INVERTIBILITÀ E RANGO

Il sistema $A\underline{x} = \underline{k}$ se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

ha una e una soluzione se A è invertibile

infatti se $\exists\, A^{-1}$ t.c. $A^{-1}A = I$ allora

$$A^{-1}A\underline{x} = A^{-1}\underline{k}$$
$$I\underline{x} = A^{-1}\underline{k}$$
$$x = A^{-1}\underline{k}$$

$A\underline{x} = \underline{k}$ ha una e una soluzione se e solo se

$rk([A'|k']) = rk([A'])$ e
$rk([A']) = n$ dove

$[A'|k']$ è la forma di Gauss

A è invertibile se e solo se il $\det(A) \neq 0$

ma ci aspettiamo che esiste un legame fra $\det(A) \neq 0$
e il $rk(A')$

$GL(n, \mathbb{R}) = \{ A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A \text{ è invertibile} \}$

Prop: $A \in GL(n, \mathbb{R}) \iff \det(A) \neq 0$
$\forall\, \underline{k} \in \mathbb{R}^n \; \exists!$ la soluzione di $A\underline{x} = \underline{k}$

es $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

A è invertibile? No! $\underline{\det(A) = 0}$

$\downarrow$

esistono ∞^1 sol. impossibile

Discutere la risolubilità di $A\underline{x} = \underline{b}$ $A\underline{x} = \underline{k}$

Eventualmente calcolare soluzioni

1^ riga

$$\det(A) = (-)^2 \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$(-)2 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$(+)3 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 0 - 0 + 0 = 0$$

2^ riga

$$\det(A) = 0 \dots + 0 + \dots + 0 = 0$$

Oss: Se la matrice ha una riga o colonna tutta di zeri $\Rightarrow$ il suo determinante è 0

Per studiare la risolubilità devo usare Gauss

$$A\underline{x} = \underline{k} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-2R_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2/-3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$A' \qquad k'$$

$(rk([A']) = 2 \neq rk([A'|\underline{k}']) = 3) \Rightarrow$ x Rouché-Capelli

IMPOSSIBILE

$$A\underline{x} = \underline{b} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3 / 3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1/3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right]$$

$(rk([A']) = 2 = rk([A'|\underline{b}']) = 2)$

x Rouché-Capelli $\exists$ soluzione

dipende da $n - rk([A'])$

$\Rightarrow 3-2 = 1$ parametro

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 0 + y + z = 1/3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2\left(\frac{1}{3} - z\right) - 3z + 1 \\ y = \frac{1}{3} - z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1/3 - z \\ y = 1/3 - z \end{cases}$$

$A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

$A\underline{x} = \underline{k} \longrightarrow$ Posso usare Gauss

oppure $\longrightarrow$ $\det(A) \leadsto$ se $\det(A) \neq 0$ esiste unica la soluzione

posso trovarla con Cramer

$\leadsto$ se $\det(A) = 0$ $\rightarrow$ o la soluzione non esiste

Gauss

$\rightarrow$ oppure ha ∞ soluz.

es $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ha una sola soluzione

sì

è B invertibile? Risolubilità di $B\underline{x} = \underline{b}$

$$\det(B) = \cancel{0 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}} - 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0 - 1 \cdot (-1) + 2 = 3 \neq 0$$

Calcolo Sol con Cramer

$$x_1 = \frac{\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}}{\det B} \qquad x_3 = \frac{\det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}{\det B}$$

$$x_2 = \frac{\det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}{\det B}$$

$$x_1 = \frac{1}{\underset{\det B}{3}} \cdot \left(-0 + 0 - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \cdot (-1(2-1)) = -\frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{1}{3} \cdot \left(0 - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(-1 \cdot (-1) + 1 \right) = \frac{2}{3}$$

$$x_3 = \frac{1}{3} \cdot \left(-1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \left(-1(1-2) \right) = \frac{1}{3}$$

