Indipendenza lineare e basi

- Dimensione

V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale

Diciamo che $\{ \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \} \subseteq V$ é sistema di generatori per $V \iff V = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \rangle =$

$$= \{ k_1 \underline{v}_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n \underline{v}_n \mid k_i \in \mathbb{K} \ \forall i = 1 \dots n \}$$

Cioè $\{ v_1 \dots v_n \}$ é sistema di generatori per V se $\forall \underline{w} \in V \ \exists k_1, \dots, k_n \in \mathbb{K} \mid \underline{w} = k \underline{v}_1$

<u>esempio</u> $V = \mathbb{R}^3$ $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

osservo che $\{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$ é un sistema di generatori per $\mathbb{R}^3$

infatti devo dimostrare che $\forall y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

esistono $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$ t.c.

$\underline{y} = k_1 v_1 + \dots + k_4 \underline{v}_4$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k_1 + k_4 \\ k_1 + k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} k_1 + k_4 = y_1 \\ k_1 + k_2 = y_2 \\ k_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & y_1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y_3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y_2 - y_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y_3 \end{array}\right]$$

$\operatorname{rk}[A] = \operatorname{rk}[A|b]$

$\Rightarrow \exists$ soluz.

le soluzioni sono $\infty^{4-3} = \infty$

esempio $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{v_1}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{v_2} + \underline{v_4}$

$\Rightarrow$ Ogni vettore in $\mathbb{R}^3$ si scrive in modo unico come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3, v_4

esempio considero $\{\underline{v_2}, \underline{v_3}, \underline{v_4}\}$

$$\forall \; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_4 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} k_4 = y_1 \\ k_3 = y_2 \\ k_2 = y_3 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & y_1 \\ 1 & 0 & 0 & y_2 \\ 0 & 1 & 0 & y_3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & 0 & 0 & y_2 \\ 0 & \underline{1} & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & \underline{1} & y_1 \end{array}\right]$$

$\operatorname{rk}[A] = \operatorname{rk}[A'|y'] \Rightarrow \exists$ sol.

è unica

esempio $\{v_2, v_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Non è sistema di generatori

$\forall \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \exists\, k_1, k_2, k_3$ t.c.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = k_2 \\ y_3 = k_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & y_1 \\ 1 & 0 & y_2 \\ 0 & 1 & y_3 \end{array}\right]$$

Def: $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ sono linearmente indipendenti se

$$k_1 \underline{v}_1 + k_2 \underline{v}_2 + \dots + k_n \underline{v}_n = \underline{0}_V \Rightarrow k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0_{\mathbb{K}}$$

(ogni combinazione lineare nulla è banale)

sono linearmente dipendenti se non sono indipendenti

cioè $\exists\, k_1, \dots, k_n$ non tutti NULLI t.c.

$$k_1 v_1 + \dots + k_n v_n = \underline{0}_V$$

esempio $V = \mathbb{R}^3 \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

considero $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sono linearmente dipendenti

$$\underbrace{\underline{v}_1 - \underline{v}_2 - \underline{v}_4}_{} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è combinazione lineare con $k_1 = 1 \quad k_2 = -1 \quad k_3 = 0 \quad k_4 = -1$

considero $\{ v_2, v_3, v_4 \}$

$$k_2 v_2 + k_3 v_3 + k_4 v_4 = \underline{0}_V \overset{?}{\Rightarrow} k_2 = k_3 = k_4 = 0$$

$$\begin{pmatrix} k_4 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

Oss: se $n = 1$ $\{ \underline{v}_1 \}$ è indipendente?

