

Branch-and-bound

Giovanni Righini

Ricerca Operativa



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI MILANO

Ottimizzazione discreta

I problemi di ottimizzazione discreta in generale sono molto difficili da risolvere perché:

- il numero di soluzioni cresce esponenzialmente con numero di variabili;
- gli strumenti del calcolo differenziale, come le derivate (utili per caratterizzare i punti di ottimo) non sono disponibili.

A causa della **esplosione combinatoria** del numero di soluzioni, **l'enumerazione esplicita** non è praticabile.

Tuttavia esistono tecniche di **enumerazione implicita**:

- branch-and-bound,
- programmazione dinamica.

Branch-and-bound

In un algoritmo branch-and-bound

- un problema difficile \mathcal{P} viene ricorsivamente scomposto in più sotto-problemi $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$ più facili.

La scomposizione (**branching**, cioè ramificazione) deve rispettare la seguente condizione per assicurare la correttezza dell'algoritmo:

$$\mathcal{X}(\mathcal{P}) = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{X}(\mathcal{F}_i).$$

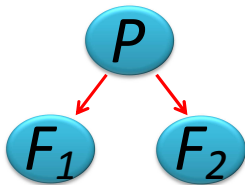
- la soluzione ottima di \mathcal{P} è determinata confrontando le soluzioni ottime dei sotto-problemi originati da esso.

In caso di minimizzazione:

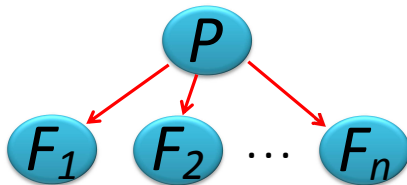
$$z^*(\mathcal{P}) = \min_{i=1, \dots, n} \{z^*(\mathcal{F}_i)\}.$$

Il branch-and-bound tree

La scomposizione ricorsiva di problemi in sotto-problemi genera un'arborecenza (detta anche *decision tree* o *search tree*), in cui la radice corrisponde al problema originale \mathcal{P} ed ogni altro nodo corrisponde ad un sotto-problema.



Branching binario



Branching n -ario

Branching

A scopo di efficienza, la scomposizione solitamente implica una partizione di $\mathcal{X}(\mathcal{P})$ in sottinsiemi disgiunti di modo che nessuna soluzione debba essere (implicitamente) considerata più di una volta:

$$\mathcal{X}(\mathcal{F}_i) \cap \mathcal{X}(\mathcal{F}_j) = \emptyset \quad \forall i \neq j = 1, \dots, n.$$

Ci sono due modi principali di fare branching:

- fissaggio di variabili;
- inserzione di vincoli.

Ogni sotto-problema è una **restrizione** del suo predecessore ed un **rilassamento** dei suoi successori.

Branching binario

Regole di branching comuni sono le seguenti.

- **Branching su una variabile binaria.**

Una variabile binaria x viene selezionata.

Due sotto-problemi vengono generati fissando $x = 0$ in uno e $x = 1$ nell'altro.

- **Branching su un vincolo intero.**

Vengono scelti un vettore di variabili intere (x_1, x_2, \dots, x_n) , un opportuno vettore di coefficienti interi (a_1, a_2, \dots, a_n) e un opportuno termine noto intero k .

Vengono generati due sotto-problemi inserendo i vincoli $ax \leq k$ in uno e $ax \geq k + 1$ nell'altro.

Branching n -ario

Regole di branching n -ario sono le seguenti.

- **Branching su una variabile intera.**

Viene selezionata una variabile intera $x \in [1, \dots, n]$.

Vengono generati n sotto-problemi fissando $x = 1, x = 2, \dots, x = n$.

- **Branching su n variabili binarie.**

Viene scelto un vettore di n variabili binarie (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Vengono generati $n + 1$ sotto-problemi fissando alcune variabili come segue (una riga per ogni sotto-problema):

