ESERCIZIO 5

Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, si stabilisca se il seguente sistema lineare è determinato, indeterminato o impossibile

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + y + 2z = 1 \\ 2x - 2y - az = 0 \end{cases}$$

$$[A|k] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -a & 0 \end{array}\right]$$

$$\downarrow \begin{matrix} R_2 + R_1 \\ R_3 - 2R_1 \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cancel{2}\,1 & \cancel{2}\,1 \\ 0 & 0 & -a & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 + aR_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2+a \end{array}\right]$$

Teorema R.C. sistema ha soluzioni

$\iff \text{rang}(A) = \text{rang}[A|b]$

$\text{rang}(A) = 2$

$\text{rang}[A|b]$:
- se $-2+a = 0$ rango $= 2$
- se $-2+a \neq 0$ $\text{rango}[A|b] = 3$

$\Rightarrow$ Se $a = 2$ il sistema ha soluzioni e $\infty^{3-2} = \infty^{1}$

Se $a \neq 2 \to$ impossibile

cerchiamo soluzioni

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \underbrace{-2+a}_{=0} \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x - y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \qquad \text{sol} = \left\{ \begin{bmatrix} 1+y \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

ESERCIZIO 6

Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si discuta l'esistenza di soluzioni per il seguente sistema (non è richiesto di risolverlo)

$$\begin{cases} x - w = 0 \\ y - 2z + 2w = 1 \\ x + y - 2z + w = \alpha \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & \alpha \end{array}\right]$$

$\downarrow R_3 - R_1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & \alpha \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - 1 \end{array}\right]$$

Se $\alpha - 1 \neq 0$ $\quad$ rango$(A) \neq$ rango$[A|b]$

IMPOSSIBILE

Se $\alpha - 1 = 0$ $\quad$ rango$(A) =$ rango$[A|b]$

RISOLUBILE

ha $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni

$\Rightarrow$ INDETERMINATO

ESERCIZIO 7

Siano dati la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e i vettori

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ a \end{bmatrix} \quad e \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{con } a \in \mathbb{R}$$

al variare del parametro a stabilire se il sistema lineare

$$A\,\underline{x} = \underline{b}$$

è determinato, indeterminato o impossibile.

Basta studiare $[A|b]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \end{array}\right]$$

$$\Big\downarrow \begin{array}{l} R_3 - R_2 \\ R_4 - R_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{array}\right]$$

Se $a+1 \neq 0$

IMPOSSIBILE

Se $a+1 = 0$

$a = -1$;

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \operatorname{rk} A = 3 \\ \operatorname{rk}[A|b] = 3 \end{array}$$

Determinato (∞^0 soluz.)

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ y - z = -1 \\ z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

ESERCIZIO 8

Data la matrice $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

determinare tutte le matrici

$X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ tali che valga:

$$M X = X M$$

ESERCIZIO 9

Sia

$$M \underline{x} = \underline{b}$$

un sistema lineare di m equazioni in n incognite

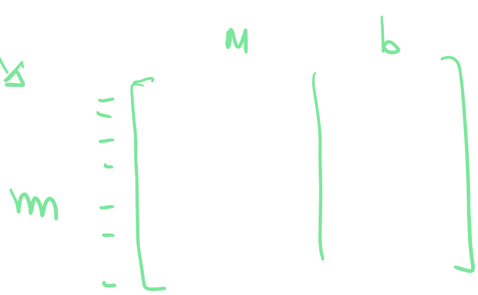
Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono Vere o False:

a) se $\underline{b} = \underline{0}$ il sistema ha soluzioni Sì, perché è sistema omogeneo e ha la soluzione nulla

b) se $rk\, M = m$ allora il sistema ha soluzione Sì

righe colonne

c) se $m \geq n$ allora il sistema ha soluzione NO



⇝ $rk = m \Rightarrow rk\,[A|b] = m$

quindi M e $M|b$ hanno stesso rango

$\Rightarrow \exists$ soluz.

