OPNA: Drugi projektni zadatak
Šturmova teorema

Aleksa Ilić

25. decembar 2020.

Sažetak

Rad prikazuje praktičnu realizaciju konzolnog programa koji izvršava numeričku procenu Šturmove teoreme sa arbitrarnom preciznošću i modularnošću ispisa

1 Uvod

1.1 Opis problema

Za zadati polinom $P(x)$ sa realnim koeficijentima nad segmentom $[a, b]$ odrediti:

1. Euklidovim algoritmom najveći zajednički delilac $Q(x) = GCD(P(x), P'(x))$
2. Za polinom $P(x) := P(x)/Q(x)$, upotrebom Šturmove teoreme, odrediti broj nula na $[a, b]$
3. Neka je k broj decimala na koji se zaokružuje neki relan broj. Za koeficijente polinoma

   $$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

   sa realnim koeficijentima

   $$a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$$

   odrediti niz naniže zaokruženih koeficijenata

   $$\alpha_n, \alpha_{n-1}, ..., \alpha_1, \alpha_0$$

   određenih po sledećim pravilima:

   - ako je $a_k = a_0.a_1...a_k a_{k+1}... > 0$ tada $\alpha_k = a_0.a_1...a_k$
   - ako je $a_k = a_0.a_1...a_k a_{k+1}... < 0$ tada $\alpha_k = a_0.a_1...a'_k$
     gde je $a'k$ naviše zaokružena cifra (uz eventualno posledično zaokruživanje i prethodnih cifara za jedan broj naviše

   Formirati polinom

   $$P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$$

1.2 Definicije

Šturmova teorema: Neka je $P(x)$ polinom sa realnim koeficijentima koj razmatramo nad segmentom $[a, b]$ realne prave koji na segmentu može da ima samo jednostruke nule. Formirajmo niz polinoma $P_0, P_1, ..., P_r$ na sledeći način:

1. $P_0(x) = P(x)$
2. $P_1(x) = P'(x)$
3. $P_{i+1}(x) = -REM(P_i(x), P_{i-1}(x))$ za $i = 1, 2, ..., r-1; i_r(x) = C - Const.$

Neka je $\xi \in [a, b]$, označimo:

$$V(\xi) \text{ broj promena znakova u nizu } P_0(\xi), P_1(\xi), ..., P_r(\xi),$$

ignorišući eventualno javljanje nule u tom nizu. Tada razlika:

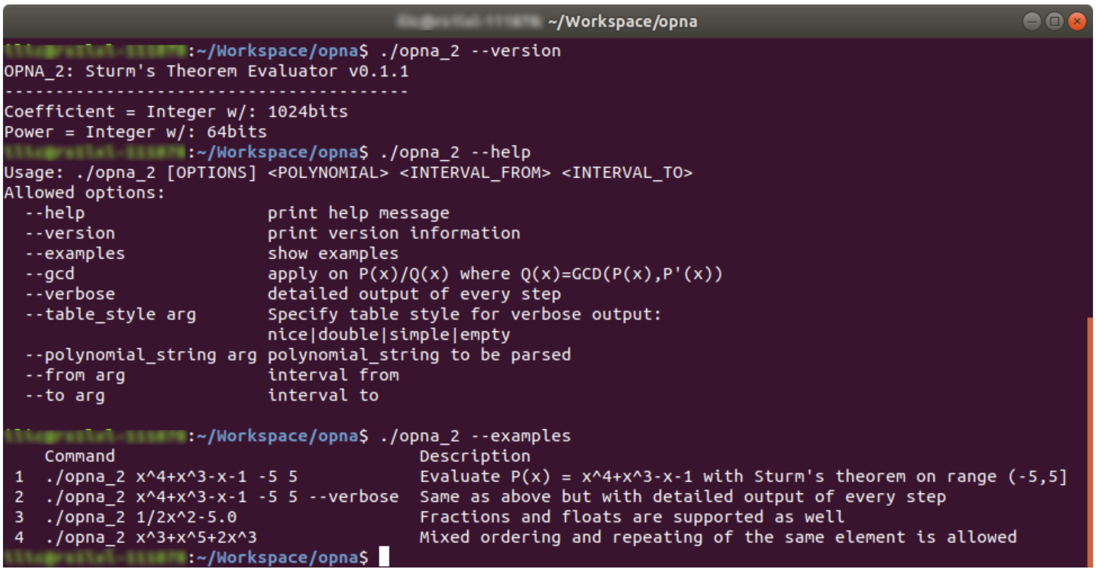
$$N = V(a) - V(b)$$

određuje broj nula polinoma $P(x)$ na segmentu $[a, b]$.

