INSTITUTO FEDERAL
Catarinense
Campus Blumenau

Pré-Cálculo

Fabricio Alves Oliveira
fabricio.oliveira@ifc.edu.br

Apresentação da Disciplina

Apresentação da Disciplina e do Cronograma de Ensino

Disciplina: Pré-Cálculo
Fase: 1 **Carga Horária:** 60 horas

Professor: Fabricio Alves Oliveira (fabricio.oliveira@ifc.edu.br)

Conteúdo Programático

1. Conjuntos, conjuntos numéricos e intervalos reais
2. Potenciação e Radiciação
3. Polinômios
4. Produtos notáveis, fatoração de polinômios e expressões fracionárias
5. Funções de uma variável real a valores reais
6. Função afim, função quadrática e função modular
7. Equações e inequações do 1º grau, 2º grau e modulares
8. Função exponencial
9. Função logarítmica
10. Trigonometria e funções trigonométricas

Apresentação da Disciplina

Bibliografia Básica

1. DEMANA, Franklin D., et al. **Pré-cálculo**. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2013. 452 p. ISBN 9788581430966.
2. ADAMI, Adriana Miorelli. **Pré-cálculo**. Porto Alegre: Bookman, 2015. [200] p. ISBN 9788582603208.
3. SAFIER, Fred. **Pré-cálculo.** 2. ed. Porto Alegre, RS: Bookman, 2011. x, 402 p. Coleção Schaum (Bookman)). ISBN 9788577809264 (broch.).

Bibliografia Complementar

1. IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar**, 1: conjuntos, funções. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. 410 p.
2. IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; DOLCE, Osvaldo. **Fundamentos de matemática elementar**, 2: logaritmos. 10. ed. São Paulo: Atual, 2013. 218 p.
3. IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar**, 3: trigonometria . 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. 311 p. ISBN 9788535716849.
4. IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar**, 6: complexos, polinômios e equações. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013. 250 p. ISBN 9788535717525.
5. IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar**: 4: seqüências, matrizes, determinantes e sistemas. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013. 282 p. ISBN 9788535717488.

Apresentação da Disciplina

Materiais de Apoio

- Slides/PDF do professor e listas de exercícios compartilhados no sistema acadêmico (SIGAA).
- *Software* livre de geometria dinâmica e cálculo simbólico GeoGebra, disponível em: https://www.geogebra.org/download (GeoGebra Clássico 5).

Avaliação

Três provas individuais, sem consulta e dissertativas:

- $\mathbf{P_1}$ (10 pontos) a ser realizada no dia **26/04/2023.**
- $\mathbf{P_2}$ (10 pontos) a ser realizada no dia **31/05/2023.**
- $\mathbf{P_3}$ (10 pontos) a ser realizada no dia **28/06/2023.**

Listas de Exercícios (LE) (10 pontos no total)

Apresentação da Disciplina

Média Semestral

- Será utilizada a **média ponderada das três provas e das listas de exercícios** para gerar a média semestral (MS), considerando peso igual a 3 (três) para cada prova e peso igual a 1 (um) para as listas de exercícios.

- Desse modo, a média semestral é calculada por

$$MS = \frac{3P_1 + 3P_2 + 3P_3 + LE}{10}.$$

Observações:

- As provas e as listas de exercícios irão avaliar interpretação e resolução de problemas, aplicação de conceitos e propriedades.

- A segunda chamada de prova deverá ser solicitada na secretária acadêmica, respeitando regras e prazos estipulados no PPC do curso.

Apresentação da Disciplina

Aprovação

Será considerado aprovado o discente que:

- tiver frequência igual ou superior a 75% (setenta e cinco por cento); e
- média semestral (MS) igual ou superior a 7,0 (sete), com a oferta de exame final.

Observação: A média final para aprovação, **na ocasião da realização do exame final** será igual a divisão por 2 da soma das média do período com a nota obtida no exame final. Para considerar aprovação, a nota final deverá ser superior ou igual a 5,0, ou seja,

$$\text{Média Final} = \frac{\text{Média do Período} + \text{Nota do Exame Final}}{2} \geq 5{,}0.$$

Apresentação da Disciplina

Horário de Atendimento Docente

- **Dias e horários:**
  - Segunda e Quarta: 17:00 às 18:30
- **Sala:** 13.

1- Conjuntos, Conjuntos Numéricos e Intervalos Reais

Conjuntos

Na teoria dos conjuntos três noções são aceitas sem definição, isto é, são consideradas **noções primitivas**:

i. conjunto;
ii. elemento;
iii. pertinência entre elemento e conjunto.

Noção intuitiva de conjunto: agrupamento ou coleção de objetos.

Exemplos:

(**a**) conjunto das vogais:

- $\{a, e, i, o, u\}$
- $\{x | x$ é uma vogal$\}$

(**b**) conjunto dos números ímpares positivos:

- $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots\}$
- $\{x | x$ é um número ímpar positivo$\}$

(**c**) conjunto dos nomes dos meses de 31 dias

- {janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro, dezembro}
- $\{x | x$ é um mês com 31 dias$\}$

Usualmente, indicamos um conjunto com uma letra maiúscula, $A, B, C, \ldots$, e um elemento com uma letra minúscula, $a, b, c, d, x, y, \ldots$.

Relação de Pertinência

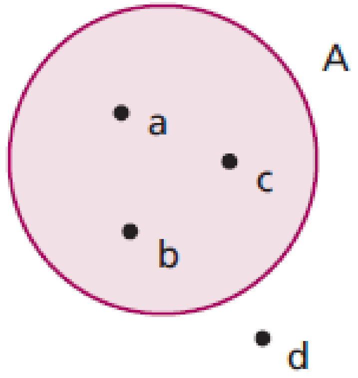
Sejam A um conjunto e x um elemento.

- Para indicar que x é elemento do conjunto A, escrevemos $x \in A$.

- Para indicar que x não é elemento do conjunto A, escrevemos $x \notin A$.

É também comum representar um conjunto utilizando **diagramas de Euler-Venn**.
Na representação a seguir, temos:

$\mathrm{a} \in A$, $\mathrm{b} \in A$, $\mathrm{c} \in A$ e $\mathrm{d} \notin A$.



Conjuntos Notáveis

(1) Conjunto unitário: possui um único elemento.

Exemplos:

(a) conjunto dos divisores de 1, inteiros e positivos: $\{1\}$

(b) conjunto das soluções da equação $3x + 1 = 10$: $\{3\}$

(2) Conjunto vazio: não possui elemento algum.

O conjunto vazio e definido por meio de uma propriedade contraditória, isto é, uma afirmação que é sempre falsa, não podendo ser satisfeita por objeto algum.

Representação do conjunto vazio: $\emptyset$ ou { }

Exemplos:

(a) $\{x|x \neq x\} = \emptyset$

(b) $\{x|x > 0 \text{ e } x < 0\} = \emptyset$

(3) Conjunto universo *U*: é o "maior" conjunto do qual podem ser retiradas as respostas de um certo problema.

Exemplos:

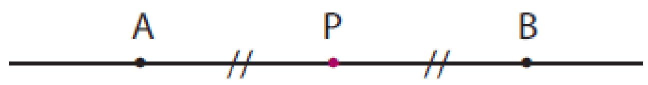
(a) se procuramos as soluções reais de uma equação, nosso conjunto universo é $\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais);

(b) se estamos resolvendo um problema cuja solução vai ser um número inteiro, nosso conjunto universo é $\mathbb{Z}$ (conjunto dos números inteiros);

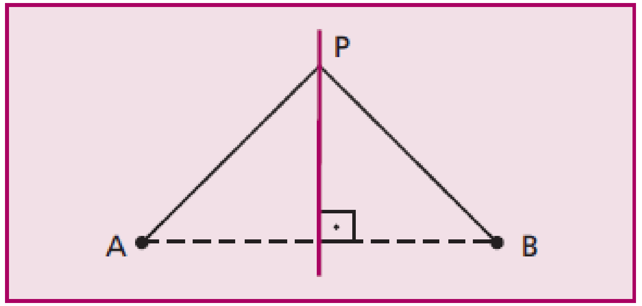
(c) se estamos resolvendo um problema de Geometria Plana, nosso conjunto universo é um certo plano α.

