МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ"

КАФЕДРА №97

"Суперкомпьтерное моделирование в инженерно-физических процессах"

Полусеместровый отчёт

по предмету «Разностные схемы»

Выполнил: студент группы Б21-221 Чурсин Алексей Владимирович

Оглавление

Задание 1									•	 •	•									•	,
Задание 2,	3.																				۷
Задание 4																					!
Задание 5							٠								•						(
Задание 6,	7.						٠								•						6
Задание 8																				•	10
Задание 9	(Зак	ЛК	уче	ни	e)																1:

Получите регулярную запись разностной схемы и постройте шаблон. Дайте характеристику схеме.

Исходная схема:

$$\frac{\phi_i^n - \phi_i^{n-1}}{(2r^2 + 1)\tau} + c \frac{-(r-1)(2r-1)\phi_{i-1}^{n+1} + 2r\phi_i^{n-1} - 8r\phi_i^n + (r+1)(2r+1)\phi_{i+1}^{n+1}}{2h(2r^2 + 1)} = 0$$
 (1)

Упростим формулу, подставив $\frac{c\tau}{h}=r$:

$$\phi_i^n - \phi_i^{n-1} + r \frac{-(r-1)(2r-1)\phi_{i-1}^{n+1} + 2r\phi_i^{n-1} - 8r\phi_i^n + (r+1)(2r+1)\phi_{i+1}^{n+1}}{2} = 0$$
 (2)

Шаблон разностной схемы:

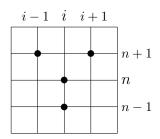


Рис. 1: Шаблон разностной схемы.

Схема является неявной и трёхслойной.

Задание 2, 3

Получите G- и P- формы первого дифференциального приближения. Определите порядок схемы.

Определите, аппроксимирует ли разностная схема представленную дифференциальную задачу и с каким порядком точности.

После разложения в ряд Тейлора около точки (i, n) получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right)r\Delta x}{\Delta t} = \frac{3\Delta x^2 r^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\right)}{4r^2\Delta t + 2\Delta t} + \left(\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}u(x,t)\right)\Delta xr + \tag{3}$$

$$+\frac{\left(\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}u(x,t)\right)\left(4r^{2}-1\right)\Delta t}{4r^{2}+2}+\frac{\Delta x^{3}\left(\frac{\partial^{3}}{\partial x^{3}}u(x,t)\right)r}{6\Delta t}+\frac{3\Delta x^{2}r^{2}\left(\frac{\partial^{3}}{\partial t\partial x^{2}}u(x,t)\right)}{4r^{2}+2}+\tag{4}$$

$$+\frac{\Delta t \left(\frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial x} u(x,t)\right) \Delta xr}{2} + \frac{\left(\frac{\partial^3}{\partial t^3} u(x,t)\right) \Delta t^2}{6}$$
 (5)

После упрощения получаем:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{-3cr\Delta x}{2(2r^2+1)} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{(1-4r^2)\Delta t}{2(2r^2+1)} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c\Delta t \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} - \frac{c\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} - \frac{-3cr\Delta x \Delta t}{2(2r^2+1)} \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} - \frac{c\Delta t^2}{2} \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x \partial t^2} - \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t^3} \tag{6}$$

После подстановки $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0$ и следствий получим:

$$0 = \frac{((6a^2\Delta t^2\Delta x + 2\Delta x^3)r^3 + (-2a^3\Delta t^3 - 9a\Delta t \Delta x^2)r^2 + (3a^2\Delta t^2\Delta x + \Delta x^3)r - a^3\Delta t^3)}{12r^2\Delta t + 6\Delta t}$$
(7)

$$-\frac{\left(\frac{\partial^{3}}{\partial x^{3}}u(x,t)\right)+12\left(a\,r^{2}\Delta t-\frac{1}{4}a\Delta t-\frac{3}{4}\Delta xr\right)\left(a\Delta t-\Delta xr\right)\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}u(x,t)\right)}{12r^{2}\Delta t+6\Delta t}\tag{8}$$

После упрощения:

$$\frac{c(r^2 - 1)(1 - 4r^2)\Delta x^2}{6(2r^2 + 1)} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3}$$
(9)

Модуль выражения (9) также является невязкой для разностной схемы, а это значит, что она аппроксимирует уравнение со вторым порядком точности по времени и по пространству.

Исследуйте схему на устойчивость методом гармоник. Определите все интервалы устойчивости.

