Problema di sintesi di automi:

- Dato un linguaggio L
- Trovare un automa A per L

In particolare:

1) Com'è fatto l'automa massimo per L?
2) Come ottenere l'automa minimo per L?

"massimo" = maggiore numero di stati

"minimo" = minore numero di stati

$\uparrow$

nostro obbiettivo

1. Automa massimo: G_1

l'idea è: per ogni parola in input raggiungo uno stato diverso

$$\forall w, w' \in \Sigma^* \quad \delta(q_0, w) \neq \delta(q_0, w')$$

$$\Downarrow$$

$$Q = \Sigma^*$$

Inoltre, per non perdere stati, tutti gli elementi di Q devono essere osservabili:

$$\forall q \in \underbrace{Q}_{\text{insieme degli stati}} \; \exists w \text{ t.c. } q = \delta(q_0, w)$$

Def: $G_L = \langle \Sigma^*_{\approx} Q, \Sigma, [\varepsilon], \delta_{GL}, F_{GL} \rangle$

dove:

$$F_{GL} = \{ [\omega] \in Q \mid \omega \in L \}$$

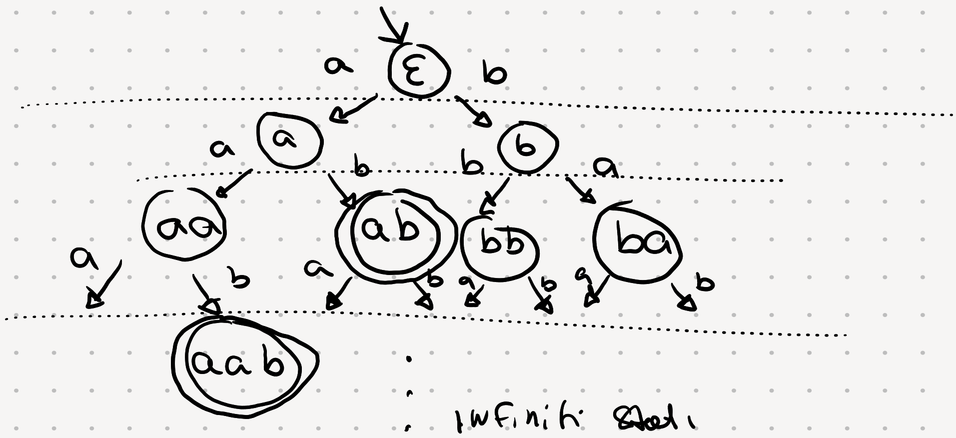
stato raggiunto da parola ω

etichettato con ω

etichetto lo stato con il simbolo appena letto

$$\delta_{GL}([\omega], \sigma) = [\omega\sigma]$$

Automa massimo G_L per $L = \{ a^n b^m \mid n, m > 0 \}$



2. Automa minimo: M_L

Abbiamo 2 tecniche:

1° - Si usa l'automa massimo G_L

2° - Si usa un automa a stati finiti per L

Prima tecnica:

Teorema

G_L equiv.

$G_{L\approx}$ è l'automa minimo per L

cioè $G_{L\approx} = M_L$

dim:

Devo mostrare che se A è un automa per L allora

$$|A| \geq |G_{L\approx}|$$

dove

$|A|$ = numero di stati di A

<u>FATTO</u>: stati distinguibili in G_L sono stati distinti in A. Infatti siano $[x]$ e $[y]$ distinti in G_L

cioè: $[x] \not\approx [y] \Rightarrow \exists\, w \in \Sigma^*$ t.c.

$$x \xrightarrow{w} xw \qquad xw \notin L$$

$$y \xrightarrow{w} yw \qquad yw \in L$$

Allora in A:

$\delta(q_0, x) \neq \delta(q_0, y)$ altrimenti

$$\begin{tikzcd} q_0 \arrow[r, bend left, "x"] \arrow[r, bend right, "y"'] & \bigcirc \arrow[r, "w"] & \bigcirc \end{tikzcd}$$

$$\left.\begin{matrix} xw \\ yw \end{matrix}\right\} \notin L \quad \text{oppure} \quad \left.\begin{matrix} xw \\ yw \end{matrix}\right\} \in L$$

Ora:

Siano $[x_1]_\approx, [x_2]_\approx, [x_3]_\approx, \dots$
gli stati di $G_{L\approx}$, allora
gli stati $[x_1] [x_2] [x_3], \dots$ sono stati
distinguibili in G_L

In virtù del FATTO appena dimostrato

$$\delta(q_0, x_1), \delta(q_0, x_2), \delta(q_0, x_3), \dots$$

sono stati distinti in A
(A generico automa per L)

$\Rightarrow$ A ha almeno tanti stati quanti $G_{L\approx}$
cioè

$$|A| \geq |G_{L\approx}|$$ e quindi $G_{L\approx}$ è minimo per L

- Secondo tecnico

Teorema:

Sia A un automa a stati finiti per L tale che gli stati di A siano:

- tutti osservabili
- tutti distinguibili

Allora A è minimo per L

Corollario

A_x è minimo per L se A ha tutti gli stati osservabili.

dim del teo:

Siano $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ gli stati di A vale che:

- sono tutti osservabili
- sono tutti distinguibili tra loro

Allora esistono parole $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ tali che:

$$\forall i \quad q_i = \delta(q_1, w_i)$$

Allora esistono parole x_{ij} che distinguono gli stati

$$q_i \xrightarrow{x_{ij}} O$$

$$q_j \xrightarrow{x_{ij}} O$$

riassumendo

$$q_1 \xrightarrow{w_i} q_i$$

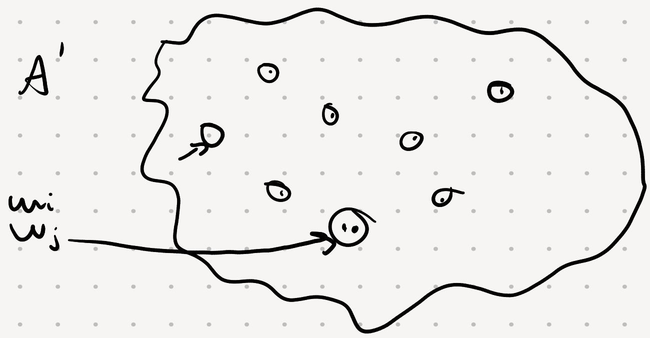
$$q_i \not\approx q_j$$

$$q_1 \xrightarrow{w_j} q_j$$

Adesso sia A' un automa per L con meno stati di A (tecnica per assurdo)

Diamo in input ad A' le parole

$\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ si ha

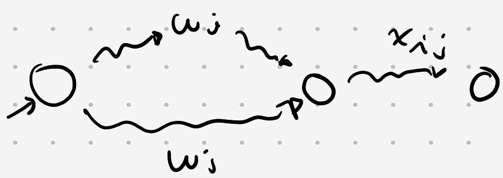


$|A'| < n$

almeno 2 parole raggiungono lo stesso stato secondo il principio della piccionaia

Siano (w_i e w_j) queste parole

In A' dunque accade che



così ottengo $\begin{cases} w_i x_{ij} \\ w_j x_{ij} \end{cases}$ sono

entrambe in L o entrambe non in L

$\Downarrow$

Assurdo

A' non riconosce L

$\Downarrow$

Non esiste un automa per L con meno stati di A