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$n = 3$

$m = 2$

ESERCIZIO 10

Determinare il rango della matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\Big\downarrow \text{ Gauss}$$

$rk = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 11

Discutere, al variare del parametro k, la risolubilità del sistema

$$
\begin{cases}
2x_2 - x_3 = 0 \\
-2x_1 + x_2 + kx_3 = -1 \\
4kx_1 - 4kx_2 = 1
\end{cases}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & k & -1 \\ 4k & -4k & 0 & 1 \end{array}\right]
\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1}
\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & k & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 4k & -4k & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -k/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 4k & -4k & 0 & 1 \end{array}\right]
\xrightarrow{R_3 - 4k R_1}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -k/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -2k & 2k^2 & 1-2k \end{array}\right]
$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{k}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & (2k^2-k) & 1-2k \end{array}\right]$$

$$k(2k-1) \qquad -(2k-1)$$

1) $2k-1 \neq 0$ $\quad k \neq \frac{1}{2}$

$R_3/2k-1$

$\downarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{k}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & k & -1 \end{array}\right]$$

- se $k \neq 0$ $\quad rk(A) = rk(A|b)$

  n° sol $\infty^{3-3} = \infty^0 \rightarrow$ DETERMINATO

- se $k = 0$ IMPOSSIBILE

2) $k = \frac{1}{2}$ $\quad rk(A) = rk[A|b] = 2$

n° sol $= \infty^{3-2} = \infty$ INDETERMINATO

---

se $k=0$ IMPOSSIBILE

se $k = \frac{1}{2}$ INDETERMINATO

se $k \neq \frac{1}{2}$ e $k \neq 0$ DETERMINATO

ESERCIZIO 12

Si consideri il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x + (k+1)y = -1 \\ kx + 2y = -1 \\ -x - 2y = 1 \end{cases}$$

1. Si discuta la risolubilità al variare del parametro k
2. Si risolva il sistema per $k = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & K+1 \\ K & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \underline{k} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[A \mid \underline{k}] = \begin{bmatrix} 1 & K+1 & -1 \\ K & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 - KR_1} \begin{bmatrix} 1 & K+1 & -1 \\ 0 & 2-(K+1)K & K-1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & K+1 & -1 \\ 0 & 2-K^2-K & K-1 \\ 0 & K-1 & 0 \end{bmatrix}$$

1) Se $2 - K^2 - K \neq 0$ $\quad K^2 + \overset{s}{K} \overset{p}{-2} \neq 0$ $\quad$ e $\quad K = 1$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & K+1 & -1 \\ 0 & 1 & \dfrac{K-1}{(K+2)(K-1)} \\ 0 & K-1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO 1

Discutere, al variare del parametro k, la risolubilità del sistema

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + kx_3 = -1 \\ 4kx_1 - 4kx_2 = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & k \\ 4k & -4k & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[A|k] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & k & -1 \\ 4k & -4k & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & k & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 4k & -4k & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1/-2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -k/2 & 1/2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 4k & -4k & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2/2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -k/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 4k & -4k & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - 4kR_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -k/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -2k & 2k^2 & 1-2k \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 + 2kR_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -k/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2k^2-k & 1-2k \end{array}\right]$$

Se $2k^2 - k = 1$ $2k^2 - k - 1$ $k = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \left\langle \begin{array}{l} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right.$

$\infty^{3-3} = \infty^0$ DETERMINATO PER $k = 1$ e $k = -\frac{1}{2}$

Se $2k^2 - k = 0$ $\longrightarrow$ se $k = 0$ IMPOSSIBILE

$\longrightarrow$ se $k = \frac{1}{2}$ $\infty^{3-2} = \infty^1$

INDETERMINATA

ESERCIZIO 6: CALCOLO DI MATRICI INVERSE

Calcolare, se esiste, l'inversa delle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 5 - CALCOLO DI DETERMINANTI

Calcolare, dove possibile, il determinante delle seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -11 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

No!! $\rightarrow$ $$E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

xké no quadrata

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \det A = 2\cdot(-2) - 1\cdot 3 = -4 - 3 = -7$$

Les $$A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \qquad \det A = xt - yz$$

$$B = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det B = 0 - 6 = -6$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det C = (-)^{1+1}\, 2 \cdot \det \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + (-)^{1+2}\, 3 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$+ (-)^{1+3} (-2) \det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= 2\,[-4] - 3(2) - 2(1) = -8 - 6 - 2 = -16$$

