

Quantum Effects

Alessio Cimma

February 18, 2025



Contents

1	Waves	2
2	Double - Slit	2
3	Photoelectric	2
4	De Broglie	3
5	Eigen - Stuff	3
6	Schrödinger	4
7	Time evolution	5
8	Uncertainty	6
9	Current density	7
10	Potential step: $E > V_0$	8
11	Potential step: $E < V_0$	9
12	Effetto tunnel	10
13	WKB	10

14 α - decay	11
15 Cold emission	11
16 Potential well: finita	12
17 Potential well: infinita	13
18 Parity	14
19 δ holes	14
20 Kronig-Penney	15
21 Momento angolare	16
21.1 Introduzione	16
21.2 Eigen-stuff	16
21.3 Ladder operator	18
21.4 Derivazione di β e m	18
21.5 Coordinate sferiche	19
22 Spin	19
22.1 Stern-Gerlach	19
22.2 Teoria	19
22.3 Gyromagnetic factor / MRI	19
23 Somma di 2 spin	19
24 Somma di spin con momento angolare	19
25 Perturbation theory (NON - DEGENERATE)	19
26 Zeeman normale	19
27 Relativistic correction	19
28 Interazione: Spin - orbita	19
29 Zeemano anomalous	19
30 Gauge invarianza	19
31 Coulomb invarianza	19
32 Magnetic properties	19
33 Landau levels	19
34 Quantum Hall effect	19

1 Waves

D'alambert equation:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Intensity:

$$I \propto A^2$$

$$I_{1+2} \propto |A_1 e^{ia_1} + A_2 e^{ia_2}|^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(a_1 - a_2)$$

Versione esponenziale:

$$y(x, t) = A e^{i(kx - \omega t + \phi)}$$

2 Double - Slit

L'alternanza delle fasce luminose e scure avviene quando i due cammini sono uguali o hanno una differenza di k volte la lunghezza d'onda λ .

$$\delta = k\Delta = kd \sin(\theta) \sim kxd/L$$

Dove:

- k = Numero d'onda
- Δ = Differenza di cammino
- θ = Angolo formato dal centro (primo ordine)
- x = Distanza dal centro (primo ordine)
- d = Distanza tra gli slit
- L = Distanza dello schermo dagli slit

L'intensità in questo caso risulterà essere:

$$I_{1+2} \propto 2A^2(1 + \cos(k\Delta))$$

3 Photoelectric

Dato un circuito abbiamo che indipendentemente dall'intensità, non riusciamo a strappare elettroni da una superficie metallica, quando però la frequenza arriva ad un certo punto, avviene passaggio di corrente, e a questo punto essa sarà proporzionale all'intensità dell'onda.

4 De Broglie

$$E = h\nu \quad p = h\lambda \quad E = p^2/2m$$

In pratica possiamo sostituire nell'esponenziale i termini di energia e otteniamo:

$$\psi_p(x, t) = Ae^{i\frac{2\pi}{h}(px - Et)}$$

Provando però ad eseguire queste sostituzioni, scopriamo che non rispettano più l'equazioni di d'Alambert, le evidenze sperimentali ci portano ad ottenere una nuova riformulazione:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_p(\vec{x}, t) = \frac{p^2}{2m} \psi_p(\vec{x}, t) = E \psi_p(\vec{x}, t) = -\frac{\nabla^2}{2m} \psi_p(\vec{x}, t)$$

5 Eigen - Stuff

Stato fisico: In un sistema fisico (che può essere una o più particelle), lo stato fisico del sistema è descritto da un vettore NORMALIZZATO $|\psi(t)\rangle$ chiamato funzione d'onda. Se il $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = 1$ allora è normalizzato.

Osservabile: Le quantità misurabili di un sistema (posizione, energia, momento angolare, ecc.) sono chiamate *osservabili*, esse sono descritte dagli operatori Hermitiani. Esiste la *Principio di Corrispondenza* che sarebbe la promozione da 'quantità fisica' a 'operatore'.

Operatore hermitiano: Operatore (matrice) che agendo sullo stato fisico (funzione d'onda ψ) permette di ottenere un'autovalore. L'operatore è hermitiano se $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$, ovvero se è uguale alla sua **TRASPOSTA - CONIUGATA**.

Autovalore: Valore associato all'operatore, rappresenta la quantità misurabile, di fatto è uguale all'azione dell'operatore in quel specifico caso. Questo significa che l'azione dell'operatore su uno stato fisico, lo porta a collassare in un singolo valore (la misura).

Autostato / Autovettore: Stato $\langle l |$ che descrive lo stato originale $|\psi\rangle$ dopo l'applicazione di \hat{A} . Se ψ non è uno auto-stato dell'operatore originariamente, allora questo verrà scomposto in una combinazione lineare di auto-stati dell'operatore.

Probabilità: Se ad uno stato fisico applichiamo un'operatore, otterremo la corrispettiva combinazione di autovalori e autostati. L'autostato sarà normalizzato. La probabilità di ottenere esattamente l'autovalore come risultato della misura, dipenderà da quanto lo stato fisico prima e dopo overlappano:

$$\rho(\lambda_l) = |\langle l | \psi \rangle|^2$$

Dal momento che la probabilità di uno auto-stato dipende dal suo modulo quadro, la fase non avrà effetto sulla probabilità, dunque due auto-stati saranno considerati uguali anche se hanno una fase diversa.