Observação: Quase sempre a resposta para algumas questões depende do universo U em que estamos trabalhando. Considere a questão:
"Qual é o conjunto dos pontos P que ficam a igual distância de dois pontos dados A e B, com $A \neq B$?"

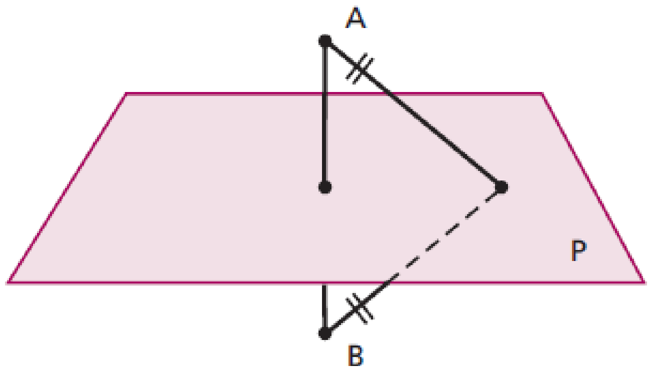
(i) Se U é a reta AB, então o conjunto procurado é formado apenas pelo ponto P (ponto do médio do segmento de extremidades A e B)



(ii) Se U é um plano contendo A e B, o conjunto procurado é a reta mediatriz do segmento AB.



(iii) Se U é o espaço, o conjunto procurado é o plano mediador do segmento AB (plano perpendicular a AB no seu ponto médio).



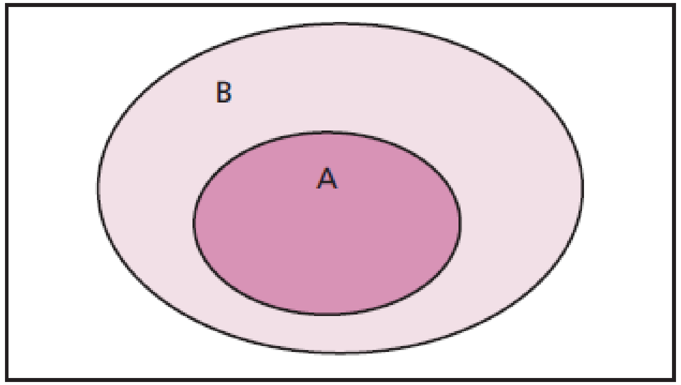
Desse modo, sempre que descrevermos um conjunto através de uma propriedade, é essencial informar o conjunto universo em que estamos trabalhando:

$$\{x \in U |\, x \text{ satisfaz determinada propriedade}\}.$$

Subconjuntos

Um conjunto A é **subconjunto** de um conjunto B quando todo elemento de A pertence também a B.

Notação: $A \subset B$ (A está contido em B)



Em símbolos, a definição acima fica:

$$\boxed{A \subset B \Leftrightarrow (\forall\, x \in A \Rightarrow x \in B).}$$

Exemplos:

(a) $\{a, b\} \subset \{a, b, c, d\}$

(b) $\{x|x \text{ é inteiro e par}\} \subset \{x|x \text{ é inteiro}\}$

Observações:

(**i**) O símbolo $\subset$ é chamado **sinal de inclusão**.

(**ii**) Quando $A \subset B$ também podemos escrever $B \supset$ A (B contém A).

(**iii**) A notação $A \not\subset B$ indica que A não está contido em B. Evidentemente, isso ocorre se existe ao menos um elemento de A que não pertence a B.

Igualdade entre Conjuntos

Dois conjuntos são **iguais** quando possuírem os mesmos elementos. Assim, a igualdade entre dois conjuntos ocorre quando todo elemento do primeiro for também elemento do segundo e, reciprocamente, qualquer elemento do segundo pertencer ao primeiro. Desse modo, podemos escrever:

$$\boxed{A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ e } B \subset A.}$$

Assim, para provarmos que $A = B$, devemos provar que $A \subset B$ e $B \subset A$.

Propriedades da Inclusão

Sejam A, B e C três conjuntos. Então:

(**i**) $\emptyset \subset A$

(**ii**) $A \subset A$ (reflexiva)

(**iii**) $A \subset B$ e $B \subset A \Rightarrow A = B$ (antissimétrica)

(**iv**) $A \subset B$ e $B \subset C \Rightarrow A \subset C$ (transitiva)

Conjunto das Partes

Denomina-se **conjunto das partes** de um conjunto A o conjunto de todos os subconjuntos (ou partes) de A.

Notação: $\wp(A)$

Exemplos:

(a) $A = \{a\} \Rightarrow \wp(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$.

(b) $A = \{a, b\} \Rightarrow \wp(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

(c) $A = \{a, b, c\} \Rightarrow \wp(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Observações:

(**i**) Se A possui n elementos, então o conjunto das partes de A, $\wp(A)$, possui 2^n elementos.

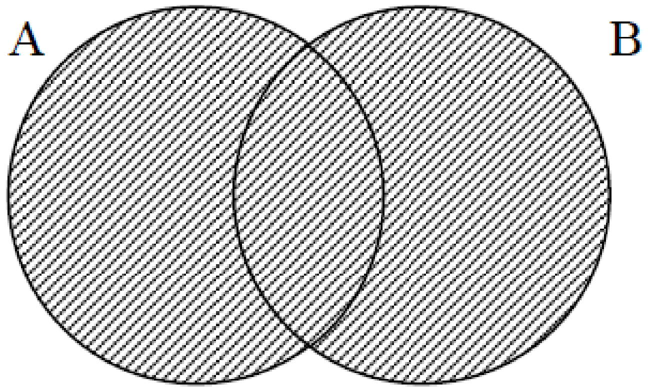
(**ii**) Denomina-se **subconjunto próprio** de A qualquer subconjunto X de A, tal que:

$$X \neq \emptyset \text{ e } X \neq A.$$

Quando um subconjunto não é próprio, ele é dito **impróprio** ou **trivial** (são os subconjuntos óbvios de qualquer conjunto A: $\emptyset$ e A).

Operações entre Conjuntos

(1) União (ou Reunião)



Dados dois conjuntos A e B, chama-se **união** de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B.

$$\boxed{A \cup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B\}.}$$

O conjunto $A \cup B$ é formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A e B.

Exemplos:

(a) $\{a, b, c\} \cup \{c, d, e\} = \{a, b, c, d, e\}$

(b) $\{a, b, c\} \cup \emptyset = \{a, b, c\}$

Propriedades da União

Sejam A, B e C três conjuntos. Então:

(**i**) $A \cup A = A$ (idempotente)

(**ii**) $A \cup \emptyset = A$ (elemento neutro)

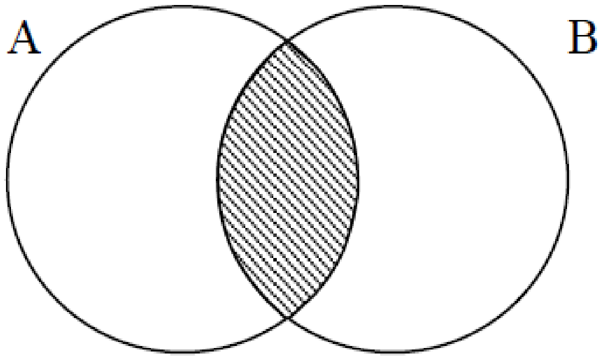
(**iii**) $A \cup B = B \cup A$ (comutativa)

(**iv**) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (associativa)

(2) Intersecção (ou Interseção)

Dados dois conjuntos A e B, chama-se **intersecção** de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a B.

$$\boxed{A \cap B = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\}.}$$



O conjunto $A \cap B$ é formado pelos elementos que pertencem aos conjuntos A e B simultaneamente.