Подставив в схему $u(x,t) = \lambda^n \cdot e^{ik\Delta xj}$, где $x = \Delta x \cdot j$, $t = \Delta t \cdot n$, получим уравнение на λ :

$$r((r+1)(r+\frac{1}{2})e^{2ik\Delta x}-(r-1)(r-\frac{1}{2}))\lambda^2+(1-4r^2)e^{ik\Delta x}\lambda+(r^2-1)e^{ik\Delta x}=0, \ \ (10)$$

Для λ получились следующие корни:

$$\lambda_{1} = \frac{4r^{2} - 1 + \sqrt{-8\operatorname{I}\sin(k\Delta x)} r^{5} - 12\cos(k\Delta x) r^{4} + 4\operatorname{I}r^{3}\sin(k\Delta x) + 16r^{4} + 12\cos(k\Delta x) r^{2} + 4\operatorname{I}r\sin(k\Delta x) - 8r^{2} + 1}{2r\left(2\operatorname{I}\sin(k\Delta x) r^{2} + 3r\cos(k\Delta x) + \operatorname{I}\sin(k\Delta x)\right)}$$
(11)

$$\lambda_{2} = -\frac{-4r^{2} + \sqrt{-8\operatorname{I}\sin(k\Delta x)} r^{5} - 12\cos(k\Delta x) r^{4} + 4\operatorname{I}r^{3}\sin(k\Delta x) + 16r^{4} + 12\cos(k\Delta x) r^{2} + 4\operatorname{I}r\sin(k\Delta x) - 8r^{2} + 1}{2r\left(2\operatorname{I}\sin(k\Delta x) r^{2} + 3r\cos(k\Delta x) + \operatorname{I}\sin(k\Delta x)\right)}$$
(12)

Интервалы устойчивости определяются из условия:

$$|\lambda| \le 1 \tag{13}$$

Однако данная задача оказывается слишком сложной, поэтому проанализируем уравнение по-другому. Исходя из вида уравнения, можно заметить, что оно имеет несколько особых точек при r>0, а именно $r=0;\frac{1}{2};1$. Таким образом, рассмотрим интервалы $[0,\frac{1}{2});(\frac{1}{2},1);(1,+\infty)$. Возьмём по одному r из каждого интервала, найдём для него $|\lambda|$, после этого решим неравенство (13) относительно $k\Delta x$. Если решением будет любое значение фазы, то такое r нам подходит и, соответственно, подходит весь интервал, которому оно принадлежит.

Возьмём r=0.25,0.75,1.5. При r=0.25 и r=1.5 нашлись такие значения фазы, при которых неравенство (13) не выполняется. При r=0.75 при любом значении фазы неравенство выполнено. Исходя из этого:

$$\frac{1}{2} \le r \le 1 \tag{14}$$

Постройте диссипативную и дисперсионную поверхности. Диссипативная поверхность - зависимость $|\lambda|$ от $k\Delta x$ (фазы) и r(числа Куранта):

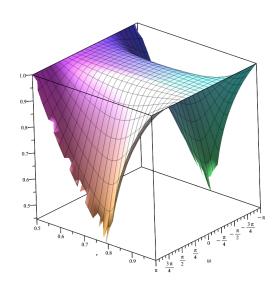


Рис. 2: Диссипативная поверхность для λ_1 .

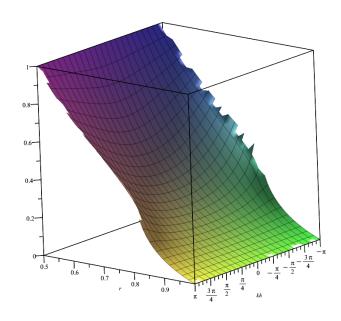


Рис. 3: Диссипативная поверхность для λ_2 .

Для дисперсионной поверхности воспользуемся соотношением $\lambda=e^{-i\omega\Delta t},$ а также тем, что $\omega=vk.$

Из этого следует, что $\frac{v}{c} = \frac{\omega}{ck} = \frac{-Arg(\lambda)}{ck\Delta t} = \frac{-Arg(\lambda)}{rk\Delta x}$.

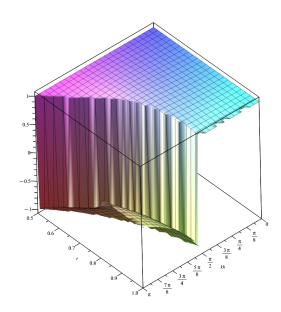


Рис. 4: Дисперсионная поверхность для λ_1 .

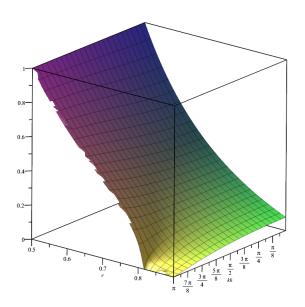


Рис. 5: Дисперсионная поверхность для λ_2 .

