Lezione 6

- TAUT CON e ANA CON
- Condizionali
- Le regole per «→» e «↔»
- Contrapposizione e *Modus Tollens*

TAUT CON e ANA CON

Uso delle conseguenze tautologiche

Procedura inferenziale TAUT CON: Sia $C_1,\ldots,C_n \vDash_T D$ una conseguenza tautologica. Se fra le premesse o le conseguenze intermedie di una prova abbiamo $C_1,\ldots,C_n$, allora nella prova possiamo inferire D.

Validità (o correttezza) di una regola. *Una regola è **valida in un contesto** sse le nuove conseguenze che introduce in una prova sono conseguenze logiche (contestuali) delle premesse della prova stessa.*

Teorema. TAUT CON (considerata come regola) è valida in ogni contesto.

TAUT-CON: «macro»regola in Fitch

Per $C_1, \ldots, C_n \vDash_T D$

C_1

$\Downarrow$

C_n

…

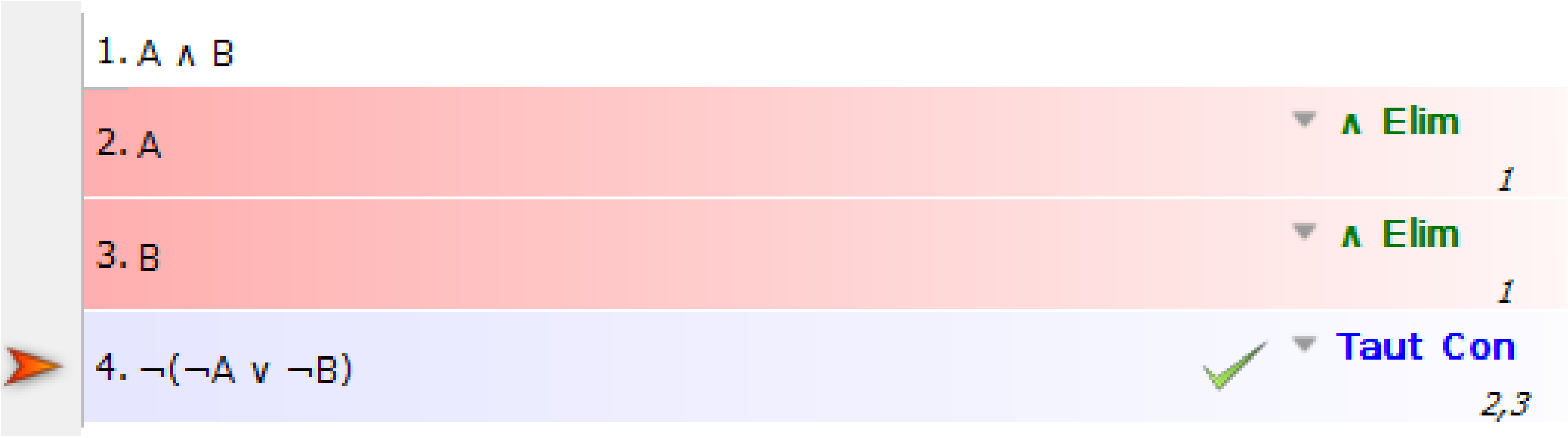
D Taut Con

Per una tautologia $\vDash_T D$

…

D Taut Con

Esempio



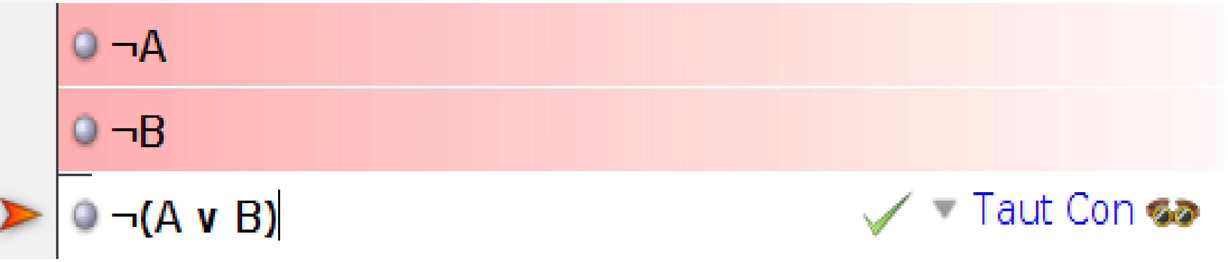
1. $A \wedge B$ è una premessa.
2. A inferito dalla 1 con la regola $\wedge$ Elim.
3. B inferito dalla 1 con la regola $\wedge$ Elim.
4. $\neg(\neg A \vee \neg B)$ inferito con Taut-Con, che applica la conseguenza tautologica $A, B \vDash_T \neg(\neg A \vee \neg B)$.

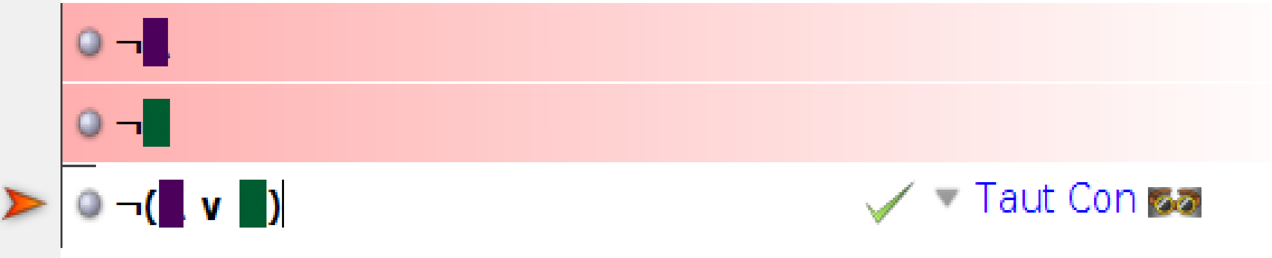
Esempio

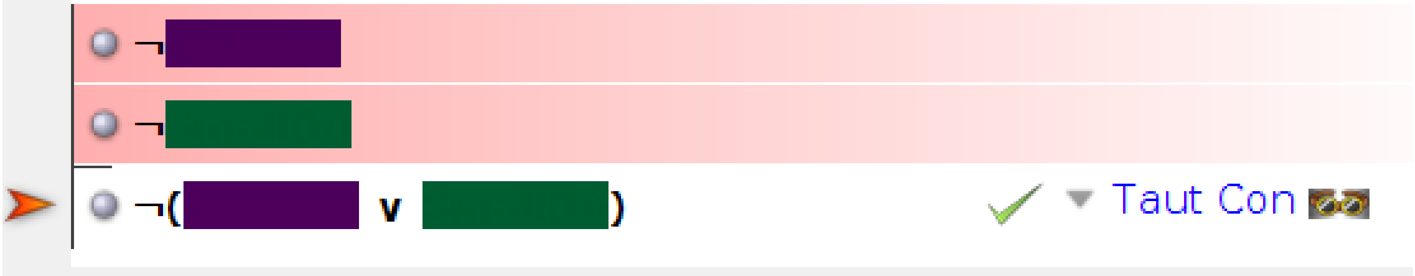
TAUT CON può essere utilizzato per introdurre tautologie in una prova.