Exemplos:

(a) $\{a, b, c\} \cap \{b, c, d, e\} = \{b, c\}$

(b) $\{a, b\} \cap \emptyset = \emptyset$

Propriedades da Intersecção

Sejam A, B e C três conjuntos. Então:

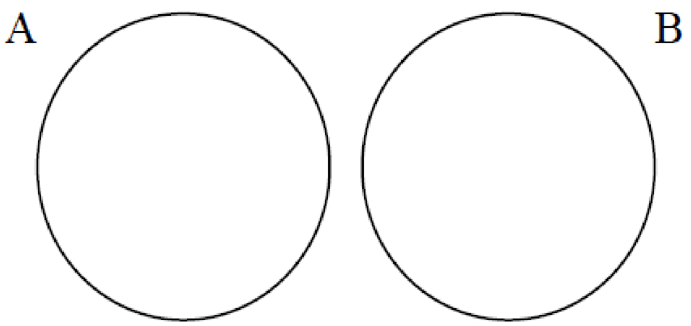
(**i**) $A \cap A = A$ (idempotente)

(**ii**) $A \cap U = A$ (elemento neutro)

(**iii**) $A \cap B = B \cap A$ (comutativa)

(**iv**) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (associativa)

Quando $A \cap B = \emptyset$, isto é, quando A e B não tem elementos em comum, são chamados de **conjuntos disjuntos.**



Propriedades envolvendo união e intersecção

Sejam A, B e C três conjuntos. Então:

(**i**) $A \cup (A \cap B) = A$

(**ii**) $A \cap (A \cup B) = A$

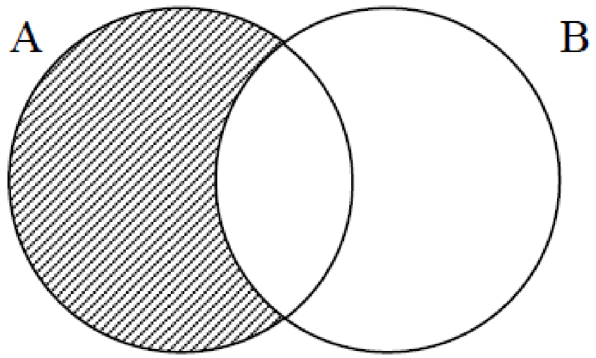
(**iii**) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributiva da união em relação à intersecção)

(**iv**) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributiva da intersecção em relação à união

(3) Diferença

Dados dois conjuntos A e B, chama-se **diferença** de A e B o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B.

$$\boxed{A - B = \{x | x \in A \text{ e } x \notin B\}.}$$



Exemplos:

(a) $\{a, b, c\} - \{b, c, d, e\} = \{a\}$

(b) $\{a, b\} - \{a, b, c, d, e\} = \emptyset$

Propriedades da Diferença

Sejam A e B conjuntos quaisquer. Então são válidas as seguintes propriedades:

(i) $A - A = \emptyset$

(ii) $A - \emptyset = A$ (elemento neutro)

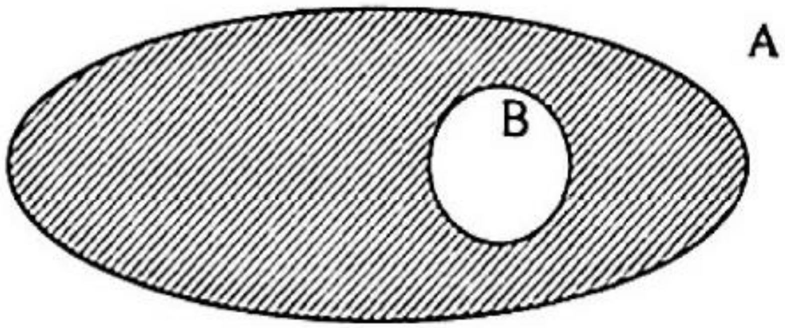
(iii) $A - (A \cap B) = A - B$

(iv) $A - B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B$

(4) Complementar

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer satisfazendo a relação $B \subset A$. Denomina-se **complementar de *B* em relação a *A*** o conjunto dos elementos que se devem acrescentar a B para que ele se transforme em A. Em termos mais precisos, o complementar de B em relação a A, representado por $\complement_A^B$ ou $\bar{B}$, está definido somente quando $B \subset A$, e nesse caso será igual a

$$\boxed{\complement_A^B = \bar{B} = A - B.}$$



Exemplos:

(a) Se $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{c, d, e\}$, então $\complement_A^B = \{a, b\}$.

(b) Se $A = B$, então $\complement_A^B = \emptyset$.

(c) Se $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \emptyset$, então $\complement_A^B = \{a, b, c, d\} = A$.

(d) Se $A = \{a, b\}$ e $B = \{c, d\}$, então $\complement_A^B$ não está definido, pois $B \not\subset A$.

Propriedades da complementação

Sendo B e C subconjuntos de A, valem as seguintes propriedades:

(i) $\complement_A^B \cap B = \emptyset$ e $\complement_A^B \cup B = A$

(ii) $\complement_A^A = \emptyset$ e $\complement_A^\emptyset = A$

(iii) $\complement_A(\complement_A^B) = B$

(iv) $B - C = B \cap \complement_A^C$

Leis de De Morgan:

(v) $\complement_A^{(B \cap C)} = \complement_A^B \cup \complement_A^C$ $(\overline{B \cap C} = \bar{B} \cup \bar{C})$

(vi) $\complement_A^{(B \cup C)} = \complement_A^B \cap \complement_A^C$ $(\overline{B \cup C} = \bar{B} \cap \bar{C})$

Cardinalidade da União de Conjuntos (Princípio da Inclusão-Exclusão)

Chama-se **cardinalidade** de um conjunto finito A o número de elementos desse conjunto.

Notação: $n(A), n_A, \#A, \text{card } A$.

Por definição, o conjunto vazio possui cardinalidade zero.

- Se A e B são conjuntos **disjuntos**, isto é, $A \cap B = \emptyset$, então o número de elementos da união dos dois é, simplesmente, a soma dos números de elementos de cada conjunto.

$$\boxed{A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B).}$$

- Se A e B são conjuntos quaisquer, então:

$$\boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).}$$

- Para três conjuntos finitos A, B e C têm-se:

$$\boxed{n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).}$$

Exercícios

(1) Se $A = \{0, 1, 2, 3\}$, diga se é verdadeiro ou falso.

(a) $1 \in A$;	**(b)** $4 \in A$;	**(c)** $2 \notin A$;	**(d)** $5 \notin A$;
(e) $1 \subset A$;	**(f)** $\{1\} \subset A$;	**(g)** $\{1, 3\} \subset A$;	**(h)** $\emptyset \subset A$;
(i) $A \not\subset A$;	**(j)** $\{1, 2, 3, 4\} \subset A$;	**(k)** $\{2, 5, 6\} \not\subset A$;	**(l)** $\{0, 5\} \subset A$;

Solução:

(**a**) V	(**b**) F	(**c**) F	(**d**) V
(**e**) F	(**f**) V	(**g**) V	(**h**) V
(**i**) F	(**j**) F	(**k**) V	(**l**) F

(**2**) Considere $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$. Determine, por enumeração, os conjuntos:

(a) $A \cap B$; **(b)** $A \cup B$; **(c)** $A - B$; **(d)** $B - A$.

