Lezione 5

- Le regole per ragionare con «e» e «o»
- L’ assurdo e le sue regole.
- Regole per «non». Dimostrazione per assurdo

Le regole per ragionare con «e» e «o»

Introduzione ed eliminazione di ∧: si applicano le conseguenze tautologiche fondamentali:

∧ Intro) $P_1, .., P_n \vDash_T P_1 \wedge ... \wedge P_n$

Conjunction Introduction (∧ Intro):

$$
\begin{array}{l|l}
 & P_1 \\
 & \Downarrow \\
 & P_n \\
 & \vdots \\
\triangleright & P_1 \wedge \ldots \wedge P_n
\end{array}
$$

∧ Elim) $P_1 \wedge ... \wedge P_n \vDash_T P_i$

Conjunction Elimination (∧ Elim):

$$
\begin{array}{l|l}
 & P_1 \wedge \ldots \wedge P_i \wedge \ldots \wedge P_n \\
 & \vdots \\
\triangleright & P_i
\end{array}
$$

Regola di introduzione di ∨

∨ Intro) $P_i \vDash_T \; P_1 \vee \ldots \vee P_n$

Disjunction Introduction (∨ Intro):

$$
\begin{array}{l|l}
 & P_i \\
 & \vdots \\
\triangleright & P_1 \vee \ldots \vee P_i \vee \ldots \vee P_n
\end{array}
$$

E la Regola di eliminazione di «o»?

Da «P o Q» cosa posso inferire ?

- *Si procede per casi: cosa posso inferire nel caso P e cosa nel caso Q; se in entrambi i casi posso inferire C, allora C segue da «P o Q».*

Esempio

- Prima di vedere l'eliminazione di $\vee$ vediamo come operano le regole $\wedge$ Intro, $\wedge$ Elim, $\vee$ Intro.

  Dimostriamo $P \wedge Q \vDash_T Q \wedge (P \vee \neg R)$.

- Al primo passo scriviamo il nostro «goal»:

$P \wedge Q$	è la premessa
$Q \wedge (P \vee \neg R)$	è la conclusione, il nostro goal

Esempio

- La regola ci dice che per dimostrare $Q \land (P \lor \neg R)$ dobbiamo dimostrare separatamente Q e $(P \lor \neg R)$.

1.	$P \land Q$	
2.	Q	Rule?
3.	$P \lor \neg R$	Rule?
4.	$Q \land (P \lor \neg R)$	$\land$ Intro 2, 3

Osserviamo che smontando $P \land Q$ in P, Q con $\land$ Elim, otteniamo Q direttamente; per quanto riguarda $P \lor \neg R$, la possiamo ottenere per $\lor$ Intro da P.

Esempio

- Quindi la prova è

1. $P \wedge Q$	
2. Q	$\wedge$ Elim 1
3. P	$\wedge$ Elim 1
4. $P \vee \neg R$	$\vee$ Intro 3
5. $Q \wedge (P \vee \neg R)$	$\wedge$ Intro 2, 4

Esempio introduttivo alla eliminazione di «o»

Il ragionamento per casi

Ada sa che (nella pausa pranzo):