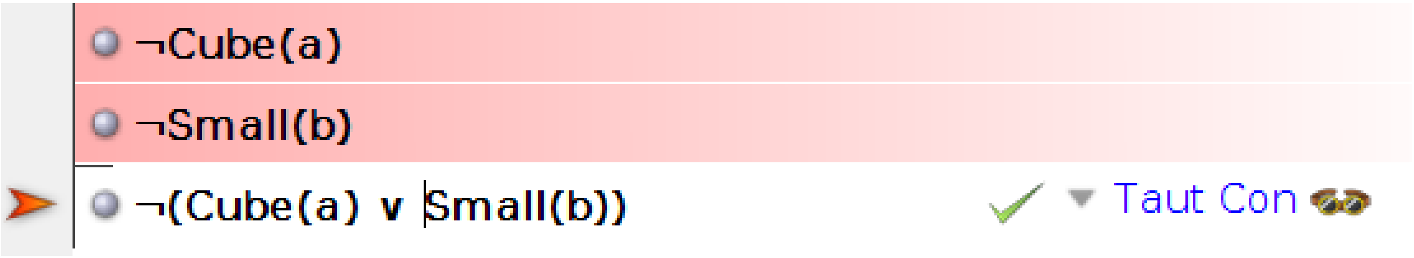
Esempio: $\vDash_{T} P \vee \neg P$

Gli «occhiali» di TAUT CON









Macro Regole

$\neg\vee$ INTRO: $\neg P, \neg Q \models_T \neg(P \vee Q)$

$\neg\vee$ ELIM: $\neg(P \vee Q) \models_T \neg P$,
$\neg(P \vee Q) \models_T \neg Q$

$\neg\wedge$ INTRO: $\neg P \models_T \neg(P \wedge Q)$,
$\neg Q \models_T \neg(P \wedge Q)$

Terzo escluso: $\models_T P \vee \neg P$

Non contraddizione: $\models_T \neg(P \wedge \neg P)$

Risoluzione: $P \vee A,\ \ Q \vee \neg A \models_T P \vee Q$
(casi limite: P *o* Q*, o entrambe potrebbero mancare)*

Uso della conoscenza del contesto (TW)

Procedura inferenziale ANA CON: Sia $C_1,\ldots,C_n \vDash_{\mathrm{TW}} D$ una conseguenza logica nel mondo dei blocchi. Se fra le premesse o le conseguenze intermedie di una prova abbiamo $C_1,\ldots,C_n$, allora nella prova possiamo inferire D. Tale prova è valida solo nel contesto TW.

Validità (o correttezza) di una regola*. Una regola è* ***valida in un contesto*** *sse le nuove conseguenze che introduce in una prova sono conseguenze logiche (contestuali) delle premesse della prova stessa.*

Teorema. ANA CON (considerata come regola) è valida in TW.

ANA-CON: «macro»regola in Fitch

Per $C_1, \ldots, C_n \vDash_{TW} D$

C_1

C_n

…

D   Ana Con

Per una verità logica in TW: $\vDash_{TW} D$

…

D   Ana Con

ESEMPIO

da (i) «***a*** è un cubo **oppure** è grande»

segue «***a*** **non** è un piccolo tetraedro»

Dim. Per (i) ho due casi:

Caso 1. ***a*** è un cubo,

quindi ***non*** è un *tetraedro*

e quindi ***neppure*** un *piccolo tetraedro*.

Caso 2. ***a*** è grande,

quindi ***non*** è *piccolo*

e quindi ***neppure*** un *piccolo tetraedro*. CVD.

Riconoscete la $\neg\wedge$ INTRO ? Per renderla evidente, formalizziamo.

ESEMPIO

Premessa: (i) «***a*** è un cubo **oppure** è grande»

Conseguenza: «***a*** **non** è un piccolo tetraedro»

«***a*** è un cubo **oppure** è grande»= *; connettivo principale: oppure*

= «***a*** è un cubo» $\vee$ «***a*** è grande» =

= Cube(***a***) $\vee$ Large(***a***)

«***a*** **non** è un piccolo tetraedro» = *; connettivo principale: non*

= $\neg$(«***a*** è un piccolo tetraedro») = *; connettivo principale: e*

= $\neg$(«***a*** è piccolo» $\wedge$ «***a*** è un tetraedro») =

= $\neg$(Small(***a***) $\wedge$ Tet(***a***))

ESEMPIO

1. $\mid$ Cube(a) $\vee$ Large(a)
2. $\mid$ $\neg$(Small(a) $\wedge$ Tet(a)) **Rule?**

Osserviamo che la conseguenza è una $\neg\wedge$;

la $\neg\wedge$ Intro ci dice che può essere giustificata in due modi:

$\neg$Small(a) $\vDash_T$ $\neg$(Small(a) $\wedge$ Tet(a))

$\neg$Tet(a) $\vDash_T$ $\neg$(Small(a) $\wedge$ Tet(a))

Nessuno dei due è giustificato, ***da solo***, dalla premessa, che è una disgiunzione; procediamo per casi.