$\underline{v}_1$ è indipendente $\iff \underline{v}_1 \neq \underline{0}_V$

se $\underline{v}_1 \neq \underline{0}_V \Rightarrow k_1 \underline{v}_1 = \underline{0}_V \Rightarrow k_1 = 0_K$

$\Rightarrow$ è indipendente

se $\underline{v}_1 = \underline{0}_V \Rightarrow \underline{v}_1 = \underline{0}_V$ con $k \neq 0_K$

$\Rightarrow$ è dipendente

se $n = 2$ $\{ v_1, v_2 \}$ dipendenti $\iff$ uno è multiplo dell'altro

$\underline{v}_1, \underline{v}_2$ dipendenti $\iff \exists\, k_1, k_2$ NON NULLI

t.c. $k_1 \underline{v}_1 + k_2 \underline{v}_2 = \underline{0}_V$

suppongo $k_1 \neq 0$ $\qquad k_1 \underline{v}_1 = -k_2 \underline{v}_2$

$\Downarrow$

$\exists\, k_1^{-1}$ $\qquad \underbrace{k_1^{-1} k_1}_{=\mathbb{1}_K} \underline{v}_1 = -k_2 \underline{v}_2 k_1^{-1}$

$$\mathbb{1}_K \underline{v}_1 = -k_1^{-1} k_2 v_2$$

$$\underline{v}_1 = k \underline{v}_2$$

$\Rightarrow \underline{v}_1$ è multiplo di $\underline{v}_2$

Prop: Dati $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r \in \mathbb{R}^n$. I vettori $\{v_1 \dots v_r\}$ sono indipendenti $\iff rk(\underbrace{[v_1 | v_2 | \dots | v_r]}_{\text{matrice che ha } \underline{v}_i \text{ come colonne}}) = r$

dim: $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r$ sono indipendenti $\iff$

$k_1 \underline{v}_1 + \dots + k_r v_r = \underline{0} \Rightarrow k_1 = \dots = k_r = 0_{\mathbb{K}}$

cioè il sistema con r incognite $(k_1, \dots, k_r)$ e n equazioni è omogeneo (termine noto $= 0$) e ha una sola soluzione (tutte le incognite $0_{\mathbb{K}}$)

Per Rouché-Capelli un sistema ha unica sol. se il $\underbrace{\text{\# incognite}}_{r}$ è il rango della matrice dei coeff.

Oss: Il rango di una matrice è $\leq \min(\#\text{righe}, \#\text{colon})$

se $[v_1 | \dots | v_r]$ ha rango $r \Rightarrow r \leq n$

Def: Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ vettori in V. Diciamo che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ è BASE di V se:

1. $\{v_1, \dots, v_n\}$ è sist. di generatori
2. " sono linearmente indipendenti

esempio $V = \mathbb{R}^3$ $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\{v_2, v_3, v_4\}$ è sistema di generatori e sono indipendenti

$\Rightarrow \{v_2, v_3, v_4\}$ base di $\mathbb{R}^3$

esempio $V = \mathbb{R}^3$ $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\{\underline{e}_1\}$ $\underline{e}_1$ è indipendente (poiché $\neq \underline{0}$) non genera $\mathbb{R}^3$ $\underline{e}_2 \in \mathbb{R}^3$ ma $\underline{e}_2 \notin \langle \underline{e}_1 \rangle$

- $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ sono indipendenti, ma non generano $\mathbb{R}^3$ $\rightsquigarrow \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{e}_3 \notin \langle \underline{e}_1, \underline{e}_2 \rangle$

- $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ sono indipendenti?

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1} \end{bmatrix} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ e_1 \quad e_2 \quad e_3 \end{array} \to \text{3 pivot, 3 vettori}$$

$\Rightarrow$ indipendenti

generano $\mathbb{R}^3$ $\forall \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = y_1 \underline{e}_1 + y_2 \underline{e}_2 + y_3 \underline{e}_3$

$\Rightarrow \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ è base di $\mathbb{R}^3$

Oss: se un vettore di $\{v_1 \dots v_n\}$ si scrive come combinazione lineare degli altri $\Rightarrow$ sono dipendenti

Oss: se $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è sist. di gen. $\Rightarrow$
$\{v_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w}_1, \dots \underline{w}_n\}$ è sis. di gen.

