

$\mathbb{R}^n$  è MATRICI  $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$

Def: Chiamo  $\mathbb{R}^n$  il seguente insieme

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ t.c. } x_i \in \mathbb{R} \forall i = 1 \dots n \right\}$$

$$\text{es } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Notazione: Indico con  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$   $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$   
chiamo  $x_1, x_2, \dots$  le

ENTRATE di  $\underline{x}$  e chiamo  $\underline{x}$  VEETTORE

Def:  $+_{\mathbb{R}^n}$  è l'operazione

$$+_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(\underline{x}, \underline{y}) \rightarrow \underline{x} +_{\mathbb{R}^n} \underline{y}$$

$$\text{es } \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\underline{x} +_{\mathbb{R}^n} \underline{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \dots \rightarrow x_1 + y_1 \text{ è la somma in } \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} +_{\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Oss:  $n=1 \quad \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$

Proposizione:  $(\mathbb{R}^n, +_{\mathbb{R}^n})$  è un gruppo abeliano

dim: Devo mostrare che  $+_{\mathbb{R}^n}$  è:

- ⊙ Associativa
- ⊙ Commutativa
- ⊙ Esiste neutro
- ⊙  $\forall$  el.  $\exists$  inverso

⊙  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$

proprietà associativa in  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(x+y)+z &= \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1+y_1)+z_1 \\ (x_2+y_2)+z_2 \\ \vdots \\ (x_n+y_n)+z_n \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(*)}{=} \begin{pmatrix} x_1+(y_1+z_1) \\ x_2+(y_2+z_2) \\ \vdots \\ x_n+(y_n+z_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1+z_1 \\ y_2+z_2 \\ \vdots \\ y_n+z_n \end{pmatrix} \\ &= \underline{x} + \left( \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right) \\ &= \underline{x} + (\underline{y} + \underline{z})\end{aligned}$$

⊙  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\underline{x} + \underline{y} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_1+x_1 \\ y_2+x_2 \\ \vdots \\ y_n+x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underline{y} + \underline{x}\end{aligned}$$

$$\odot \quad \underline{0} \in \mathbb{R}^n \quad \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(cioè  $\underline{x} = \underline{0}$  se  $x_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$ )

$$\underline{y} + \underline{0} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + 0 \\ y_2 + 0 \\ \vdots \\ y_n + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \underline{y}$$

$\odot$  L'inverso di  $\underline{x}$ , indicato con  $-\underline{x}$ , ha come entrate le entrate opposte di quelle di  $\underline{x}$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ l'inverso è } -\underline{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$$

Esiste anche la formula del prodotto

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (\lambda, \underline{x}) &\rightarrow \lambda \underline{x} \end{aligned}$$

$$\left( \lambda, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Def: L'insieme  $M_{a \times b}(\mathbb{R})$  delle matrici con  $a$  righe e  $b$  colonne è:

$$M_{a \times b}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \dots & m_{1b} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \dots & m_{2b} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{a1} & m_{a2} & m_{a3} & \dots & m_{ab} \end{bmatrix}, \begin{matrix} m_{ij} \in \mathbb{R} \\ i = 1, \dots, a \\ j = 1, \dots, b \end{matrix} \right\}$$

Una matrice è la scelta di  $a \cdot b$  numeri reali organizzati in  $a$  righe  $b$  colonne

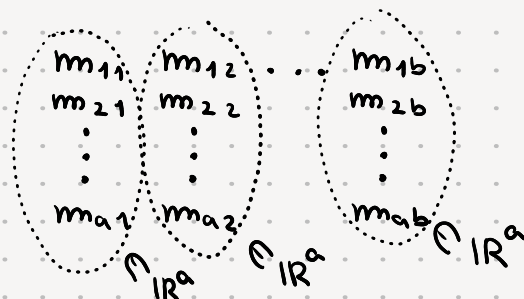
$$\text{Es } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & \sqrt{2} \\ \pi & 7 \end{bmatrix} \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$$

Qss:  $M_{n \times 1}(\mathbb{R}) \ni M$

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ \vdots \\ m_{n1} \end{bmatrix} \Rightarrow M_{n \times 1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$$

$$M \in M_{a \times b}(\mathbb{R})$$



$\Rightarrow M$  è data da  $b$  vettori in  $\mathbb{R}^a$  accostati.

Indichiamo  $M(j) = \begin{pmatrix} m_{1j} \\ m_{2j} \\ \vdots \\ m_{aj} \end{pmatrix}$  la  $j$ -esima colonna, chiamo entrate di  $M$  ogni  $m_{ij}$ .