$$x_1 = 1$$

$$x_1 = 0, x_2 = 1$$

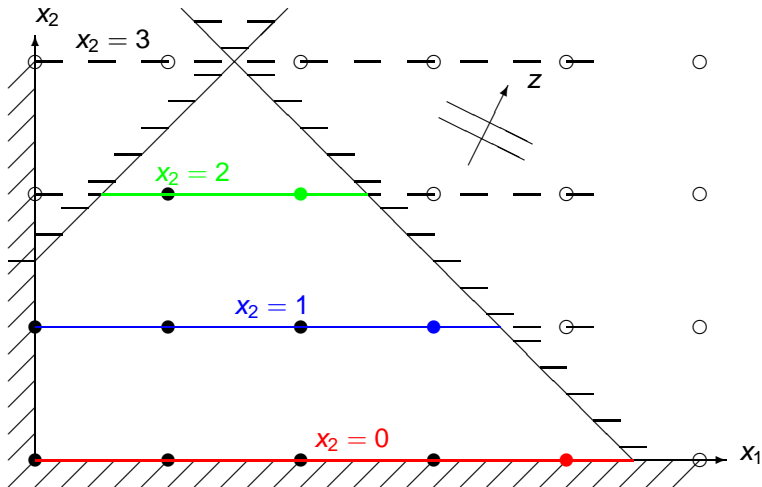
$$x_1 = x_2 = 0, x_3 = 1$$

...

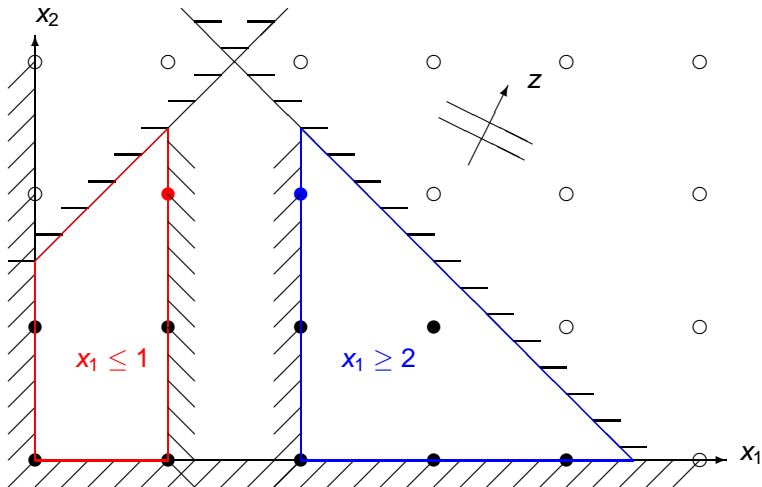
$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0, x_n = 1$$

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

Branching tramite fissaggio di variabili



Branching tramite inserzione di vincoli



Foglie dell'albero

Solitamente un sotto-problema è “risolto” dal branching, cioè è sostituito da altri sotto-problemi.

Tuttavia questa procedura ricorsiva termina quando il sotto-problema corrente...

- ...è inammissibile;
- ...è risolto all'ottimo;
- ...può essere rtrascurato.

Tutti e tre i casi possono essere scoperti risolvendo un **rilassamento** del sotto-problema corrente.

Rilassamenti

Dato un problema \mathcal{P} ,

$$\begin{aligned} &\text{minimize } z_{\mathcal{P}}(x) \\ &\text{s.t. } x \in \mathcal{X}_{\mathcal{P}} \end{aligned}$$

un problema \mathcal{R}

$$\begin{aligned} &\text{minimize } z_{\mathcal{R}}(x) \\ &\text{s.t. } x \in \mathcal{X}_{\mathcal{R}} \end{aligned}$$

è un **rilassamento** di \mathcal{P} se e solo se valgono le due condizioni:

- $\mathcal{X}_{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{X}_{\mathcal{R}}$
- $z_{\mathcal{R}}(x) \leq z_{\mathcal{P}}(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}_{\mathcal{P}}.$

Il valore ottimo del rilassamento non è mai peggiore del valore ottimo del problema originale:

$$z_{\mathcal{R}}^* \leq z_{\mathcal{P}}^*.$$

Rilassamenti

Come conseguenza della definizione di rilassamento, valgono questi corollari.

Corollario 1. Se \mathcal{R} è inammissibile, anche \mathcal{P} è inammissibile.

Corollario 2. Se x^* è ottima per \mathcal{R} ed è ammissibile per \mathcal{P} e $z_{\mathcal{R}}(x) = z_{\mathcal{P}}(x)$, allora x^* è ottima anche per \mathcal{P} .

Corollario 3. Se $z_{\mathcal{R}}^* \geq \bar{z}$, allora $z_{\mathcal{P}}^* \geq \bar{z}$.

