$\mathbb{R}^n$ E MATRICI $M_{a\times b}(\mathbb{R})$

Def: Chiamo $\mathbb{R}^n$ il seguente insieme

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ t.c. } x_i \in \mathbb{R} \ \forall i = 1 \dots n \right\}$$

Les $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \pi \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Notazione: Indico con $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ $\quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
chiamo $x_1, x_2, \dots$ le
ENTRATE di $\underline{x}$ e chiamo $\underline{x}$ VETTORE

Def: $+_{\mathbb{R}^n}$ è l'operazione

$$+_{\mathbb{R}^n} \ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(\underline{x}, \underline{y}) \longrightarrow \underline{x} +_{\mathbb{R}^n} \underline{y}$$

Les $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$\underline{x} +_{\mathbb{R}^n} \underline{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$x_1 + y_1$ è la somma in $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} +_{\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Oss: $n = 1 \quad \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$

Proposizione: $(\mathbb{R}^n, +_{\mathbb{R}^n})$ è un gruppo abeliano

dim: Devo mostrare che $+_{\mathbb{R}^n}$ è:

- Associativa
- Commutativa
- Esiste neutro
- $\forall$ el. $\exists$ inverso

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$

$$(x+y)+z = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1+y_1)+z_1 \\ (x_2+y_2)+z_2 \\ \vdots \\ (x_n+y_n)+z_n \end{pmatrix}$$

proprietà associativa in $\mathbb{R}$

$$\overset{\text{proprietà associativa in } \mathbb{R}}{=} \begin{pmatrix} x_1+(y_1+z_1) \\ x_2+(y_2+z_2) \\ \vdots \\ x_n+(y_n+z_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1+z_1 \\ y_2+z_2 \\ \vdots \\ y_n+z_n \end{pmatrix}$$

$$= \underline{x} + \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}\right)$$

$$= \underline{x} + (\underline{y} + \underline{z})$$

- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\underline{x} + \underline{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y_1+x_1 \\ y_2+x_2 \\ \vdots \\ y_n+x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underline{y} + \underline{x}$$

- $\underline{0} \in \mathbb{R}^n \quad \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

  (cioè $\underline{x} = \underline{0}$ se $x_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$)

$$\underline{y} + \underline{0} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1+0 \\ y_2+0 \\ \vdots \\ y_n+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \underline{y}$$

- L'inverso di $\underline{x}$, indicato con $-\underline{x}$, ha come entrate le entrate opposte di quelle di $\underline{x}$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ l'inverso è } -\underline{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$$

Esiste anche la formula del prodotto

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$(\lambda, \underline{x}) \to \lambda \underline{x}$$

$$\left(\lambda, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) \to \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Def: L'insieme $M_{a \times b}(\mathbb{R})$ delle matrici con a righe e b colonne è:

$$M_{a\times b}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \dots & m_{1b} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \dots & m_{2b} \\ \vdots & & & & \\ m_{a1} & m_{a2} & m_{a3} & \dots & m_{ab} \end{bmatrix}, \begin{matrix} m_{ij} \in \mathbb{R} \\ i = 1, \dots, a \\ j = 1, \dots, b \end{matrix} \right\}$$

Una matrice è la scelta di $a \cdot b$ numeri reali organizzati in a righe b colonne

Es $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & \sqrt{2} \\ \pi & 7 \end{bmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$

Oss: $M_{1\times 1}(\mathbb{R}) \ni M$

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ \vdots \\ m_{n1} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$$

$M \in M_{a\times b}(\mathbb{R})$

$$\underbrace{\begin{matrix} m_{11} \\ m_{21} \\ \vdots \\ m_{a1} \end{matrix}}_{\in \mathbb{R}^a} \; \underbrace{\begin{matrix} m_{12} \\ m_{22} \\ \vdots \\ m_{a2} \end{matrix}}_{\in \mathbb{R}^a} \; \cdots \; \underbrace{\begin{matrix} m_{1b} \\ m_{2b} \\ \vdots \\ m_{ab} \end{matrix}}_{\in \mathbb{R}^a}$$

$\Rightarrow$ M è data da b vettori in $\mathbb{R}^a$ accostati

Indichiamo $M(j) = \begin{pmatrix} m_{1j} \\ \vdots \\ m_{aj} \end{pmatrix}$ la j-esima colonna, chiamo entrata di M ogni m_{ij}

Def: La somma di matrici è l'operazione:

$$M_{a\times b}(\mathbb{R}) \times M_{a\times b}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{a\times b}(\mathbb{R})$$
$$M \qquad\qquad N \quad \mapsto \quad M+N$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1b} \\ m_{21} & \cdots & m_{2b} \\ \vdots & & \\ m_{a1} & \cdots & m_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} & \cdots & n_{1b} \\ n_{21} & \cdots & n_{2b} \\ \vdots & & \\ n_{a1} & \cdots & n_{ab} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} m_{11}+n_{11} & \cdots & m_{1b}+n_{1b} \\ \vdots & & \\ m_{a1}+n_{a1} & \cdots & m_{ab}+n_{ab} \end{bmatrix}$$

$M = [m_{ij}] \quad N = [n_{ij}] \quad M+N = [m_{ij}+n_{ij}]$

Prop: $(M_{a\times b}(\mathbb{R}), +_{M_{a\times b}(\mathbb{R})})$ è gruppo abeliano

