

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение  
высшего образования  
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт космических и информационных технологий  
институт

Кафедра «Информатика»  
кафедра

**ОТЧЕТ О ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 17**

Метод Марквардта  
Тема

Преподаватель		<u>В. В. Тынченко</u>
	Подпись, дата	Инициалы, Фамилия
Студент	<u>КИ19-17/1Б, №031939174</u>	<u>А. К. Никитин</u>
	Номер группы, зачетной книжки	Подпись, дата
		Инициалы, Фамилия

Красноярск 2021

## 1 Постановка задачи

Разработать программу, реализующую метод Марквардта.

Найти безусловный экстремум функции, выбранной в соответствии с заданием, с использованием разработанной программы.

Функция:  $(x_2 + x_1 - 1)^2 + 2(x_1 - 2)^2 \rightarrow \min$

## 2 Описание метода

Стратегия метода Марквардта состоит в построении последовательности точек  $\{x_k\}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , таких, что  $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$

Точки последовательности  $\{x_k\}$  вычисляются по правилу

$$x_{k+1} = x_k - [H(x_k) + \mu_k E]^{-1} \nabla f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где точка  $x_0$  задается пользователем,  $E$  — единичная матрица,  $\mu_k$  — последовательность положительных чисел, таких, что матрица  $[H(x_k) + \mu_k E]$  положительно определена. Как правило, число  $\mu_0$  назначается как минимум на порядок больше, чем самый большой элемент матрицы  $H(x_0)$ , а в ряде стандартных программ полагается  $\mu_0 = 10^4$ . Если  $f(x_{k+1}) - f(x_k) < \frac{\mu_k}{2}$ , то  $\mu_{k+1} = \frac{\mu_k}{2}$ . В противном случае  $\mu_{k+1} = 2\mu_k$ . Легко видеть, что алгоритм Марквардта в зависимости от величины  $\mu_k$  на каждом шаге по своим свойствам либо приближается к алгоритму Ньютона, либо к алгоритму градиентного спуска.

Построение последовательности  $\{x_k\}$  заканчивается, когда либо  $\|\nabla f(x_k)\| < \varepsilon$ , либо число итераций  $k \geq M$ , где  $\varepsilon$  — малое положительное число, а  $M$  — предельное число итераций.

Вопрос о том, может ли точка  $x_k$  рассматриваться как найденное приближение искомой точки минимума, решается путем проведения дополнительного исследования, которое описано ниже.



### 3 Исходные тексты программ

На листинге 1 представлен код программы, реализующий задание.

#### Листинг 1 – Метод Марквардта

```
import numpy as np
from sympy.solvers import solve
from sympy import Symbol
from const import func

t = Symbol('t')

def generate_n_basis_vectors(n):
    return np.array([[1. if k == j else 0. for k in range(n)] for j in range(n)])

def marquardt_method(f, x0, epsilon1=0.1, my=10, M=100):
    x = np.array(x0).astype(float)
    k = 0
    while k < M:
        gradient = f.gradient_value(x)

        if np.linalg.norm(gradient) < epsilon1:
            return x, k + 1

        E = generate_n_basis_vectors(2)
        hessian = f.hessian(x)

        while True:
            h_E = hessian + my * E
            inv_h_E = np.linalg.inv(h_E)

            d = -inv_h_E @ gradient.reshape((len(gradient), 1)).squeeze()

            x_old = x.copy()
            x += d

            if f.calc(x) < f.calc(x_old):
                k += 1
                my /= 2
                break
```

## Окончание листинга 1

```
        my *= 2

    return x, k

if __name__ == '__main__':
    print(marquardt_method(func, [0.5, 1], epsilon1=0.1, my=20, M=10))
```

#### 4 Исследование влияния параметров метода на точность и скорость нахождения решения

В качестве гиперпараметров по умолчанию использовались следующие значения:

а)  $x_0 = (-10, 10)$ ;

б)  $\varepsilon_1 = 0.1$ ;

в)  $M = 100$ .

Из рисунка 1 можно заключить, что чем меньше параметр  $\varepsilon_1$  тем точнее ответ и больше количество итераций.

