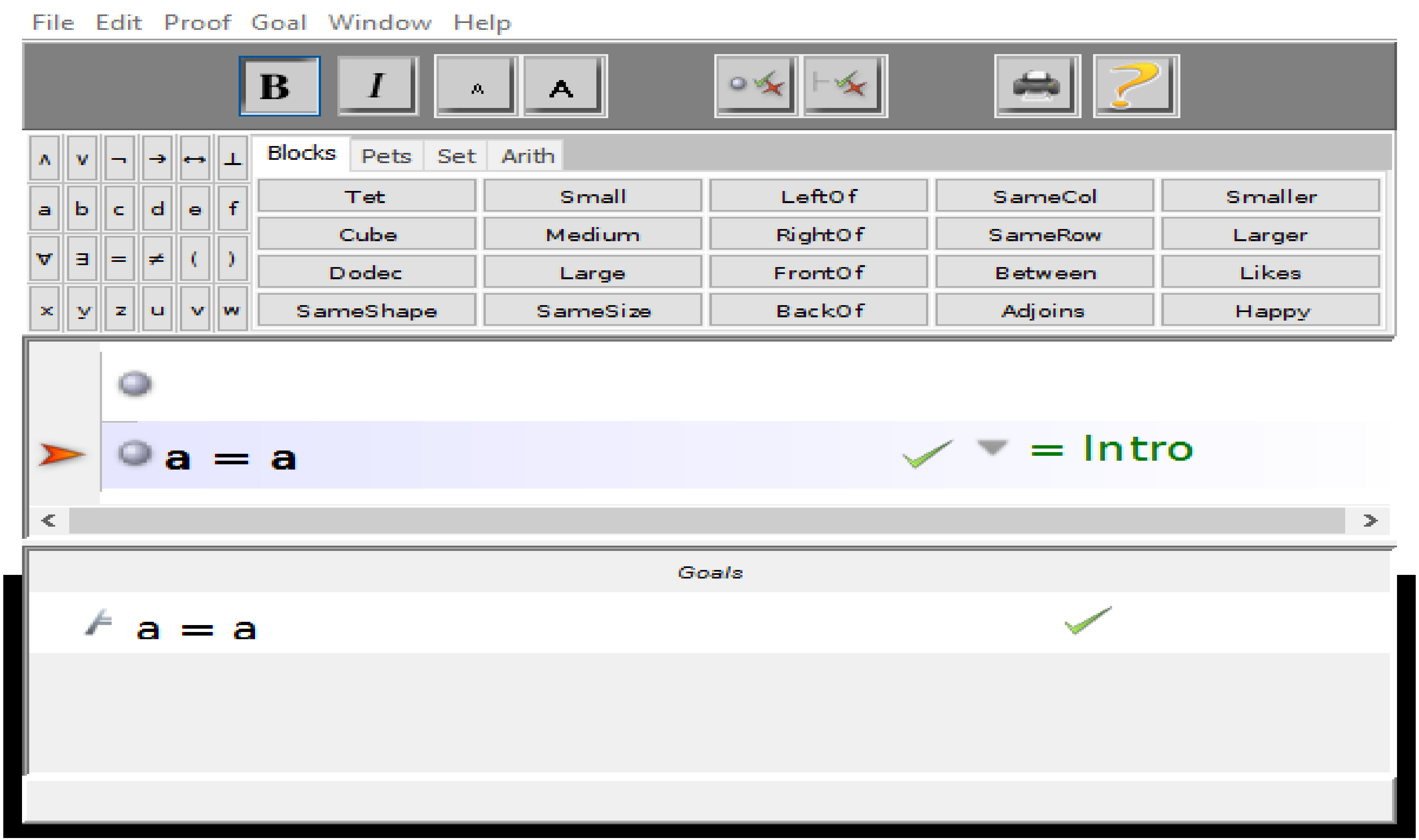
a = a (= intro)