ESEMPIO

1.	Cube(a) ∨ Large(a)	
2.	Cube(a)	
3.	¬Tet(a)	**Rule?**
4.	¬(Small(a) ∧ Tet(a)) ***; ¬∧ Intro***	Taut Con 3
5.	Large(a)	
6.	¬ Small(a)	**Rule?**
7.	¬(Small(a) ∧ Tet(a)) ***; ¬∧ Intro***	Taut Con 6
8.	¬(Small(a) ∧ Tet(a))	∨ Elim 1, 2-4, 5-7

ESEMPIO

1.	$Cube(a) \lor Large(a)$		
2.	$\quad Cube(a)$		
3.	$\quad \neg Tet(a)$	; *in TW: Cube(a) ⊨ ¬Tet(a)*	Ana Con 2
4.	$\quad \neg(Small(a) \land Tet(a))$	; *¬∧Intro*	Taut Con 3
5.	$\quad Large(a)$		
6.	$\quad \neg\ Small(a)$	; *in TW: Large(a) ⊨ ¬Small(a)*	Ana Con 5
7.	$\quad \neg(Small(a) \land Tet(a))$	; *¬∧Intro*	Taut Con 6
8.	$\neg(Small(a) \land Tet(a))$		$\lor$ Elim 1, 2-4, 5-7

Procedure Inferenziali in **Fitch**

- **Fitch** mette a disposizione tre procedure inferenziali di potenza crescente:

- **TAUT CON**: permette di inferire un enunciato che segue dagli enunciati selezionati unicamente in virtù della semantica dei connettivi vero-funzionali.

- **FO CON**: permette di inferire un enunciato che segue dagli enunciati selezionati unicamente in virtù della semantica dei connettivi vero-funzionali, dei quantificatori e del predicato di identità. (Lo vedremo).

- **ANA CON:** permette di inferire un enunciato che segue dagli enunciati selezionati in virtù della semantica dei connettivi vero-funzionali, dei quantificatori, del predicato di identità e dei predicati di TW (interpretati nel contesto di TW).

Esercizi su conseguenza logica in TW e tautologica

Dire se in $\vDash_?$? è **T** (e quindi anche **TW**), **TW ma non T** o **nessuno dei due**, usando le tavole di verità.

- Tet(a), Cube(a) $\vDash_?$ Large(a)
- $\neg$(Tet(a) $\vee$ Cube(a)), Tet(a) $\vee$ Cube(b) $\vDash_?$ Cube(b)
- Tet(a), $\neg$(Tet(a) $\vee$ Cube(a)) $\vDash_?$ Large(a)
- $\neg$(Tet(a) $\wedge$ Cube(a)), Tet(a) $\vee$ Cube(b) $\vDash_?$ Cube(b)
- (Tet(a) $\vee$ Cube(a) $\vee$ Dodec(a)), $\neg$Tet(a) $\vDash_?$ Cube(a) $\vee$ Dodec(a)
- (Tet(a) $\vee$ Cube(a) $\vee$ Dodec(a)), Cube(a) $\vee$ Dodec(a) $\vDash_?$ $\neg$Tet(a)
- $\neg$Tet(a) $\vDash_?$ Cube(a) $\vee$ Dodec(a)
- Cube(a) $\vee$ Dodec(a) $\vDash_?$ $\neg$Tet(a)

Condizionali

L’implicazione materiale

- L’implicazione è un connettivo di centrale importanza: permette di costruire asserzioni condizionali.

  «P implica Q» significa «P solo se Q» o anche «se P allora Q» (vi sono anche altri modi di rendere l’implicazione in linguaggio naturale).

- La tavola di verità che fissiamo nelle prossime slide è quanto di meglio si possa fare per definire l’implicazione in termini puramente vero-funzionali, ma non coglie pienamente il significato della implicazione usata nel linguaggio corrente.

- ESERCIZIO: Costruite tutte le tavole di verità su 2 lettere proposizionali **A** e **B**.
  - Quante sono?
  - Date un nome a ogni tavola (es: $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$, $\neg\mathbf{A}$, $\perp$, …): vedrete che solo una tavola merita di chiamarsi $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$.

L’implicazione materiale

- C’è un’unica tavola di verità che modella vero-funzionalmente l’implicazione.

«Se *n* è pari allora *n*+1 è dispari»: vero per ogni naturale *n*

Dunque:

«Se *3* è pari allora *4* è dispari» deve essere vero: F→F = T

«Se *n* è divisibile per 4 allora *n* è divisibile per 2»: vero per ogni naturale *n*

Dunque:

«Se *6* è divisibile per 4 allora *6* è divisibile per 2» deve essere vero: F→ T = T

Conditional:
P **implica** Q
se P **allora** Q
P **solo se** Q

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

P **se** Q

P	Q	$Q \rightarrow P$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

Biconditional:
P **se e solo se** Q
P **sse** Q
P **iff** Q

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Implicazione materiale e altre implicazioni

- Nel linguaggio naturale vi sono varie espressioni collegate all'implicazione; ne abbiamo già viste alcune, altre sono:

«__ poiché __», «__ affinché __», «__ giacché__»,
«da ___ segue ___», «___ segue da ___», …

- Non sempre il significato è vero-funzionale.

- In alcuni casi il significato è vero-funzionale ma non è quello di $\rightarrow$ definita dalla tavola di verità.

Esempio non vero-funzionale: l'implicazione causale

- «La porta è aperta poiché è entrato Gigi»:
  - «siccome», «poiché», ecc. hanno spesso un ***significato causale***: l'entrata di Gigi *è la causa* del fatto che la porta sia aperta.
- L'implicazione causale non è vero-funzionale: la verità della proposizione composta non dipende solo dalla verità delle componenti.
- Supponiamo ad esempio di sapere che:
  - La porta è aperta: è vero.
  - è entrato Gigi: è vero.
- Non ci basta per dire se la frase composta è vera; infatti:
  - se la porta è stata aperta da Gigi entrando, il fatto che la porta sia aperta è stato causato dall'entrata di Gigi: la frase è vera.
  - Se la porta era già aperta, la causa non è l'entrata di Gigi: la frase è falsa.

Lettura vero-funzionale dell'implicazione

$\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$

P solo se **Q**, se **P** allora **Q**, **P** implica **Q**, da **P** segue **Q**, …

Nella lettura vero-funzionale bisogna dimenticare ogni sfumatura causale presente nella frase in linguaggio naturale.

Si legga:

Ogniqualvolta **P** è vera, anche **Q** è vera.

NB: $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q} \Leftrightarrow_T (\neg \mathbf{P}) \vee \mathbf{Q}$.

Condizione necessaria, vero-funzionale

- Condizione necessaria: P solo se Q.
  - **Significato:** affinché P sia vero è necessario che Q sia vero.

    Es. *Posso prelevare* **solo se** *il bancomat funziona.*

    Per prelevare è necessario che il bancomat funzioni, ma non è sufficiente; ad es., funziona, ma ho dimenticato la carta ...

