

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ"

КАФЕДРА №97
"Суперкомпьютерное моделирование в инженерно-физических процессах"

Полусеместровый отчёт
по предмету «Разностные схемы»

Выполнил:
студент группы Б21-221
Чурсин Алексей Владимирович

Москва, 2024

Оглавление

Задание 1	3
Задание 2, 3	4
Задание 4	5
Задание 5	6
Задание 6, 7	8
Задание 8	10
Задание 9 (Заключение)	12

Задание 1

Получите регулярную запись разностной схемы и постройте шаблон. Дайте характеристику схеме.

Исходная схема:

$$\frac{\phi_i^n - \phi_i^{n-1}}{(2r^2 + 1)\tau} + c \frac{-(r-1)(2r-1)\phi_{i-1}^{n+1} + 2r\phi_i^{n-1} - 8r\phi_i^n + (r+1)(2r+1)\phi_{i+1}^{n+1}}{2h(2r^2 + 1)} = 0 \quad (1)$$

Упростим формулу, подставив $\frac{c\tau}{h} = r$:

$$\phi_i^n - \phi_i^{n-1} + r \frac{-(r-1)(2r-1)\phi_{i-1}^{n+1} + 2r\phi_i^{n-1} - 8r\phi_i^n + (r+1)(2r+1)\phi_{i+1}^{n+1}}{2} = 0 \quad (2)$$

Шаблон разностной схемы:

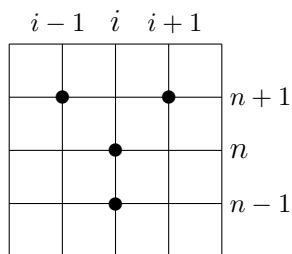


Рис. 1: Шаблон разностной схемы.

Схема является неявной и трёхслойной.

Задание 2, 3

Получите G- и P- формы первого дифференциального приближения. Определите порядок схемы.

Определите, аппроксимирует ли разностная схема представленную дифференциальную задачу и с каким порядком точности.

После разложения в ряд Тейлора около точки (i, n) получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}u(x, t)\right) r \Delta x}{\Delta t} = \frac{3\Delta x^2 r^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t)\right)}{4r^2 \Delta t + 2\Delta t} + \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial x}u(x, t)\right) \Delta x r + \quad (3)$$

$$+ \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x, t)\right) (4r^2 - 1) \Delta t}{4r^2 + 2} + \frac{\Delta x^3 \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}u(x, t)\right) r}{6\Delta t} + \frac{3\Delta x^2 r^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2}u(x, t)\right)}{4r^2 + 2} + \quad (4)$$

$$+ \frac{\Delta t \left(\frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial x}u(x, t)\right) \Delta x r}{2} + \frac{\left(\frac{\partial^3}{\partial t^3}u(x, t)\right) \Delta t^2}{6} \quad (5)$$

После упрощения получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= \frac{-3cr\Delta x}{2(2r^2 + 1)} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{(1 - 4r^2)\Delta t}{2(2r^2 + 1)} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - c\Delta t \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} - \\ &- \frac{c\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} - \frac{-3cr\Delta x \Delta t}{2(2r^2 + 1)} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t} - \frac{c\Delta t^2}{2} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x \partial t^2} - \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t^3} \end{aligned} \quad (6)$$

После подстановки $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0$ и следствий получим:

$$0 = \frac{((6a^2\Delta t^2\Delta x + 2\Delta x^3)r^3 + (-2a^3\Delta t^3 - 9a\Delta t\Delta x^2)r^2 + (3a^2\Delta t^2\Delta x + \Delta x^3)r - a^3\Delta t^3)}{12r^2\Delta t + 6\Delta t} \quad (7)$$

$$- \frac{\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}u(x, t)\right) + 12\left(a r^2 \Delta t - \frac{1}{4}a \Delta t - \frac{3}{4}\Delta x r\right)(a \Delta t - \Delta x r) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t)\right)}{12r^2\Delta t + 6\Delta t} \quad (8)$$

После упрощения:

$$\frac{c(r^2 - 1)(1 - 4r^2)\Delta x^2}{6(2r^2 + 1)} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} \quad (9)$$

Модуль выражения (9) также является невязкой для разностной схемы, а это значит, что она аппроксимирует уравнение со вторым порядком точности по времени и по пространству.