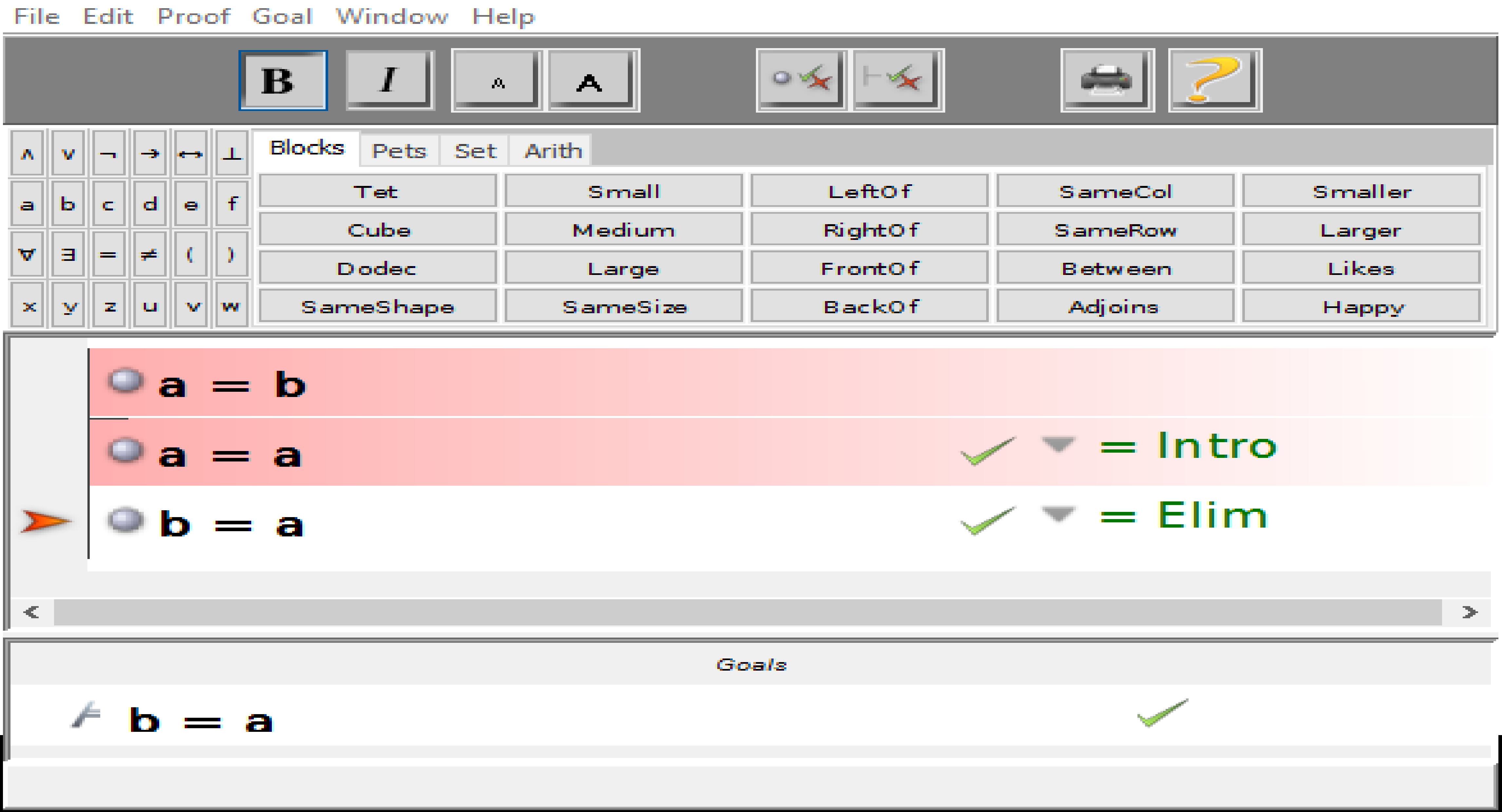
simmetrica (a,b arbitrarie costanti):