Es $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad M+N = \begin{bmatrix} 1+1 & 0+2 & 3+0 \\ 0+1 & 2+2 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Def: Una matrice $M \in M_{a\times b}(\mathbb{R})$ si dice:

- Quadrata se $a = b$
- Diagonale se è quadrata e $m_{ij} = 0$ se $i \neq j$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{aa} \end{bmatrix}$$

(cioè se gli elementi esterni alla diagonale son tutti zeri)

- Triangolare superiore se $m_{ij} = 0$ quando $i > j$
- Triangolare inferiore se $m_{ij} = 0$ quando $i < j$
- Simmetrica se è quadrata e $m_{ij} = m_{ji}$

$$\begin{bmatrix} & m_{ij} \\ m_{ji} & \end{bmatrix}$$

Es $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ è simmetrica

- Antisimmetrica se $m_{ij} = -m_{ji}$

(oss: $m_{ii} = 0$ se M è antisimmetrica)

Def: Se $M \in M_{a\times b}(\mathbb{R})$ la sua TRASPOSTA

$$M^T \in M_{b\times a}(\mathbb{R}) \quad t.c. \quad M = [m_{ij}]$$
$$M^T = [\alpha_{ij}]$$

$$\alpha_{ij} := m_{ij}$$

M^T è ottenuta da M scambiando righe con le colonne

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

$$M^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

Oss: $(M^T)^T = M$

Def: Il prodotto tra matrici è la funzione

$$M_{a\times b}(\mathbb{R}) \times M_{b\times c}(\mathbb{R}) \to M_{a\times c}(\mathbb{R})$$
$$\begin{matrix} \cup\!\!\shortmid & & \cup\!\!\shortmid \\ (\;M & , & N\;) \end{matrix} \to M \cdot N$$

$$M[m_{ij}] \quad N[n_{ij}] \qquad C = M \cdot N = [c_{ij}]$$

$$c_{ij} := \sum_{l=1}^{b} m_{il} \cdot n_{lj}$$

Es $M \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $N \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$$

$$M \cdot N \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \qquad MN = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$
$$\cup\!\!\shortmid$$
$$[c_{ij}]$$

$$\underset{i=1\ j=1}{C_{11}} = \sum_{\ell=1}^{b=3} m_{1\ell}\, n_{\ell 1} =$$

$$= m_{11} \cdot n_{11} + m_{12} \cdot n_{21} + m_{13} \cdot n_{31}$$

$$= 0 \cdot 6 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10$$

- 1° riga di M
- 1° colonna di M

$$\underset{i=1\ j=2}{C_{12}} = \sum_{\ell=1}^{b=3} m_{1\ell} \cdot n_{\ell 2}$$

$$= m_{11} \cdot n_{12} + m_{12} \cdot n_{22} + m_{13} \cdot n_{32}$$

$$= 0 \cdot 7 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 11$$

$\boxed{\dots}$

<u>Oss</u>: Se $M \in M_{a \times b}$, $N \in M_{c \times d}$ =>

1. Posso calcolare $M \cdot N \iff b = c$
   $N \cdot M \iff d = a$

2. Se $b = c$ $d = a$ cioé posso calcolare
   $N \cdot M$ e $M \cdot N$
   (di solito $N \cdot M \neq M \cdot N$)

<u>Oss</u>: Se considero matrici quadrate $M_{a \times b}(\mathbb{R})$
=> $\cdot$ $M_{a \times a}(\mathbb{R}) \times M_{a \times a}(\mathbb{R}) \to M_{a \times a}(\mathbb{R})$
cioè $\cdot$ è operazione in $M_{a \times a}(\mathbb{R})$

<u>Prop</u>: $(M_{a \times a}(\mathbb{R}), \cdot)$ è un monoide non commutativo
(cioè $\cdot$ è associativa, NON è commutativa, e ha neutro)

$\to I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ cioé se $I = [\delta_{ij}]$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$\to$ Non tutte le matrici in $(M_{a \times a}(\mathbb{R}), \cdot)$ sono invertibili

SISTEMI

Un'equazione in n incognite si dice **LINEARE** se le incognite compaiono solo al grado 1

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots + m_n x_n = k \qquad m_i \in \mathbb{R}$$

Un sistema lineare è l'insieme di equazioni lineari

$$\begin{cases} m_1 x_1 + m_1 x_2 + m_1 x_3 + \dots + m_{1n} x_n = k_1 \\ m_2 x_1 + m_2 x_2 + m_2 x_3 + \dots + m_{2n} x_n = k_2 \\ \dots \\ m_{a1} x_1 + m_{a2} x_2 + m_{a3} x + \dots + m_{an} x_n = k_a \end{cases}$$

Risolvere il sistema significa trovare i valori delle incognite che rendono vere <u>TUTTE</u> le equazion

⇝ Un sistema è associato a $M \in M_{a \times b}(\mathbb{R})$ $M = [m_{ij}]$

$\underline{k} \in \mathbb{R}^a$ $\quad k = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_a \end{pmatrix}$

Volete trovare

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$\Rightarrow$ il sistema è $\underbrace{M}_{M_{a\times n}} \underbrace{\underline{x}}_{M_{n\times 1}} = \underbrace{\underline{k}}_{M_{a\times 1}}$