Ripetibilità: Se applichiamo un'operatore su uno stato fisico generico e lo facciamo collassare in uno auto-stato, se ripetiamo la misurazione *'Immediately afterwards'* (lo stato non ha tempo di cambiare a causa della time evolution) il risultato non cambierà e otterremo l'autovalore con probabilità del 100%. Questo perchè dopo la prima applicazione, lo stato $|\psi\rangle$ è collassato in una combinazione lineare di autostati dell'operatore, quindi riapplicare l'operatore porterà ad ottenere un fattore di scala (autovalore λ) che si integra perfettamente con la nuova base di autostati.

Expectation values (media): In pratica applichiamo l'operatore \hat{A} su ψ , portandolo in una combinazione di autostati intermedi. Subito dopo calcoliamo l'overlap della combinazione di autostati con lo stato originale eseguendo il $\langle\psi|l\rangle$. Rieseguendo lo stesso calcolo N volte, otteniamo che in media la combinazione di autovalori risultanti sarà uguale a $\langle A \rangle$, ovvero la media.

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$$

6 Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$$

H è l'hamiltoniana del sistema, ovvero l'insieme delle energie. Di seguito sono riportati operatori importanti.

$$\begin{aligned}\hat{x} &= x \\ \hat{p} &= -i\hbar \vec{\nabla}\end{aligned}$$

Commutazioni: La formula generica dice che $[A, B] = AB - BA$, se questo è uguale a 0, allora i due operatori commutano. Nel caso di posizione e quantità di moto, non commutano. Dimostrazione nel principio di indeterminazione di Heisenberg.

Calcolo commutatore posizione quantità di moto: Appliciamo il commutatore $[A, B]$ su una $f(x)$ qualsiasi, e vediamo quanto vale:

$$-i\hbar \left[x, \frac{\partial}{\partial x} \right] f(x) = -i\hbar \left[x \frac{\partial f(x)}{\partial x} - \frac{\partial (xf(x))}{\partial x} \right]$$

Applicando la regola del prodotto di derivate $f'(xy) = yf'(x) + xf'(y)$ abbiamo che:

$$-i\hbar \left(x \cancel{\frac{\partial f(x)}{\partial x}} - x \cancel{\frac{\partial f(x)}{\partial x}} - f(x) \frac{\partial x}{\partial x} \right) = i\hbar f(x)$$

Quindi abbiamo un termine moltiplicativo rimanente uguale a $i\hbar$.

Normalizzazione usando t:

$$\langle \psi(t) | \vec{x} \rangle \langle \vec{x} | \psi(t) \rangle = |\psi(\vec{x}, t)|^2 \equiv \rho(\vec{x}, t)$$

7 Time evolution

L'hamiltoniana è intrinsecamente time-independent dal momento che sia l'operatore spazio che l'operatore quantità di moto lo sono. Questo significa che possiamo cercare delle soluzioni particolari che abbiano lo spazio e il tempo fattorizzato:

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x})f(t)$$

Sostituiamo nell'equazione di Schrödinger originale:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{x})f(t) = H\phi(\vec{x})f(t)$$

Moltiplichiamo entrambi i termini per $1/\phi(\vec{x}, t)$:

$$\frac{1}{\phi(\vec{x})f(t)} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{x})f(t) = \frac{1}{\phi(\vec{x})f(t)} H\phi(\vec{x})f(t)$$

Dato che a sinistra la derivata agisce solo su $f(t)$, mentre a destra agisce solo $\phi(\vec{x})$:

$$\frac{1}{f(t)} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} f(t) = \frac{1}{\phi(\vec{x})} H\phi(\vec{x})$$

Possiamo dire che dato che entrambi i lati dipendono solo da un tipo di variabile per volta, allora avremo che questi due termini saranno uguali ad un valore E:

$$\frac{1}{f(t)} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} f(t) = E \longrightarrow f(t) \propto e^{-iEt/\hbar}$$

Mentre l'equazione classica dipendente solo da x, rimane la stessa. Quindi la soluzione totale, sarà una funzione di x per una fase di t:

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x})e^{-iEt/\hbar}$$

Questo ci porta a poter calcolare un generico stato ψ con stato iniziale $\langle\psi(0)|$ come:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_i e^{-iE_i t/\hbar} |\phi_i(0)\rangle \langle\phi_i(0)|\psi(0)\rangle$$

E credo che possiamo quindi risolvere il problema come:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\psi(0)\rangle$$

ESERCIZIO DALLA PROVA: A quantum system evolves with a time-independent Hamiltonian \hat{H} and at $t = 0$ is in state $|\psi(0)\rangle = (|1\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$, where $|n\rangle$ are energy eigenstates with $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$.

What is the probability that the system will be found in the initial state at time $T > 0$?

Per calcolare la probabilità usiamo:

$$P = |\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle|^2$$

Sostituendo i valori delle Ψ otteniamo:

$$\langle \Psi_0 | \Psi_t \rangle = \left\langle \frac{|1\rangle + |2\rangle}{\sqrt{2}} \left| \frac{e^{-iE_1 T/\hbar} |1\rangle + e^{-iE_2 T/\hbar} |2\rangle}{\sqrt{2}} \right\rangle\right.$$

Calcoliamo le varie combinazioni ricordando che $\langle a|a\rangle = 1$, mentre $\langle a|b\rangle = 0$

$$\langle \Psi_0 | \Psi_t \rangle = \frac{1}{2} \left(e^{-iE_1 T/\hbar} + e^{-iE_2 T/\hbar} \right)$$

Ora possiamo trasformare tutto in coseni con la seguente formula:

$$e^{iA} + e^{iB} = 2e^{i(A+B)/2} \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$P = \left| \frac{1}{2} 2 e^{-i(E_1+E_2)T/2\hbar} \cos\left(\frac{(E_1-E_2)T}{2\hbar}\right) \right|^2$$

