Insiemi, relazioni e applicazioni

$\underbrace{\text{applicazioni}}_{\text{funzioni}}$

Insiemi: concetto primitivo (non può essere definito)
$\Downarrow$
collezione di elementi / oggetti

Indichiamo un insieme con lettere maiuscole $(A, B, C, \dots)$
e gli "elementi" di un insieme con lettere minuscole.

Scriviamo: $a \in A$ per dire che a è un elemento dell'insieme A

Def: Siano A e B due insiemi,
dico che $A = B$ se tutti gli elementi di A sono elementi anche di B e viceversa.
(cioè $A = B$ se $x \in A$ se e solo se $x \in B$)

Def: Dico che $A \subseteq B$ (A contenuto in B) se per ogni $x \in A$, $x \in B$
(cioè se ogni elemento di A è anche elemento di B)
Se $A \subseteq B$ diciamo che A è sottoinsieme di B

Oss: $A = B$ significa che $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$

Def: l'insieme senza elementi si chiama insieme vuoto e si indica $\emptyset$

→ Sia X insieme e siano A, B sottoinsieme di X

1) $A \cup B = \{ x \in X \mid x \in A$ oppure $x \in B \}$

2) $A \cap B = \{ x \in X \mid x \in A$ e $x \in B \}$

Def: $A^c = \{ x \in X \mid x \notin A \}$

complementare di A — non appartiene

Def: $B - A = \{ x \in B \mid x \notin A \}$

Oss: $A^c = X - A$

$A \subseteq A \cup B$ e $B \subseteq A \cup B$

$A \cap B \subseteq A$ e $A \cap B \subseteq B$

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq A \cup B \text{ e } B \subseteq A \cup B \\ A \cap B \subseteq A \text{ e } A \cap B \subseteq B \end{array}\right\} \quad A \cap B \begin{array}{c} \subseteq A \subseteq \\ \subseteq B \subseteq \end{array} A \cup B$$

Def: Gli insiemi si possono definire:

- Elencando tutti gli elementi
  es. $A = \{1, 2, 3, 5\}$

- Tramite una proprietà soddisfatta dai suoi elementi
  es. $A = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \leq 5,\ n \neq 0,\ n \neq 4 \}$

  $B = \{ n \in \mathbb{N} \mid n$ è pari $\}$ → infinito

Def: Sia A insieme finito, chiamo cardinalità di A il numero k degli elementi di A e scrivo $|A| = k$

Def: X insieme chiamo "insieme delle parti di X"

$P(X) = \{$ sottoinsieme di $X \}$

es. $X = \{a, b, c\}$ $\quad \emptyset \subseteq X \quad \{a\} \subseteq X$

$$P(X) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\} \}$$

Oss: Per ogni insieme X $\emptyset \in P(X)$ e $X \in P(X)$

Prop: Se X è finito e $|X| = k \Rightarrow |P(X)| = 2^k$

Def: Dato un insieme X non vuoto, una partizione di X, è una collezione di sottoinsiemi non vuoti A_i di X, $i \in I$

t.c. ① $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$ (due sottoinsiemi A_i, A_j non si intersecano)

② $\bigcup_i A_i = X$ (la loro unione è X)

es. $X = \{a, b, c\}$

$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ è partizione di X

$\{\{a,b\}, \{c\}\}$ è partizione di X

$\{\{a,b\}, \{b,c\}\}$ NON è partizione di X (non soddisfa ①)

$\{\{a\}, \{b\}\}$ NON è partizione di X (non soddisfa ②)

Def: Siano A, B due insiemi. Chiamo prodotto cartesiano di A e B

$$A \times B = \{ \overbrace{(a, b)}^{\text{coppie ordinate di elementi in } A \text{ e } B} \mid a \in A, b \in B \}$$

$B \times A \neq A \times B$

Es. $A = \{a\}$ e $B = \{1, 2\}$

$A \times B = \{(a, 1), (a, 2)\}$

$B \times A = \{(1, a), (2, b)\}$

Prop.: se A e B sono finiti $|A| = k_A$ e $|B| = k_B$

$\Rightarrow |A \times B| = k_A \cdot k_B$

RELAZIONI

(Siano A e B due insiemi)