  - **Tavola di verità:** se P è vero [posso prelevare], anche Q deve essere vero [il bancomat funziona]; se P è falso [non posso prelevare], Q può essere vero o falso; dunque:

    la tavola di verità è quella dell'implicazione materiale $P \rightarrow Q$.

Condizione sufficiente, vero-funzionale

- Condizione sufficiente: P se Q.
  - **Significato:** affinché P sia vero è sufficiente che Q sia vero.

    Es. *Lo studente è ammesso all'orale* **se** *ha superato lo scritto.*

    Rossi ha superato lo scritto; dunque è ammesso (se il prof. non lo ammettesse, Rossi avrebbe tutte le ragioni per protestare). Bianchi ha superato i compitini ma non lo scritto; è comunque ammesso.

  - **Tavola di verità:** se Q è vero [superato lo scritto], anche P è vero [ammesso]; se Q è falso [non superato lo scritto], P può essere vero o falso; dunque:

    la tavola di verità è quella dell'implicazione materiale $Q \rightarrow P$.

Implicazione, condizione necessaria, condizione sufficiente

$$\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$$

Condizione necessaria: **P solo se Q.**

Q vera è necessaria affinché **P** sia vera.

Condizione sufficiente: **se P allora Q.**

P vera è sufficiente affinché **Q** sia vera.

Condizione necessaria e sufficiente ed equivalenza logica

- Condizione necessaria e sufficiente: «P **se e solo se** Q»:
  - **Significato:** «(P **se** Q) **e** (P **solo se** Q)».
  - Nel linguaggio logico: $(P \leftrightarrow Q)$ equivale a $(Q \rightarrow P) \wedge (P \rightarrow Q)$.

- Tavola di verità:
  «P **se e solo se** Q» vero se P, Q sono entrambi veri o entrambi falsi.

  Teorema:
  - $P \Leftrightarrow_C Q$ se e solo se $\vDash_C (P \leftrightarrow Q)$.
  - $P \Leftrightarrow_T Q$ se e solo se $\vDash_T (P \leftrightarrow Q)$.

  (vedi il Teorema di Deduzione nella prossima slide).

Implicazione e conseguenza logica

Teorema di deduzione:

$$P_1, \ldots, P_n \models Q$$

se e solo se

$$\models (P_1 \land \ldots \land P_n) \to Q$$

- Dunque l'implicazione «cattura» la conseguenza (tauto)logica:

Q è conseguenza (tauto)logica di $P_1, \ldots, P_n,$ se e solo se
$(P_1 \land \ldots \land P_n) \to Q$ è (tauto)logicamente vera.

Esprimere conoscenze con $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ e usarle

- Servono per «esprimere» conoscenze o principi di ragionamento sotto forma di proposizioni. Ad esempio:

De Morgan:

$$\vDash_T \neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$$

Contrapposizione:

$$\vDash_T (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$$

Conoscenze in TW:

1. $\vDash_{TW}$ Between(m, n_1, n_2) $\leftrightarrow$ Between(m, n_2, n_1)
2. $\vDash_{TW}$ Larger(m_1, m_2) $\wedge$ Larger(m_2, m_3) $\rightarrow$ Larger(m_1, m_3)
3. $\vDash_{TW}$ Larger(m, n) $\leftrightarrow$ Smaller(n, m)

Le regole per «→» e «↔»

Le regole per $\rightarrow$ (e per $\leftrightarrow$)

- Regole di Introduzione:
  - Servono per **confezionare** conoscenza (un enunciato) in forma implicativa.
  - Sfruttano il **Teorema di Deduzione**, nella forma seguente:

$$P \vDash_T Q \text{ se e solo se } \vDash_T P \rightarrow Q$$

- Regole di Eliminazione:
  - Servono per **utilizzare** conoscenza (un enunciato) in forma implicativa.
  - Sfruttano il principio (conseguenza tautologica) detto

  Modus Ponens:

$$P, P \rightarrow Q \vDash_T Q$$

Regole di eliminazione

Modus Ponens:

$P,\ P \rightarrow Q\ \vDash_T Q$

$P,\ P \leftrightarrow Q\ \vDash_T\ Q$
$P,\ Q \leftrightarrow P\ \vDash_T\ Q$

Conditional Elimination ($\rightarrow$ Elim):

$$\begin{array}{l|l} & P \rightarrow Q \\ & \vdots \\ & P \\ & \vdots \\ \triangleright & Q \end{array}$$

Biconditional Elimination ($\leftrightarrow$ Elim):

$$\begin{array}{l|l} & P \leftrightarrow Q \text{ (or } Q \leftrightarrow P) \\ & \vdots \\ & P \\ & \vdots \\ \triangleright & Q \end{array}$$

Esempio

In pizzeria. Ugo dice a Lea: «Io arrivo fra poco; ordina pure anche per me, prendo l'insalatona se c'è, altrimenti prendo una margherita.»

Premessa: ciò che ha detto Ugo.

Conseguenza: Lea ordina per Ugo un'insalatona o una margherita.

- Il ragionamento è banale, ci serve solo per evidenziare l'uso della implicazione per esprimere conoscenze.

Informalmente:

Premesse: ***esprimono ciò che ha detto Ugo:***

(i) $Ce(insalatona) \rightarrow Ordina(insalatona)$
(ii) $\neg Ce(insalatona) \rightarrow Ordina(margherita)$

Conseguenza: $Ordina(insalatona) \vee Ordina(margherita)$

Dim. Per casi a partire dal terzo escluso.

Caso 1. Ce(insalatona):
per $\rightarrow$Elim da 1., (i) : Ordina(insalatona);
quindi $Ordina(insalatona) \vee Ordina(margherita)$

Caso 2. $\neg$Ce(insalatona):
per $\rightarrow$Elim da 2., (ii) : Ordina(margherita);
quindi $Ordina(insalatona) \vee Ordina(margherita)$

Formalmente:

1.	Ce(insalatona) → Ordina(insalatona)		
2.	¬Ce(insalatona) → Ordina(margherita)		
3.	Ce(insalatona) ∨ ¬Ce(insalatona)	Taut Con	
4.	Ce(insalatona)		
5.	Ordina(insalatona)	→ Elim	4,1
6.	Ordina(insalatona) ∨ Ordina(margherita)	∨ Intro	5
7.	¬Ce(insalatona)		
8.	Ordina(margherita)	→ Elim	7,2
9.	Ordina(insalatona) ∨ Ordina(margherita)	∨ Intro	8
10.	Ordina(insalatona) ∨ Ordina(margherita)	∨ Elim	7-9,4-6,3