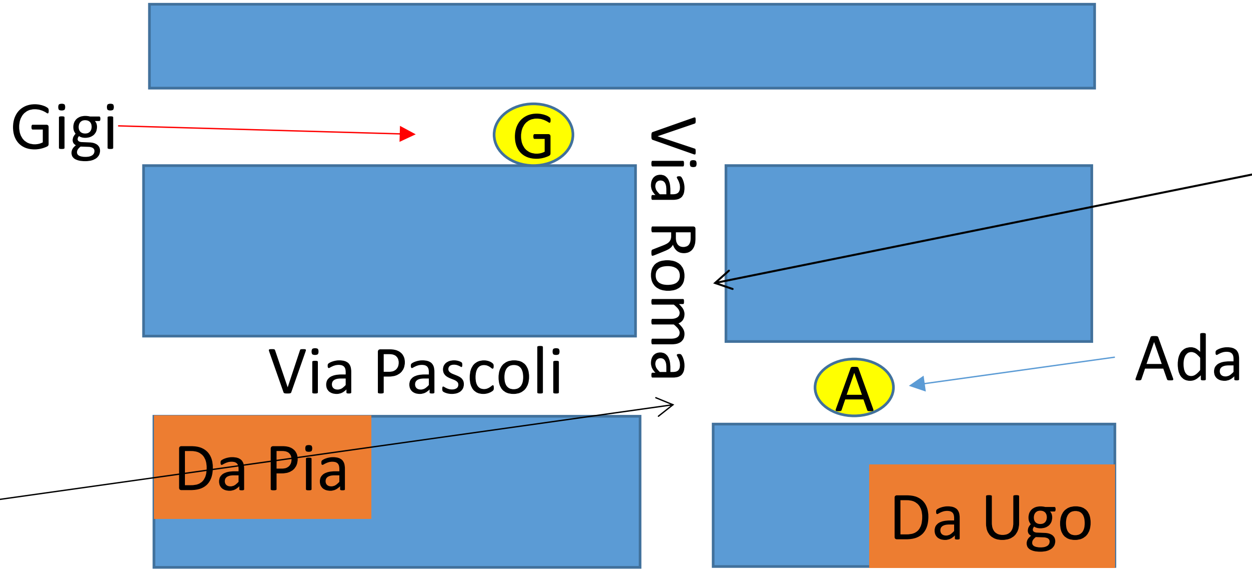
- Gigi va al bar *'Da Ugo'* **o** Gigi va alla pizzeria *'Da Pia'.*
- Gigi è uscito da 3 minuti.

Ada vuole incontrare Gigi per strada.

La situazione è illustrata nella mappa.

Il ragionamento di Ada

Ci vogliono almeno 4 minuti per percorrere Via Roma



Ada può raggiungere l’incrocio in meno di 1 minuto

Premessa: «*Gigi va ‘Da Ugo’* **o** *Gigi va ‘Da Pia’*»

Caso 1: Gigi va Da Ugo;

posso incontrare Gigi all’incrocio Via Roma-Via Pascoli

Caso 2: *Gigi va Da Pia;*

posso incontrare Gigi all’incrocio Via Roma-Via Pascoli

Conclusione: *posso incontrare Gigi all’angolo Via Roma-Via Pascoli.*

Regola di eliminazione di ∨

Le sottoprove

ci vogliono tutte

Modella:

Ragionamento per casi

Disjunction Elimination (∨ Elim):

$$
\begin{array}{l|l}
 & P_1 \lor \ldots \lor P_n \\
 & \vdots \\
 & \quad \begin{array}{|l} P_1 \\ \hline \vdots \\ S \end{array} \\
 & \quad \Downarrow \\
 & \quad \begin{array}{|l} P_n \\ \hline \vdots \\ S \end{array} \\
 & \vdots \\
\triangleright & S
\end{array}
$$