Задание 4

Исследуйте схему на устойчивость методом гармоник. Определите все интервалы устойчивости.

Подставив в схему $u(x, t) = \lambda^n * e^{ik\Delta x j}$, где $x = \Delta x * j, t = \Delta t * n$, получим уравнение на λ :

$$r((r+1)(r+\frac{1}{2})e^{2ik\Delta x} - (r-1)(r-\frac{1}{2}))\lambda^2 + (1-4r^2)e^{ik\Delta x}\lambda + (r^2-1)e^{ik\Delta x} = 0, \quad (10)$$

Для λ получились следующие корни:

$$\lambda_1 = \frac{4r^2 - 1 + \sqrt{-8I\sin(k\Delta x)r^5 - 12\cos(k\Delta x)r^4 + 4Ir^3\sin(k\Delta x) + 16r^4 + 12\cos(k\Delta x)r^2 + 4Ir\sin(k\Delta x) - 8r^2 + 1}}{2r(2I\sin(k\Delta x)r^2 + 3r\cos(k\Delta x) + I\sin(k\Delta x))} \quad (11)$$

$$\lambda_2 = -\frac{-4r^2 + \sqrt{-8I\sin(k\Delta x)r^5 - 12\cos(k\Delta x)r^4 + 4Ir^3\sin(k\Delta x) + 16r^4 + 12\cos(k\Delta x)r^2 + 4Ir\sin(k\Delta x) - 8r^2 + 1}}{2r(2I\sin(k\Delta x)r^2 + 3r\cos(k\Delta x) + I\sin(k\Delta x))} \quad (12)$$

Интервалы устойчивости определяются из условия:

$$|\lambda| \leq 1 \quad (13)$$

Однако данная задача оказывается слишком сложной, поэтому проанализируем уравнение по-другому. Исходя из вида уравнения, можно заметить, что оно имеет несколько особых точек при $r > 0$, а именно $r = 0; \frac{1}{2}; 1$. Таким образом, рассмотрим интервалы $[0, \frac{1}{2}); (\frac{1}{2}, 1); (1, +\infty)$. Возьмём по одному r из каждого интервала, найдём для него $|\lambda|$, после этого решим неравенство (13) относительно $k\Delta x$. Если решением будет любое значение фазы, то такое r нам подходит и, соответственно, подходит весь интервал, которому оно принадлежит.

Возьмём $r = 0.25, 0.75, 1.5$. При $r = 0.25$ и $r = 1.5$ нашлись такие значения фазы, при которых неравенство (13) не выполняется. При $r = 0.75$ при любом значении фазы неравенство выполнено. Исходя из этого:

$$\frac{1}{2} \leq r \leq 1 \quad (14)$$

Задание 5

Постройте диссипативную и дисперсионную поверхности.
Диссипативная поверхность - зависимость $|\lambda|$ от $k\Delta x$ (фазы) и r (числа Куранта):

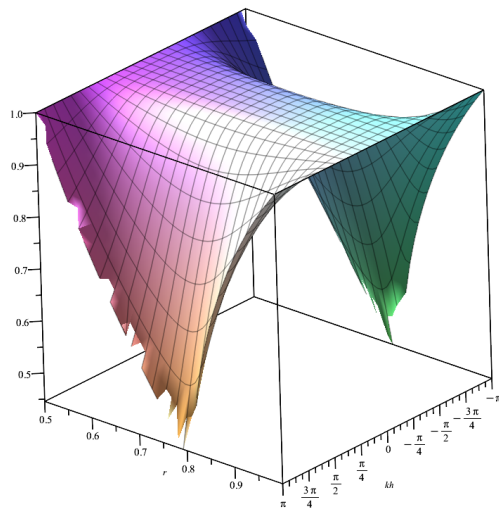


Рис. 2: Диссипативная поверхность для λ_1 .