2 Opis rešenja

Za realizaciju rešenja korišćen je programski jezik **C++17** zajedno sa najnovijom verzijom **Boost** biblioteka u trenutku pisanja ovog rada. Celokupan, dokumentovani izvorni kod dostupan je na autorovom github profilu Ilić (2020).

Aktuelna verzija (v0.1.1) rešenja, sa podrazumevanim vrednostima veličine tipova, korišćena je za generisanje svih slika i računskih ispisa. Rešenje omogućava visoku preciznost pri numeričkom računu, a ona se može i dodatno povećati ukoliko korisnik to želi. Takođe, ispis rešenja je vrlo modularan te korisnik može, dodavanjem odgovarajućih prarametara, dobiti željeni ispis. Pregled svih parametara i podrazumevanih podešavanja dat je na Slici 1. Parameter –gcd omogućava optimizaciju korišćenjem polinoma $P(x)$ nadevenim u koraku 2 opisa problema.



```
~/Workspace/opna
:~/Workspace/opna$ ./opna_2 --version
OPNA_2: Sturm's Theorem Evaluator v0.1.1
----------------------------------------
Coefficient = Integer w/: 1024bits
Power = Integer w/: 64bits
:~/Workspace/opna$ ./opna_2 --help
Usage: ./opna_2 [OPTIONS] <POLYNOMIAL> <INTERVAL_FROM> <INTERVAL_TO>
Allowed options:
  --help                    print help message
  --version                 print version information
  --examples                show examples
  --gcd                     apply on P(x)/Q(x) where Q(x)=GCD(P(x),P'(x))
  --verbose                 detailed output of every step
  --table_style arg         Specify table style for verbose output:
                            nice|double|simple|empty
  --polynomial_string arg   polynomial_string to be parsed
  --from arg                interval from
  --to arg                  interval to

:~/Workspace/opna$ ./opna_2 --examples
    Command                              Description
 1  ./opna_2 x^4+x^3-x-1 -5 5            Evaluate P(x) = x^4+x^3-x-1 with Sturm's theorem on range (-5,5]
 2  ./opna_2 x^4+x^3-x-1 -5 5 --verbose  Same as above but with detailed output of every step
 3  ./opna_2 1/2x^2-5.0                  Fractions and floats are supported as well
 4  ./opna_2 x^3+x^5+2x^3                Mixed ordering and repeating of the same element is allowed
:~/Workspace/opna$
```

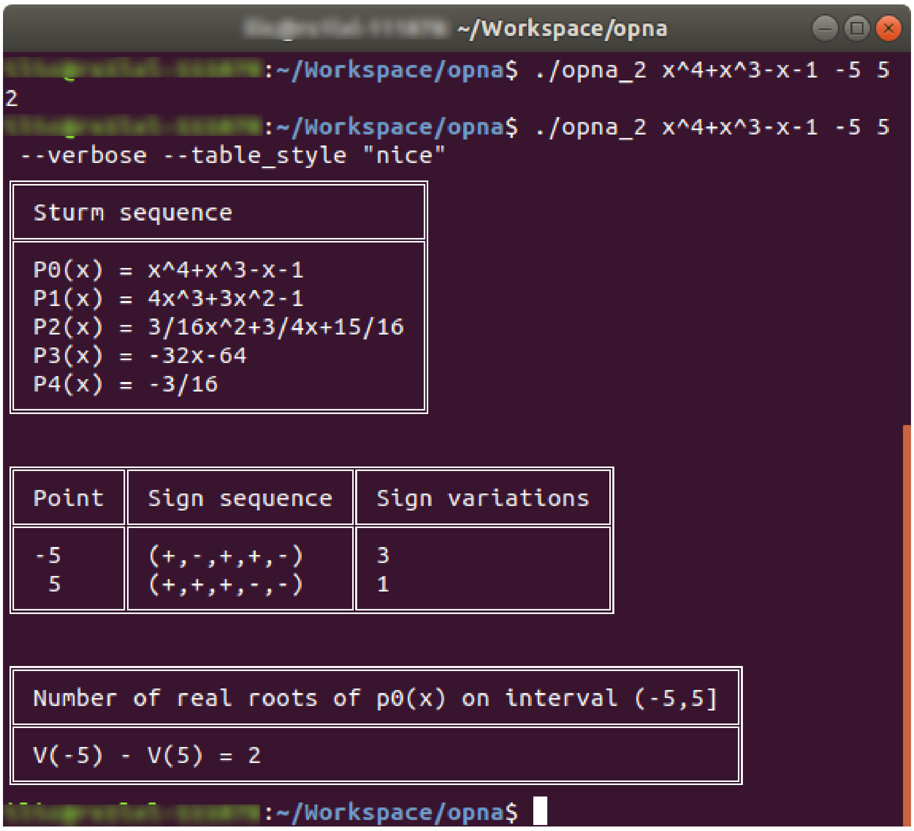
Slika 1: Podrazumevana podešavanja i pomoćni ekran