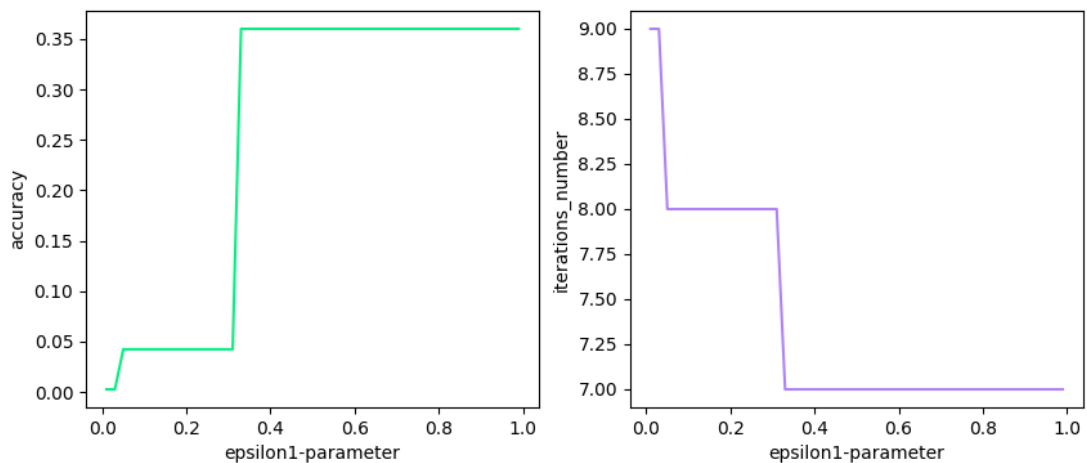


Рисунок 1 – Влияние параметра  $\varepsilon_1$  на точность и производительность

Из рисунка 2 можно сказать, что параметр  $\mu$  не влияет на точность пропорционально, однако, чем больше параметр  $\mu$ , тем больше будет количество итераций.

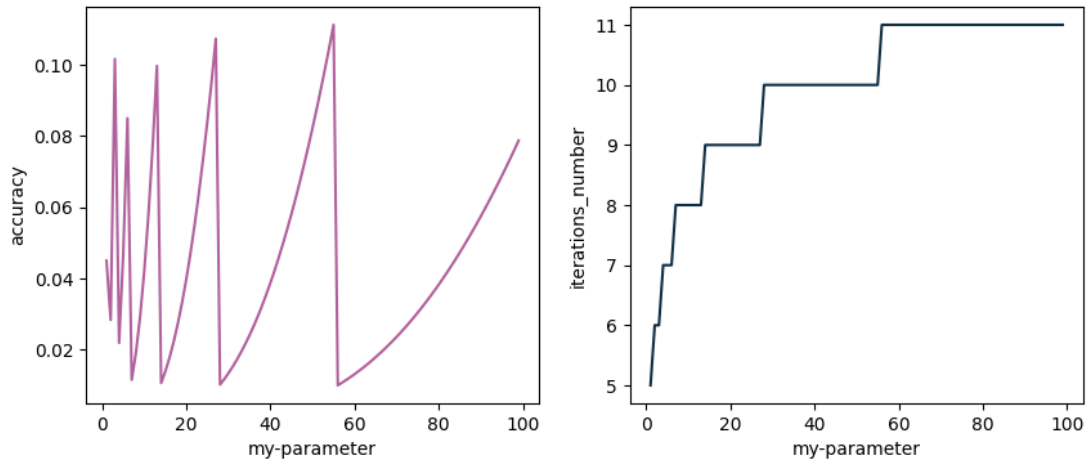


Рисунок 2 – Влияние параметра  $\mu$  на точность и производительность

Из рисунка 3 можно заключить, что параметр максимального количества шагов лучше не делать слишком небольшим, и что чем он больше, тем точнее, но менее производительнее, программа.

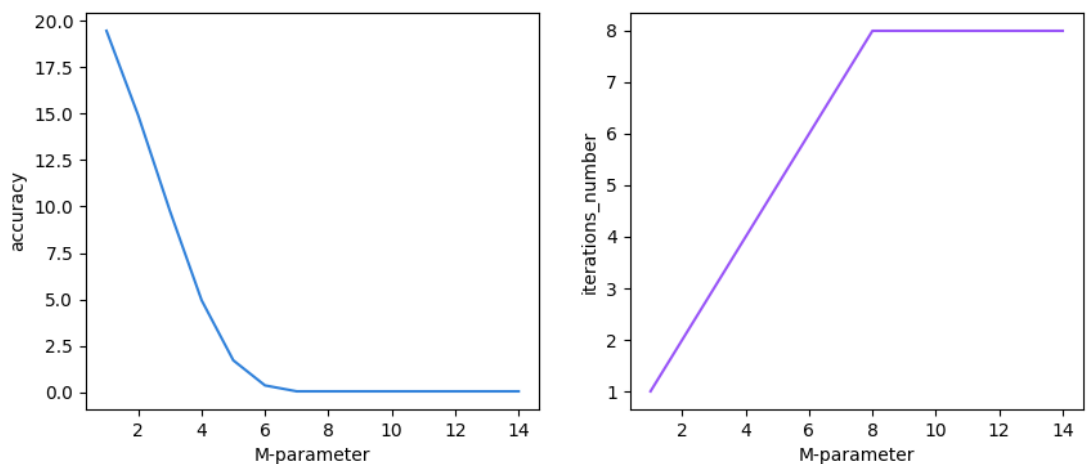


Рисунок 3 - Влияние параметра максимального количества шагов на точность и производительность

## 5 Вывод

В результате данной работы был реализован и проанализирован метод Марквардта для поиска локального минимума многомерной функции. Также были проанализированы гиперпараметры метода и их влияние на работу функции.