Eliminando la parte immaginaria perchè tanto con il valore assoluto scompare:

$$P = \cos^2\left(\frac{(E_1-E_2)T}{2\hbar}\right)$$

Sapendo che esiste la relazione:

$$\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

$$P = \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{(E_1-E_2)T}{\hbar}\right) \right)$$

8 Uncertainty

È possibile avere una base ortonormale composta da autostati comuni a due operatori (ovvero che commutano). Per esempio:

$$A|\lambda_k, \beta_k\rangle = \lambda_k |\lambda_k, \beta_k\rangle \text{ and } B|\lambda_k, \beta_k\rangle = \beta_k |\lambda_k, \beta_k\rangle$$

Questo significa che applicando uno dei due operatori, otteniamo comunque un autovalore e un autostato sempre. Se invece i due operatori non commutano NON possiamo trovare una base comune ad entrambi.

Standard - Deviation: Concetto importante, ovvero la differenza che esiste tra l'operatore e l'expectation value di quest'ultimo su uno stato generico ψ . Immagino che su uno stato generico (non autostato), il valore che si ottiene di discosta tanto più sia difficile rappresentare con una base di autostati questa situazione:

$$\Delta\hat{x} \equiv \hat{x} - \langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle$$

Mentre la varianza, non è altro che il quadrato della deviazione standard:

$$(\Delta x)^2 \equiv \langle\psi|(\Delta\hat{x})^2|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{x}^2|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle^2$$

Il modo in cui puoi derivarlo è sviluppando il quadrato:

$$\Delta\hat{x}^2 = (\hat{x} - \langle\hat{x}\rangle)^2 = \hat{x}^2 + \langle\hat{x}\rangle^2 - 2\langle\hat{x}\rangle\hat{x}$$

Dato che $\langle\hat{x}\rangle$ è un valore reale, quando metti tutto dentro al calcolo $\langle\psi|X|\psi\rangle$, la costante può uscire, lasciandoti con solo il risultato trovato prima.

Schwarz inequality: Molto straight - forward $\rightarrow \langle v|v \rangle \langle w|w \rangle \geq |\langle v|w \rangle|^2$, in teoria dovrebbe significare che la varianza minima che uno può ottenere è il quadrato del prodotto delle varianze.

Heisenberg Uncertainty Principle: Possiamo usare questa ugualianza per riscrivere tutto in termini di x e p .

$$(\Delta x)^2 (\Delta p_x)^2 \equiv \langle \psi | (\Delta \hat{x})^2 | \psi \rangle \langle \psi | (\Delta \hat{p}_x)^2 | \psi \rangle \geq |\langle \psi | \Delta \hat{x} \Delta \hat{p}_x | \psi \rangle|^2$$

General decomposition commutatori:

$$AB = [A, B]/2 + \{A, B\}/2$$

Possiamo usarla per risolvere finalmente il problema precedente:

$$(\Delta x)^2 (\Delta p_x)^2 \geq \frac{1}{4} \left| \langle \psi | [\Delta \hat{x}, \Delta \hat{p}_x] | \psi \rangle + \langle \psi | \{ \Delta \hat{x}, \Delta \hat{p}_x \} | \psi \rangle \right|^2$$

Una volta che proviamo a scomporre il $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, si può usare MOLTA matematica per dimostrare che la parte $[A, B]$ è puramente immaginaria, mentre $\{A, B\}$ è puramente reale, e che il prodotto di parte reale pura per parte immaginaria pura ci darà un nuovo numero immaginario. Prendendo i valori assoluti li eliminerà, lasciando solo la componente con il commutatore $[A, B]$.

$$(\Delta x)^2 (\Delta p_x)^2 \geq \frac{1}{4} \left| \langle \psi | [\hat{x}, \hat{p}_x] | \psi \rangle \right|^2$$

Dal capitolo prima sappiamo che il commutatore posizione e quantità di moto è uguale ad \hbar .

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

9 Current density

Continuity equation: Ci dice che la carica totale è conservata, al massimo si può spostare:

$$\frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}, t)$$

Se proviamo ad integrare nello spazio i due termini, ovvero fare il $\int_V d^3x$ dove tra l'altro tutti i termini in funzione di (t) escono, otteniamo per il primo termine:

$$\frac{dQ}{dt}$$

Mentre per il secondo termine usando il teorema della divergenza, il quale dice che *'Il flusso in uscita attraverso una superficie chiusa è uguale alla divergenza all'interno del volume'*:

$$-\int_S \vec{J}(\vec{x}, t) \cdot d\vec{S} = -I$$

Quello che si può fare è calcolare quanto vale:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\psi^* \psi) = -\vec{\nabla} \cdot \left\{ \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) \right\}$$

Quindi prendendo la prima equazione di continuità:

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)$$

10 Potential step: $E > V_0$

In ogni esercizio legato alle barriere di densità dovrà essere rispettata la condizione di continuità di $f(x)$ e $f'(x)$. Questo è dovuto al fatto che usando la seguente equazione di Schrödinger, una discontinuità renderebbe le varie derivate di forme diverse, e quindi i due lati dell'equazione non uguali:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\psi(x)$$

In questo caso avremo che l'energia della particella sarà maggiore dell'ostacolo, avremo quindi due diverse funzioni (prima e dopo) e la differenza tra le due sta nel coefficiente moltiplicativo:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} &= -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_{\text{I}}(x) \\ \text{II)} \quad \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} &= -\frac{2m(E - V(x))}{\hbar^2}\psi_{\text{II}}(x) \end{aligned}$$