Solução: Temos que:

(**a**) $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

(**b**) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$

(**c**) $A - B = \{0, 5\}$

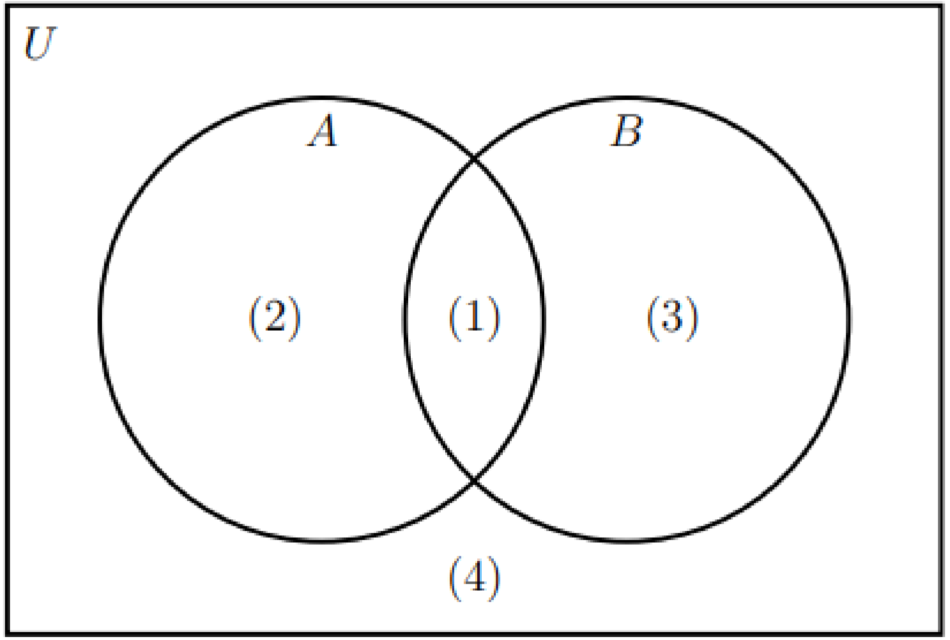
(**d**) $B - A = \{8, 9\}$

(3) No diagrama de Euler-Venn a seguir, cada região foi denominada com um número entre parênteses. Indicar as regiões que determinam:

(a) $A \cap B$; **(b)** $A \cup B$; **(c)** $A - B$;

(d) $\overline{A}$; **(e)** $\overline{B}$; **(f)** $\overline{A \cap B}$;

(g) $\overline{A \cup B}$; **(h)** $\overline{A - B}$; **(i)** $\overline{B - A}$.



Solução:

(a) (1) **(b)** (1), (2), (3) **(c)** (2)

(d) (1), (3), (4) **(e)** (1), (2), (4) **(f)** (2), (3), (4)

(g) (4) **(h)** (1), (3), (4) **(i)** (1), (2), (4)

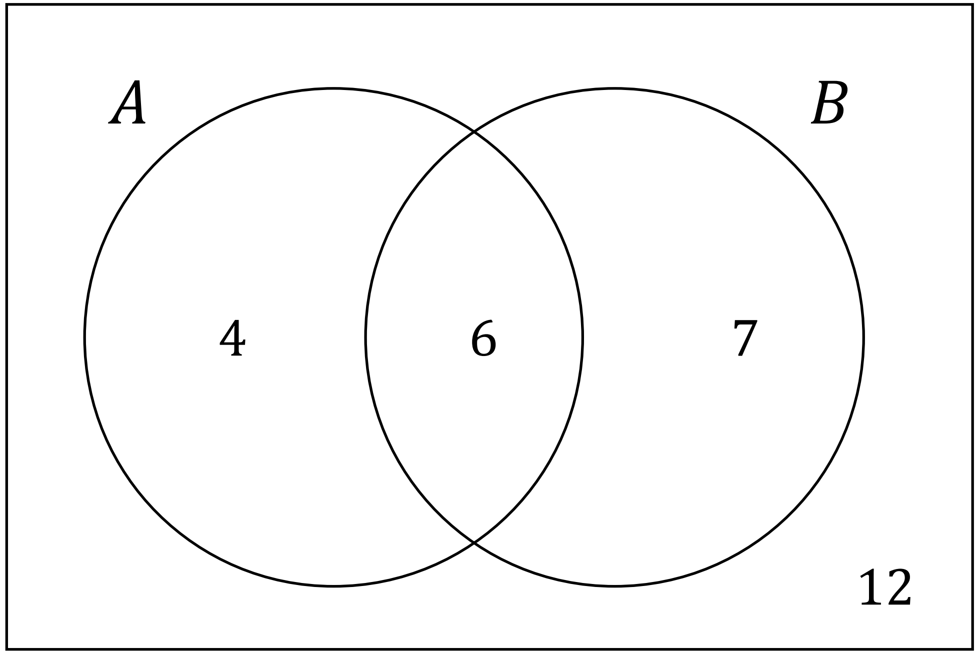
(4) Em um grupo de 29 pessoas, sabe-se que 10 são sócias de um clube A, 13 são sócias de um clube B e 6 são sócias de ambos.

(a) Quantas pessoas do grupo não são sócias de A nem de B?

(b) Quantas pessoas do grupo são sócias apenas do clube A?

(c) Quantas pessoas do grupo são sócias de A ou de B?

Solução: Considere o diagrama a seguir.



- Como 6 pessoas são sócias de ambos os clubes, então na intersecção de A e B deve conter 6 pessoas.
- Como A possui 10 sócios e já contabilizamos 6, faltam 4 pessoas.
- Como B possui 13 sócios e já contabilizamos 6, faltam 7 pessoas.
- Por fim, como o grupo contém 29 pessoas e já foram contabilizadas $4+6+7=17$ pessoas, restam 12 pessoas.

Desse modo, as respostas dos itens são:

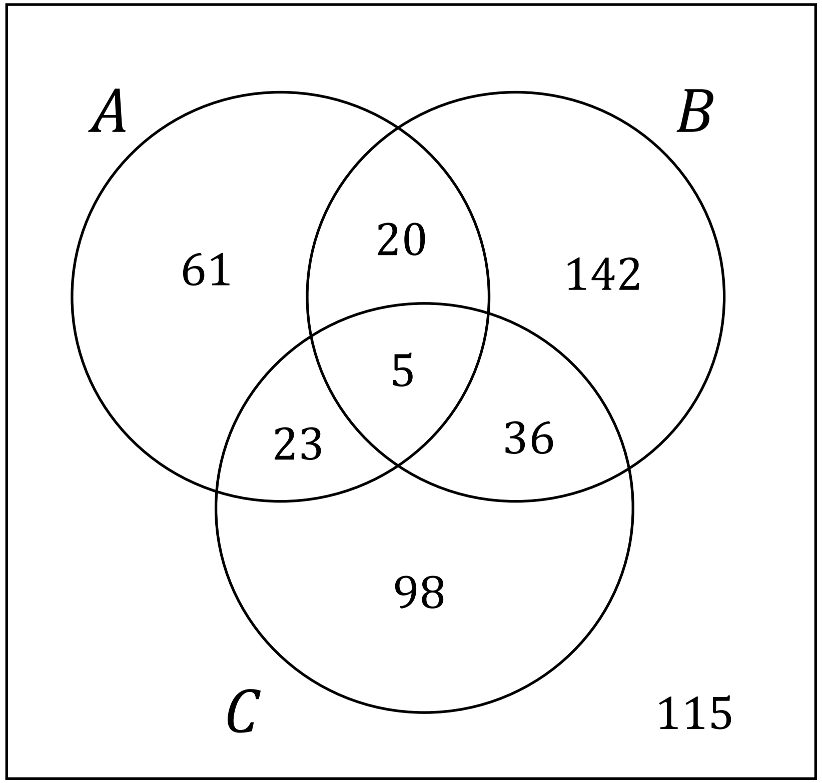
(**a**) 12 pessoas (**b**) 4 pessoas (**c**) 17 pessoas

(**5**) Foi feita uma pesquisa a respeito de três marcas de sabão em pó: A, B e C. Os resultados são mostrados na tabela a seguir.