Formalmente:

| 1. $Ce(insalatona) \rightarrow Ordina(insalatona)$
| 2. $\neg Ce(insalatona) \rightarrow Ordina(margherita)$

|

|

|
|

|

|
|

| 10. $Ordina(insalatona) \vee Ordina(margherita)$ **Rule?**

Formalmente:

| 1. $Ce(insalatona) \rightarrow Ordina(insalatona)$
| 2. $\neg Ce(insalatona) \rightarrow Ordina(margherita)$

| 3. $Ce(insalatona) \vee \neg Ce(insalatona)$ *; terzo escluso* Taut Con

|

|
|

|

|
|

| 10. $Ordina(insalatona) \vee Ordina(margherita)$ **Rule?**

Formalmente:

| 1. Ce(insalatona) $\rightarrow$ Ordina(insalatona)
| 2. $\neg$Ce(insalatona) $\rightarrow$ Ordina(margherita)

| 3. Ce(insalatona) $\vee$ $\neg$ Ce(insalatona) ; *terzo escluso* Taut Con

| | 4. Ce(insalatona)

| -------

| |

| | 6. Ordina(insalatona) $\vee$ Ordina(margherita) **Rule?**

| | 7. $\neg$ Ce(insalatona)

| -------

| |

| | 9. Ordina(insalatona) $\vee$ Ordina(margherita) **Rule?**

| 10. Ordina(insalatona) $\vee$ Ordina(margherita) $\vee$Elim 3, 4-6, 7-9

Formalmente:

| 1. Ce(insalatona) $\rightarrow$ Ordina(insalatona)
| 2. $\neg$Ce(insalatona) $\rightarrow$ Ordina(margherita)

| 3. Ce(insalatona) $\vee$ $\neg$ Ce(insalatona) *; terzo escluso* Taut Con

| | 4. Ce(insalatona)

| -------

| | 5. Ordina(insalatona) $\rightarrow$Elim 1,4
| | 6. Ordina(insalatona) $\vee$ Ordina(margherita) **Rule?**

| | 7. $\neg$ Ce(insalatona)

| -------

| | 8.
| | 9. Ordina(insalatona) $\vee$ Ordina(margherita) **Rule?**

| 10. Ordina(insalatona) $\vee$ Ordina(margherita) $\vee$Elim 3, 4-6, 7-9

Formalmente:

| 1. $Ce(insalatona) \rightarrow Ordina(insalatona)$
| 2. $\neg Ce(insalatona) \rightarrow Ordina(margherita)$

| 3. $Ce(insalatona) \vee \neg Ce(insalatona)$; *terzo escluso* Taut Con

| | 4. $Ce(insalatona)$

| -------

| | 5. $Ordina(insalatona)$ $\rightarrow$Elim 1,4
| | 6. $Ordina(insalatona) \vee Ordina(margherita)$ $\vee$Intro 5

| | 7. $\neg Ce(insalatona)$

| -------

| | 8.
| | 9. $Ordina(insalatona) \vee Ordina(margherita)$ **Rule?**

| 10. $Ordina(insalatona) \vee Ordina(margherita)$ $\vee$Elim 3, 4-6, 7-9

Formalmente:

| 1. Ce(insalatona) $\rightarrow$ Ordina(insalatona)
| 2. $\neg$Ce(insalatona) $\rightarrow$ Ordina(margherita)

| 3. Ce(insalatona) $\vee$ $\neg$ Ce(insalatona) *; terzo escluso* Taut Con

| | 4. Ce(insalatona)

| -------

| | 5. Ordina(insalatona) $\rightarrow$Elim 1,4
| | 6. Ordina(insalatona) $\vee$ Ordina(margherita) $\vee$Intro 5

| | 7. $\neg$ Ce(insalatona)

| -------

| | 8. Ordina(margherita) $\rightarrow$Elim 2, 7
| | 9. Ordina(insalatona) $\vee$ Ordina(margherita) $\vee$Intro 8

| 10. Ordina(insalatona) $\vee$ Ordina(margherita) $\vee$Elim 3, 4-6, 7-9

Conditional Introduction (→ Intro):

$$\begin{array}{l|l} & \begin{array}{|l} P \\ \hline \vdots \\ Q \end{array} \\ \triangleright & P \to Q \end{array}$$

Per dimostrare P → Q
assumo P
e dimostro Q

Regole di introduzione

Biconditional Introduction (↔ Intro):

$$\begin{array}{l|l} & \begin{array}{|l} P \\ \hline \vdots \\ Q \end{array} \\ & \begin{array}{|l} Q \\ \hline \vdots \\ P \end{array} \\ \triangleright & P \leftrightarrow Q \end{array}$$

Direzione P → Q
assumo P, dim. Q

Direzione Q → P
assumo Q, dim. P

Teorema di Deduzione:
$P \vDash_T Q$ sse $\vDash_T P \to Q$

Esempio

Teorema 1. **Se** *m può essere solo un cubo, un tetraedro o un dodecaedro,* **allora** *se non è un tetraedro vuol dire che è un cubo o un dodecaedro.*

Esaminiamo l'enunciato del teorema: è una implicazione*:*

(m può essere solo un cubo, un tetraedro **o** un dodecaedro) $\rightarrow$
(**se** non è un tetraedro **vuol dire che** è un cubo o un dodecaedro)

= (Cube(m) $\vee$ Tet(m) $\vee$ Dodec(m)) $\rightarrow$
(m **non** è un tetraedro $\rightarrow$ m è un cubo **o** un dodecaedro)

= (Cube(m) $\vee$ Tet(m) $\vee$ Dodec(m)) $\rightarrow$ ($\neg$ Tet(m) $\rightarrow$ (Cube(m) $\vee$ Dodec(m)))

Esempio

Nella prova seguente useremo TAUT CON per giustificare un’applicazione della seguente forma del principio di **risoluzione**:

$$P \lor Q \lor R, \neg Q \vDash_{T} P \lor R$$

Provare per esercizio (senza usare TAUT CON):

1.	$P \lor Q \lor R$
2.	$\neg Q$
3.	$P \lor R$

Formalmente:

1.

2.

3.

4.