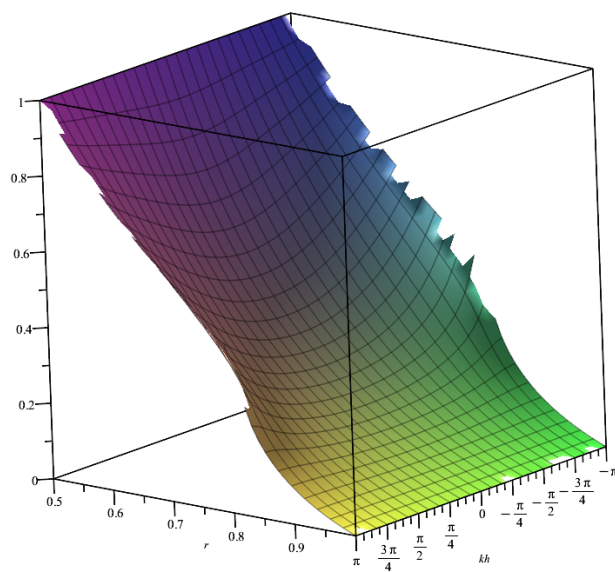


Рис. 3: Диссипативная поверхность для λ_2 .

Для дисперсионной поверхности воспользуемся соотношением $\lambda = e^{-i\omega\Delta t}$, а также тем, что $\omega = vk$.
Из этого следует, что $\frac{v}{c} = \frac{\omega}{ck} = \frac{-\text{Arg}(\lambda)}{ck\Delta t} = \frac{-\text{Arg}(\lambda)}{rk\Delta x}$.

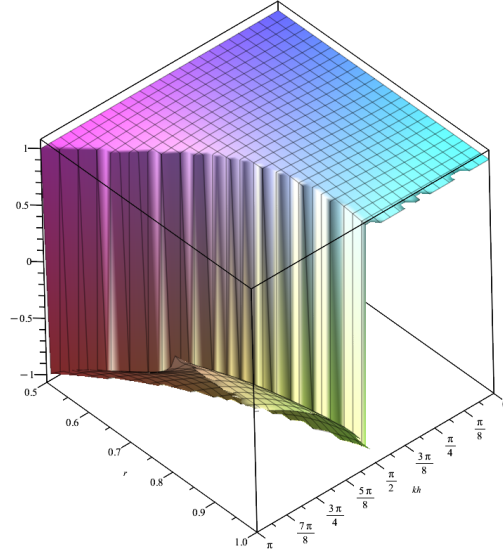


Рис. 4: Дисперсионная поверхность для λ_1 .

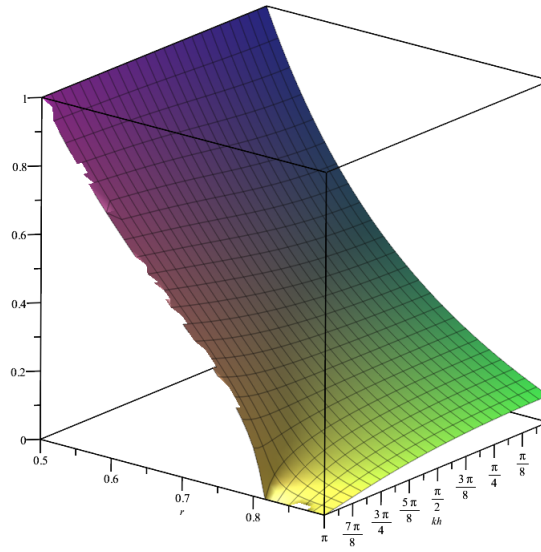


Рис. 5: Дисперсионная поверхность для λ_2 .

Дисперсионная поверхность для λ_1 представлена в интервале фазы от 0 до π , так как при отрицательном значении фазы Maple начинает выдавать неадекватные графики.

Задание 6, 7

Проведите серию расчетов с самостоятельно подобранным набором на параметров для определения свойства схемы.

Проанализируйте и сравните результаты аналитического и численного исследования. Дайте характеристику схеме.