Noi possiamo raccogliere appunto dal lato destro dell'equazione tutto ciò che non è ψ , ottenendo:

$$k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar$$

$$q \equiv \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar$$

Ora possiamo usare delle funzioni di prova che descrivono un'onda stazionaria e cercare di trovare un risultato:

$$\psi_{\text{I}} = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

$$\psi_{\text{II}} = Ce^{iqx} + De^{-iqx}$$

Da qui ricaviamo che se applicassimo l'hamiltoniana a una delle ψ otterremmo che risolvendo i calcoli abbiamo l'autovalore uguale a:

$$E_{\text{I}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$E_{\text{II}} = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} + V_0$$

Dal momento che sappiamo che c'è continuità tra le due equazioni, possiamo calcolare quanto vale il tutto a 0. Nota che l'equazione (II) non ha più il termine D, questo perchè assumiamo che dalla barriera non arrivi più nulla.

$$\psi_{\text{I}} = A + B = \psi_{\text{II}} = C$$

$$\psi'_{\text{I}} = ik(A - B) = \psi'_{\text{II}} = iqC$$

Nella parte delle derivate, è solo la derivata dell'esponenziale di e^{ikx} . Questo non ci permette di quantificare esattamente i coefficienti, ma ci permette di trovare una loro relazione, sostituendo C con A + B nell'equazione delle derivate, otteniamo:

$$\frac{B}{A} = \frac{k - q}{k + q}$$

Usando questo risultato e sostituendo in $C = A + B$ il valore di B con quello che abbiamo appena trovato otteniamo:

$$\frac{C}{A} = \frac{2k}{k+q}$$

Dall'equazione delle correnti possiamo ottenere una migliore comprensione di cosa è A , B e C . (Guarda com'è l'equazione della corrente, la cosa importante è che facendo $\psi^*\psi$ avrai l'ampiezza al quadrato):

$$\frac{\hbar k}{m}(|A|^2 - |B|^2) = J_{\text{in}} - J_{\text{refl}}$$

Puoi fare la stessa cosa con ψ_{II} e otterrai:

$$\frac{\hbar q}{m}|C|^2 = J_{\text{trans}}$$

Questi sono i valori che possiamo usare per calcolare i coefficienti di trasmissione e riflessione, fai semplicemente il rapporto dei 2:

$$\text{Refl} = \frac{|B|^2}{|A|^2}$$

$$\text{Trans} = \frac{q}{k} \frac{|C|^2}{|A|^2}$$

Conclusioni: Nel caso quantistico ci sarà sempre un minimo di riflessione, anche se questa tenderà a zero per differenza di energia molto grandi. Nel caso classico invece è vero o falso.

11 Potential step: $E < V_0$

Consideriamo la stessa identica cosa, ma ora il potenziale è maggiore dell'energia della particella. In questo caso però quando calcoliamo 'g' (la vecchia 'q'), dovremo raccogliere un meno per rendere la radice risolvibile, questo significa che otterremo la seguente equazione:

$$\psi_{\text{II}}(x) = Ce^{-gx} + De^{gx}$$

Questo però significa che se $D \neq 0$ allora per $x \rightarrow \infty$, ψ diverge. Questo ci porta a mettere $D = 0$. Se $D = 0$, allora significa che il coefficiente di trasmissione sarà nullo. Questo significa che la particella non verrà trasmessa attraverso lo step, ma la sua funzione d'onda non svanirà istantaneamente, avrà una rapida diminuzione. Se ricalcoliamo i rapporti tra $B/A = 1$ e $C/A = 0$ rimpiazzando $iq \rightarrow g$ otterremo che dentro lo step, abbiamo un decadimento esponenziale della funzione d'onda oramai diventata reale. Puoi anche dimostrarlo con la densità di corrente se vuoi.

Caso con $V_0 \rightarrow \infty$: Se consideriamo un potenziale che tende ad ∞ , allora la propagazione tenderà a zero, rendendo discontinua l'equazione. È tutto corretto, ricorda che la penetrazione con potenziale assunto ad infinito è uguale a 0.

12 Effetto tunnel

Immaginiamo invece ora di avere uno step di dimensioni non infinite, ma di una certa larghezza L e altezza V_0 e tutto attorno 0. Ora avremo 3 equazioni diverse che descrivono come si comporta la particella:

$$\begin{aligned}\psi_I &= Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \\ \psi_{II} &= Fe^{-gx} + De^{gx} \\ \psi_{III} &= Ce^{ikx}\end{aligned}$$

Dove ricordiamo che k è il valore con solo E , mentre g è il valore con $V_0 - E$. Non lo scrivo, ma poniamo le **condizioni di continuità** in entrambi i lati con sia la funzione base che la derivata. Per risolvere le equazioni è molto semplice usare come sistema di riferimento l'inizio della barriera a $-L/2$ e la fine a $L/2$. Possiamo quindi ricavare il valore di F e D usando le equazioni della parte destra (per semplicità, così c'è solo C e non $A + B$), e sommandole tra loro e sottraendole otterremo D e F . Ricorda che per eseguire questo calcolo è utile dividere la derivata della continuità di destra per g .

Considerazioni: Abbiamo una decrescita esponenziale all'interno della barriera, ma poi una successiva ricomparsa al suo termine SE la barriera è abbastanza stretta, per larghezze che tendono ad infinito, il sistema si comporta come nel caso dello step. Ricorda che anche l'altezza influenza la forza di attenuazione. Ci sono parecchi calcoli con sinusoidi iperboliche che skippo, sono usati per il calcolo della densità di corrente. Sappi che per $gL \ll 1$ avremo una trasmissione di circa 1.