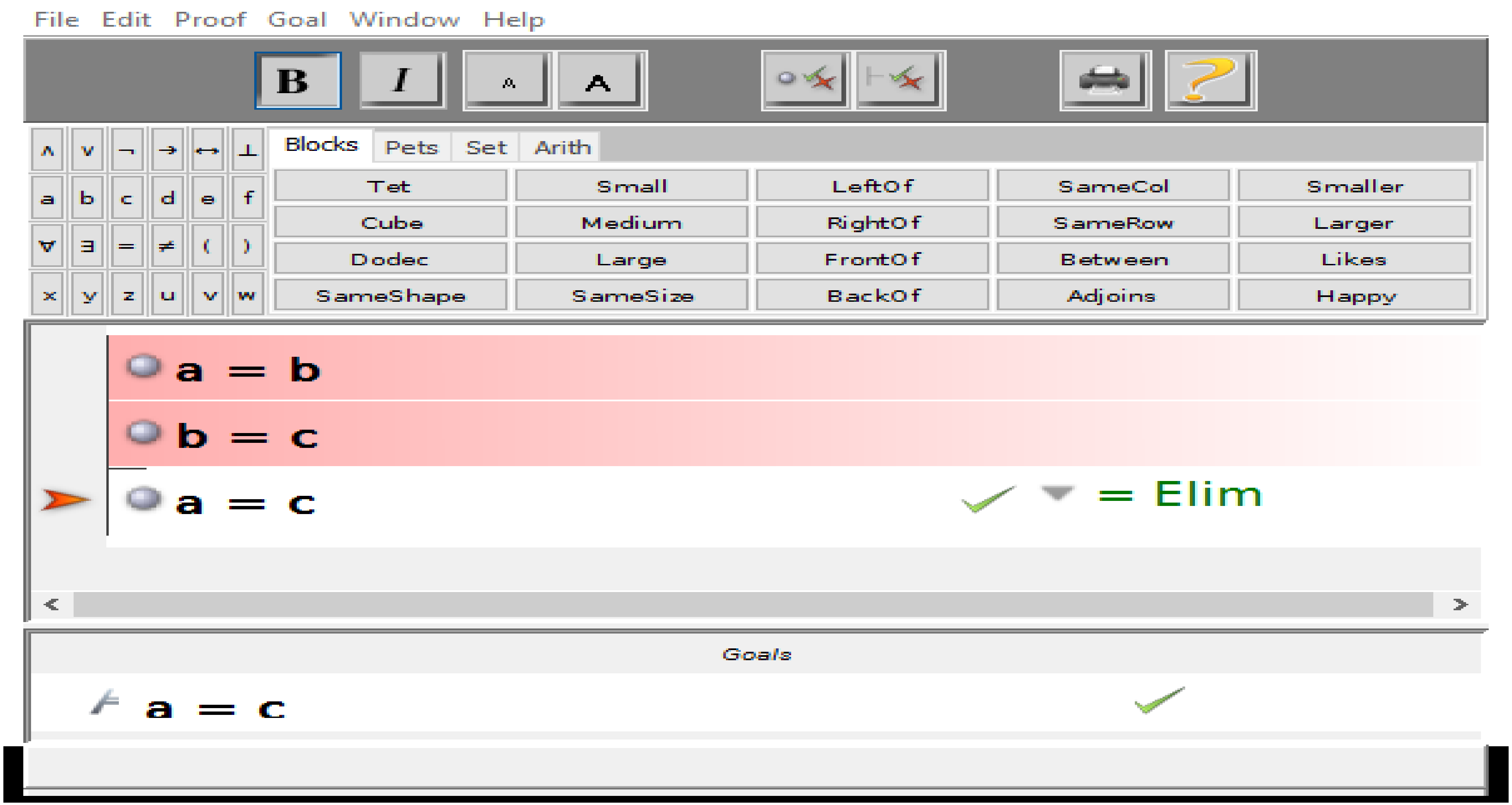
da	1.	a = b
segue	2.	b = a

transitiva (a,b,c arbitrarie costanti)