Marca	A	B	C	A e B	B e C	C e A	A, B e C	Nenhuma das três
Número de consumidores	109	203	162	25	41	28	5	115

Determine:

(**a**) o número de pessoas consultadas;
(**b**) o número de pessoas que só consomem a marca A;
(**c**) o número de pessoas que não consomem as marcas A ou C;
(**d**) o número de pessoas que consomem ao menos duas marcas.



Solução:
Dos dados da tabela, obtemos o diagrama ao lado.

De acordo com o diagrama, temos que:

(**a**) o número de pessoas consultadas:

$$61+20+5+23+36+142+98+115=500 \text{ pessoas.}$$

(**b**) o número de pessoas que só consomem a marca A:

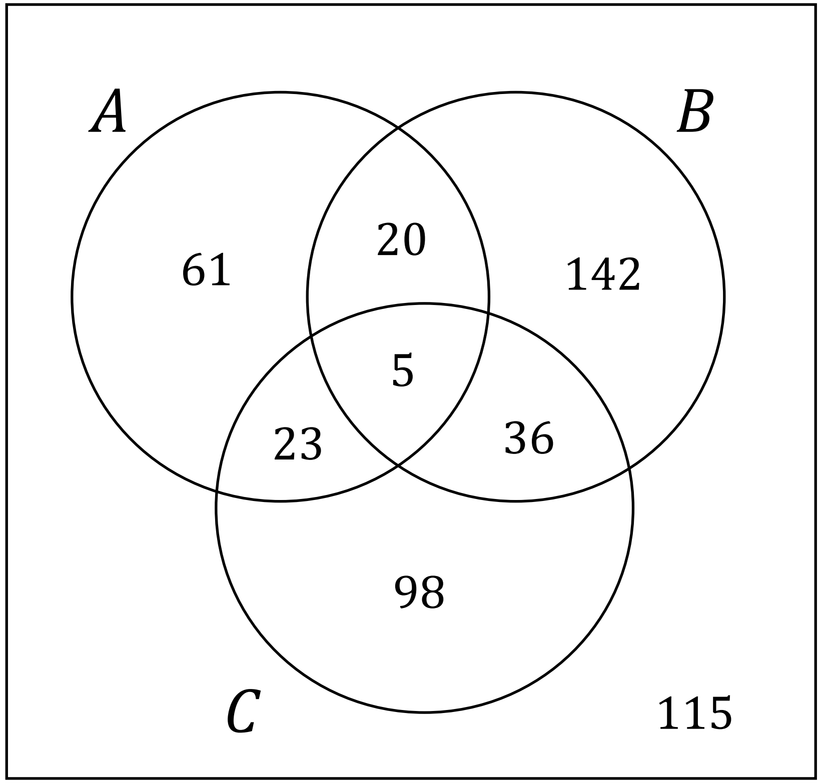
$$61 \text{ pessoas}$$

(**c**) o número de pessoas que não consomem as marcas A ou C:

$$142+115=257 \text{ pessoas}$$

(**d**) o número de pessoas que consomem ao menos duas marcas:

$$20+23+36+5=84 \text{ pessoas}$$



Conjuntos Numéricos

Vamos recordar a seguir os conjuntos numéricos e algumas propriedades dos números reais.

Conjunto dos **números naturais:**

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Conjunto dos **números inteiros:**

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Subconjuntos importantes de $\mathbb{Z}$:

- Números Pares:

$$P = \{2k : k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$$

- Números Ímpares:

$$I = \{2k + 1 : k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \dots\}$$

- Números Primos:
  Números inteiros n, com $n \neq 0$ e $n \neq \pm 1$, que são divisíveis apenas por ± 1 e $\pm n$.

$$\mathscr{P} = \{\dots, -19, -17, -13, -11, -7, -5, -3, -2, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots\}$$

Dois números inteiros não nulos são chamados de **primos entre si** quando os únicos divisores comuns entre eles são ± 1 (equivale a dizer que eles não possuem fatores primos em comum).

Conjunto dos **números racionais:**

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\right\}.$$

- Em $\frac{a}{b}$, a é chamado **numerador** e b **denominador**.

- Todo número inteiro $a \in \mathbb{Z}$ é um número racional, pois $a = \frac{a}{1} \in \mathbb{Q}$.

- O número $\frac{1}{b}$, com $b \neq 0$, é chamado **inverso** de b.

Operações em $\mathbb{Q}$:

(i) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$ (ii) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ (iii) $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

Observações:

(1) Em $\mathbb{Q}$ temos a seguinte relação de equivalência

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc.$$

Por exemplo, $q = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, pois, $3.2 = 6.1$.

Desta forma, sempre é possível escrever um número racional não nulo em forma de uma fração simplificada. Neste caso, dizemos que o número racional está escrito em sua **forma irredutível**.

No exemplo acima, $q = \frac{1}{2}$ está na forma irredutível e $q = \frac{3}{6}$ não está na forma irredutível.

(2) Todo número racional pode ser escrito na forma de decimal, sendo esta forma "finita" ou "infinita" formando uma *dízima periódica.* Por exemplo,

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 \qquad \frac{7}{8} = 0{,}875 \qquad \frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots \qquad \frac{41}{333} = 0{,}123123123\ldots$$

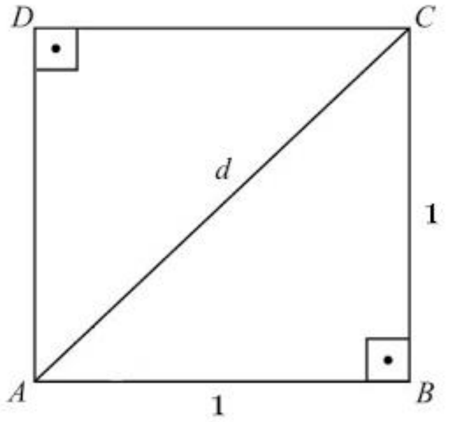
(3) Existem números que não podem ser escritos em forma de fração. Tais números possuem representação decimal infinita e *não periódica* e são chamados de **números irracionais.**
Por exemplo, são números irracionais:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots \qquad \pi = 3{,}141592\ldots$$
$$\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots \qquad e = 2{,}7182818\ldots$$

$\sqrt{p}$, sendo p um número primo

Curiosidade!

O número $\sqrt{2}$ foi um dos primeiros a ser reconhecido como irracional. Os matemáticos da Grécia Antiga conheciam apenas os números inteiros e as frações. Após o surgimento do Teorema de Pitágoras, os pitagóricos tentaram calcular a diagonal de um quadrado de lado 1, dando origem a raiz quadrada de dois.

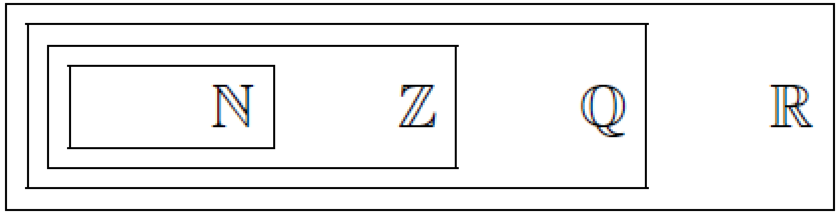


Conjunto dos **números reais:**
Formado pela união do conjunto dos números racionais e irracionais, ou seja,

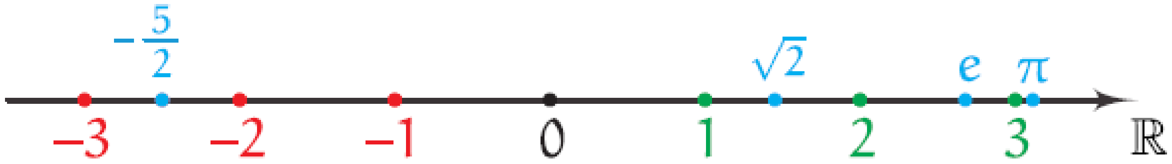
$$\mathbb{R} = \{x : x \text{ é racional ou } x \text{ é irracional}\}.$$

Observações:

(1) É claro que valem as seguintes inclusões:



(2) É comum representarmos o conjunto dos números reais através da **reta real.** Podemos associar cada número real a um único ponto da reta e vice-versa.