13 WKB

E se il potenziale della barriera non fosse costante? Beh possiamo riscrivere l'equazione di partenza con $V(x)$ anziché $V(0)$.

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = k^2(x)\psi(x), \text{ dove } k(x) \equiv \sqrt{2m(V(x) - E)}/\hbar$$

Si dimostra che sostituendo il tutto con la seguente formula si ottiene una fedele approssimazione nel caso in cui il potenziale è una funzione che è *slowly varying*. Questo è possibile dimostrarlo derivando 2 volte il tutto:

$$\psi(x) \sim \psi(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^x dx' k(x')\right)$$

Quindi, nel caso in cui abbiamo effettivamente un'ostacolo tra x_1 e x_2 , possiamo scrivere che:

$$\psi(x_2) \sim \psi(x_1) \exp\left(-\int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{2m(V(x) - E)}/\hbar\right)$$

Questo semplifica di molto il calcolo della trasmissione, perchè se il risultato è semplicemente il rapporto, allora:

$$t(E) \sim \frac{|\psi(x_2)|^2}{|\psi(x_1)|^2} \sim \exp\left(-2 \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{2m(V(x) - E)}/\hbar\right)$$

Il due che c'è dentro alla parentesi è dovuto al quadrato che viene portato dentro all'esponenziale. Come cross-check puoi controllare che funziona anche per la barriera piatta.

14 α - decay

Uno dei possibili utilizzi della WKB. Sappiamo che dentro al nucleo ci sono delle forze di attrazione, tali per cui la particella α non riesce a liberarsi. Superata questa barriera, la particella subirebbe la repulsione Coulombiana legata alla repulsione tra 2 particelle cariche positivamente. In tutto questo stiamo trascurando l'effetto degli elettroni su questi 2 nuclei.

Questo significa che il nucleo α possiede una certa energia E non sufficiente a superare l'attrazione nucleare, ma sufficiente a trovarsi a qualche femtometro di distanza, dove con la propria energia riesce a matchare l'energia di repulsione Coulombiana. Questo significa che la particella dovrà 'tunnelare' attraverso questa curva.

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$t(E) = \exp \left[-\frac{2\sqrt{2 * 4m_p}}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} dr \sqrt{V(r) - E} \right]$$

Questa formula è letteralmente la formula di soluzione dell'effetto tunnel usando la WKB con la formula del potenziale sostituito.

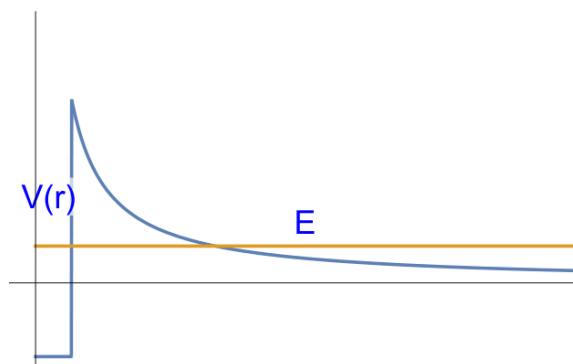


Figure 1: Potenziale α -decay

Sviluppo: Possiamo definire altri valori, come il punto di massima energia, il punto in cui l'energia della particella α e il potenziale Coulombiano si ugualiano. Possiamo inoltre ricordare che il raggio del nucleo scala all'incirca con questa forma: $R \sim Z_1^{1/3}$. Viene inoltre introdotta anche la vita media, come $\ln \tau \propto -\ln t(E)$. Un'importante considerazione è il fatto che l'espulsione di questi nuclei di He è più propensa per nuclei più leggeri, ma c'è da ricordare che nella realtà questi nuclei hanno molta più energia nei nuclei più pesanti, garantendo quindi che l'effetto sia più propenso negli elementi più pesanti.

15 Cold emission

Un altro caso di utilizzo è la cold emission usato nell'STM (Scanning Tunnelling Microscope). In questo caso però la barriera da superare è infinita, nel senso che senza un aiuto esterno, l'attrazione

del materiale, chiamata *work-function* Φ è costante nello spazio, come anche l'energia dell'elettrone, che però è minore di Φ .

Quando però un campo elettrico esterno viene applicato, 'richiamando' l'elettrone, il potenziale Φ viene schiacciato verso il basso creando un potenziale triangolare, che, usando la WKB possiamo risolvere, trovando il punto dove $V(x) = \Phi + E - |e|\mathcal{E}x$. La forma sarà quella di un esponenziale che andrà da 0 a $\Phi/(|e|\mathcal{E})$ e come argomento poi la differenza di Φ e $|e|\mathcal{E}x$.

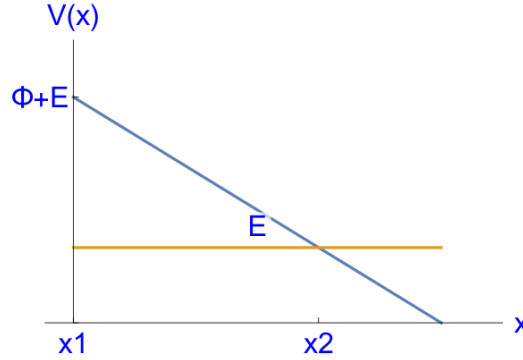


Figure 2: Cold emission potenziale

STM: Il microscopio che sfrutta questo principio, dove la corrente è uguale a:

$$I \propto t(E) \propto \exp(-cd)$$

Quindi per distanze maggiori, la corrente diminuisce esponenzialmente.

