Sistemi e sistemi quadrati

Teorema: (Rouché - Capelli pt. 2)

Sia $A\underline{x} = \underline{k}$ un sistema, $A \in M_{a \times b}$, $k \in \mathbb{R}^a$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^b$:

① $\underline{x} = \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ é sol. del sistema $\iff \underline{k} = \underline{0}$

② Se $\underline{k} = 0$ (sistema omogeneo) $\Rightarrow$ il sistema ammette sempre almeno una sol. e se $\underline{x}, \underline{y}$ sono 2 sol. $\Rightarrow$
- $\underline{x} + \underline{y}$ é sol.
- $\alpha \underline{x} + \beta \underline{y}$ é sol.
  ↳ $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

③ Se $k \neq 0 \Rightarrow$ il sistema può essere risolubile oppure impossibile.
↳ Se é risolubile, $\underline{x}_1$ é sol. $\rightarrow \underline{y}_1$ é sol. $\iff \underline{x}_1 - \underline{y}_1$ é sol. del sistema

Scrivo $Sol(A|\underline{k})$ per indicare l'insieme delle soluzioni di $A\underline{x} = \underline{k} \rightarrow Sol(A|k) = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^b \mid A\underline{x} = \underline{k} \}$

$\Rightarrow$ il ② si riscrive: se $\underline{x}, \underline{y} \in Sol(A|0)$
$\Rightarrow \alpha \underline{x} + \beta y \in Sol(A|0)$

$\Rightarrow$ il ③ si riscrive: se $x_1 \in Sol(A|\underline{k})$
$\Rightarrow \underline{y}_1 \in Sol(A|\underline{k}) \iff \underline{x}_1 - \underline{y}_1 \in Sol(A|0)$

Dim:

① $\underline{x} = \underline{0}$ é sol $\iff A \cdot \underline{0} = \underline{k}$ ma $A \cdot \underline{0} = \underline{0} \Rightarrow \underline{k} = \underline{0}$

② So che $\underline{x}, \underline{y} \in Sol(A|\underline{0})$, cioé che $A\underline{x} = \underline{0}$, $A\underline{y} = \underline{0}$

Considero $\alpha \underline{x} + \beta \underline{y}$, in particolare $A(\alpha \underline{x} + \beta \underline{y}) =$

$= A(\alpha \underline{x}) + A(\beta \underline{y}) = \alpha \underbrace{A\underline{x}}_{=0} + \beta \underbrace{A\underline{y}}_{=0} = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 =$

$= 0 \Rightarrow (\alpha \underline{x} + \beta \underline{y}) \in Sol(A|\underline{0})$

③ So che $x_1 \in Sol(A|\underline{k})$ cioé $A\underline{x}_1 = k$

$\underline{y}_1 \in Sol(A|\underline{k}) \iff A\underline{y}_1 = \underline{k} \iff A\underline{x}_1 - A\underline{y}_1 = \underline{k} - \underline{k}$

$\iff A\underline{x}_1 - A\underline{y}_1 = \underline{0} = A(\underline{x}_1 - \underline{y}_1) = 0 \to \underline{x}_1 - \underline{y}_1 \in Sol(A|\underline{0})$

Oss: $x_1 \in Sol(A|k)$ $\quad \underset{\nearrow \, Sol(A|k)}{\underline{y}_1} = \underline{x}_1 - \underbrace{(\underline{x}_1 - \underline{y}_1)}_{\in Sol(A|\underline{0})}$

Def: Un sistema $A\underline{x} = \underline{x}$ si dice **QUADRATO** quando la matrice A è quadrata $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ $A\underline{x} = \underline{k}$

Se $\exists$ A^{-1} matrice t.c. $A^{-1} \cdot A = I \Rightarrow A^{-1} A \underline{x} = A^{-1}\underline{k}$

$I x = A^{-1}\underline{k} \Rightarrow \underline{x} = A^{-1}\underline{k}$

$I = [\delta_{ij}]$ $\quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ $\qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & & & 1 \end{bmatrix}$

$I \cdot B = B$

$I \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ $\underline{B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})}$ è un monoide

$(M_{n\times n}(\mathbb{R}), \cdot)$ con neutro I

Def: Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrice quadrata. A è INVERTIBILE se $\exists$ $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ t.c. $A \cdot B = B \cdot A = I$

Matrice inversa di $A = A^{-1}$

$GL(n, \mathbb{R})$ insieme di matrici invertibili

$GL(n, \mathbb{R}) = \{ A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid A \text{ è invertibile} \}$

Oss:

- $A \in GL(n, \mathbb{R}) \Rightarrow A^{-1} \in GL(n, \mathbb{R})$ $\quad (A^{-1})^{-1} = A$
- $A, B \in GL(n, \mathbb{R}) \Rightarrow A \cdot B \in GL(n, \mathbb{R})$ $\quad (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

$\downarrow$

$(GL(a,\mathbb{R}), \cdot)$ non è abeliano)

es $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ è invertibile?