Proposição: Entre dois números reais distintos quaisquer, existe uma infinidade de números racionais e irracionais.

Propriedades dos Números Reais

Propriedades Básicas:

Com relação a adição usual em $\mathbb{R}$:

- Propriedade associativa: $(a+b)+c = a+(b+c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$;
- Propriedade comutativa: $a+b = b+a$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$;
- Elemento neutro aditivo: Existe um único número $0 \in \mathbb{R}$ tal que $a+0 = a$, $\forall a \in \mathbb{R}$;
- Elemento oposto: Para cada $a \in \mathbb{R}$, existe um único $-a \in \mathbb{R}$ tal que $a+(-a) = 0$.

Com relação a multiplicação usual em $\mathbb{R}$:

- Propriedade associativa: $(ab)c = a(bc)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$;
- Propriedade comutativa: $ab = ba$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$;
- Elemento neutro multiplicativo: Existe um único número $1 \in \mathbb{R}$ tal que $a.1 = a$, $\forall a \in \mathbb{R}$;
- Elemento inverso: Para cada $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, existe um único $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $a(a^{-1}) = 1$.

Propriedades dos Números Reais

Consequências das Propriedades Básicas:

Com relação a adição e a multiplicação usuais em $\mathbb{R}$:

- Propriedade distributiva: Se $a, b, c \in \mathbb{R}$, então $a(b+c) = ab + ac$ e $(b+c)a = ba + ca$.
- Regra da "balança" aditiva: Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a = b$, então $a + c = b + c$ para qualquer $c \in \mathbb{R}$.
- Regra da "balança" multiplicativa: Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a = b$, então $ac = bc$ para qualquer $c \in \mathbb{R}$.
- Lei do cancelamento aditiva: Se $a, b, c \in \mathbb{R}$ são tais que $a + c = b + c$, então $a = b$.
- Lei do cancelamento multiplicativa: Se $a, b, c \in \mathbb{R}$ são tais que $ac = bc$ e $c \neq 0$, então $a = b$.

- Lei de anulamento 1: Se $a \in \mathbb{R}$, então $a0 = 0a = 0$.
- Lei de anulamento 2: Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.
- Regra de sinais multiplicativa 1: Se $a \in \mathbb{R}$, então $-(-a) = a$.
- Regra de sinais multiplicativa 2: Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $-ab = a(-b) = -(ab)$.
- Regra de sinais multiplicativa 3: Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $(-a)(-b) = ab$.

Propriedades envolvendo desigualdades

Sejam a, b e c números reais. Então:

(i) $a < b$ se, e somente se, $a + c < b + c$ para qualquer c real.
Em símbolos:

$$\boxed{a < b \Leftrightarrow a + c < b + c}.$$

(ii) $a < b$ se, e somente se, $ac < bc$ para qualquer $c > 0$ positivo.
(Observe que a desigualdade *não muda* de sentido)

(iii) $a < b$ se, e somente se, $ac > bc$ para qualquer $c < 0$ negativo.
(Observe que a desigualdade *muda* de sentido)

Em símbolos:

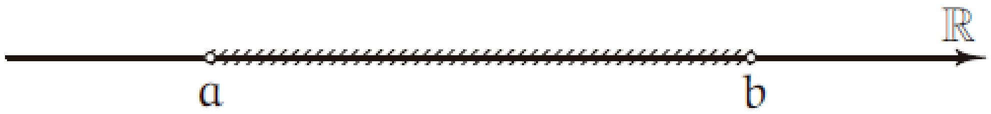
$$\boxed{a < b \Leftrightarrow \begin{cases} ac < bc, \text{ se } c > 0 \\ ac > bc, \text{ se } c < 0 \end{cases}}.$$

Resultados análogos valem quando trocamos o símbolo de desigualdade $<$ por $\leqslant$, ou por $>$, ou por $\geqslant$.

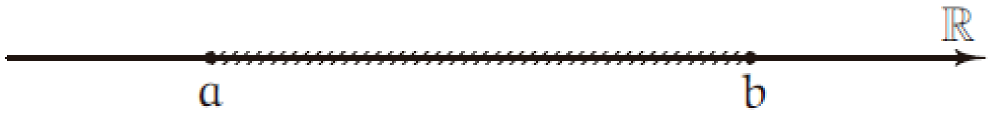
Intervalos

Sejam a e b números reais, com $a < b$. Então:

(1) $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} =]a, b[$ é chamado de intervalo aberto de extremos a e b.

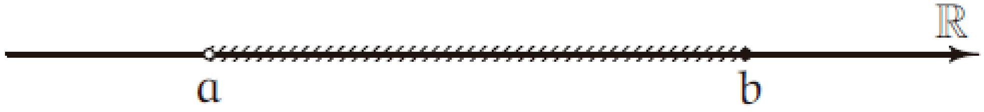


(2) $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} = [a, b]$ é chamado de intervalo fechado de extremos a e b.

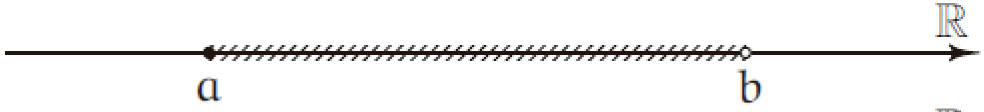


De modo análogo:

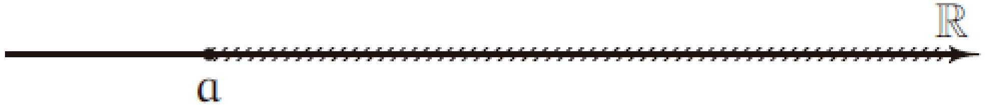
(3) $\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} =]a, b]$



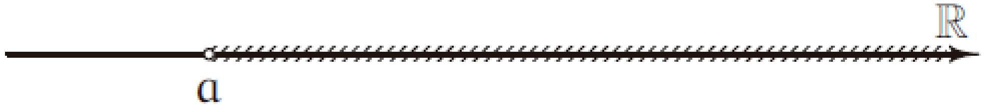
(4) $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} = [a, b[$



(5) $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} = [a, +\infty[$

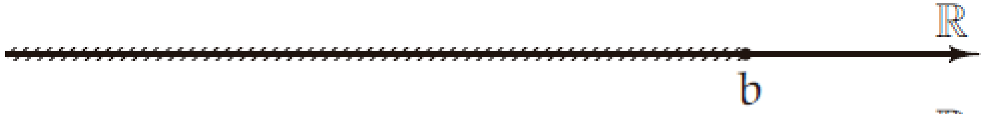


(6) $\{x \in \mathbb{R} : a < x\} =]a, +\infty[$

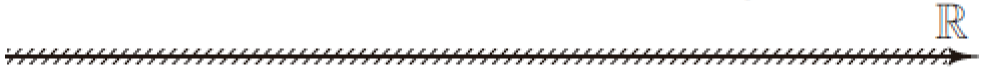


(7) $\{x \in \mathbb{R} : x < b\} =]-\infty, b[$

(8) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} =]-\infty, b]$



(9) $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$



Observações:

(1) Para representar intervalos abertos, pode-se também usar parênteses em vez de colchetes. Por exemplo:
$]a, b[= (a, b)$ e $]a, b] = (a, b]$.