Def: Una relazione R fra A e B è un sottoinsieme di $A \times B$

$R \subseteq A \times B$

contiene coppie della forma (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$

e se $(a, b) \in R \subseteq A \times B$ diciamo che a è in relazione con b e scriviamo aRb

Def: R è detta relazione TOTALE se $R = A \times B$

| Da adesso in poi pongo: $A = B$ |

Def: Sia $R \subseteq A \times B$ una relazione

Dico che R è la relazione IDENTICA se

$R = \{(a, a) \ \forall a \in A\}$ ⇝ (ogni elemento di A è in relazione solo con sé stesso)

Oss: Se R è la relazione identica e $(a, b) \in R \Rightarrow b = a$

Def: Sia R una relazione. Diciamo che R ha la proprietà:

1. **Riflessiva** se $\forall a \in A \ (a,a) \in R$
   (cioè se per ogni $a \in A$, aRa, a è in relazione con sé stesso)

2. **Simmetrica** se $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$
   (se a è in relazione con b allora b è in relazione con a)

3. **Antisimmetrica** se $(a,b) \in R$ e $(b,a) \in R \Rightarrow a = b$
   (se a è in relazione con b e b è in relazione con a allora a è uguale a b)

4. **Transitiva** se $(a,b) \in R$ e $(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$
   (se a è in relazione con b che è in relazione con c, allora a è in relazione con c)

Def: Se $R \subseteq A \times A$ soddisfa le seguenti proprietà:
1 riflessiva, 2 simmetrica, e 4 transitiva
allora R si dice relazione di **EQUIVALENZA**

Es: "essere uguali"

Def: Se $R \subseteq A \times A$ soddisfa le proprietà:
1 riflessiva, 3 antisimmetrica, 4 transitiva
allora R si dice relazione di **ORDINE**

Oss: In $\mathbb{N}$, la relazione di $\leq$ è d'ordine
la relazione "essere sottoinsieme" è d'ordine

Notazione: Spesso le relazioni di ordine si indicano "con" $\preceq$

Def: Sia X un insieme e $\preceq$ una relazione d'ordine in X allora diciamo che $(X, \preceq)$ è un insieme ordinato

Diciamo che $(X, \preceq)$ è TOTALMENTE ordinato se $\forall (a,b)$ o $(a,b) \in \preceq$ oppure $(b,a) \in \preceq$
$(a \preceq b)$ $(b \preceq a)$

altrimenti diciamo che NON è totalmente ordinato

Diciamo che $a, b \in A$ sono CONFRONTABILI se $a \preceq b$ oppure $b \preceq a$

$(X, \preceq)$ è totalmente ordinato se $\forall a, b \in A$ a e b sono confrontabili

Es. $(\mathbb{N}, \leq)$ è totalmente ordinato
$\leq$ → relazione d'ordine

$A = \{a, b, c\}$
$R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b)\}$

R è riflessiva, antisimmetrica, transitiva
$\Rightarrow$ e quindi è di ordine NON TOTALE
$\Rightarrow$ perché a e c non sono confrontabili

Es. $A = \mathbb{N}$ $(n,m) \in R \iff \exists\, k$ tc $n = m \cdot k$

(n è in relazione con m $\Rightarrow$ n è multiplo di m)

che proprietà ha?

Def: Sia $(X, \preceq)$ un insieme ordinato

a è massimo di X se $\forall x \in X$ $x \leq a$ (cioè $(x,a) \in \preceq$)

b è minimo di X se $\forall x \in X$ $b \leq x$ → RELAZIONE $\leq$

Oss: se $(X, \preceq)$ è insieme ordinato e $Y \subseteq X$ allora Y è ordinato

Diciamo che s è estremo superiore di Y se

1. $\forall y \in Y$ $y \leq s$
2. se $x \in X$ t.c. $\forall y \in Y$ $y \preceq x \Rightarrow s \leq x$

Diciamo che $t \in X$ è estremo inferiore di Y se

1. $\forall y \in Y$ $t \leq y$
2. $\forall x \in X$ t.c. $\forall y \in Y$ $x \leq y \Rightarrow x \leq t$