Il ragionamento di Ada in Fitch

Fitch non conosce la situazione

1. Daugo(gigi) ∨ Dapia(gigi)

    2. Daugo(gigi)

    3. Incontro(gigi) — Rule?

    4. Dapia(gigi)

    5. Incontro(gigi) — Rule?

6. Incontro(gigi) — ∨ Elim 1, 2-3, 4-5

Assunzioni e Regole di Scopo

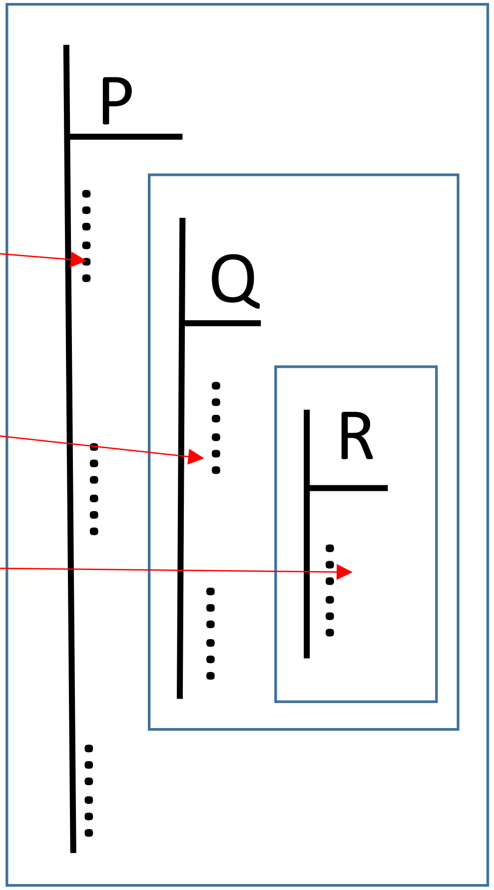
- Le prove per casi sono il primo esempio di dimostrazioni con assunzioni:
  - si assumono proprietà non note (non premesse o conseguenze intermedie) che vengono usate come premesse di sotto-prove.
  - una assunzione può essere usata solo nella sotto-prova di cui è premessa.
- L'uso di sotto-prove con assunzioni è presente in importanti regole di ragionamento.

Regole di scopo

posso usare P

posso usare P,Q

posso usare P,Q,R



Vi ricorda qualcosa dei linguaggi di programmazione?

Ragionamento per casi. Un esempio dalla matematica

Esistono a, b irrazionali tali che a^b sia razionale?

- Risposta: SI.

Dim. Sappiamo che $\sqrt{2}$ è irrazionale;

($\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ razionale) **o** ($\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ irrazionale) [terzo escluso];
procediamo per casi:

Caso 1. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ razionale; in tal caso la soluzione è

$$a = b = \sqrt{2}.$$

Caso 2. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ irrazionale; in tal caso la soluzione è

$$a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \ , \ b = \sqrt{2} \ ;$$

infatti $a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} * \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$, che è razionale.

Ragionamento per casi. Un esempio nel mondo dei blocchi

Premessa: «***a*** è un tetraedro <u>**o**</u> un grande cubo».

Conseguenza: «***a*** non è un dodecaedro; <u>**inoltre**</u> è grande o è un tetraedro».

La premessa è della forma $\mathbf{P_1 \vee P_2}$, con:

$\mathbf{P_1}$ = «***a*** è un tetraedro» = **Tet(a)**

$\mathbf{P_2}$ = «(***a*** è) grande (**e**) cubo» = $\mathbf{(Large(a) \wedge Cube(a))}$

La conseguenza è della forma $\mathbf{Q_1 \wedge Q_2}$, con

$\mathbf{Q_1}$ = «***a*** **non** è un dodecaedro» = $\mathbf{\neg Dodec(a)}$

$\mathbf{Q_2}$ = «(***a***) è grande **o** è un tetraedro» = $\mathbf{(Large(a) \vee Tet(a))}$

Un esempio nel mondo dei blocchi

Premessa: Tet(a) $\vee$ (Large(a) $\wedge$ Cube(a))

Conseguenza: $\neg$Dodec(a) $\wedge$ (Large(a) $\vee$ Tet(a))

Dim. La formulazione logica ci aiuta. La conclusione è una $\wedge$ e la regola $\wedge$Intro ci dice che dobbiamo dimostrare:

Subgoal **(i)** $\neg$Dodec(a) e Subgoal **(ii)** Large(a) $\vee$ Tet(a)

Dimostriamo **(i).** Abbiamo due casi:

caso Tet(a); otteniamo $\neg$Dodec(a).

caso Large(a) $\wedge$ Cube(a), da cui Cube(a), da cui $\neg$Dodec(a).

CVD. *(in base al principio di dimostrazione per casi)*

ESERCIZIO: dimostrate (ii) informalmente, sempre procedendo per casi.

