

OPNA: Prvi projektni zadatak

Verižni razvoj

Aleksa ILIĆ

2. decembar 2020.

Sažetak

Rad prikazuje praktičnu realizaciju konzolnog programa koji izvršava numeričku procenu verižnog razlomka sa arbitrarnom preciznošću i modularnošću ispisa, na primeru katalanove konstante G

1 Uvod

1.1 Opis problema

Za zadati broj x i opseg n i m formirati niz razlomaka $\frac{p}{q}$ gde imenilac q ispunjava $n \leq q \leq m$ tj. $q = n, n+1, \dots, m$. Brojilac p je zaokružen na najbliži ceo broj vrednosti $x * q$, gde je $q = n, n+1, \dots, m$. Potom u prethodnom nizu razlomaka $\frac{p}{q}$ formirati:

- Racionalne aproksimacije I vrste;
- Racionalne aproksimacije II vrste;
- Razlomke $\frac{p}{q}$ sortirati po minimalnosti apsolutne greške $\left| x - \frac{p}{q} \right|$

Formirati i zapisati u verižnom zapisu za sve dobijene aproksimacije

1.2 Definicije

Verižni razlomak Izraz oblika $x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$ gde je $a_0 \in \mathbb{Z}$ i $a_i \in \mathbb{N} (i \neq 0)$. Prethodni izraz skraćeno zapisujemo $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$.

Racionalna aproksimacija I vrste Racionalni broj $\frac{p}{q}$ jeste najbolja racionalna aproksimacija prve vrste realnog broja α ako važi: $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \left| \alpha - \frac{r}{s} \right|$ za sve razlomke $\frac{r}{s} \neq \frac{p}{q}$ takve da $0 < s \leq q$

Racionalna aproksimacija II vrste Racionalni broj $\frac{p}{q}$ jeste najbolja racionalna aproksimacija druge vrste realnog broja α ako važi: $|q\alpha - p| < |s\alpha - r|$ za sve razlomke $\frac{r}{s} \neq \frac{p}{q}$ takve da $0 < s \leq q$

Date definicije preuzete iz rada Malešević and Milinković (2014).

2 Opis rešenja

Za realizaciju rešenja korišćen je programski jezik **C++17** zajedno sa najnovijom verzijom **Boost** biblioteke u trenutku pisanja ovog rada. Celokupan, dokumentovani izvorni kod dostupan je na autorovom github profilu Ilić (2020).

Aktuelna verzija (v0.2.0) rešenja, sa podrazumevanim vrednostima veličine tipova, korišćena je za generisanje svih slika i računskih ispisa. Rešenje omogućava visoku preciznost pri numeričkom računu, a ona se može i dodatno povećati ukoliko korisnik to želi. Takođe, ispis rešenja je vrlo modularan te korisnik može, dodavanjem odgovarajućih parametara, dobiti željeni ispis. Pregled svih parametara i podrazumevanih podešavanja dat je na Slici 1. Parameter `-inbetween` omogućava računanje međuverižnih aproksimacija. Simbolom zvezda (*) označene su verižne aproksimacije.

```
home@i... : ~/Workspace/opna-1
home@i... :~/Workspace/opna-1$ ./opna_1 --version
OPNA_1: Continued Fraction Generator v0.2.0
-----
Integer type w/: 1024bits
Floating type w/: 256digits
home@i... :~/Workspace/opna-1$ ./opna_1 --help
Usage: ./opna_1 [OPTIONS] <NUMBER|CONSTANT>
Allowed options:
  --help                print help message
  --version             print version information
  --examples            show examples
  --table               print evaluation table of every iteration
  --table_style arg     Specify table style: nice|double|simple|empty
  --headerless          Do not display header when showing results
  --fields arg          Comma delimited list of fields to be shown:
                        iter,ind,frac,eval,diff
  --maxdenominator arg  maximum denominator up to which to iterate
  --inbetween           show best in-between continual fraction approximations
                        as well
  --iterations arg (=14) number of iterations
  --precision arg (=14)  how many decimals should result have
  --number arg          number to be parsed

Allowed constants: pi, phi, e, catalan
```

Slika 1: Podrazumevana podešavanja i pomoćni ekran

2.1 Primeri ispisa

Na slikama 2 i 3 nalaze se primeri kojima se demonstrira verižno izračunavanje broja π . Ideja autora je da ovim primerom prikaže modularne sposobnosti ispisa, te neće biti analize samog numeričkog računa. Prva slika prikazuje tabelarni ispis do maksimalne veličine brojioca zadatim parametrom **--maxdenominator** dok drugi primer na to nadovezuje lični izbor i redosled kolona za prikaz (parametar **--fields**), njihov izgled (parametar **--table_style**) i broj decimala koji se prikazuje (parametar **--precision**).

