ESERCITAZIONI

Una relazione tra due insiemi A e B è un sottoinsieme di $A \times B$

Proprietà delle relazioni:

RIFLESSIVA : $\forall x \in X \quad x R x$

SIMMETRICA : $\forall x, y \in X \quad x R y \Rightarrow y R x$

TRANSITIVA : $\forall x, y, z \in X$ se $x R y$ e $y R z \Rightarrow x R z$

RELAZIONE DI EQUIVALENZA	RELAZIONE D'ORDINE
RIFLESSIVA	RIFLESSIVA
SIMMETRICA	ANTISIMMETRICA
TRANSITIVA	TRANSITIVA

ESERCIZIO 1

$X = \{a, b, c, d, e\}$. Sia $R \subseteq X \times X$

$R: \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (a,c), (c,d), (a,d)\}$

Stabilire se R è RIFLESSIVA, SIMMETRICA, ANTISIMMETRICA, TRANSITIVA

$\downarrow$

R	a	b	c	d	e
a	1	0	1	1	0
b	0	1	0	0	0
c	0	0	1	1	0
d	0	0	0	1	0
e	0	0	0	0	1

Riflessiva perché

Simmetria NO

$a R c$, ma $c \not R a$

Antisimmetrica sì

↳ non devono esistere due 1 in posti simmetrici rispetto alla diagonale

Transitività: aRc e cRd e aRd

sì

ESERCIZIO 2

$X = \{a, b, c, d, e\} \qquad R \subseteq X \times X$

$R = \{(a,a), (a,c), (a,d), (b,b), (b,e), (c,a), (c,c), (d,a), (d,d), (e,b), (e,e)\}$

	a	b	c	d	e
a	1	0	1	1	0
b	0	1	0	0	1
c	1	0	1	0	0
d	1	0	0	1	0
e	0	1	0	0	1

Riflessiva: sì

Simmetrica: sì

Antisimmetrica: no

Transitiva: no

$(c,a) \quad (a,d)$

ma non (c,d)

ESERCIZIO 3

$X = \{x, y, z, w\}$ $\quad R \subseteq X \times X$

$R = \{(x,x), (y,y), (w,w), (x,w), (y,z), (z,w)\}$

- Stabilire se R è simmetrica e/o antisim.
- " " si possono aggiungere

	x	y	z	w
x	1	0	0	1
y	0	1	1	0^1
z	0	0	0^1	1
w	0	0	0	1

Simmetrica? NO

Antisimmetrica? SÌ

Riflessiva se aggiungo (z,z)

Transitiva? NO $(y,z), (z,w)$ non (y,w)

$R \cup \{(z,z), (y,w)\} \to$ d'ORDINE? SÌ

	x	y	z	w
x	1	1	1	1
y	1	1	1	1
z	1	1	1	1
w	1	1	1	1

Cosa aggiungere x una relazione di equivalenza

$R = \{(x,x), (y,y), (w,w), (x,w), (y,z), (z,w),$
$(z,z), (w,x), (z,y), (w,z), (x,z), (z,x),$
$(y,w), (w,y), (x,y), (y,x)\}$

ESERCIZIO 4

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

R relazione su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, definita così:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \quad aRb \iff 3a+b \text{ é pari}$$

1. Determinare i $b \in \mathbb{N}$ t.c. $7Rb$

2. Stabilire se R é riflessiva, transitiva, di equivalenza

1) $7Rb$? $\iff$ $3 \cdot 7 + b = 2h$

cioé $21 + b = 2h$

$\iff$ dispari

$b = 2h - 20 - 1$

$= 2(h-10) - 1$

2) aRa? $\forall a \in \mathbb{N}$

$3a + a$ é pari? <u>sí</u> $4a$

Transitive? <u>sí</u>

aRb e $bRc \overset{?}{\Rightarrow} aRc$

$\left.\begin{array}{l} 3a+b = 2h \\ 3b+c = 2k \end{array}\right\}$ $3a+c$?

$3a = 2h - b$

$c = 2k - 3b$

$2h - b + 2k - 3b = 2(h+k) - 4b$ <u>pari</u>

$= 2[h + k - 2b]$

È di equiv. se è simmetrica

$aRb \Rightarrow bRa$

$3a+b = 2h$? $3b+a =$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$b = 2h-3a$

$3(2h-3a)+a$

$6h-9a+a =$

$6h-8a = \underline{\text{pari}}$

la relazione è simmetrica e quindi anche di equivalenza

ESERCIZIO 5

$\mathbb{Z}$ insieme dei numeri interi relativi

$X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$

R definita così:

