Teorema di RUFFINI e scomposizione di polinomi in $\mathbb{K}[x]$

$f(x) \in \mathbb{K}[x]$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

α è radice di $f(x) \iff f(x)$ è divisibile per $x-\alpha$.

<u>Conseguenze</u>:

1. $\deg f(x) = 1$ $\quad$ $f(x)$ è IRRIDUCIBILE e ha una radice

2. $\deg f(x) \geq 2$

   se $f(x)$ ha almeno una radice

   $\Rightarrow f(x)$ è riducibile

   Non è vero il viceversa

   $(x^2+1)(x^2+2)$ riducibile in $\mathbb{R}[x]$

   ma non ha radici

ESERCIZIO 3 :

Si determini la scomposizione in fattori irriducibili dei polinomi:

1.) $a(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x - 6$ in $\mathbb{R}[x]$

(ricordare ex 1.2)

2) $a(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 4$ in $\mathbb{R}[x]$

dopo aver verificato che 2 è radice

3) $\left.\begin{array}{l} a(x) = x^3 + 4x + 1 \\ b(x) = x^3 + 3x + 2 \end{array}\right\}$ in $\mathbb{Z}_5[x]$

4) $a(x) = x^4 - 10x^2 + 24$ in $\mathbb{Q}[x]$

5) $a(x) = x^4 - x^2 - 42$

in $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}_3[x]$, $\mathbb{Z}_5[x]$

③ 1) $a(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 4x - 6$ in $\mathbb{R}[x]$

$$= \underbrace{(x^2+2)}_{\Delta < 0}(x^2+2x-3)$$

non ha radici reali

$\Rightarrow$ irriducibile in $\mathbb{R}[x]$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$$

$$x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$$

$$a(x) = (x^2+2)(x-1)(x+3)$$

2) $a(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 4$ $\mathbb{R}[x]$

dopo aver verificato 2 radice

$$a(2) = 2 \cdot 8 - 7 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 4$$
$$16 - 28 + 8 + 4 = 0 \quad \underline{ok}$$

So dal teorema di Ruffini che:

$$a(x) = (x-2)\, b(x)$$

$\Rightarrow$ divido $a(x)$ per $x-2$

$$\begin{array}{r|l}
2x^2 - 7x^2 + 4x + 4 & x - 2 \\ \hline
-2x^2 + 4x^2 & \underbrace{2x^2 - 3x - 2}_{b(x)} \\ \hline
0 - 3x^2 + 4x + 4 & \\
+3x^2 - 6x & \\ \hline
0 - 2x + 4 & \\
2x - 4 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

$$a(x) = (x-2)(2x^2-3x-2)$$

$$x_{12} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$2x^2-3x-2 = 2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$ax^2+bx+c$$

$$a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$a(x) = 2(x-2)^2\left(x+\frac{1}{2}\right) \Leftarrow$$

La scomposizione del polinomio $2x^2-7x^2+4x+4$, nota la radice 2 si applica la regola di Ruffini

$x-\alpha$ $\quad 2x^3-7x^2+4x+4$ per $x-2$

	2	-7	4	4
2		2·2	-3·2	-2·2
	2	-3	-2	0

$$a(x) = (x-2)(2x^2-3x-2)$$

3) $a(x) = x^3 + 4x + 1$ in $\mathbb{Z}_5[x]$

cerco le radici di $a(x)$

0? $a(0) = 1$ NO

1? $a(1) = 6 =$ $[6]_5 = [1]_5$ NO

2? $a(2) = [17]_5 = [2]$ NO

3? $a(3) = [40]_5 = [0]_5$ SI

Divisione con regola di Ruffini

	1	0	4	1
3		3	9	9
	1	3	13	10
			$\parallel$	$\parallel$
			3	0

$a(x) = (x-3)(\underbrace{x^2 + 3x + 3}_{\text{di } 2^\circ \text{ grado}})$

$q(x)$

$q(0) \neq 0$ $q(1) \neq 0$ .... tutti $\neq 0$

$q(2) \neq 0$ $q(4) \neq 0$ $q(3) \neq 0$

) = sono tutti i valori dentro $\mathbb{Z}_5$

non ulteriormente scomponibile

$b(x) = x^2 + 3x + 2$ in $\mathbb{Z}_5[x]$

$b(0)$ $b(1)$ ... tutti $\neq 0$

$\Rightarrow b(x)$ non è riducibile

4) $a(x) = x^4 - 10x^2 + 24$ in $\mathbb{Q}[x]$

pongo $y = x^2$

$a(y) = y^2 - 10y + 24$

$a(y) = (y-6)(y-4)$

$y_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25-24} = 5 \pm 1 = 6,\ 4$

$a(x) = (x^2-6)\underbrace{(x^2-4)}_{(x-2)(x+2)}$

$= (x^2-6)(x-2)(x+2)$

Non si scompone in $\mathbb{Q}[x]$

$a(x) = x^4 - x^2 - 42$

scomporlo in $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}_3[x]$, $\mathbb{Z}_5[x]$

$y = x^2$ $\quad a(y) = y^2 - y - 42$ $\qquad -6, 7$

$= (y-7)(y+6)$

$a(x) = \underset{b(x)}{(x^2-7)}\ \underset{c(x)}{(x^2+6)}$

discussione sui vari campi.