home@ : ~/Workspace/opna-1

```
home@ : ~/Workspace/opna-1$ ./opna_1 pi --table --inbetween --maxdenominator 1000
```

Iteration	Indices	Fraction	Evaluated fraction	Difference
1	[3]	3/1*	3.000000000000000	1.41592653589793 * 10^-01
2	[3,4]	13/4	3.250000000000000	-1.08407346410207 * 10^-01
2	[3,5]	16/5	3.200000000000000	-5.84073464102068 * 10^-02
2	[3,6]	19/6	3.166666666666667	-2.50740130768734 * 10^-02
2	[3,7]	22/7*	3.14285714285714	-1.26448926734962 * 10^-03
3	[3,7,8]	179/57	3.14035087719298	1.24177639681078 * 10^-03
3	[3,7,9]	201/64	3.140625000000000	9.67653589793238 * 10^-04
3	[3,7,10]	223/71	3.14084507042254	7.47583167258027 * 10^-04
3	[3,7,11]	245/78	3.14102564102564	5.67012564152213 * 10^-04
3	[3,7,12]	267/85	3.14117647058824	4.16183001557944 * 10^-04
3	[3,7,13]	289/92	3.14130434782609	2.88305763706282 * 10^-04
3	[3,7,14]	311/99	3.14141414141414	1.78512175651824 * 10^-04
3	[3,7,15]	333/106*	3.14150943396226	8.32196275290875 * 10^-05
4	[3,7,15,1]	355/113*	3.14159292035398	-2.66764189062422 * 10^-07

home@ : ~/Workspace/opna-1\$

Slika 2: Tablearni ispis do maksimalnog brojioca

home@ : ~/Workspace/opna-1

```
home@ : ~/Workspace/opna-1$ ./opna_1 pi --table --inbetween --maxdenominator 100 --fields ind,frac,diff --table_style double
```

Indices	Fraction	Difference
[3]	3/1*	1.41592653589793 * 10^-01
[3,4]	13/4	-1.08407346410207 * 10^-01
[3,5]	16/5	-5.84073464102068 * 10^-02
[3,6]	19/6	-2.50740130768734 * 10^-02
[3,7]	22/7*	-1.26448926734962 * 10^-03
[3,7,8]	179/57	1.24177639681078 * 10^-03
[3,7,9]	201/64	9.67653589793238 * 10^-04
[3,7,10]	223/71	7.47583167258027 * 10^-04
[3,7,11]	245/78	5.67012564152213 * 10^-04
[3,7,12]	267/85	4.16183001557944 * 10^-04
[3,7,13]	289/92	2.88305763706282 * 10^-04
[3,7,14]	311/99	1.78512175651824 * 10^-04

Slika 3: Različita korisnička podešavanja

3 Izračunavanje konstante G

Katalanova konstanta, G , koja se javlja u kombinatorici definisana je kao:

$$G = \beta(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = 0.9159655941... \quad (1)$$

gde je β Dirihleova beta funkcija. Data definicija preuzeta je iz knjige Finch (2003)

Nepoznato je da li je G iracionalan broj. Katalanova konstanta je dobila ime po *Eugeniju Katalanu* (30 May 1814 – 14 February 1894). Može se sračunati precizno i njena vrednost jednaka je $\pi^3/32$

3.1 Podešavanje programa

Za prikaz rešenja korišćene su podrazumevane veličine tipova, tabelarni prikaz uz *simple* stil, sračunavanje do desete iteracije, uz prikaz 11 decimala.

Autor se odlučio za tu preciznost jer nema smisla prikazivati više decimala za odlučeni broj iteracija što potvrđuje proračunata greška.

Program je pokrenut dva puta. Prvi ispis prikazuje samo verižne aproksimacija, dok drugi ispis dodaje i međuverižne aproksimacije.

Rezultati će biti izneti u tekstualnom formatu kao proizvod izvršenja realizovanog programa sa pomenutim parametrima. Autor se odlučio za takav prikaz jer omogućava veću fleksibilnost u odnosu na sliku terminalnog prozora ukoliko čitalac želi da rezultate prekopira i koristi u svojim istraživanjima. Autor garantuje da svi brojevi odgovaraju ispisu programa i nisu na bilo koji način menjani, ali su neke međuverižne aproksimacije isećene zarad lepšeg ispisa.