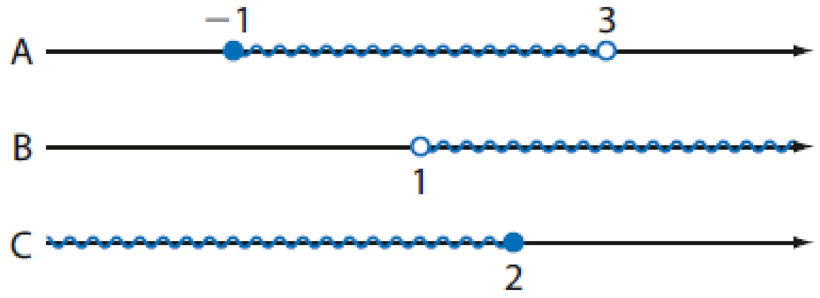
(2) Os símbolos de $+\infty$ e $-\infty$ **não são números reais**, apenas fazem parte das notações dos intervalos ilimitados.

Exemplo: Considere os intervalos

$$A = \{x \in \mathbb{R}: -1 \leq x < 3\},\ B = \{x \in \mathbb{R}: x > 1\} \text{ e } C =]-\infty, 2].$$

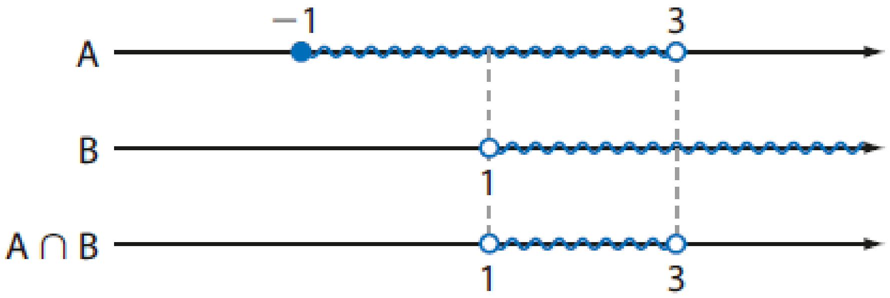
Determinar $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cup B$ e $A \cup B \cup C$.

Solução: A representação geométrica de A, B e C é dada por:



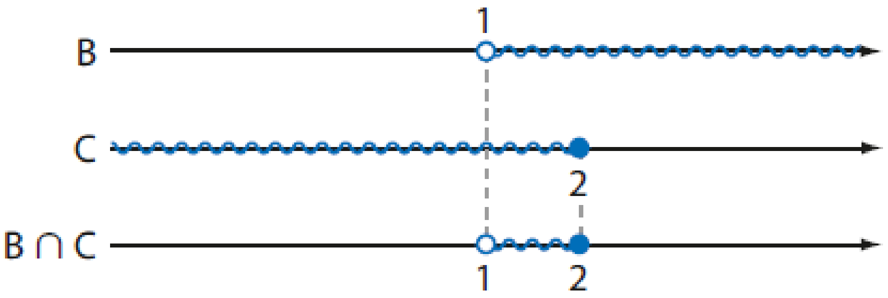
Logo,

- $A \cap B$



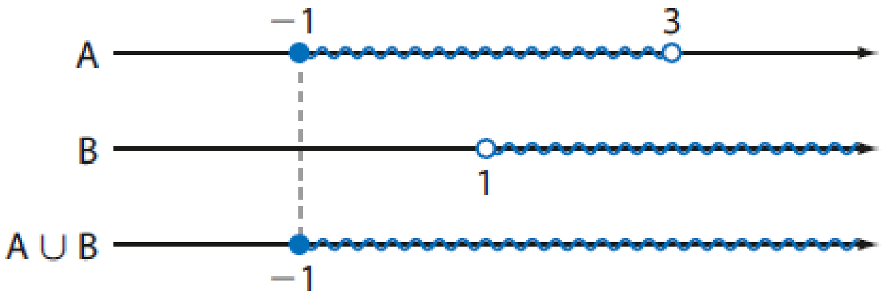
$A \cap B =]\,1, 3\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$

- $B \cap C$



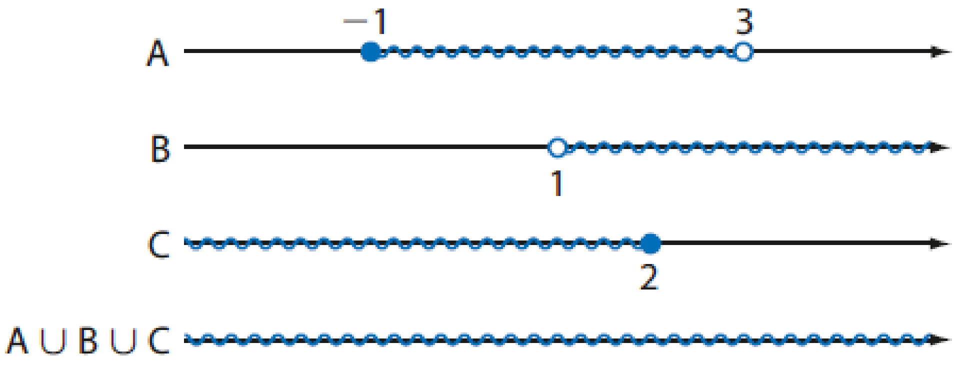
$B \cap C =]1, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leqslant 2\}$

- $A \cup B$



$$A \cup B = [-1, +\infty[\ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$$

- $A \cup B \cup C$



$$A \cup B \cup C =]-\infty, +\infty[\ = \mathbb{R}$$

Exercícios:

(1) Mostre que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Solução:

Suponhamos, por absurdo, que $\sqrt{2}$ seja racional, ou seja, $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, com $p,q\in\mathbb{Z}, q\neq 0$ e p,q primos entre si, ou seja, a fração é irredutível.
Veja que:

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q} \Rightarrow 2=\frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2=2q^2 \Rightarrow p^2 \text{ é par } \Rightarrow p \text{ é par } \Rightarrow p=2a.$$

De $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, temos

$$\sqrt{2}=\frac{2a}{q} \Rightarrow 2=\frac{(2a)^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2=4a^2 \Rightarrow q^2=2a^2 \Rightarrow q^2 \text{ é par } \Rightarrow q \text{ é par } \Rightarrow q=2b.$$

Logo, p e q não são primos entre si, pois possuem o fator 2 em comum. Absurdo com a hipótese de p e q serem primos entre si.
Assim, $\sqrt{2}$ não pode ser um número racional e, portanto, deve ser um número irracional.

(**2**) Escreva os números racionais abaixo em forma de fração, ou seja, determine a fração geratriz:

(**a**) $0{,}32$ (**b**) $0{,}888\ldots$ (**c**) $0{,}18555\ldots$ (**d**) $0{,}999\ldots$

Solução:

(**a**) Observe que $0{,}32 = \frac{32}{100} = \frac{8}{25}$.

(**b**) Seja $x = 0{,}888\ldots$, então $10x = 8{,}888\ldots$. Logo,

$$10x - x = 8{,}888\ldots - 0{,}888\ldots \Rightarrow 9x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{9}.$$

Assim, $0{,}888\ldots = \frac{8}{9}$.

(**c**) Seja $x = 0{,}18555\ldots$, então $100x = 18{,}555\ldots$ e $1000x = 185{,}555\ldots$. Daí,

$$1000x - 100x = 185{,}555\ldots - 18{,}555\ldots \Rightarrow 900x = 167 \Rightarrow x = \frac{167}{900}.$$

Logo, $0{,}18555\ldots = \frac{167}{900}$.