16 Potential well: finita

Ora immaginiamo che la particella si trova dentro una buca di potenziale FINITA, ovvero che $E < V_0 < \infty$. Vengono fatte delle considerazioni riguardo alla simmetria della buca di potenziale, e che le equazioni sono molto simili allo step a larghezza infinita. Con un discorso sulle probabilità possiamo dire che in pratica che:

$$\begin{aligned}\rho(x) &= \rho(-x) \\ |\psi(x)|^2 &= |\psi(-x)|^2\end{aligned}$$

Le due hanno la stessa probabilità, quindi possono differire al massimo per un fattore di fase.

$$\psi(x) = e^{i\alpha}\psi(-x) \text{ and } \psi(-x) = e^{i\alpha}\psi(x)$$

Quindi sostituendo una versione nell'altra:

$$\psi(x) = e^{2i\alpha}\psi(x)$$

Per mantenere la normalizzazione, $e^{i2\alpha}$ dovrà essere uguale 1 allora viene fuori che $\alpha = 0, \pi$. Questo significa che le soluzioni di $\psi(x)$ possono essere $\pm\psi(-x)$. Questo significa che avremo due diverse

classi di soluzioni: *odd* e *even*. Quelle odd saranno del tipo $A \sin(kx)$, mentre le even saranno del tipo $A \cos(kx)$. Questo porterà ad avere lo stesso comportamento ad un estremo ($L/2$) e il comportamento opposto dall'altra parte ($-L/2$).

Consideriamo per esempio prima le *even* e imponiamo la continuità di ψ e ψ'

$$\begin{cases} A \cos(kL/2) = B e^{-gL/2} \\ -Ak \sin(kL/2) = -Bge^{-gL/2} \end{cases}$$

Possiamo trovare la soluzione di tale problema calcolando la $\tan(kL/2) = g/k$ e introducendo il calcolo dell'energia come una funzione trascendentale:

$$E = \frac{\sqrt{\zeta^2 - (kL/2)^2}}{kL/2}, \text{ dove } \zeta = \sqrt{2mV_0}L/(2\hbar) \text{ e } \zeta \geq kL/2 \geq 0$$

In pratica ci viene data questa energia, che è in funzione di k che ci da un'idea dell'energia della particella e di L che invece si riferisce alla geometria del problema. Quando si plottano queste immagini otteniamo:

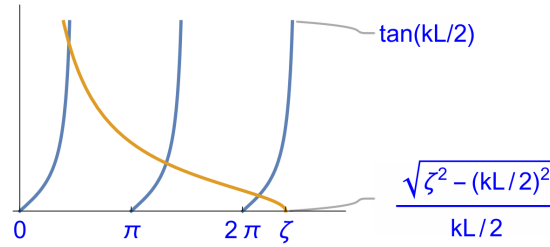


Figure 3: confronto andamento ψ fuori dai limiti

Nota come partendo da 0 il plot blu intercetterà sempre almeno un livello di energia, questo è lo stato fondamentale di minor energia possibile. I livelli di energia che possono esistere dentro alla buca di potenziale finita sono limitati. Questo è dovuto anche perchè quando l'energia è maggiore della buca, la particella semplicemente esce.

Risolvendo graficamente possiamo determinare che quindi l'energia del sistema sarà calcolato come:

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = V_0 \frac{(k_n L/2)^2}{\zeta^2}$$

Ricorda che il valore di ζ è dato dalla geometria del problema, in base a questo, possiamo determinare il tipo di energia concessa per quello specifico problema.

Notiamo invece che nel caso invece di onde 'odd' abbiamo un minimo di energia al di sotto dei quali non possono esistere onde asimmetriche, che è per $\zeta < \pi/2$.

17 Potential well: infinita

Se il potenziale è talmente alto da potersi considerare infinito, allora anche $\zeta \rightarrow \infty$ questo ci porta ad avere l'andamento di ζ asintotico rispetto alle tangenti, quindi abbiamo virtualmente un'infinito

numero di soluzioni, questo inoltre significa che la funzione d'onda decresce così velocemente che possiamo dire che la probabilità di trovare la particella fuori dalla buca di potenziale è 0.

L'unica cosa da sapere è che il valore dell'energia è di:

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{[\hbar n \pi]^2}{2mL}, \text{ dove } n = 1, 2, 3, \dots$$

Un'altra cosa, la condizione di normalizzazione, ovvero l'ampiezza di A:

$$A = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

Questo perchè:

$$1 = |A|^2 \int_0^L dx |\sin(k_n x)|^2 = |A|^2 \frac{L}{2} \longrightarrow A = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

18 Parity

Operatore parità P, cambia la posizione da $x \rightarrow -x$, quindi su una funzione otteniamo:

$$Pf(x) = f(-x)$$

Questo significa che su funzioni even, le lascia invariate, mentre flippa lungo l'asse Y le funzioni odd ($\psi(-x) \rightarrow -\psi(x)$). Si può inoltre dimostrare che $[P, H] = 0$, questo ci permette quindi di giustificare perchè abbiamo applicato la parità prima senza farci troppi problemi.

19 δ holes

Sono un costrutto matematico in cui abbiamo una potential well infinitamente stretta a profonda, quello che possiamo ricavare è che $\psi(x)$ sarà continua in x , mentre la sua derivata sarà discontinua.