Def: La somma di matrici è l'operazione:

$$M_{a \times b}(\mathbb{R}) \times M_{a \times b}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{a \times b}(\mathbb{R})$$

$$\begin{matrix} \psi \\ M \end{matrix} \quad \begin{matrix} \psi \\ N \end{matrix} \rightarrow M + N$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{1b} \\ m_{21} & \dots & m_{2b} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{a1} & \dots & m_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} & \dots & n_{1b} \\ n_{21} & \dots & n_{2b} \\ \vdots & & \vdots \\ n_{a1} & \dots & n_{ab} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} m_{11}+n_{11} & \dots & m_{1b}+n_{1b} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{a1}+n_{a1} & \dots & m_{ab}+n_{ab} \end{bmatrix}$$

$$M = [m_{ij}] \quad N = [n_{ij}] \quad M+N = [m_{ij} + n_{ij}]$$

Prop:  $(M_{a \times b}(\mathbb{R}), +_{M_{a \times b}(\mathbb{R})})$  è gruppo abeliano

Les  $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M+N = \begin{bmatrix} 1+1 & 0+2 & 3+0 \\ 0+1 & 2+2 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Def: Una matrice  $M \in M_{a \times b}(\mathbb{R})$  si dice:

○ Quadrata se  $a = b$

○ Diagonale se è quadrata e  $m_{ij} = 0$  se  $i \neq j$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{aa} \end{bmatrix}$$

(cioè se gli elementi esterni alla diagonale  
son tutti zeri)

○ Triangolare superiore se  $m_{ij} = 0$  quando  
 $i > j$

○ Triangolare inferiore se  $m_{ij} = 0$  quando  
 $i < j$

○ Simmetrica se è quadrata e  $m_{ij} = m_{ji}$

$$\begin{bmatrix} m_{ij} & m_{ji} \end{bmatrix}$$

les  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  è simmetrica

○ Antisimmetrica se  $m_{ij} = -m_{ji}$

(oss:  $m_{ii} = 0$  se  $M$  è antisimmetrica)

Def: Se  $M \in M_{a \times b}(\mathbb{R})$  la sua TRASPOSTA

$$M^T \in M_{b \times a}(\mathbb{R}) \quad \text{t.c.} \quad M = [m_{ij}]$$

$$M^T = [\alpha_{ij}]$$

$$\alpha_{ij} := m_{ji}$$

$M^T$  è ottenuta da  $M$  scambiando righe con le colonne

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$$

$$M^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$$

Oss:  $(M^T)^T = M$

Def: Il prodotto tra matrici è la funzione

$$M_{a \times b}(\mathbb{R}) \times M_{b \times c}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{a \times c}(\mathbb{R})$$

$$\left( \overset{\psi}{M}, \overset{\psi}{N} \right) \mapsto M \cdot N$$

$$M[m_{ij}] \quad N[n_{ij}] \quad C = M \cdot N = [c_{ij}]$$

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^b m_{ik} \cdot n_{kj}$$

Les  $M \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ ,  $N \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$$

$$M \cdot N \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \quad MN = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$\overset{\psi}{[c_{ij}]}$

$$C_{11} = \sum_{l=1}^{b=3} m_{1l} \cdot n_{l1} =$$

$$= m_{11} \cdot n_{11} + m_{12} \cdot n_{21} + m_{13} \cdot n_{31}$$

$$= 0 \cdot 6 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10$$

● 1° riga di M

● 1° colonna di M

$$C_{12} = \sum_{l=1}^{b=3} m_{1l} \cdot n_{l2}$$

$$= m_{11} \cdot n_{12} + m_{12} \cdot n_{22} + m_{13} \cdot n_{32}$$

$$= 0 \cdot 7 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 11$$

...

Oss: Se  $M \in M_{a \times b}$ ,  $N \in M_{c \times d} \Rightarrow$

① Posso calcolare  $M \cdot N \Leftrightarrow b = c$

$N \cdot M \Leftrightarrow d = a$

② Se  $b = c$   $d = a$  cioè posso calcolare

$N \cdot M$  e  $M \cdot N$

(di solito  $N \cdot M \neq M \cdot N$ )

Oss: Se considero matrici quadrate  $M_{a \times a}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \cdot : M_{a \times a}(\mathbb{R}) \times M_{a \times a}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{a \times a}(\mathbb{R})$

cioè  $\cdot$  è operazione in  $M_{a \times a}(\mathbb{R})$

Prop:  $(M_{a \times a}(\mathbb{R}), \cdot)$  è un monoide non commutativo

(cioè  $\cdot$  è associativa, NON è commutativa, e

ha neutro)

$$\hookrightarrow I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

cioè se  $I = [\delta_{ij}]$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$\rightarrow$  Non tutte le matrici in  $(M_{a \times a}(\mathbb{R}), \cdot)$  sono invertibili

# SISTEMI

Un'equazione in  $n$  incognite si dice **LINEARE** se le incognite compaiono solo al grado 1

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots + m_n x_n = k \quad m_i \in \mathbb{R}$$

Un sistema lineare è l'insieme di equazioni lineari

$$\begin{cases} m_{11}x_1 + m_{12}x_2 + m_{13}x_3 + \dots + m_{1n}x_n = k_1 \\ m_{21}x_1 + m_{22}x_2 + m_{23}x_3 + \dots + m_{2n}x_n = k_2 \\ \dots \\ m_{a1}x_1 + m_{a2}x_2 + m_{a3}x_3 + \dots + m_{an}x_n = k_a \end{cases}$$

Risolvere il sistema significa trovare i valori delle incognite che rendono vere tutte le equazioni

$\leadsto$  Un sistema è associato a  $M \in M_{a \times b}(\mathbb{R})$   $M = [m_{ij}]$

$$\underline{k} \in \mathbb{R}^a \quad k = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_a \end{pmatrix}$$

Volete trovare

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$\Rightarrow$  il sistema è  $M \underline{x} = \underline{k}$

$M_{a \times n} \quad M_{n \times 1} \quad M_{a \times 1}$