da	1.	a = b
	2.	b = c
segue	3.	a = c

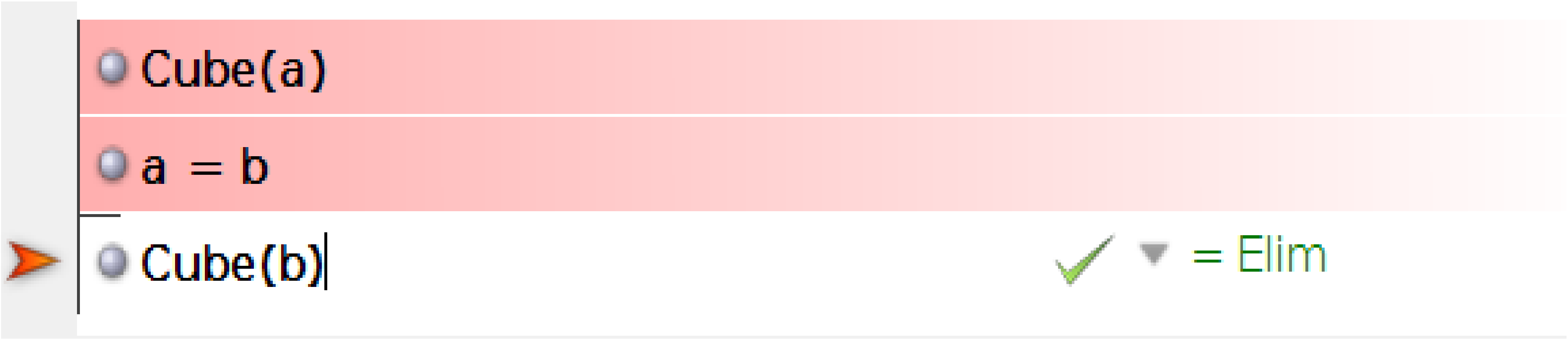

File Edit Proof Goal Window Help
B
I
A
∧ ∨ ¬ → ↔ ⊥
a b c d e f
∀ ∃ = ≠ ( )
x y z u v w
Blocks
Pets
Set
Arith
Tet
Small
LeftOf
SameCol
Smaller
Cube
Medium
RightOf
SameRow
Larger
Dodec
Large
FrontOf
Between
Likes
SameShape
SameSize
BackOf
Adjoins
Happy
a = a
= Intro
Goals
a = a


File Edit Proof Goal Window Help
Blocks
Pets
Set
Arith
Tet
Small
LeftOf
SameCol
Smaller
Cube
Medium
RightOf
SameRow
Larger
Dodec
Large
FrontOf
Between
Likes
SameShape
SameSize
BackOf
Adjoins
Happy
a = b
a = a
= Intro
b = a
= Elim
Goals
b = a


File Edit Proof Goal Window Help
B I A A
Blocks Pets Set Arith
a b c d e f
x y z u v w
Tet Small LeftOf SameCol Smaller
Cube Medium RightOf SameRow Larger
Dodec Large FrontOf Between Likes
SameShape SameSize BackOf Adjoins Happy
a = b
b = c
a = c
= Elim
Goals
a = c

Identità e logica delle proposizioni atomiche

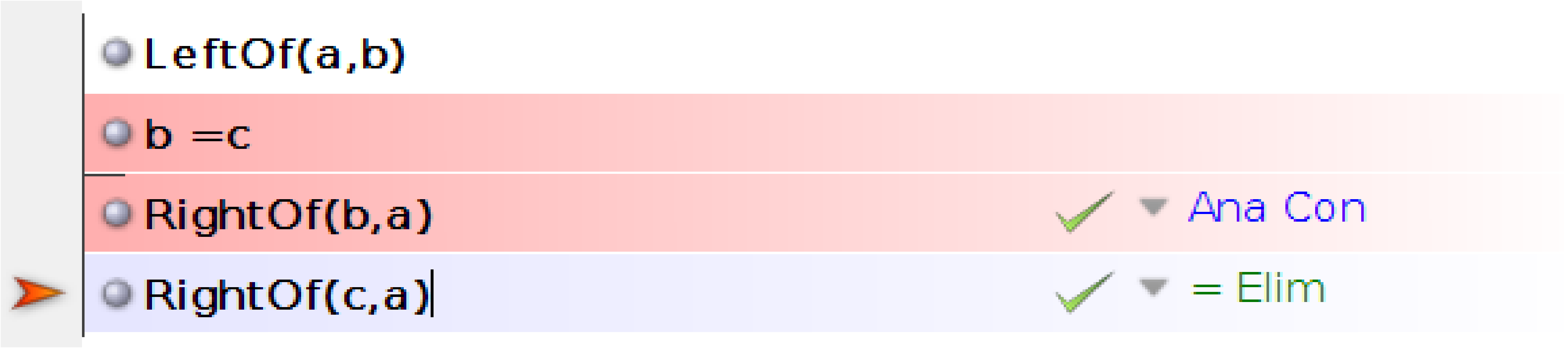
a è un cubo, e a e b sono due nomi dello stesso oggetto.
Dunque anche b è un cubo.



Dunque, questo ragionamento è valido in ogni contesto.

Identità e logica delle proposizioni atomiche

a giace a sinistra di b, b e c sono due nomi dello stesso oggetto. Dunque c giace a destra di a.



Questo ragionamento è valido nel contesto dei blocchi, ma vi sono contesti in cui non è valido.

Riferimenti al libro di testo

- Chapter 1: fino a sec. 1.5 inclusa

- Chapter 2: fino a sec. 2.2 inclusa e sec 2.5

- Le regole del calcolo Fitch sull'identità, che faremo nella prossima lezione, ma di cui avete già le slide in coda a quelli della lezione odierna, le trovate nella Sec. 2.3.