5. $(Cube(m) \vee Tet(m) \vee Dodec(m)) \rightarrow$
$(\neg Tet(m) \rightarrow (Cube(m) \vee Dodec(m)))$ **Rule?**

Formalmente:

1. $\text{Cube}(m) \lor \text{Tet}(m) \lor \text{Dodec}(m)$
2.
3.
4. $\neg\text{Tet}(m) \to (\text{Cube}(m) \lor \text{Dodec}(m))$ **Rule?**
5. $(\text{Cube}(m) \lor \text{Tet}(m) \lor \text{Dodec}(m)) \to (\neg\text{Tet}(m) \to (\text{Cube}(m) \lor \text{Dodec}(m)))$ **$\to$Intro 1-4**

Formalmente:

1.	$Cube(m) \lor Tet(m) \lor Dodec(m)$	
2.	$\neg Tet(m)$	
3.	$Cube(m) \lor Dodec(m)$	**Rule?**
4.	$\neg Tet(m) \to (Cube(m) \lor Dodec(m))$	**→Intro 2-3**
5.	$(Cube(m) \lor Tet(m) \lor Dodec(m)) \to (\neg Tet(m) \to (Cube(m) \lor Dodec(m)))$	**→Intro 1-4**

Formalmente:

1.	$\mathrm{Cube}(m) \vee \mathrm{Tet}(m) \vee \mathrm{Dodec}(m)$	
2.	$\neg \mathrm{Tet}(m)$	
3.	$\mathrm{Cube}(m) \vee \mathrm{Dodec}(m)$	; **Risoluzione** **Taut Con 1,2**
4.	$\neg \mathrm{Tet}(m) \rightarrow (\mathrm{Cube}(m) \vee \mathrm{Dodec}(m))$	**$\rightarrow$Intro 2-3**
5.	$(\mathrm{Cube}(m) \vee \mathrm{Tet}(m) \vee \mathrm{Dodec}(m)) \rightarrow (\neg \mathrm{Tet}(m) \rightarrow (\mathrm{Cube}(m) \vee \mathrm{Dodec}(m)))$	**$\rightarrow$Intro 1-4**

Questa è la prova formale completa (con uso di TAUT CON) del Teorema 1

Informalmente:

Teorema 1. **Se** *m può essere solo un cubo, un tetraedro o un dodecaedro,* **allora** *se non è un tetraedro vuol dire che è un cubo o un dodecaedro.*

Dim.

Assumiamo: (1) *m è un cubo, un tetraedro* ***o*** *un dodecaedro;*

dimostriamo che non è un tetraedro ***solo se*** è un cubo o un dodecaedro.

Allo scopo assumiamo: m non è un tetraedro;

ma se non è un tetraedro, per (1) deve essere un cubo o un dodecaedro. CVD.

Riconoscete la risoluzione?

Esempio

Teorema 2. **Se** m può essere solo un cubo, un tetraedro o un dodecaedro, **allora** non è un tetraedro ***se e solo se*** è un cubo o un dodecaedro.

Rafforza il Teorema 1 con un «se e solo se» al posto del «solo se»:

$(\mathrm{Cube}(m) \lor \mathrm{Tet}(m) \lor \mathrm{Dodec}(m)) \to (\neg\mathrm{Tet}(m) \leftrightarrow (\mathrm{Cube}(m) \lor \mathrm{Dodec}(m)))$

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13. $(\text{Cube}(m) \lor \text{Tet}(m) \lor \text{Dodec}(m)) \rightarrow$
$(\neg\text{Tet}(m) \leftrightarrow (\text{Cube}(m) \lor \text{Dodec}(m)))$

Rule?

1. $\text{Cube}(m) \lor \text{Tet}(m) \lor \text{Dodec}(m)$

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12. $\neg\text{Tet}(m) \leftrightarrow (\text{Cube}(m) \lor \text{Dodec}(m))$ **Rule?**

13. $(\text{Cube}(m) \lor \text{Tet}(m) \lor \text{Dodec}(m)) \rightarrow$
$(\neg\text{Tet}(m) \leftrightarrow (\text{Cube}(m) \lor \text{Dodec}(m)))$ **→Intro 1-12**

1. $\text{Cube}(m) \lor \text{Tet}(m) \lor \text{Dodec}(m)$
2. $\neg\text{Tet}(m)$
3. $\text{Cube}(m) \lor \text{Dodec}(m)$ **Rule?**
4. $\text{Cube}(m) \lor \text{Dodec}(m)$
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11. $\neg\text{Tet}(m)$ **Rule?**
12. $\neg\text{Tet}(m) \leftrightarrow (\text{Cube}(m) \lor \text{Dodec}(m))$ **$\leftrightarrow$Intro 2-3, 4-11**
13. $(\text{Cube}(m) \lor \text{Tet}(m) \lor \text{Dodec}(m)) \rightarrow (\neg\text{Tet}(m) \leftrightarrow (\text{Cube}(m) \lor \text{Dodec}(m)))$ **$\rightarrow$Intro 1-12**

1. $Cube(m) \lor Tet(m) \lor Dodec(m)$

2. $\neg Tet(m)$

3. $Cube(m) \lor Dodec(m)$; **Dimostrato prima**

4. $Cube(m) \lor Dodec(m)$

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11. $\neg Tet(m)$ **Rule?**

12. $\neg Tet(m) \leftrightarrow (Cube(m) \lor Dodec(m))$ **$\leftrightarrow$Intro 2-3, 4-11**

13. $(Cube(m) \lor Tet(m) \lor Dodec(m)) \rightarrow (\neg Tet(m) \leftrightarrow (Cube(m) \lor Dodec(m)))$ **$\rightarrow$Intro 1-12**

1.	$\mathrm{Cube}(m) \vee \mathrm{Tet}(m) \vee \mathrm{Dodec}(m)$	
2.	$\neg\mathrm{Tet}(m)$	
3.	$\mathrm{Cube}(m) \vee \mathrm{Dodec}(m)$	**; Dimostrato prima**
4.	$\mathrm{Cube}(m) \vee \mathrm{Dodec}(m)$	
5.	$\mathrm{Tet}(m)$	
6.		
7.		
8.		
9.		
10.	$\perp$	**Rule?**
11.	$\neg\mathrm{Tet}(m)$	**$\neg$Intro 5-10**
12.	$\neg\mathrm{Tet}(m) \leftrightarrow (\mathrm{Cube}(m) \vee \mathrm{Dodec}(m))$	**$\leftrightarrow$Intro 2-3, 4-11**
13.	$(\mathrm{Cube}(m) \vee \mathrm{Tet}(m) \vee \mathrm{Dodec}(m)) \rightarrow (\neg\mathrm{Tet}(m) \leftrightarrow (\mathrm{Cube}(m) \vee \mathrm{Dodec}(m)))$	**$\rightarrow$Intro 1-12**