Formalmente, in **Fitch**. Osservare il procedimento

1. $Tet(a) \lor (Large(a) \land Cube(a))$
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9. $\neg Dodec(a) \land (Large(a) \lor Tet(a))$ **Rule?**

Formalmente, in **Fitch**. Osservare il procedimento

1. $\text{Tet}(a) \vee (\text{Large}(a) \wedge \text{Cube}(a))$
2.
3.
4.
5.
6.
7. $\neg\text{Dodec}(a)$ **Rule?**
8. $\text{Large}(a) \vee \text{Tet}(a)$ **Rule?**
9. $\neg\text{Dodec}(a) \wedge (\text{Large}(a) \vee \text{Tet}(a))$ $\wedge$ Intro 7, 8

Formalmente, in **Fitch**. Osservare il procedimento

1.	$Tet(a) \lor (Large(a) \land Cube(a))$	
2.	$\quad Tet(a)$	
3.	$\quad \neg Dodec(a)$	**Rule?**
4.	$\quad Large(a) \land Cube(a)$	
5.		
6.	$\quad \neg Dodec(a)$	**Rule?**
7.	$\neg Dodec(a)$	$\lor$ Elim 1, 2-3, 4-6
8.	$Large(a) \lor Tet(a)$	**Rule?**
9.	$\neg Dodec(a) \land (Large(a) \lor Tet(a))$	$\land$ Intro 7, 8

Formalmente, in **Fitch**. Osservare il procedimento

1.	$Tet(a) \lor (Large(a) \land Cube(a))$	
2.	$\quad Tet(a)$	
3.	$\quad \neg Dodec(a)$; *in TW: $Tet(a) \vDash \neg Dodec(a)$*	Ana Con 2
4.	$\quad Large(a) \land Cube(a)$	
5.		
6.	$\quad \neg Dodec(a)$	**Rule?**
7.	$\neg Dodec(a)$	$\lor$ Elim 1, 2-3, 4-6
8.	$Large(a) \lor Tet(a)$	**Rule?**
9.	$\neg Dodec(a) \land (Large(a) \lor Tet(a))$	$\land$ Intro 7, 8

Formalmente, in **Fitch**. Osservare il procedimento

1.	$Tet(a) \lor (Large(a) \land Cube(a))$	
2.	$\quad$ $Tet(a)$	
3.	$\quad$ $\neg Dodec(a)$ *; in TW: Tet(a) ⊨ ¬Dodec(a)*	Ana Con 2
4.	$\quad$ $Large(a) \land Cube(a)$	
5.	$\quad$ $Cube(a)$	$\land$ Elim 4
6.	$\quad$ $\neg Dodec(a)$ *; in TW: Cube(a) ⊨ ¬Dodec(a)*	Ana Con 5
7.	$\neg Dodec(a)$	$\lor$ Elim 1, 2-3, 4-6
8.	$Large(a) \lor Tet(a)$	**Rule?**
9.	$\neg Dodec(a) \land (Large(a) \lor Tet(a))$	$\land$ Intro 7, 8

Formalmente, in **Fitch**. Osservare il procedimento

1.	$Tet(a) \lor (Large(a) \land Cube(a))$	
2.	$\quad Tet(a)$	
3.	$\quad \neg Dodec(a)$; *in TW: $Tet(a) \vDash \neg Dodec(a)$*	Ana Con 2
4.	$\quad Large(a) \land Cube(a)$	
5.	$\quad Cube(a)$	$\land$ Elim 4
6.	$\quad \neg Dodec(a)$; *in TW: $Cube(a) \vDash \neg Dodec(a)$*	Ana Con 5
7.	$\neg Dodec(a)$	$\lor$ Elim 1, 2-3, 4-6
8.	$Large(a) \lor Tet(a)$	**Rule?**
9.	$\neg Dodec(a) \land (Large(a) \lor Tet(a))$	$\land$ Intro 7, 8

Sottoprova terminata, passiamo all'altra ancora per casi

Formalmente, in **Fitch**. Osservare il procedimento

1. $Tet(a) \lor (Large(a) \land Cube(a))$

   ....