Il Corollario 3 è sfruttato nell'operazione di **bounding**.

Bounding

Il bounding consiste nell'associare un **bound duale** ad ogni sotto-problema \mathcal{F} .

Poiché

$$z_{\mathcal{R}}^* \leq z_{\mathcal{P}}^*$$

il valore ottimo di $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ (un rilassamento di \mathcal{F}) fornisce un bound duale ogni sotto-problema \mathcal{F} :

$$z_{\mathcal{R}(\mathcal{F})}^* \leq z_{\mathcal{F}}^*.$$

Il bound duale è confrontato con un **bound primale** che corrisponde al valore $z_{\mathcal{P}}(\bar{x})$ di una soluzione ammissibile $\bar{x} \in \mathcal{X}(\mathcal{P})$.

Se il bound duale di \mathcal{F} risulta essere non-migliore del bound primale, allora \mathcal{F} può essere scartato.

$$\text{If } z_{\mathcal{R}(\mathcal{F})}^* \geq z_{\mathcal{P}}(\bar{x}) \text{ then Fathom } \mathcal{F}.$$

Bounding

La correttezza del bounding è data dalla concatenazione di due disuguaglianze.

- La prima garantisce che nessuna soluzione può esistere in $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ con un valore migliore di $z_{\mathcal{R}(\mathcal{F})}^*$, poiché

$$z_{\mathcal{F}}^* \geq z_{\mathcal{R}(\mathcal{F})}^*.$$

- La seconda è $z_{\mathcal{R}(\mathcal{F})}^* \geq z_{\mathcal{P}}(\bar{x})$.

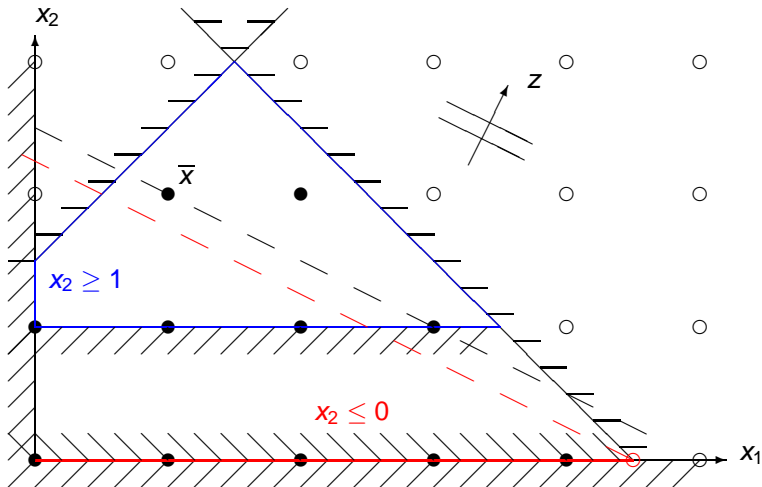
Concatenandole si conclude che

$$z_{\mathcal{F}}^* \geq z_{\mathcal{R}(\mathcal{F})}^* \geq z_{\mathcal{P}}(\bar{x})$$

che significa che risolvere il problema \mathcal{F} all'ottimo è inutile, perché esso non può fornire alcuna soluzione migliore di quella già nota, \bar{x} .

Scartare sotto-problemi in un algoritmo branch-and-bound è cruciale per risparmiare tempo e memoria.

Esempio



Strategia di visita dell'albero

Ogni volta che due o più sotto-problemi vengono generati, essi vengono appesi ad una lista di **nodi aperti**, cioè di sotto-problemi da risolvere.

Questo è necessario perché l'algoritmo viene eseguito su una macchina seriale e i sotto-problemi non possono essere esaminati in parallelo.

La politica seguita per decidere quali nodi visitare per primi è detta **search strategy**.

Il *sotto-problema corrente* è quello che viene risolto ad un generico istante durante l'esecuzione dell'algoritmo.

Strategia di visita dell'albero

Si possono usare vari criteri per gestire la lista dei nodi aperti:

- FIFO: breadth-first search
- LIFO: depth-first search
- Lista ordinata: best-first search

La Best-first search è solitamente basata sul valore del bound duale: vengono esplorati prima i nodi più promettenti.

Per mantenere la lista ordinata è utile utilizzare uno *heap*.