1.	$Cube(m) \lor Tet(m) \lor Dodec(m)$		
2.	$\neg Tet(m)$		
3.	$Cube(m) \lor Dodec(m)$	; Dimostrato prima	
4.	$Cube(m) \lor Dodec(m)$		
5.	$Tet(m)$		
6.	$Cube(m)$		
7.	$\perp$		**Rule?**
8.	$Dodec(m)$		
9.	$\perp$		**Rule?**
10.	$\perp$		**$\lor$Elim 4, 6-7, 8-9**
11.	$\neg Tet(m)$		**$\neg$Intro 5-10**
12.	$\neg Tet(m) \leftrightarrow (Cube(m) \lor Dodec(m))$		**$\leftrightarrow$Intro 2-3, 4-11**
13.	$(Cube(m) \lor Tet(m) \lor Dodec(m)) \to (\neg Tet(m) \leftrightarrow (Cube(m) \lor Dodec(m)))$		**$\to$Intro 1-12**

1.	$Cube(m) \lor Tet(m) \lor Dodec(m)$	
2.	$\neg Tet(m)$	
3.	$Cube(m) \lor Dodec(m)$	**; Dimostrato prima**
4.	$Cube(m) \lor Dodec(m)$	
5.	$Tet(m)$	
6.	$Cube(m)$	
7.	$\perp$	**Ana Con 5,6**
8.	$Dodec(m)$	
9.	$\perp$	**Ana Con 5,8**
10.	$\perp$	**$\lor$Elim 4, 6-7, 8-9**
11.	$\neg Tet(m)$	**$\neg$Intro 5-10**
12.	$\neg Tet(m) \leftrightarrow (Cube(m) \lor Dodec(m))$	**$\leftrightarrow$Intro 2-3, 4-11**
13.	$(Cube(m) \lor Tet(m) \lor Dodec(m)) \to (\neg Tet(m) \leftrightarrow (Cube(m) \lor Dodec(m)))$	**$\to$Intro 1-12**

Contrapposizione e *Modus Tollens*

Conseguenze logiche notevoli

- **Contrapposizione:**

$$\models_{T} (P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$$

- ***Modus Tollens:***

$$\neg Q, \quad P \to Q \models_{T} \neg P$$

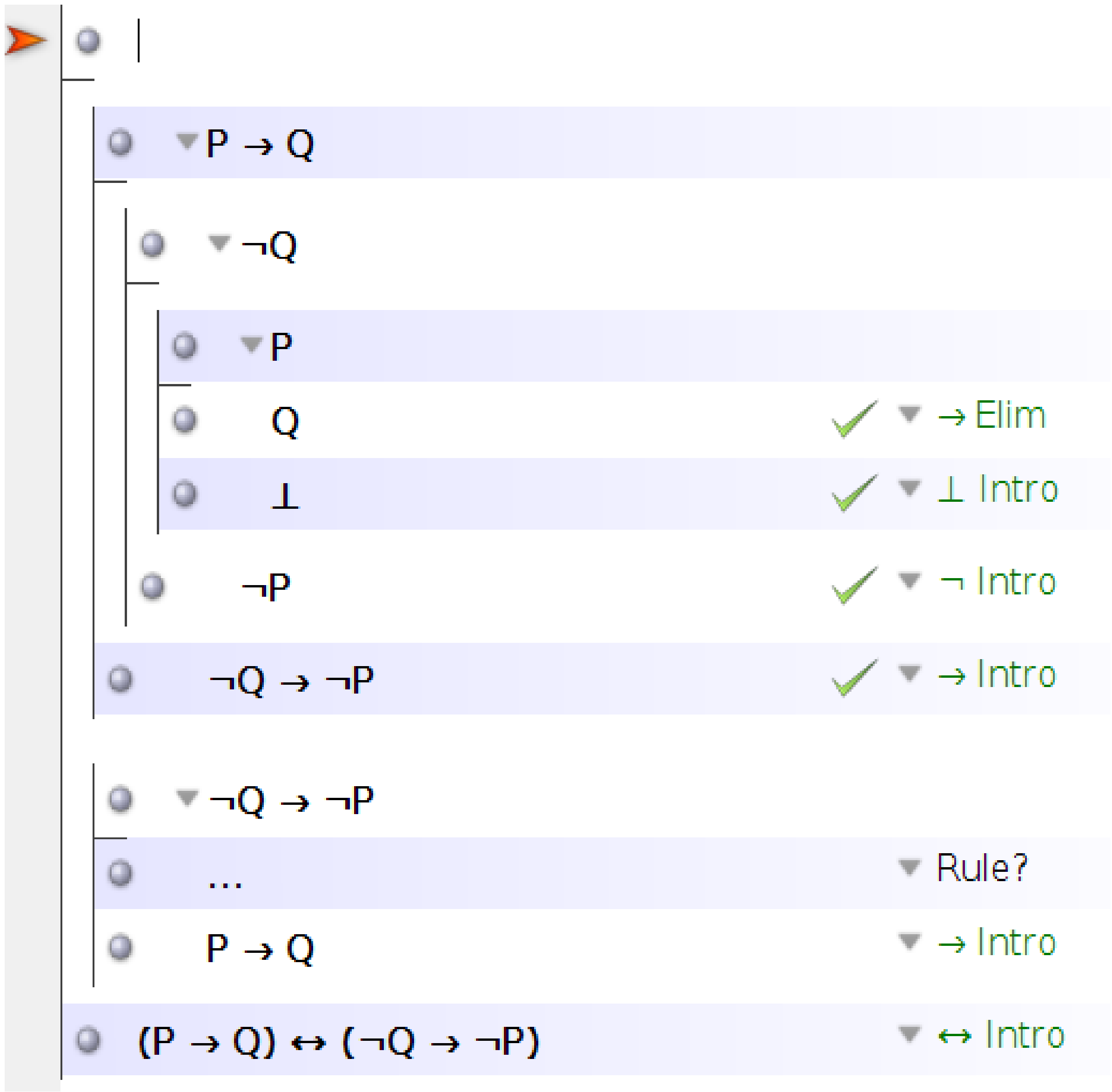
- ***Modus Tollens*** esteso a $\leftrightarrow$:

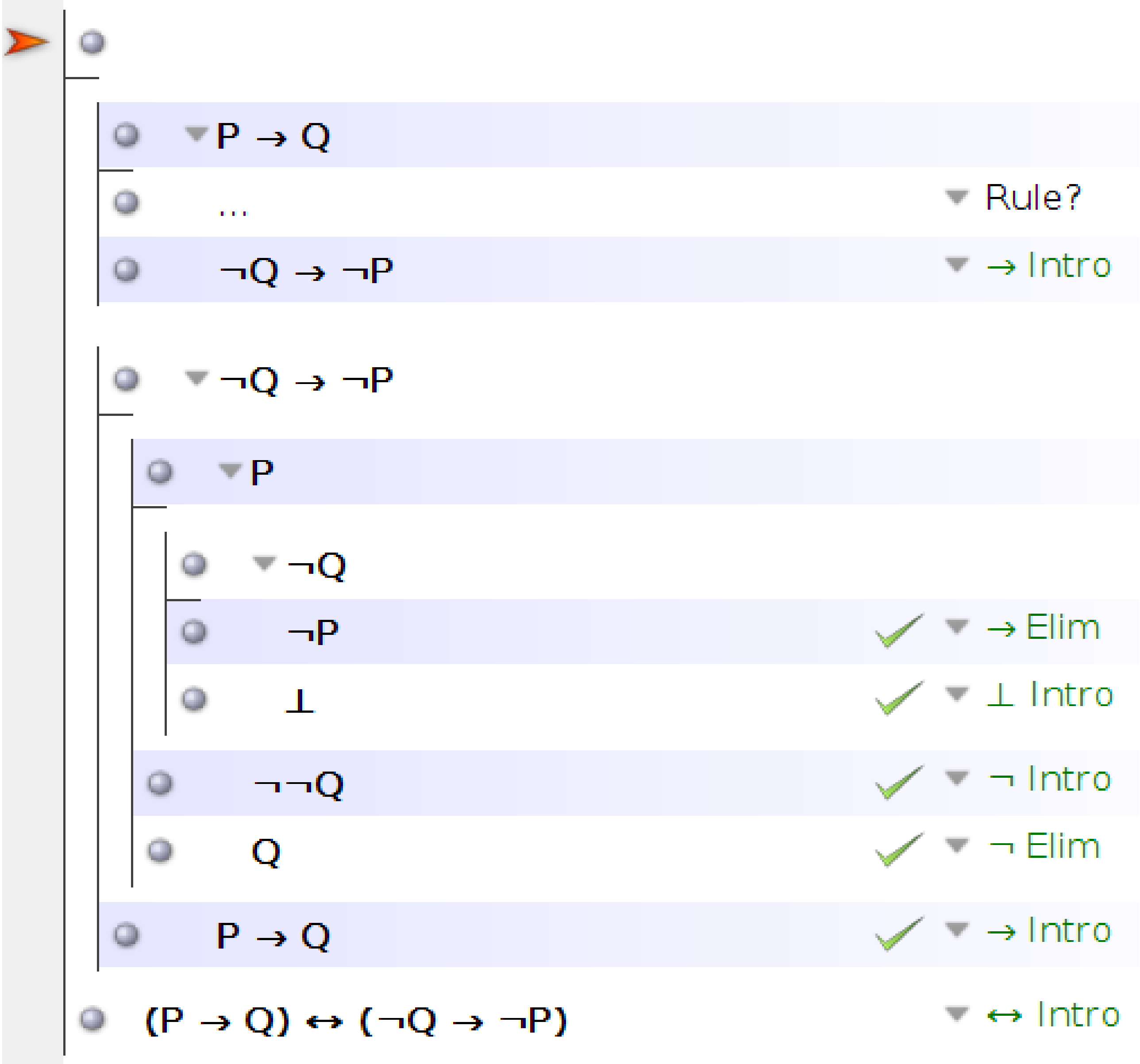
$$\neg Q, \quad P \leftrightarrow Q \models_{T} \neg P$$
$$\neg Q, \quad Q \leftrightarrow P \models_{T} \neg P$$

Modus Tollens

$P \rightarrow Q$	
$\neg Q$	
P	
Q	$\rightarrow$ Elim
$\perp$	$\perp$ Intro
$\neg P$	$\neg$ Intro

Contrapposizione





Esempio (*modus tollens*)

Premessa: se a è un tetraedro, allora a è grande

Conclusione: se a è più piccolo di b, allora non è un tetraedro.

Dim.

Assumo che *a sia più piccolo di* b; devo dimostrare che a non è un tetraedro.

Essendo *a più piccolo di b, a non può essere grande*.

Dal fatto che *a non sia grande* deduco che *a non è un tetraedro,* per **modus tollens** dalla premessa. CVD.

ESERCIZIO: formalizzare in Fitch usando Ana Con ***solo*** per introdurre la riga (corrispondente a una verità logica in TW):
Smaller(a,b) $\rightarrow$ $\neg$Large(a) ***Ana Con***

Esempio (*modus tollens*)

1.	Tet(a) → Large(a)	
2.	Smaller(a, b)	
3.	Smaller(a, b) → ¬Large(a)	Ana Con
4.	¬Large(a)	→ Elim 3,2
5.	¬Tet(a) ; Modus Tollens	Taut Con 4,1
6.	Smaller(a, b) → ¬Tet(a)	→ Intro 2-5

Esempio (contrapposizione)

Teorema. ***Se*** n^2 è pari, ***allora*** n è pari.

Dim. Dimostro la contrapposta: $\neg$(n pari) $\rightarrow$ $\neg$(n^2 pari).

Assumo: $\neg$(n pari);

quindi per m opportuno: $n = 2m+1$;

elevando al quadrato ambo i membri: $n^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m)+1$;

quindi $\neg$(n^2 pari)

Per $\rightarrow$ Intro: $\neg$(n pari) $\rightarrow$ $\neg$(n^2 pari).

Per contrapposizione n^2 pari $\rightarrow$ n pari. CVD

Contrapposizione

La contrapposta si usa spesso perché spesso è più semplice dimostrarla. In un testo di matematica/informatica/… troverete qualcosa come:

Teorema. ***Se*** n^2 è pari, ***allora*** n è pari.

Dim. Assumiamo che n non sia pari. Quindi, per m opportuno, $n = 2m+1$. Elevando al quadrato ambo i membri si ha $n^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$, che mostra che n^2 non è pari. CVD.

Osservate che nessuno vi avvisa dell'uso della contrapposta e si lascia sottintesa l'applicazione finale di ($\rightarrow$ Intro).

Riferimenti al libro di testo

- Chapter 7, tutto.
- Chapter 8, tutto.