7. $\neg Dodec(a)$ — $\lor$ Elim 1, 2-3, 4-6
8.
9.
10.
11.
12.
13. $Large(a) \lor Tet(a)$ — **Rule?**
14. $\neg Dodec(a) \land (Large(a) \lor Tet(a))$ — $\land$ Intro 7, 13

Formalmente, in **Fitch**. Osservare il procedimento

1.	$Tet(a) \vee (Large(a) \wedge Cube(a))$	
	………	
7.	$\neg Dodec(a)$	$\vee$ Elim 1, 2-3, 4-6
8.	$Tet(a)$	
9.	$Large(a) \vee Tet(a)$	**Rule?**
10.	$Large(a) \wedge Cube(a)$	
11.		
12.	$Large(a) \vee Tet(a)$	**Rule?**
13.	$Large(a) \vee Tet(a)$	$\vee$ Elim 1, 8-9, 10-12
14.	$\neg Dodec(a) \wedge (Large(a) \vee Tet(a))$	$\wedge$ Intro 7, 13

Formalmente, in **Fitch**. Osservare il procedimento

1.	$Tet(a) \lor (Large(a) \land Cube(a))$	
	………	
7.	$\neg Dodec(a)$	$\lor$ Elim 1, 2-3, 4-6
8.	$\quad$ $Tet(a)$	
9.	$\quad$ $Large(a) \lor Tet(a)$	$\lor$ Intro 8
10.	$\quad$ $Large(a) \land Cube(a)$	
11.	$\quad$ $Large(a)$	$\land$ Elim 10
12.	$\quad$ $Large(a) \lor Tet(a)$	$\lor$ Intro 11
13.	$Large(a) \lor Tet(a)$	$\lor$ Elim 1, 8-9, 10-12
14.	$\neg Dodec(a) \land (Large(a) \lor Tet(a))$	$\land$ Intro 7, 13

L’assurdo e le sue regole

L’assurdo e le sue regole

- L’assurdo è una proprietà logicamente impossibile, ovvero falsa in ogni circostanza del contesto.
  - Un assurdo ‘proposizionale’ è la contraddizione **P** $\land$ $\neg$**P**: falsa in tutte le interpretazioni booleane (sono due: **P** vero e **P** falso).
  - Seguendo il libro di testo usiamo l’assurdo in termini dipendenti dal contesto. Ad esempio:
    - Un assurdo logico nel contesto dei blocchi è

      Tet(a) $\land$ **Cube(a)**

      in nessun mondo **a** può essere al contempo un tetraedro e un cubo.
- Il simbolo logico usato per l’assurdo è $\perp$.
- L’assurdo ha le sue regole: **(**$\perp$ **Intro)** e **(**$\perp$ **Elim)**.

Regole di introduzione e di eliminazione di ⊥

⊥ Introduction (⊥ Intro):

$$\begin{array}{l|l} & P \\ & \vdots \\ & \neg P \\ & \vdots \\ \triangleright & \bot \end{array}$$

Da **P**, **¬P**
posso derivare l'assurdo

NB. La dimostrazione per assurdo è un'altra cosa, come vedremo

⊥ Elimination (⊥ Elim):

$$\begin{array}{l|l} & \bot \\ & \vdots \\ \triangleright & P \end{array}$$

Dall'assurdo deriva
qualsiasi cosa

(⊥ Intro): contraddizione

(⊥ Elim): *ex falso quodlibet sequitur*

ESEMPIO

Premesse: 1. $P \vee Q$

2. $\neg Q$

Conseguenza: P

Dim. informale: procedo per casi:

Caso P: ho direttamente la conseguenza P

Caso Q: questo caso è assurdo, per 2; inferisco la conseguenza P

Per il principio di dimostrazione per casi ho P. CVD.

