

Insiemi, relazioni e applicazioni funzioni

Insiemi: concetto primitivo (non può essere definito)
↳ collezione di elementi/oggetti

Indichiamo un insieme con lettere maiuscole (A, B, C, \dots)
e gli "elementi" di un insieme con lettere minuscole.

Scriviamo: $a \in A$ per dire che a è un elemento dell'insieme A

Def: Siano A e B due insiemi,
dico che $A = B$ se tutti gli elementi di A sono
elementi anche di B e viceversa.
(cioè $A = B$ se $x \in A$ se e solo se $x \in B$)

Def: Dico che $A \subseteq B$ (A contenuto in B) se per ogni
 $x \in A$, $x \in B$
(cioè se ogni elemento di A è anche elemento di B)
Se $A \subseteq B$ diciamo che A è sottoinsieme di B

Oss: $A = B$ significa che $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$

Def: l'insieme senza elementi si chiama insieme vuoto e
si indica \emptyset

→ Sia X insieme e siano A, B sottoinsieme di X

$$1) A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$

$$2) A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Def: $A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}$
complementare di A non appartiene

Def: $B - A = \{x \in B \mid x \notin A\}$

Oss: $A^c = X - A$

$$\left. \begin{array}{l} A \subseteq A \cup B \text{ e } B \subseteq A \cup B \\ A \cap B \subseteq A \text{ e } A \cap B \subseteq B \end{array} \right\} \begin{array}{l} A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B \\ A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B \end{array}$$

Def: Gli insiemi si possono definire:

- Elencando tutti gli elementi

es. $A = \{1, 2, 3, 5\}$

- Tramite una proprietà soddisfatta dai suoi elementi

es. $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 5, n \neq 0, n \neq 4\}$

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è pari}\} \rightarrow \text{infinito}$$

Def: Sia A insieme finito, chiamo cardinalità di A il numero k degli elementi di A e scrivo $|A| = k$

Def: X insieme chiamo "insieme delle parti di X "

$$P(X) = \{\text{sottoinsieme di } X\}$$

Es. $X = \{a, b, c\}$ $\emptyset \subseteq X$ $\{a\} \subseteq X$

$$P(X) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \}$$

Oss: Per ogni insieme X $\emptyset \in P(X)$ e $X \in P(X)$

Prop: Se X è finito e $|X| = k \Rightarrow |P(X)| = 2^k$

Def: Dato un insieme X non vuoto, una **partizione** di X , è una **collezione di sottoinsiemi non vuoti** A_i di X , $i \in I$

t.c. ① $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$ (due sottoinsiemi A_i, A_j non si intersecano)

② $\bigcup_i A_i = X$ (la loro unione è X)

Es. $X = \{a, b, c\}$

$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ è partizione di X

$\{\{a, b\}, \{c\}\}$ è partizione di X

$\{\{a, b\}, \{b, c\}\}$ NON è partizione di X
(non soddisfa ①)

$\{\{a\}, \{b\}\}$ NON è partizione di X
(non soddisfa ②)

Def: Siano A, B due insiemi. Chiamo **prodotto cartesiano** di A e B

coppie ordinate di elementi in A e B

$$A \times B = \{ (\widetilde{a, b}) \mid a \in A, b \in B \}$$

$$B \times A \neq A \times B$$

es. $A = \{a\}$ e $B = \{1, 2\}$

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2)\}$$

$$B \times A = \{(1, a), (2, a)\}$$

Prop.: se A e B sono finiti: $|A| = k_A$ e $|B| = k_B$
 $\Rightarrow |A \times B| = k_A \cdot k_B$

RELAZIONI

(Siano A e B due insiemi)

Def.: Una relazione R tra A e B è un sottoinsieme di $A \times B$

$$R \subseteq A \times B$$

↳ contiene coppie della forma (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$

e se $(a, b) \in R \subseteq A \times B$ diciamo che a è in relazione con b e scriviamo $a R b$

Def.: R è detta relazione TOTALE se $R = A \times B$

| Da adesso in poi pongo: $A = B$ |

Def.: Sia $R \subseteq A \times B$ una relazione

Dico che R è la relazione IDENTICA se

$$R = \{(a, a) \mid a \in A\} \quad \text{ovvero} \quad \left(\begin{array}{l} \text{ogni elemento di } A \\ \text{è in relazione solo con se stesso} \end{array} \right)$$

Oss.: Se R è la relazione identica e $(a, b) \in R \Rightarrow b = a$

Def: Sia R una relazione. Diciamo che R ha la proprietà:

① **Riflessiva** se $\forall a \in A \quad (a, a) \in R$

(cioè se per ogni $a \in A$, $a R a$, a è in relazione con se stesso)

② **Simmetrica** se $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$

(se a è in relazione con b allora b è in relazione con a)

③ **Antisimmetrica** se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R \Rightarrow a = b$

(se a è in relazione con b e b è in relazione con a allora a è uguale a b)

④ **Transitiva** se $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

(se a è in relazione con b che è in relazione con c , allora a è in relazione con c)

Def: Se $R \subseteq A \times A$ soddisfa le seguenti proprietà:

① riflessiva, ② simmetrica, e ④ transitiva

allora R si dice relazione di **EQUIVALENZA**

es: "essere uguali"

Def: Se $R \subseteq A \times A$ soddisfa le proprietà:

① riflessiva, ③ antisimmetrica, e ④ transitiva

allora R si dice relazione di **ORDINE**

Oss: In \mathbb{N} , la relazione di \leq è d'ordine

la relazione "essere sottomultiplo" è d'ordine

Notazione: Spesso le relazioni di ordine si indicano "con" \leq

Def: Sia X un insieme e \leq una relazione d'ordine in X allora diciamo che (X, \leq) è un insieme ordinato

Diciamo che (X, \leq) è **TOTALMENTE** ordinato se
 $\forall (a, b) \text{ o } (a, b) \in \leq \text{ oppure } (b, a) \in \leq$
 $(a \leq b) \qquad (b \leq a)$

altrimenti diciamo che **NON** è totalmente ordinato

Diciamo che $a, b \in A$ sono **CONFRONTABILI**
se $a \leq b$ oppure $b \leq a$

(X, \leq) è totalmente ordinato se $\forall a, b \in A$
 a e b sono confrontabili

es. (\mathbb{N}, \leq) è totalmente ordinato
 \downarrow
relazione d'ordine

$$A = \{a, b, c\}$$

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b)\}$$

R è riflessiva, antisimmetrica, transitiva

\Rightarrow e quindi è di ordine NON TOTALE

\Rightarrow perché a e c
non sono confrontabili

es. $A = \mathbb{N}$ $(n, m) \in R \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \quad n = m \cdot k$

(n è in relazione con $m \Leftrightarrow n$ è multiplo di m)
che proprietà ha?

Def. Sia (X, \leq) un insieme ordinato

a è massimo di X se $\forall x \in X \quad x \leq a$ (cioè $(x, a) \in \leq$)

b è minimo di X se $\forall x \in X \quad b \leq x$ b \leq x \rightarrow RELAZIONE \leq

Oss. se (X, \leq) è insieme ordinato e $Y \subseteq X$
allora Y è ordinato

Diciamo che s è estremo superiore di Y se

① $\forall y \in Y \quad y \leq s$

② se $x \in X$ b.c. $\forall y \in Y \quad y \leq x \Rightarrow s \leq x$

Diciamo che $t \in X$ è estremo inferiore di Y se

① $\forall y \in Y \quad t \leq y$

② $\forall x \in X$ b.c. $\forall y \in Y \quad x \leq y \Rightarrow x \leq t$