Teorema: Sia V uno spazio vettoriale e sia $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ una sua base => ogni base di V è formata da $\underline{N}$ vettori

Def.: Sia V uno spazio vettoriale che ammette base di N vettori => la dimensione di V è N scriviamo $\dim V = N$

Se $V = \{\underline{0}_V\}$ diciamo che $\dim V = 0$
$(V = \{\underline{0}_V\} \iff \dim V = 0)$

esempio $M_{a \times b}(\mathbb{R})$ $\quad E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$

E_{ij} è la matrice con tutti 0 tranne quello in pos. $ij = 1$

$\{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1b}, E_{21}, \dots, E_{ab}\}$

$\dim M_{a \times b}(\mathbb{R}) = a \cdot b$

esempio $\mathbb{K}_{\le d}[x]$ polinomi di grado al massimo d

$p(x) = k_d x^d + k_{d-1} x^{d-1} + \dots + k_1 x + k_0$

$\to \forall p(x) \in \mathbb{K}_{\le d}[x]$

$p(x) = \langle x^d, x^{d-1}, \dots, x, 1 \rangle$

$\Rightarrow \{x^d, \dots, x, 1\}$ è sis. di gen.

$k_d x^d + k_{d-1} x^{d-1} + \dots + k_0 = \underline{0}$

$$\Rightarrow k_d = k_{d-1} = \dots = k_0 = 0$$

$\{x^d, \dots, x, 1\}$ $\Rightarrow$ sono indipendenti $\Rightarrow$ è base

$$\Rightarrow \dim \mathbb{K}_{\leq d}[x] = d+1$$

<u>Def</u>: Diciamo che uno spazio vettoriale è finitamente generato se ammette un sistema di generatori finito (altrimenti diciamo che è <u>non</u> finitamente generato)

Se V è finitamente generato $\Rightarrow$ V ha una base e quindi una dimensione

<u>Prop</u>: (completamento della base)

Sia V spazio vettoriale finitamente generato.
Dati r vettori <u>linearmente indipendenti</u>

1. $r \leq \dim V$
2. se $r = \dim V \Rightarrow \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r\}$ è base
3. se $r < \dim V \Rightarrow \exists\ \underline{w}_{r+1}, \dots, \underline{w}_{\dim V}$ t.c. $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r, \underline{w}_{r+1}, \dots \underline{w}_{\dim V}\}$ è base

<u>Prop</u>: (estrazione di base)

Sia V uno spazio vettoriale e $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m\}$ un sist. di gen. $\Rightarrow$

① $m \geq \dim V$
② se $m = \dim V \Rightarrow \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è base
③ se $m > \dim V \Rightarrow \exists$ n vettori scelti in $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m\}$

<u>Prop</u>: se $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ è base di $V \Rightarrow$ ogni vettore $\underline{w} \in V$ si scrive in modo unico come combinazione lineare dei $v_1, v_2, \dots, v_k$ cioè

$\exists!\ k_1, \dots, k_k$ t.c. $k_1\underline{v}_1 + k_2\underline{v}_2 + \dots + k_k\underline{v}_k = \underline{w}$

se $V = \mathbb{R}^n$ la dimostrazione è Rouché-Capelli
$V = \mathbb{R}^n \Rightarrow k = n$ cioè ho i vettori $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ che sono indipendenti $\Rightarrow$

$[\underline{v}_1 | \dots | \underline{v}_n]$ è una matrice $n \times n$ di rango n

$\Rightarrow \forall \underline{w} \in \mathbb{R}^n$ il sistema $[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n] \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \underline{w}$

ha una e una soluzione $\Rightarrow$
$\underline{w} = k_1\underline{v}_1 + \dots + k_n\underline{v}_n$ in modo unico
(i k_i sono le soluzioni del sistema)