Formalmente in Fitch la dimostrazione diventa

1.	$P \vee Q$		
2.	$\neg Q$		
3.	$\quad P$	*; sottoprova caso P*	
4.	$\quad P$		Reit 3
5.	$\quad Q$	*; sottoprova caso Q*	
6.	$\quad \perp$		$\perp$ Intro 2, 5
7.	$\quad P$		$\perp$ Elim 6
8.	P		$\vee$ Elim 1, 3-4, 5-7

Attenzione a non «saltare fuori dalle sotto-prove» senza rispettare le regole.
Esempio. Da $P \vee Q$ e $\neg Q$ segue che domani piove. Ecco una dimostrazione (dov'è l'errore?):

1.	$P \vee Q$	
2.	$\neg Q$	
3.	$\quad Q$	
4.	$\quad \perp$	$\perp$ Intro 2,3
6.	DomaniPiove	$\perp$ Elim 4

Esempio: ragionamento per casi e regole per l’assurdo

Consideriamo il colloquio:

- Ugo: «Gigi viene sempre al lavoro in treno o in macchina».
- Marta: «Oggi i treni sono in sciopero, oggi Gigi non viene in treno».
- Ugo: «Allora viene in macchina».

Per trarre la conclusione, Ugo usa il ragionamento per casi e, implicitamente, le regole dell’assurdo.

Esplicitando il ragionamento informalmente:

Premesse: 1. Gigi viene in treno o Gigi viene in macchina,
2. Sciopero treni.

Conseguenza: Gigi viene in macchina.

Ugo ha pensato: So che vale 1.; quindi ho due casi:

Caso 1. Gigi viene in treno.

ma c'è sciopero treni, non può venire in treno, assurdo!

Dunque questo caso non si verifica.

Caso 2. Gigi viene in macchina.

N.B.: assumiamo che nel contesto inteso «Sciopero treni» implichi «Gigi non viene in treno» (quando vedremo le regole per $\rightarrow$ potremo fare di meglio).

Formalmente:

1. Intreno(gigi) ∨ Inmacchina(gigi)
2. ¬Intreno(gigi) ; NOTA: Usando il contesto a noi noto (ma non noto a Fitch), deriviamo tacitamente l'assunzione 2 da «ScioperoTreni»

   3. Intreno(gigi)
   4. ⊥ ✔ ⊥ Intro :*3,2*
   5. Inmacchina(gigi) ✔ ⊥ Elim :*4*

   6. Inmacchina(gigi)

7. Inmacchina(gigi) ✔ ∨ Elim :*1,3-5,6-6*

Riassunto delle regole di Fitch sin qui incontrate

Regola associata a
$C_1, \ldots, C_n \ \vDash_T \ D$

C_1

C_n

…

D

Le conseguenze ***usate come regole base da Fitch*** sin qui incontrate:

- $\wedge$ Intro: $P_1, \ldots, P_n \vDash_T \ P_1 \wedge \ldots \wedge P_n$
- $\wedge$ Elim: $P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \vDash_T \ P_i$
- $\vee$ Intro: $P_i \vDash_T P_1 \vee \ldots \vee P_n$
- $\perp$ Intro: $P, \ \neg P \ \vDash_T \ \perp$
- $\perp$ Elim: $\perp \ \vDash_T \ P$

- $\vee$ Elim: Proof by cases
- Reit: $P \ \vDash_T \ P$

Regole per «non». Dimostrazione per assurdo

Dimostrazione per assurdo

Riduzione all’assurdo (o dimostrazione per assurdo)

Per dimostrare che Q *segue logicamente da* $P_1, \ldots, P_n$ ***in un contesto C**, assumo* $\neg$Q *e dimostro **in C** l’assurdo* (cioè dimostro $\perp$ usando l’assunzione $\neg$Q e le premesse $P_1, \ldots, P_n$ e ***le proprietà di C***).

Per dimostrare che Q *segue tautologicamente da* $P_1, \ldots, P_n$ *dimostro l’assurdo SOLO usando regole tautologicamente valide* (cioè dimostro $\perp$ usando l’assunzione $\neg$Q e le premesse $P_1, \ldots, P_n$

(ovvero senza usare proprietà specifiche del contesto, ad es. Ana Con per TW)).