Provare con Gauss

Prop: Sia $T \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ TRIANGOLARE SUPERIORE

cioè $T = [t_{ij}]$ $\quad t_{ij} = 0 \quad i > j$

$\Rightarrow \det(T) = t_{11} \cdot t_{22} \cdot t_{33} \cdot \ldots \cdot t_{nn}$

il determinante è il prodotto degli elementi sulla diagonale

Dim: (induzione) su n

$n = 1 \quad T = [t_{11}] \quad \det[t_{11}] = t_{11}$ ok

Vera per matrici triangolari $(n-1) \times (n-1)$,

lo mostro per $n \times n$

$$\det(T) = \begin{bmatrix} t_{11} & \ldots & & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & t_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & t_{nn} \end{bmatrix} \overset{1^a \text{ col}}{=} t_{11} \det \underbrace{\begin{bmatrix} t_{22} & t_{23} & \ldots & t_{2n} \\ 0 & t_{33} & \ldots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & t_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{Mat triangolare sup } (n-1)\times(n-1)} =$$

vale induzione

$$= t_{11} \cdot (t_{22}\, t_{33} \ldots t_{nn})$$

Oss: Se D è diagonale $\rightarrow$ $\det(D) = d_{11} \cdot d_{22} \cdots d_{nn}$

Oss: Vale anche per triangolare inf.

Oss: $\det(I) = 1$

La forma di Gauss di una matrice è triangolare superiore

es $Mat_{3\times 3}$

se ho 3 pivot $\begin{bmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

se ho 2 pivot $\begin{bmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

se ho 1 pivot $\begin{bmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Sia $A' \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ in forma di Gauss

$\det(A') = 1^{\#\text{pivot}} \cdot 0^{n-\#\text{pivot}}$

$\Rightarrow \det(A') \neq 0 \Leftrightarrow$ la diagonale contiene solo 1

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ se la diagonale contiene solo 1 → gli elementi sulla diagonale sono pivot => ho n pivot

Sia A una matrice quadrata $n \times n$
per ottenere la forma di Gauss applico trasformazioni ammissibili

Oss: Se scambio fra loro 2 righe di una matrice quadrata, il determinante cambia di segno

es $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\det(M) = ad - cb$

↳ $\begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$ $\det(M) = cb - ad$) cambia segno!

Se moltiplico una riga per k, il determinante viene moltiplicato per k

es $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\det M = ad - cb$

$M = \begin{bmatrix} a & b \\ kc & kd \end{bmatrix}$ $\det M = akd - kcb = k(ad - cb)$

Se sommo ad una riga il multiplo di un'altra, il determinante non cambia

Prop: $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ A' è la sua forma di Gauss

$\det(A) \neq 0 \iff \det(A') \neq 0$

cioè ① ho scambiato delle righe ($\det A' = \pm \det A$)
② ho moltiplicato righe per $\underline{k \neq 0}$ ($\det A' = k \det A$)

③ ho sommato a righe multipli di altre righe ($\det A' = \det A$)

Teorema: $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ A' forma Gauss

$$A \in GL(n, \mathbb{R}) \iff \det(A) \neq 0 \iff$$
$$\det(A') \neq 0 \iff rk(A') = n$$

Oss: Se $A\underline{x} = \underline{k}$ è sistema quadrato, cioè $A \in M_{n \times n}$
e $rk(A') = n \implies rk(A') = rk(A' | \underline{k}')$

$$n \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdots & \cdots & \\ & 1 & \cdots & \\ & & 1 & \end{array}\right]}_{A'}$$

$rk[A' | \underline{k}'] \leq \#\text{ righe} = n$

$rk[A'] \leq rk[A' | \underline{k}']$

SISTEMI OMOGENEI $\underline{k} = 0$

$\implies A\underline{x} = \underline{0}$ è sempre risolubile

c'è sempre la soluzione $\underline{x} = \underline{0}$
(è possibile che ne esistano altre)

Se $\exists A' \implies \underline{x} = \underline{0}$ è l'unica

$A\underline{x} = \underline{0}$

$\underbrace{A'A}_{I}\underline{x} = A'\underline{0} = \underline{0} \to \underline{x} = \underline{0}$