Дисперсионная поверхность для λ_1 представлена в интервале фазы от 0 до π , так как при отрицательном значении фазы Maple начинает выдавать неадекватные графики.

Задание 6, 7

Проведите серию расчетов с самостоятельно подобранным набором на параметров для определения свойства схемы.

Проанализируйте и сравните результаты аналитического и численного исследования. Дайте характеристику схеме.

С использованием схемы были решены задачи со следующими начальными условиями:

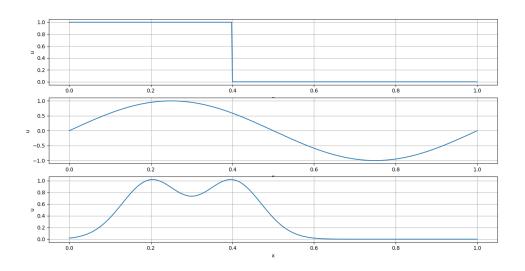


Рис. 6: Начальные условия.

В результате работы программы были получены следующие графики:

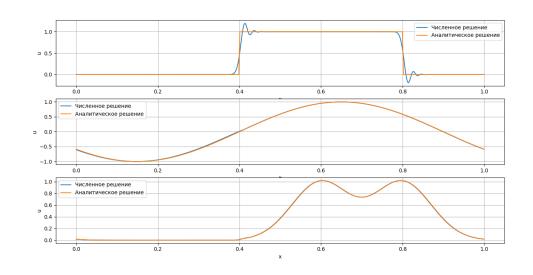


Рис. 7: Графики численных решений для r=0.8.

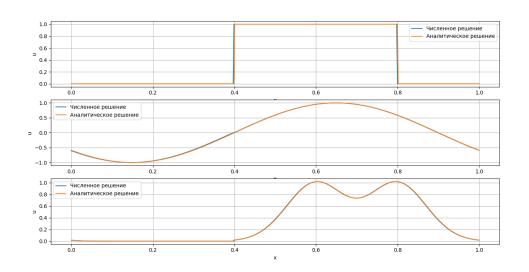


Рис. 8: Графики численных решений для r=1.

Сравнивая аналитические и численные решения на графиках (7) и (8), можно сделать выводы о том, что схема является диссипативной (так как присутствует размытие ступеньки) и немонотонной (так как имеется дисперсия). Однако при r=1 дисперсия и диссипация исчезают (что согласуется с графиком) и схема точно аппроксимирует решения.

С помощью метода неопределенных коэффициентов исследуйте шаблон, полученный на первом шаге, на свойство аппроксимации. Постройте график в пространстве неопределенных коэффициентов.

Формула для метода неопределенных коэффициентов согласно шаблону:

$$\phi_{i+1}^{n+1} = a_{-1}\phi_{i-1}^{n+1} + a_0\phi_i^n + a_1\phi_i^{n-1}$$
(15)

В результате разложения в ряд Тейлора и группировки соответствующих слагаемых была получена следующая система:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_{-1} = 1 \\ -a_1 + (r+1)a_{-1} = 1 - r \\ a_1 + (r+1)^2 a_{-1} = (1-r)^2 \end{cases}$$

В результате решения системы были получены следующие значения для коэффициентов:

$$\begin{cases} a_{-1} = \frac{r^2 - 3r + 2}{r^2 + 3r + 2} \\ a_0 = \frac{-2r(r - 2)}{r + 1} \\ a_1 = \frac{2r(r - 1)}{r + 2} \end{cases}$$

Также были построены графики в пространстве неопределенных коэффициентов a_{-1} и a_0 .

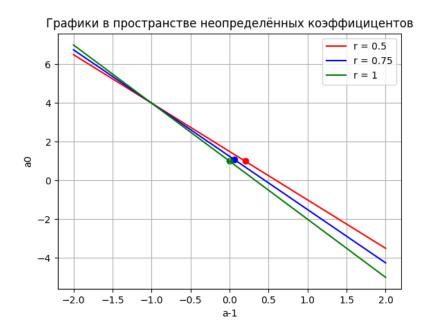


Рис. 9: Графики в пространстве неопределённых коэффициентов для разных чисел Куранта.

На рисунке (9) на прямых схема аппроксимирует уравнение переноса с первым порядком точности. В отмеченных точках у схемы второй порядок точности аппроксимации.

Задание 9 (Заключение)

В ходе работы была исследована разностная схема, аппроксимирующая уравнение переноса. Было выяснено, что она аппроксимирует уравнение со вторым порядком точности по времени и по пространству. Схема является диссипативной и немонотонной, что было показано как с помощью прямых расчётов, так и с помощью диссипативных и дисперсионных поверхностей.