Per descrivere questo potenziale usiamo la seguente formula in cui consideriamo il limite per cui $L \rightarrow 0$ e $V_0 \rightarrow \infty$ e che il prodotto di LV_0 sia costante.

$$V(x) = -V_0 L \delta(x)$$

Questo ci permette di separare il problema in 2 parti, dentro al potenziale e fuori, consideriamo prima il fuori:

$$x \neq 0 : \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x) \equiv \kappa^2 \psi(x), \text{ dove } \kappa \equiv \sqrt{-2mE}/\hbar$$

Quindi la soluzione generica sarà la somma di due onde (progressiva e regressiva) in una direzione e nell'altra. Ma per evitare che questa diverga, dobbiamo eliminare i due termini 'esplosivi' e successivamente per garantire la continuità, le altre 2 ampiezze dovranno essere uguali. Dunque:

$$\psi(x) = Ae^{-\kappa|x|} = \sqrt{\kappa} e^{-\kappa|x|}$$

Per la parte invece dentro al buco, non voglio risolvere l'integrale, quindi ecco una storiella:

Risoluzione intuitiva: Dal momento che questa è una buca di potenziale a tutti gli effetti, anche l'andamento di ζ deve mantenersi uguale. Dato che ζ varia in funzione di \sqrt{L} , allora per $L \rightarrow 0$ anche $\zeta \rightarrow 0$. Se questo è vero, allora ζ intersecherà solo la prima tangente, quella che passa dallo stato fondamentale, dandoci un solo livello energetico a disposizione. Un'energia più grande permetterebbe di uscire dalla buca.

$$E = -\frac{mV_0^2 L^2}{2\hbar^2}$$

20 Kronig-Penney

$$V(x) = -LV_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nL)$$

Abbiamo un andamento periodico, ovvero, ogni L di spazio la situazione si ripete. Derivazione da spararsi (presenza di potenziali periodici e cambi di variabili, sembra sospettosamente simile a Bloch). Analizziamo solo il risultato che si ottiene:

$$\cos(\alpha) = \cos(kL) - \frac{mV_0 L}{k\hbar^2} \sin(kL)$$

Notiamo che la prima parte è il potenziale periodico, che è simile alla descrizione della funzione di Bloch, dove un certo potenziale riappare nel tempo. La seconda parte invece è più riferita all'attenuazione della funzione d'onda nel tempo, credo sia la conseguenza dell'effetto di riflessione / trasmissione ogni volta che la funzione d'onda incontra un'ostacolo (la buca di potenziale). Più l'energia è grande è più questo termine si riduce, questo suggerisce che a grandi energie la particella si comporta come se il reticolo non esistesse, o come se il reticolo non rappresentasse più un ostacolo per la particella.

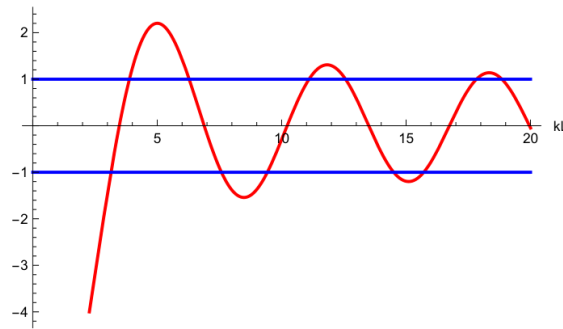


Figure 4: Andamento Kronig-Penney e generazione band-gap

Band-Gap: Del grafico rosso, sono solo accettabili le zone in cui la funzione è compresa tra -1 e 1, quindi si formano delle bande accettabili e non. La distanza tra queste bande sono energie che la particella non può assumere all'interno del reticolo, e che quindi viene considerata proibita. Ecco che si generano le band-gap. La natura di conduttore, semiconduttore o isolante dipende da quanto l'ultima banda è riempita: se è piena, il materiale sarà isolante o semiconduttore in base alla dimensione della band-gap, se invece non è piena, sarà un conduttore.

21 Momento angolare

21.1 Introduzione

Il momento angolare non è altro che:

$$\vec{L} = \vec{x} \wedge \vec{p}$$

Riscritto usando le gli operatori quantistici:

$$\vec{L} \rightarrow -i\hbar \vec{\hat{x}} \wedge \vec{\nabla}$$

Dove ogni singola componente sarà uguale al prodotto vettoriale (caso solo di Z):

$$L_z \rightarrow -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

Questo quindi ci porta ad ACCETTARE che (ci si basa sulla regola $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij}$):

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z \text{ coordinate sempre ordinate xyz}$$

Scopriamo in generale che invece le componenti del momento angolare commutano con l'operatore posizione e quantità di moto SOLO quando insistono sullo stesso asse.

$$[L_z, \hat{z}] = 0$$

$$[L_z, \hat{p}_z] = 0$$

Per proprietà invece che vengono definite sono *Rotationally invariant* ovvero quando non variano di valore al cambiare dell'asse e/o sistema di riferimento, il commutatore farà sempre 0:

$$[L_i, \hat{p}^2] = 0$$

$$[L_i, \hat{x}^2] = 0$$

$$[L_i, \hat{L}^2] = 0$$

Lo possiamo dimostrare, ma non lo faremo :)

21.2 Eigen-stuff

Vogliamo sapere quante più cose possibili sul momento angolare, quindi sapendo che per esempio $[L_z, \vec{L}^2] = 0$, possiamo trovare un set base di auto-stati che descrivono il momento angolare, permettendoci di calcolare contemporaneamente sia L^2 che L_z .