Solo se $\exists\ B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ t.c. $AB = I$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z & w \\ 2z & 2w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} z = 1 \\ w = 0 \\ 2z = 0 \\ 2w = 1 \end{matrix}\right\} \text{impossibile!}$$

Teorema: $A \in M_{a \times a}(\mathbb{R})$, $A \in GL(a,\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall \underline{k} \in \mathbb{R}^a$ $\exists\ \underline{x} \in \mathbb{R}^a$ t.c. $A\underline{x} = \underline{k} \Rightarrow \exists\ \underline{x} \in \mathbb{R}^a$ t.c. $\underline{x} \in Sol(A|\underline{k})$

Dim: $\Rightarrow$) Se $A \in GL(a,\mathbb{R}) \Rightarrow \exists\ A^{-1}$

considero $A\underline{x} = \underline{k} \overset{\cdot A^{-1}}{\rightsquigarrow} A^{-1}A\underline{x} = \underline{k}A^{-1}$

$I\underline{x} = A^{-1}\underline{k}$

$\underline{x} = A^{-1}\underline{k} \in Sol(A|\underline{k})$

$\Leftarrow$) $\forall \underline{k}\ \exists\ \underline{x}$ t.c. $A\underline{x} = \underline{k}$

$\underline{k} = \underline{e}_1\ \exists\ \underline{y}_1$ t.c. $A\underline{y}_1 = \underline{e}_1$

$\underline{k} = \underline{e}_2\ \exists\ \underline{y}_2$ t.c. $A\underline{y}_2 = \underline{e}_2$

$\underline{k} = \underline{e}_j\ \exists\ \underline{y}_j$ t.c. $A\underline{y} = \underline{e}_j$

$\underline{y}_1, \underline{y}_2, \underline{y}_a \in \mathbb{R}^a \rightsquigarrow [\underline{y}_1 | \underline{y}_2 | \underline{y}_3 | \dots | \underline{y}_a] = y \in M_{a \times a}(\mathbb{R})$

$Ay = A[\underline{y}_1 | \underline{y}_2 | \dots | \underline{y}_a] = [A\underline{y}_1 | A\underline{y}_2 | \dots | A\underline{y}_a]$

$= [e_1 | e_2 | e_3] = I$

$\Rightarrow y$ è inversa di $A \Rightarrow A \in GL(a,\mathbb{R})$

Come capire se una matrice è invertibile:

$$\det(A) \neq 0 \iff A \text{ è invertibile}$$

Def: Sia $A \in M_{a \times a}(\mathbb{R})$ quadrata. Siano $i, j \in \mathbb{N}$ t.c. $1 \leq i \leq a$ $\quad 1 \leq j \leq a \Rightarrow A_{ij}$ è la matrice $(a-1) \times (a-1)$ cancellando la i-esima e j-esima

Def: $A \in M_{a \times a}(\mathbb{R})$ quadrata. Chiamo DETERMINANTE di A, $\det(A)$, il n° che:

1. Se $a = 1$ $\quad A[a_{11}]$ $\quad \det(A) = a_{11}$
2. Se $a > 1$ $\quad \det(A) = \sum_{i=1}^{a} (-1)^{i+1} a_{1i} \cdot \det(a_{1i})$

<u>es</u> $\quad A = [1]$ $\quad \det(A) = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \to \det(A) = \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i+1} \cdot a_{1i} \cdot \det(A_{1i})$$

$$= (-1)^2 \cdot 1 \cdot \det([4]) + (-1)^3 \cdot 2 \cdot \det([3])$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} \cdot a_{1i} \cdot \det(A_{1i}) =$$

$$= (-1)^2 \cdot a_{11} \cdot \det(A_{11}) + (-1)^3 \cdot a_{12} \det(A_{12}) + (-1)^4 \cdot a_{13} \cdot \det(A_{13}) =$$

$$= 1 \cdot 0 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 \cdot (-6) + 1 \cdot 0 \cdot (-3) = 0 + 6 + 0 = 6$$

Una matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ è invertibile $\iff ad - cb \neq 0$

Prop: $A \in M_{a \times a}(\mathbb{R})$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{a} (-1)^{k+1} a_{ki} \det(A_{ki}) \text{ con } k \in \mathbb{N} \quad 1 \leq k \leq a$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{a} (-1)^{k+1} a_{jk} \det(A_{jk}) \text{ con } k \in \mathbb{N} \quad 1 \leq k \leq a$$

Teorema: (Binet) $A, B \in M_{a \times a}(\mathbb{R})$, $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

Corollario: $A \in GL(a, \mathbb{R}) \Rightarrow \det(A) \neq 0$

$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$$

Dimostrazione: I matrice identità $\Rightarrow \det I = 1$

$$1 = \det(I) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$$

$$A \in GL(a) \Rightarrow A \cdot A^{-1} = I$$

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A) \neq 0$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Teorema: (Cramer)

$A \in M_{a \times a}(\mathbb{R})$, $\underline{k} \in \mathbb{R}^a$

Se $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists!$ sol $A\underline{x} = \underline{k}$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_a \end{pmatrix} \quad e \quad x_i = \frac{\det[\underline{A}(1) | \underline{A}(2) | \underline{A}(i-1) | \underline{k} | \underline{A}(i+1) | \dots | \underline{A}(a)]}{\det(A)}$$

colonna di A

in posizione i-esima "Tolgo" la colonna di A e la sostituisco con $\underline{k}$

Teorema: (inverso di Cramer) $A \in M_{a \times a}(\mathbb{R})$ $\det(A) \neq 0$

$$\Rightarrow \exists\, M = A^{-1} \text{ inverso di } A \quad M = [n_{ij}]$$

$$n_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det(A_{ji})}{\det A}$$

Teorema: $A \in GL(a, \mathbb{R}) \Leftrightarrow \det A \neq 0$

$\Rightarrow$) Dimostrazione del corollario

$\Leftarrow$) teorema precedente dice chi è l'inverso