С использованием схемы были решены задачи со следующими начальными условиями:

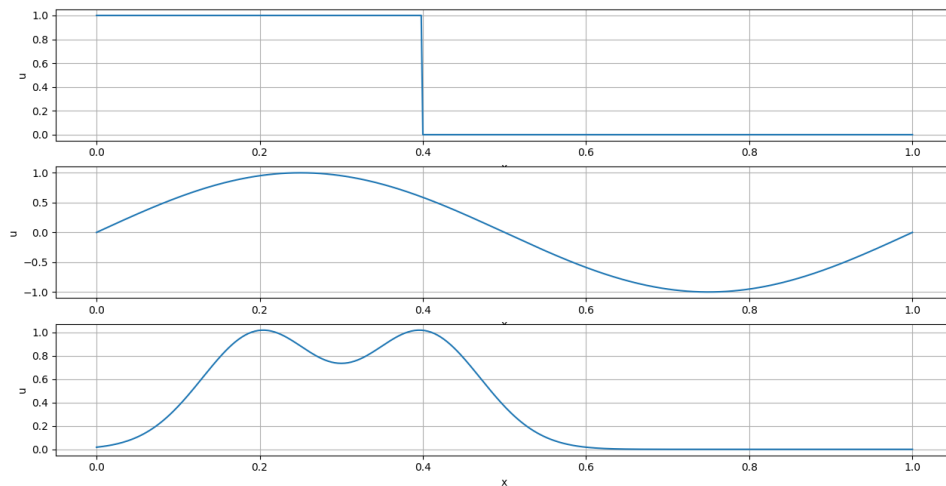


Рис. 6: Начальные условия.

В результате работы программы были получены следующие графики:

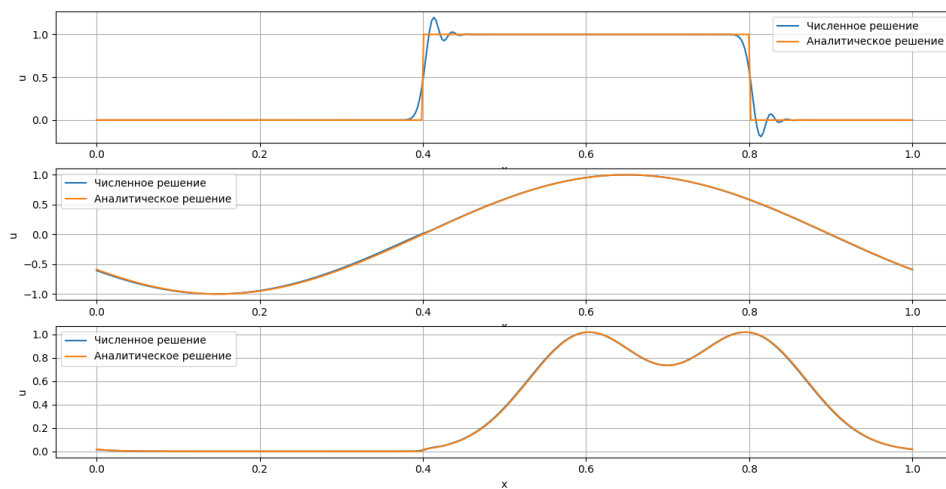


Рис. 7: Графики численных решений для $r = 0.8$.

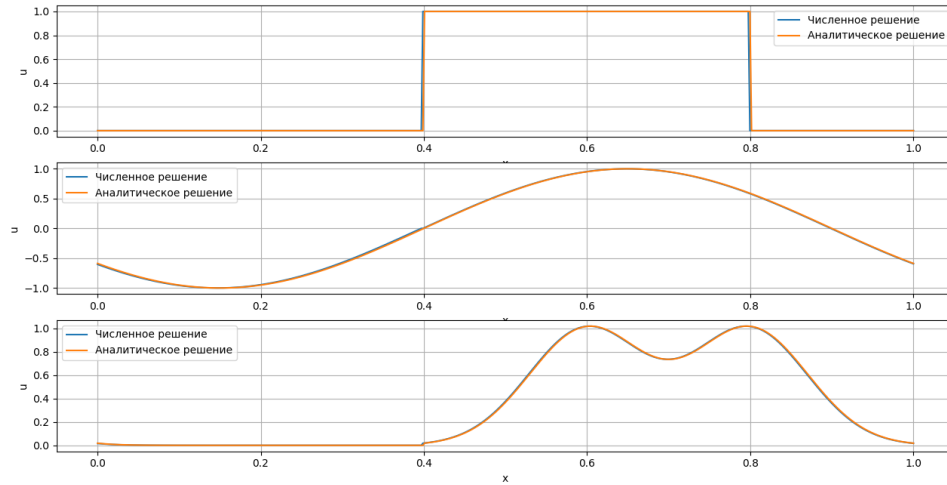


Рис. 8: Графики численных решений для $r = 1$.