2.1 Primeri ispisa

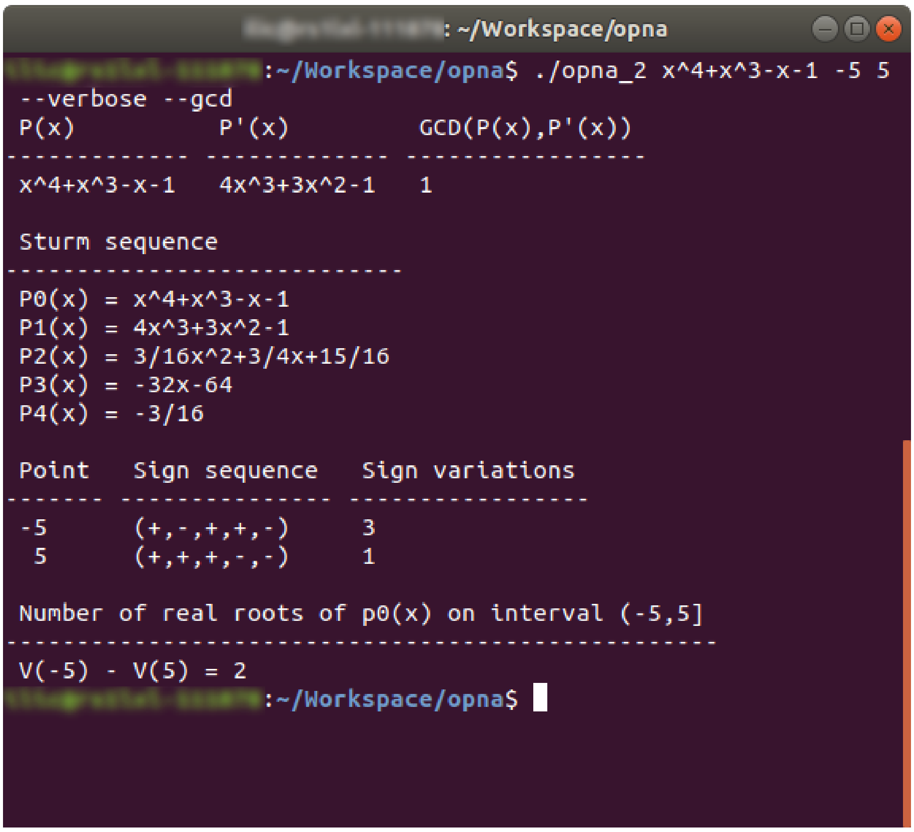
Na slikama 2 i 3 nalaze se primeri kojima se demonstrira program na primeru polinoma:

$$P(x) = x^4 + x^3 - x - 1$$

Ideja autora je da ovim primerom prikaže modularne sposobnosti ispisa, te neće biti analize samog numeričkog računa. Prva slika prikazuje podrazumevani ispis, gde se prikazuje samo rešenje tj. broj realnih korena na itervalu, kao i detaljniji, "verbose", ispis koji prikazuje i međurezultate. Takođe je u ovom primeru promenjen podrazumvani stil tabele na "nice". Drugi primer prikazuje korišćenje optimizacionog "–gcd" parametra i njegov efekat na račun i ispis.



Slika 2: Podrazumevani i “verbose” prikaza sa “nice” tabelarnim prikazom



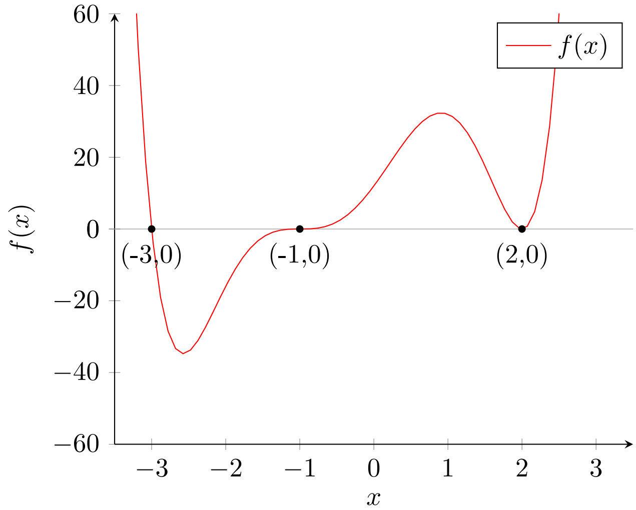
Slika 3: “verbose” prikaz sa “gcd” optimizacijom