$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow ab = cd$

$(a,b)R(c,d)$ $(c,d)R(a,b)$

$ab = cd$ $cd = ab$

$(a,b)R(c,d)$ e $(c,d)R(e,g)$

$ab = cd$ e $cd = eg$

$\Rightarrow ab = eg$

X R di equivalenza

$[x] = \{ y \in X \mid x R y \}$

$x \in X$ classe di equivalenza

$(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$[(a,b)] = \{ (c,d) \mid cd = ab \}$

$[(1,p)]$ p primo

$\{ (a,b) \mid a \cdot b = p \}$

$\{ (1,p), (p,1), (-1,-p), (-p,-1) \}$

$[(a,b)]$

$[(0,0)] = \{ (a,0), (0,b) \}$

$a, b \in \mathbb{Z}$

$[(1,6)] = \{ (1,6), (6,1), (-6,-1), (-1,-6),$
$(2,3), (3,2), (-3,-2), (-2,-3) \}$

ESERCIZIO 6

$X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $R \subseteq X \times X$

$(a,b) R (c,d) \iff a \geq c$ e $b \leq d$

Relazione d'ordine?

$Y = \{(-2,3), (3,5), (6,2)\} \subseteq X$

↳ ammette min e/o estr. inf?

1) Riflessiva? $(a,b) R (a,b)$?

$a \geq a$ e $b \leq b$ SÌ

2) Antisimmetrica?

$(a,b) R (c,d)$ e $(c,d) R (a,b)$

$\Rightarrow (a,b) = (c,d)$

$a \geq c$ e $b \leq d$ | $c \geq a$ e $d \leq b$

$a = c$ $\quad$ $b = d$ SÌ

3) Transitiva?

$(a,b) R (c,d)$ e $(c,d) R (e,f)$

$a \geq c$ $\quad$ $c \geq e$ $\Rightarrow$ $a \geq e$

$b \leq d$ $\quad$ $d \leq f$ $\Rightarrow$ $b \leq f$

$\Downarrow$

$(a,b) R (e,f)$

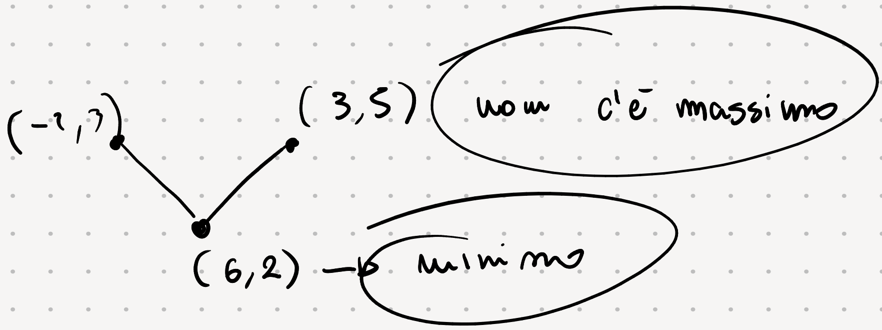
$\Rightarrow R$ é d'ordine

$Y = \{(-2,3), (3,5), (6,2)\}$

$(6,2) \, R \, (-2,3) \qquad 6 \geq -2 \text{ e } 2 \leq 3$

$(6,2) \, R \, (3,5) \qquad 6 \geq 3 \text{ e } 2 \leq 5$

$(3,5) \, \cancel{R} \, (-2,3)$
?



$Y \subseteq X$ con rel d'ordine $\leq$

$a \in Y$ è minimo se $a \leq b \ \forall b \in Y$

ESERCIZIO 7

$S = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 3 \leq x \leq 6, -2 \leq y \leq 2\}$

Sia R la relazione

$(x_1, y_1) \, R \, (x_2, y_2) \iff$
$\begin{cases} x_1 < x_2 \quad \text{o} \\ x_1 = x_2 \text{ e } y_1 \geq y_2 \end{cases}$

Verificare che R è una relazione d'ordine totale su S

$(x_1, y_1) R (x_1, y_1)$ Riflessiva sì

$x_1 = x_1$ e $y_1 \geq y_2$

Antisimmetrica sì

$(x_1, y_1) R (x_2, y_2)$ e $(x_2, y_2) R (x_1, y_1)$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$

no

$x_1 < x_2$ o | no no | $x_2 < x_1$ o

$x_1 = x_2$ e $y_1 \geq y_2$ | | $x_2 = x_1$ e $y_2 \geq y_1$

sì

$x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$

Transitiva? compito

$S = \{ (3,-2), (3,-1), (3,0), (3,1), (3,2),$
$(4,-2)$
$(5,-2)$
$(6,-2), \dots \}$

minimo

$(3,2) \overset{R}{\leq} (3,1) \leq (3,0) \leq (3,-1) \leq (3,-2)$
$\leq (4,2) \leq \dots \leq (4,-2) \leq (5,2) \leq \dots \leq (6,2)$

massimo

$\bullet\ (6,-2)$
$\vdots$
$\bullet\ (3,1)$
$\bullet\ (3,2)$