Сравнивая аналитические и численные решения на графиках (7) и (8), можно сделать выводы о том, что схема является диссипативной (так как присутствует размытие ступеньки) и немонотонной (так как имеется дисперсия). Однако при $r = 1$ дисперсия и диссипация исчезают (что согласуется с графиком) и схема точно аппроксимирует решения.

Задание 8

С помощью метода неопределенных коэффициентов исследуйте шаблон, полученный на первом шаге, на свойство аппроксимации. Постройте график в пространстве неопределенных коэффициентов.

Формула для метода неопределенных коэффициентов согласно шаблону:

$$\phi_{i+1}^{n+1} = a_{-1}\phi_{i-1}^{n+1} + a_0\phi_i^n + a_1\phi_i^{n-1} \quad (15)$$

В результате разложения в ряд Тейлора и группировки соответствующих слагаемых была получена следующая система:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_{-1} = 1 \\ -a_1 + (r+1)a_{-1} = 1-r \\ a_1 + (r+1)^2a_{-1} = (1-r)^2 \end{cases}$$

В результате решения системы были получены следующие значения для коэффициентов:

$$\begin{cases} a_{-1} = \frac{r^2-3r+2}{r^2+3r+2} \\ a_0 = \frac{-2r(r-2)}{r+1} \\ a_1 = \frac{2r(r-1)}{r+2} \end{cases}$$

Также были построены графики в пространстве неопределенных коэффициентов a_{-1} и a_0 .

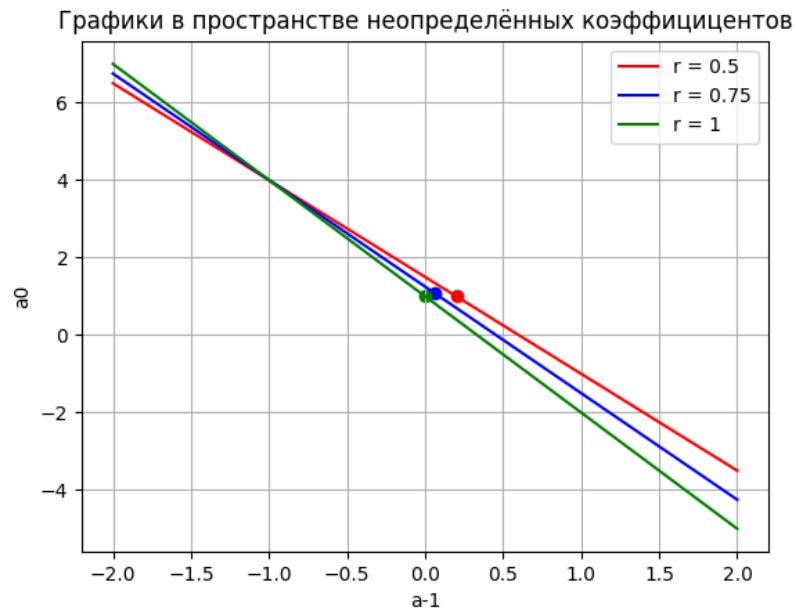


Рис. 9: Графики в пространстве неопределённых коэффициентов для разных чисел Куранта.

На рисунке (9) на прямых схема аппроксимирует уравнение переноса с первым порядком точности. В отмеченных точках у схемы второй порядок точности аппроксимации.

Задание 9 (Заключение)

В ходе работы была исследована разностная схема, аппроксимирующая уравнение переноса. Было выяснено, что она аппроксимирует уравнение со вторым порядком точности по времени и по пространству. Схема является диссипативной и немонотонной, что было показано как с помощью прямых расчётов, так и с помощью диссипативных и дисперсионных поверхностей.