3 Izračunavanje polinoma

Posmatrajmo funkciju:

$$f(x) = (x+3)(x-2)^2(x+1)^3 \tag{1}$$

Njen graf dat je ispod:



Primetimo da na intervalu $[-3, 3]$ data funkcija poseduje 3 realna korena, i to su redom: $-3, -1, 2$. Kako je data funkcija polinomijalna, mozemo razviti $f(x)$ do polinomnog oblika i dobiti $P(x)$ koji mozemo dalje koristiti u programu. Pa tako dobijamo

$$P(x) = x^6 + 2x^5 - 8x^4 - 14x^3 + 11x^2 + 28x + 12 \tag{2}$$

3.1 Podešavanja programa

Za prikaz rešenja korišćene su podrazumevane veličine tipova. Korišćen je ("verbose") režim ispisa uz "simple" stil tabela. Razmatrani interval je $(-5, 5]$. Program je pokrenut dva puta, jednom uz upotrebu gorepomenutih podešavanja, i drugi put proširenjem podešavanja parametrom "–gcd". Razlog proširenja jeste prikaz optimizacije na realnom primeru.

Rezultati su izneti u tekstualnom formatu kao proizvod izvršenja realizovanog programa sa pomenutim parametrima. Autor se odlučio za takav prikaz jer omogućava veću fleksibilnost u odnosu na sliku terminalnog prozora ukoliko čitalac želi da rezultate prekopira i koristi u svojim istraživanjima. Autor garantuje da svi brojevi odgovaraju ispisu programa i nisu na bilo koji način menjani, ali su neke međuverižne aproksimacije isečene zarad lepšeg ispisa.

3.2 Rezultati

```
./opna_2 x^6+2x^5-8x^4-14x^3+11x^2+28x+12 -5 5 --verbose
 Sturm sequence
----------------------------------------------

 P0(x) = x^6+2x^5-8x^4-14x^3+11x^2+28x+12
 P1(x) = 6x^5+10x^4-32x^3-42x^2+22x+28
 P2(x) = 29/9x^4+47/9x^3-29/3x^2-199/9x-94/9
 P3(x) = 12150/841x^3-36450/841x-24300/841

 Point   Sign sequence   Sign variations
------- --------------- -----------------
 -5      (+,-,+,-)       3
  5      (+,+,+,+)       0

 Number of real roots of P0(x) on interval (-5,5]
---------------------------------------------------
 V(-5) - V(5) = 3
```

```
./opna_2 x^6+2x^5-8x^4-14x^3+11x^2+28x+12 -5 5 --verbose --gcd
 P(x)                                P'(x)                              GCD(P(x),P'(x))
---------------------------------- ------------------------------- -----------------
 x^6+2x^5-8x^4-14x^3+11x^2+28x+12   6x^5+10x^4-32x^3-42x^2+22x+28   -x^3+3x+2

 Sturm sequence
------------------------
 P0(x) = -x^3-2x^2+5x+6
 P1(x) = -3x^2-4x+5
 P2(x) = -38/9x-44/9
 P3(x) = -2025/361

 Point   Sign sequence   Sign variations
------- --------------- -----------------
 -5      (+,-,+,-)       3
  5      (-,-,-,-)       0

 Number of real roots of P0(x) on interval (-5,5]
---------------------------------------------------
 V(-5) - V(5) = 3
```

4 Diskusija rezultata

Program je kroz 4 iteracije, u oba slučaja, došao do broja koji odgovara iznetom očekivanju na početku poglavlja 3. Primetimo da je u drugom slučaju, kada se koristi GCD optimizacija tj. $P(x) := \frac{P(x)}{GCD(P(x), P'(x))}$, iako je rezultat sračunat iz istog broj iteracija, sekvenca polinoma koja se dobija jako pogodnija za pisanje i numeričku analizu.

Literatura

Ilić, A. (2020). Github page. `https://github.com/aleksailic`. Ime repozitorijuma za vreme pisanja rada: opna_2. Autor zadržava pravo promene imena.