Le regole per la negazione

Negation Introduction ($\neg$ Intro):

«Dimostrazione per assurdo» (?) (NB: Il nome è improprio)

$$
\begin{array}{l|l}
 & \begin{array}{|l} P \\ \hline \vdots \\ \bot \end{array} \\
\triangleright & \neg P
\end{array}
$$

Per dimostrare ¬P costruisco una sotto-prova in cui assumo P e dimostro l’assurdo

Negation Elimination ($\neg$ Elim):

Doppia negazione

$$
\begin{array}{l|l}
 & \neg\neg P \\
 & \vdots \\
\triangleright & P
\end{array}
$$

Da ¬¬P dimostro P

Le regole per la negazione

Negation Introduction ($\neg$ Intro):

«Dimostrazione per assurdo»:

$$
\begin{array}{l|l}
 & \begin{array}{|l} P \\ \hline \vdots \\ \bot \end{array} \\
\triangleright & \neg P
\end{array}
$$

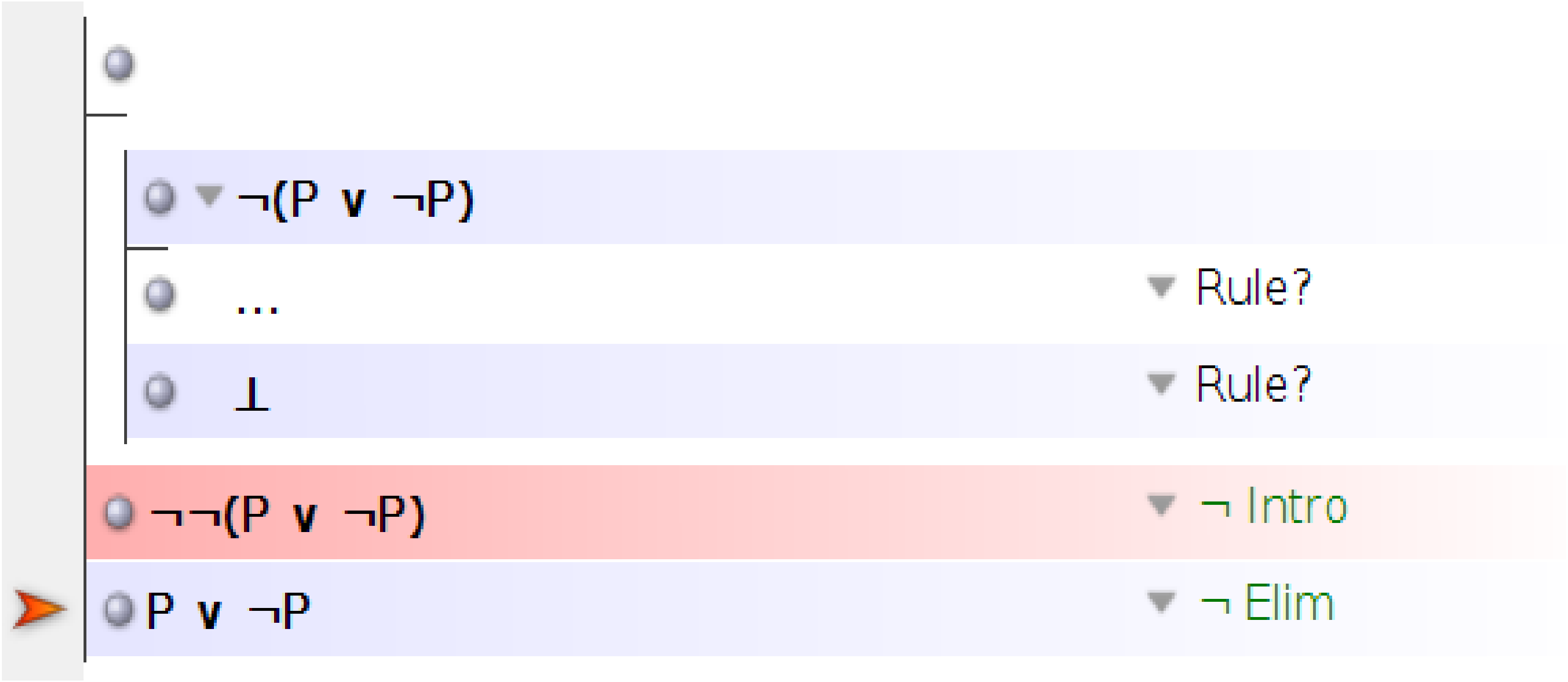
Per dimostrare ¬P costruisco una sotto-prova in cui assumo P e dimostro l'assurdo