3.2 Rezultati

Indices	Fraction	Evaluated fraction	Difference

[0]	0/1*	0.000000000000	9.15965594177 * 10^-01
[0;1]	1/1*	1.000000000000	-8.40344058228 * 10^-02
[0;1,10]	10/11*	0.909090909090	6.87468508631 * 10^-03
[0;1,10,1]	11/12*	0.916666666667	-7.01072489448 * 10^-04
[0;1,10,1,8]	98/107*	0.91588785047	7.77437099293 * 10^-05
[0;1,10,1,8,1]	109/119*	0.91596638655	-7.92377402834 * 10^-07
[0;1,10,1,8,1,88]	9690/10579*	0.91596559221	1.96623499010 * 10^-09
[0;1,10,1,8,1,88,4]	38869/42435*	0.91596559444	-2.61334066128 * 10^-10
[0;1,10,1,8,1,88,4,1]	48559/53014*	0.91596559399	1.83179704684 * 10^-10
[0;1,10,1,8,1,88,4,1,1]	87428/95449*	0.91596559419	-1.44435481991 * 10^-11

Indices	Fraction	Evaluated fraction	Difference

[0]	0/1*	0.000000000000	9.15965594177 * 10^-01
[0;1]	1/1*	1.000000000000	-8.40344058228 * 10^-02
[0;1,5]	5/6	0.833333333333	8.26322608439 * 10^-02
[0;1,6]	6/7	0.85714285714	5.88227370344 * 10^-02
[0;1,7]	7/8	0.875000000000	4.09655941772 * 10^-02
[0;1,8]	8/9	0.888888888889	2.70767052883 * 10^-02
[0;1,9]	9/10	0.900000000000	1.59655941772 * 10^-02
[0;1,10]	10/11*	0.909090909090	6.87468508631 * 10^-03
[0;1,10,1]	11/12*	0.916666666667	-7.01072489448 * 10^-04
[0;1,10,1,5]	65/71	0.91549295775	4.72636430740 * 10^-04
[0;1,10,1,6]	76/83	0.91566265060	3.02943574809 * 10^-04
[0;1,10,1,7]	87/95	0.91578947368	1.76120493008 * 10^-04
[0;1,10,1,8]	98/107*	0.91588785047	7.77437099293 * 10^-05
[0;1,10,1,8,1]	109/119*	0.91596638655	-7.92377402834 * 10^-07

[0;1,10,1,8,1,44]	4894/5343	0.91596481378	7.80402186262 * 10 ⁻⁰⁷
[0;1,10,1,8,1,45]	5003/5462	0.91596484804	7.46136208396 * 10 ⁻⁰⁷
[0;1,10,1,8,1,46]	5112/5581	0.91596488085	7.13331492443 * 10 ⁻⁰⁷
[0;1,10,1,8,1,47]	5221/5700	0.91596491228	6.81896517261 * 10 ⁻⁰⁷
...			
[0,1,10,1,8,1,86]	9472/10341	0.91596557393	2.02481986108 * 10 ⁻⁰⁸
[0,1,10,1,8,1,87]	9581/10460	0.91596558317	1.10032228391 * 10 ⁻⁰⁸
[0,1,10,1,8,1,88]	9690/10579*	0.91596559221	1.96623499010 * 10 ⁻⁰⁹
[0,1,10,1,8,1,88,3]	29179/31856	0.91596559518	-1.00108334557 * 10 ⁻⁰⁹
[0,1,10,1,8,1,88,4]	38869/42435*	0.91596559444	-2.61334066128 * 10 ⁻¹⁰
[0,1,10,1,8,1,88,4,1]	48559/53014*	0.91596559399	1.83179704684 * 10 ⁻¹⁰
[0,1,10,1,8,1,88,4,1,1]	87428/95449*	0.91596559419	-1.44435481991 * 10 ⁻¹¹

4 Diskusija rezultata

Program je kroz 10 iteracija došao do aproksimacije koja odgovara priloženoj definiciji konstante, na početku poglavlja 3. Međutim proračunato rešenje ($\frac{87428}{95449}$), nije toliko korisno za upotrebu usled njegove veličine. Autoru je znatno interesantnije verižno rešenje koje se dobija u 6. iteraciji ($\frac{109}{119}$) jer predstavlja optimalan odnos veličine i preciznosti. Evaluacija ove aproksimacije odstupa od konstante tek na 6. decimali.

Literatura

Finch, S. R. (2003). *Mathematical Constants*. Cambridge University Press, 1st edition.

Ilić, A. (2020). Github page. <https://github.com/aleksailic>. Ime repozitorijuma za vreme pisanja rada: opna_1. Autor zadržava pravo promene imena.

Malešević, B. and Milinković, L. (2014). Verižni razlomci i primene. *Simpozijum MATEMATIKA I PRIMENE, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 2014, Vol. V(1)*.