Definiamo quindi un auto-stato $|\beta, m\rangle$ che avrà come autovalori β per \vec{L}^2 e m per L_z :

$$\vec{L}^2 |\beta, m\rangle = \hbar^2 \beta |\beta, m\rangle$$

$$L_z |\beta, m\rangle = \hbar m |\beta, m\rangle$$

Il motivo per cui abbiamo aggiunto le diverse \hbar è solo per una questione di analisi dimensionale, dal momento che β e m sono semplicemente 2 numeri reali puri. Dobbiamo inoltre assicurarci che il tutto sia normalizzato, e questo si può imporre:

$$\langle \beta, m | \beta', m' \rangle = \delta_{\beta\beta'} \delta_{mm'}$$

Ora, noi dobbiamo cercare di definire il meglio possibile questo set base, ed è difficile non usando nient'altro se non gli strumenti che abbiamo a disposizione, per questo introduciamo 2 nuovi operatori. Più avanti scopriremo che si chiamano *Ladder operators*, ma per ora li definiamo solo come una combinazione di componenti X e Y:

$$L_{\pm} \equiv L_x \pm iL_y$$

Questo operatore inoltre, ha la proprietà (il complesso coniugato inverte il valore di iL_y):

$$L_{\pm}^{\dagger} = L_{\mp}$$

Le seguenti proprietà vengono rispettate (derivate risolvendo semplicemente il commutatore):

$$[\vec{L}^2, L_{\pm}] = 0$$

$$[L_z, L_{\pm}] = \pm \hbar L_{\pm}$$

$$[L_+, L_-] = 2\hbar L_z$$

Da qui si può inoltre derivare il valore di 2 altre proprietà importanti:

$$L_{\pm} L_{\mp} = L_x^2 + L_y^2 \pm \hbar L_z$$

$$\vec{L}^2 = L_{\pm} L_{\mp} \mp \hbar L_z + L_z^2$$

Tutte queste formule sono derivate da combinazioni di equazioni precedenti.

Nelle future equazioni se trovi il simbolo $\odot_{-}\odot$, significa che il passaggio è stato compiuto usando una di queste formule dei commutatori.

21.3 Ladder operator

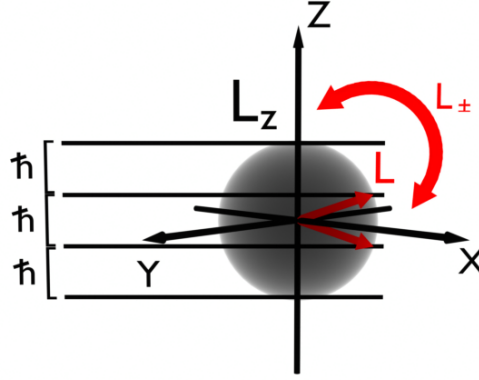


Figure 5: Spiegazione geometrica del ladder operator

Possiamo interpretare il ladder operator come la rotazione del momento angolare lungo una delle direzioni generiche composte da X e Y (non ci interessa molto la direzione precisa, dal momento che a causa del principio di indeterminazione sappiamo solo che questa rotazione sarà uguale ad un shift di energia pari a \hbar).

Questo ci permette di ottenere L_z in tutte le possibili suddivisioni dell'energia in $\Delta E = \hbar$. Ecco perchè all'aumentare dell'energia aumenteranno i possibili m e perchè quando l e m coincidono abbiamo il massimo valore di L_z : L_z e L coincidono come direzione.

Il motivo per cui ci possiamo spostare solo di intervalli di \hbar è dovuto al fatto che i commutatori ci dicono così. Un modo più intuitivo di vederlo è immaginarsi di avere un vettore in 3D le cui componenti possono essere SOLO dei numeri interi. Se vogliamo aumentare o diminuire di 1 il valore della componente Z dovremo adeguare di conseguenza X e Y. Questo lo possiamo fare a patto che seguiamo 2 regole: Tutte le variazioni devono essere numeri interi e il modulo totale del vettore deve rimanere invariato.

21.4 Derivazione di β e m

Possiamo inanzitutto trovare una relazione tra questi 2 parametri notando che abbiamo da questa espressione:

$$\langle \beta, m | \vec{L}^2 | \beta, m \rangle = \langle \beta, m | L_x^2 | \beta, m \rangle + \langle \beta, m | L_y^2 | \beta, m \rangle + \langle \beta, m | L_z^2 | \beta, m \rangle$$

Sappiamo che $L^2 \propto \hbar^2 \beta$, mentre $L_z^2 \propto \hbar^2 m^2$. Se consideriamo che sia L_x^2 che L_y^2 saranno ≥ 0 , otteniamo la seguente relazione tra β e m :

$$\beta \geq m^2 \geq 0$$

Questo significa che questo m sarà limitato ad essere compreso tra 2 valori:

$$m_{min} = -l, \quad m_{max} = l$$

Ora che abbiamo introdotto il ladder operator, proviamo ad applicarlo ad entrambi \vec{L}^2 e L_z e vediamo che:

$$\vec{L}^2(L_+|\beta, m\rangle) = L_+\vec{L}^2$$

21.5 Coordinate sferiche

22 Spin

22.1 Stern-Gerlach

22.2 Teoria

22.3 Gyromagnetic factor / MRI

23 Somma di 2 spin

24 Somma di spin con momento angolare

25 Perturbation theory (NON - DEGENERATE)

26 Zeeman normale

27 Relativistic correction

28 Interazione: Spin - orbita

29 Zeemano anomalous

30 Gauge invarianza

31 Coulomb invarianza

32 Magnetic properties

33 Landau levels

34 Quantum Hall effect