(**d**) Seja $x = 0{,}999\ldots$, então $10x = 9{,}999\ldots$. Logo,

$$10x - x = 9{,}999\ldots - 0{,}999\ldots \Rightarrow 9x = 9 \Rightarrow x = 1.$$

Portanto, $0{,}999\ldots = 1$.

Exercícios:

(1) Representе graficamente cada um dos seguintes intervalos:

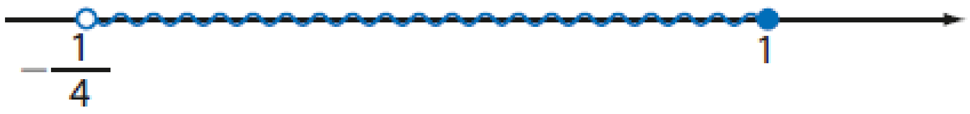
a) $]-3, 5]$ c) $\left[\frac{7}{5}, +\infty\right[$ e) $[-1, 1[$

b) $\left]-\infty, \frac{2}{3}\right[$ d) $]0, 2[$ f) $]\sqrt{2}, 5[$

(2) Descreva, por meio de uma propriedade característica, cada um dos conjuntos representados a seguir:

a) 

b) 

c) 

(3) Sejam $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$ e $B = \left]-3, \frac{4}{3}\right]$. Determine:

(a) $A \cup B$
(b) $A \cap B$
(c) $A - B$
(d) $B - A$

(4) Determine a fração geratriz:

(a) $0{,}14$

(b) $0{,}2313131\ldots$

(c) $0,\overline{2022}$

Módulo ou Valor Absoluto

Definimos o **módulo** ou **valor absoluto** de um número real x como sendo:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{se } x \geq 0 \\ -x, \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Exemplos:

- $|5| = 5$
- $|-7| = -(-7) = 7$
- $|0| = 0$
- $\left|\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$

Observação:
Geometricamente, na reta real, $|x|$ representa a distância entre x e 0.

Propriedades do Módulo

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $k > 0$. Temos:

(1) $|a| \geq 0$ e $|a| = |-a|$

(2) $a \leq |a|$

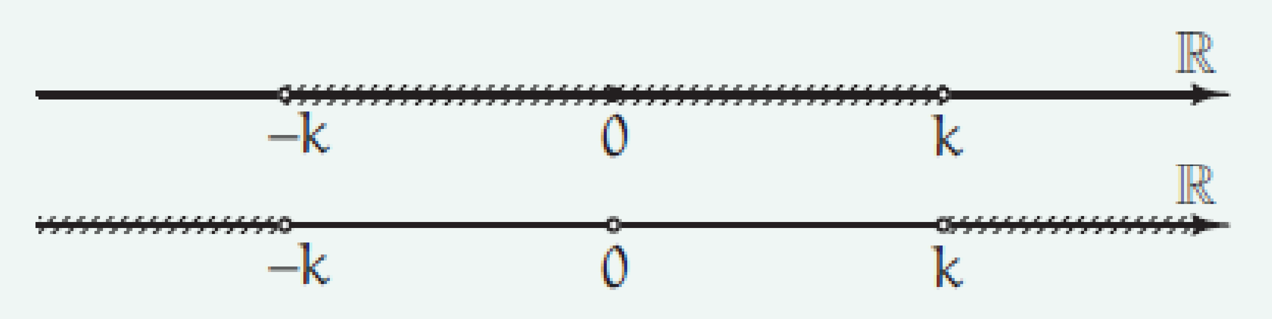
(3) $|a|^2 = a^2$

(4) $\sqrt{a^2} = |a|$

(5) $|a| = k \Leftrightarrow a = k$ ou $a = -k$

(6) $|a| < k \Leftrightarrow -k < a < k$

(7) $|a| > k \Leftrightarrow a > k$ ou $a < -k$



(8) $|ab| = |a|\,.\,|b|$ e $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

(9) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Desigualdade Triangular)

(10) $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$

Exercício: Obtenha o conjunto solução:

(a) $|5x-3|=7$ **(b)** $|2x-7|<3$ **(c)** $|9-2x|\geq 7$ **(d)** $\frac{|7-2x|}{|4+x|}\leq 2, x\neq -4$

Solução:

(a) $|5x-3|=7$

Devemos ter $5x-3=7$ ou $5x-3=-7$.

No primeiro caso:

$$5x-3=7 \Leftrightarrow 5x=10$$
$$\Leftrightarrow x=2$$

No segundo caso:

$$5x-3=-7 \Leftrightarrow 5x=-4$$
$$\Leftrightarrow x=-\frac{4}{5}$$

Logo, o conjunto solução é $S=\left\{2,-\frac{4}{5}\right\}$.

Solução:

(b) $|2x - 7| < 3$

A desigualdade é verdadeira quando $-3 < 2x - 7 < 3$.

Resolvendo a primeira inequação:

$$-3 < 2x - 7 \Leftrightarrow 4 < 2x$$
$$\Leftrightarrow 2 < x$$

Resolvendo a segunda inequação:

$$2x - 7 < 3 \Leftrightarrow 2x < 10$$
$$\Leftrightarrow x < 5$$

Portanto, a solução é dada por $S = \{x \in \mathbb{R}: 2 < x < 5\}$.

Solução:

(**c**) $|9 - 2x| \geq 7$

A inequação é verdadeira quando $9 - 2x \leq -7$ ou $9 - 2x \geq 7$.

No primeiro caso:

$$9 - 2x \leq -7 \Leftrightarrow -2x \leq -16 \overset{(-1)}{\Leftrightarrow} 2x \geq 16 \Leftrightarrow x \geq 8$$

No segundo caso:

$$9 - 2x \geq 7 \Leftrightarrow -2x \geq -2 \overset{(-1)}{\Leftrightarrow} 2x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 1$$

Logo, o conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 1 \text{ ou } x \geq 8\}$.

Solução:

(d) $\frac{|7-2x|}{|4+x|} \leq 2, x \neq -4$

Temos que $\frac{|7-2x|}{|4+x|} \leq 2 \Leftrightarrow |7-2x| \leq 2|4+x|$.

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos:

$$(|7-2x|)^2 \leq (2|4+x|)^2$$

$$\Leftrightarrow (7-2x)^2 \leq 4(4+x)^2$$

$$\Leftrightarrow 49 - 28x + 4x^2 \leq 4(16 + 8x + x^2)$$

$$\Leftrightarrow 49 - 28x + 4x^2 \leq 64 + 32x + 4x^2$$

$$\Leftrightarrow -60x \leq 15$$

$$\overset{(-1)}{\Leftrightarrow} 60x \geq -15$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{15}{60} = -\frac{1}{4}$$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R}: x \geq -\frac{1}{4}\right\}$.

Exercícios:

(1) Resolva as equações em $\mathbb{R}$.

(a) $|5x - 3| = 12$

(b) $|-4 + 12x| = 7$

(c) $\left|\frac{3x+8}{2x-3}\right| = 4$

(d) $|2x - 3| = |7x - 5|$

(e) $|3x + 2| = 5 - x$

(2) Resolva as inequações em $\mathbb{R}$.

(a) $|x + 12| < 7$

(b) $|3x - 4| \leq 2$

(c) $|5 - 6x| \geq 9$

(d) $|x + 4| \geq |x - 6|$

(3) Elimine o módulo das expressões.

(a) $|x - 2| - |x + 1|$

(b) $|x| + |x - 1| + |2x - 4|$

(4) Resolva a inequação:

$$3|x-1| + |x| < 1.$$

(Dica: elimine o módulo antes de resolver a inequação.)

(5) Mostre que a média geométrica entre dois números reais positivos é menor ou igual a média aritmética entre eles, ou seja, se x e y são números reais positivos, então

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$