$\mathbb{R}[x]$ $\quad a(x) = (x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})(x^2-6)_{\Delta<0}$

$\mathbb{Q}[x]$ $\quad a(x) = (x^2-7)(x^2+6)$

$\mathbb{Z}_3[x]$ $\quad a(x) = (x^2-7)(x^2+6) = \underbrace{(x^2+2)}_{=(x^2-1)} \cdot x^2$

$(x-1)(x+1)$

$= x^2(x-1)(x-2)$

$\mathbb{Z}_5[x]$ $\quad a(x) = (x^2-7)(x^2+6)$

$$\shortparallel$$

$$\underbrace{(x^2+3)}_{\text{Non ha radici in } \mathbb{Z}_5} \underbrace{(x^2+1)}_{=(x^2-4)}$$

$$(x+2)(x-2)$$

$$(x-3)(x-2)$$

$$a(x) = (x^3+3)(x-3)(x-2)$$

ESERCIZIO 4

Nell'anello dei polinomi $\mathbb{Z}_7[x]$ siano

$$p(x) = x^4 + 1$$

$$q(x) = x^2 + 3x - k$$

1. stabilire se $p(x)$ ha radici in $\mathbb{Z}_7[x]$
2. Determinare $k \in \mathbb{Z}_7$ per cui $p(x)$ è divisibile per $q(x)$

1) $\mathbb{Z}_7 = \{0, \dots, 6\}$

sostituire e vengono tutti $\neq 0 \Rightarrow$ non ha radici

2)

Prendi da Ariel

ESERCIZIO 1

Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcolare :

a) $2A - B$

b) $3A + 2B - 4C$

c) $-2A + B + 2C - 2B = -2A - B + 2C = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$

d) $3B + 2(2A - C) - (A + B - 2C)$

a) $2A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad -B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad 2A - B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

b) $3A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad 2B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad -4C = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$

$3A + 2B - 4C = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 9 & -2 \end{bmatrix}$

d) $3B + 2(2A - C) - (A + B - 2C)$

$\overset{2}{\cancel{3}}B + \overset{3}{\cancel{4}}A \cancel{-2C} \cancel{-A} \cancel{-B} \cancel{+2C} = 2B + 3A$

ESERCIZIO 2

$$\underset{2\times 3}{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underset{3\times 3}{B} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{3\times 2}{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Calcolare, se possibile:

a. $A\,C = 2\times 2$

b. $(\overset{3\times 2}{B\,C})\,A = 3\times 3$

c. $\overset{3\times 3}{B} + (\overset{3\times 3}{C\,A}) =$ sì

d. $B\,A$ <u>no</u> $\quad 3\times \underline{3} \quad \underline{2}\times 3$

e. $B\,A^T_{3\times 2} = 3\times 2$

f. $3\,\underset{3\times 2}{A^T} + \underset{3\times 2}{B\,C}$ sì

$$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times q}{B} = \underset{m\times q}{C}$$

a. $AC =$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{\square}-1 & {}^{\circ}0 \\ {}^{\triangle}1 & {}^{*}-1 \end{bmatrix}$$

$\square \quad 1 \cdot 0 + (-1 \cdot 1) + 0 \cdot 0$

$\circ \quad 1 \cdot 1 + (-1 \cdot 1) \cdot 0$

$\triangle \quad -1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0$

$* \quad -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)$

$$\overset{3\times3}{(}\, B \overset{3\times2}{C}\,) A = 3\times3$$

$$\quad\;\; \underset{3\times2}{} \quad \underset{2\times3}{}$$

$$\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 3

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Stabilire se i seguenti prodotti riga per colonna possono essere effettuati e in caso affermativo calcolarli

$A \cdot B$

$B \cdot A$

$B \cdot C$

$C \cdot B$

$C \cdot D$

$D \cdot C$

ESERCIZIO 4

Date le matrici

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad B_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mostrare che

$$(A_0 + B_0)^2 \neq A_0^2 + 2 A_0 B_0 + B_0^2$$

come possiamo correggere la formula

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

affinché valga per tutte le matrici quadrate 2×2 ?

ESERCIZIO 5F

- Determinare due matrici A, B tali che AB esiste ma BA no
- Determinare due matrici A, B tali che AB e BA esistano ma $AB \neq BA$
- Determinare due matrici A e B con $A \neq 0$ e $B \neq 0$ ma $A \cdot B = 0$
- Determinare una matrice A quadrata, $A \neq I$ con $A^2 = A$
- Determinare $A \neq 0$ con $A^2 = 0$
- Determinare $A \neq I$ quadrata con $A^2 = I$

ESERCIZIO 1

Ridurre le seguenti matrici alla forma di Gauss:

$$M_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$M_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 7 \end{array}\right]$$

$$M_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -5 \\ 4 & -3 & -2 & -3 \\ 8 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

ESERCIZIO 2

Risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 11x_3 + 9x_4 = 5 \\ -x_1 - 4x_2 + 10x_3 - 5x_4 = -1 \end{cases}$$