NOTA:
La «Dimostraziona per assurdo» propriamente detta, assume la negazione di un enunciato (dunque nella regola sopra **P** è della forma **¬Q** per qualche enunciato **Q**) per provare, raggiunto l'assurdo, l'enunciato stesso (dunque **Q**).

La regola così come è stata presentata è dunque diversa dalla «Dimostrazione per assurdo» propriamente detta, che si ottiene usando in sequenza (**¬ Intro**) e (**¬ Elim**): Dalla prima regola ottengo **¬¬Q**, e successivamente **Q**.

In logiche non classiche molto importanti, la «Dimostrazione per assurdo» propriamente detta, e la (**¬ Elim**) non sono regole valide (e dunque **Q** non consegue, in queste altre logiche, da **¬¬Q**).

Le due regole per «¬ » si usano spesso in combinazione



Esempio [informale]

Premessa: «a è un cubo e b è un tetraedro».

Conseguenza: «a è diverso da b».

Dim.

Supponiamo, ***per assurdo***, che a e b siano lo stesso blocco. Avremmo che questo blocco è un cubo e allo stesso tempo un tetraedro; ciò è ***assurdo in TW***.

Per riduzione all'assurdo, a è un blocco diverso da b.

Esercizio. Formalizzate in Fitch; *osservate che si tratta di un assurdo in TW, quindi per introdurre l'assurdo dovrete usare Ana Con.*

Esempio [formale]

$$
\begin{array}{l|l}
 & \mathrm{Cube}(a) \land \mathrm{Tet}(b) \\
\hline
 & \quad a = b \\
 & \quad \mathrm{Cube}(b) \land \mathrm{Tet}(b) \qquad = \text{Elim} \\
 & \quad \bot \qquad \text{Ana Con} \\
 & a \neq b \qquad \neg\ \text{Intro}
\end{array}
$$

Si osservi che Cube(b) $\land$ Tet(b) è un assurdo in TW, ma non è un assurdo tautologico; dunque si ha conseguenza logica in TW, ma non tautologica.

Esempio: legge di non contraddizione

$P \land \neg P$	
P	$\land$ Elim
$\neg P$	$\land$ Elim
$\bot$	$\bot$ Intro
$\neg(P \land \neg P)$	$\neg$ Intro

NOTA: E' una prova senza assunzioni.

NOTA: Tutte le tautologie si provano senza avere assunzioni.

Esempio in TW

Cube(a) ∨ Tet(b)	
a = b	
Cube(a) ∨ Tet(a)	= Elim
│ Dodec(a)	
│ │ Cube(a)	
│ │ ⊥	Ana Con
│ │ Tet(a)	
│ │ ⊥	Ana Con
│ ⊥	∨ Elim
¬Dodec(a)	¬ Intro

Esempio: Una delle leggi di De Morgan

$$\neg A \land \neg B \models_T \neg(A \lor B)$$

1.	$\neg A \land \neg B$		
2.	$A \lor B$		
3.	A		
4.	$\neg A$	$\land$ Elim	1
5.	$\bot$	$\bot$ Intro	3,4
6.	B		
7.	$\neg B$	$\land$ Elim	1
8.	$\bot$	$\bot$ Intro	6,7
9.	$\bot$	$\lor$ Elim	6-8,3-5,2
10.	$\neg(A \lor B)$	$\neg$ Intro	2-9

Riferimenti al libro di testo

- Chapter 5, tutto.
- Chapter 6, tutto.