$\downarrow$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

7

$$\det D = (-)^{1+3} \cdot (-2) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = -14$$

Matrici inverse:

A quadrata di ordine n

è invertibile (cioè $\exists A^{-1}$) $\iff \det A \neq 0$

Sia $A = [a_{ij}]$ $\begin{matrix} i = 1 \dots n \\ j = 1 \dots n \end{matrix}$

e $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$$A^{-1} = [b_{ij}]$$

$$b_{ij} = \frac{1}{\det A} \cdot (-)^{i+j} \det A_{ij}$$

è la sottomatrice di A ottenuta togliendo la riga j e colonna i

ovvero

$$A^{-1} = \left[\frac{1}{\det A} \cdot (-)^{i+j} \cdot \det A_{ij} \right]^T$$

es $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\det A = ad - bc \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \det A_{11} & -\det A_{12} \\ -\det A_{21} & \det A_{22} \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T$$

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \det C = 3 - 2 = 1$$

$$C^{-1} = 1 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C \cdot C^{-1} = I$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{Det} D = 2 \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2(1) = 2$$

$$D^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ -\det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2

Si consideri il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x + (k+1)y = -1 \\ kx + 2y = -1 \\ -x - 2y = 1 \end{cases}$$

1. Si discuta la risolubilità al variare del parametro k
2. Si risolva il sistema per $k = 1$

SISTEMI QUADRATI e regola di Cramer

$A \underline{x} = \underline{b}$ con $A \in Mat_{k \times k}(\mathbb{R})$
quadrata

Se A è invertibile ($\det A \neq 0$) posso applicare il Teorema di Cramer $\Rightarrow$ esiste una e una sola soluzione $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$

con $$x_i = \frac{\det [\underline{a}_1 | \dots | \underline{b} | \dots | \underline{a}_k]}{\det A}$$

colonna di posto i

Oss: A non quadrata
o
A quadrata non invertibile
$\rightarrow$ Gauss

ESERCIZIO 3

Dato il seguente sistema, con k parametro reale,

$$\begin{cases} 3x + y - z = k \\ x - y + kz = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

si stabilisca se le seguenti affermazioni sono Vere o False:

a) Per $k = 5$ o $k = 0$ il sistema è DETERMINATO → SÌ

b) Per $k = 0$ il sistema ammette soluzioni Vero

c) Per $k \neq 5$ il sistema ammette una e una sola soluzione VERO

d) Il sistema è risolubile $\forall k$
$k \neq 0, 5$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & k \\ 1 & -1 & k & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$k = 0$ OMOGENEO $\rightarrow$ ha soluzioni

Utilizziamo metodo Cramer

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & k \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = -k + 5$$

$\Rightarrow \det A = 0 \iff k = 5$

se $k \neq 5$ Teorema di Cramer $\Rightarrow \exists$ una e una sola soluzione

Se $k = 0$ ho 1 soluzione (banale) perché omogeneo, ho anche $\det A \neq 0$ e quindi per "Teo Cramer" la soluzione è unica

Per $k = 5$ non posso usare Cramer

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \text{impossibile}$$

ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema lineare, con k parametro reale:

$$\begin{cases} 2x + ky + k^2 z = 0 \\ -x + 3y + 5z = k \\ x + 3kz = 0 \end{cases}$$

Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono Vere o False:

a) se $k \neq 0$ il sistema ha una e una sola soluzione

b) Esiste un valore di k per cui il sistema è impossibile

c) Esiste uno e un solo valore di k per cui il sistema ha infinite soluzioni.

ESERCIZIO 5

Risolvere e discutere in funzione di $a \in \mathbb{R}$ il seguente sistema

$$\begin{cases} x + ay + 2z = 4 \\ x + (a-1)y + (2-a)z = a+5 \\ x + (a-2)y + (2-2a^2)z = 6 \end{cases}$$

ESERCIZIO 6

Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} \lambda x - \mu y - \mu z = \mu \\ \mu x - \lambda y = \lambda \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Si determini per quali coppie $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ è risolubile e per quali la soluzione è unica