FYS2140 - Oblig 6

Aleksander Hansen, gruppe 1

27. februar 2012

Oppgave 1

a) Vi vet at for den harmoniske oscillatoren er de "tidsuavhengige"-bølgefunksjonene gitt ved:

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}_+)^n \psi_0$$

hvor $\hat{a}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(\mp ip + m\omega x)$. Siden ψ_1 allerede er funnet i eksempel 2.4 i Griffiths så kan vi starte fra der:

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2!}} a_+ \psi_1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} (-i\hat{p} + m\omega\hat{x}) \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\hbar} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \left(-\hbar\frac{d}{dx} + m\omega x\right) x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\hbar} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \left(-\hbar\left(1 - \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right) 2x^2\right) + m\omega x^2\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\hbar} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \left(-\hbar + m\omega x^2 + m\omega x^2\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{2m\omega}{\hbar}x^2 - 1\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

b) Hvis vi lar $\frac{m\omega}{\hbar} \equiv 1$ får vi enkle uttrykk å plotte. Se Figur 1, hvor enn den velger å vise seg...

c) For det føste, siden ψ_0, ψ_1 og ψ_2 er reelle så er $\psi_m^*\psi_n = \psi_n^*\psi_m$. Vi trenger altså da bare så sjekke tre av seks permutasjoner av $\int \psi_m^*\psi_n dx$. Siden ψ_0 og ψ_2 er symmetriske om y-aksen, og ψ_1 er anti-symmetrisk, blir produktet anti-symmetrisk og integralet blir derfor null. Da gjenstår det bare å sjekke, $\psi_0^*\psi_2$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^*\psi_2 dx = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2m\omega}{\hbar} x^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} dx - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} dx\right]$$

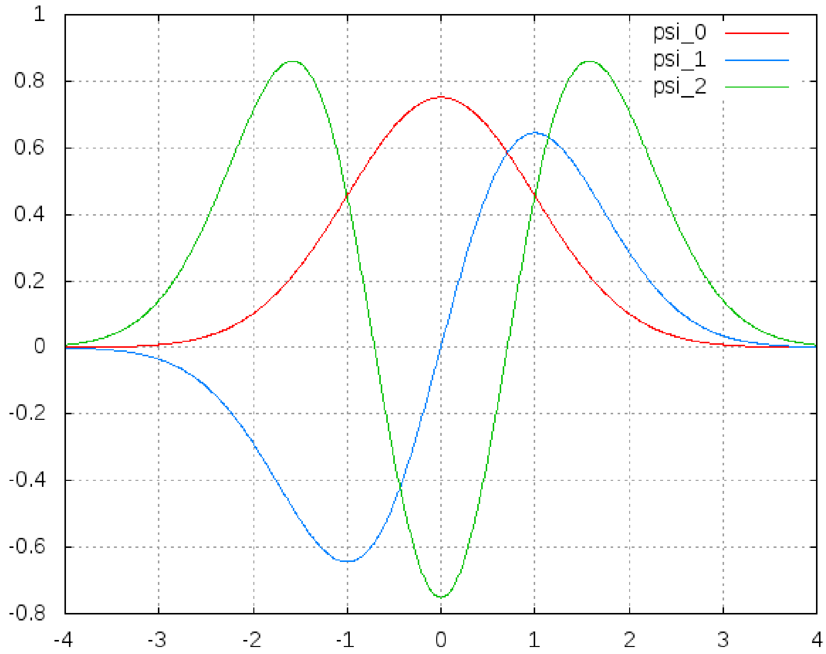
$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar}} \left[\frac{4m\omega}{\hbar} \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}} x^2 dx - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} dx\right]$$

Fra Rottmann finner vi løsningene til integraler av typen,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x^2} x^k dx = \frac{1}{2}\lambda^{-\frac{k+1}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right), k > 1, \lambda < 0$$

og,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$



Figur 1: Plot av ψ_0, ψ_1 og ψ_2

Vi får da:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^* \psi_2 dx = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar}} \left[\frac{4m\omega}{\hbar} \frac{1}{2} \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{-\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} \right]$$

$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, så vi får videre at,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^* \psi_2 dx = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar}} \left[\frac{m\omega\sqrt{\pi}}{\hbar} \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} \right]$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar}} \left[\sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} - \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} \right] = 0$$

Oppgave 2

a) Siden $|\psi_0|^2$ og $|\psi_1|^2$ er symmetriske funksjoner blir integranden i forventningsverdien $< x >$ anti-symmetrisk og dermed er $< x >= \int_{-\infty}^{\infty} x|\psi|^2 dx = 0$, og $< p >= m\frac{d<x>}{dt} = 0$.

Forventningsverdiene til ψ_0:

$$< x^2 >= \int_{-\infty}^{\infty} = \psi_0^* x^2 \psi_0 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} x^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} dx$$

$$= 2\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\int_0^\infty x^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx = 2\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\frac{1}{2}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{-\frac{3}{2}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}$$

$$< p^2 >= \int_{-\infty}^{\infty}\psi_0^*\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)^2\psi_0 dx = -\hbar^2\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\right)dx$$

$$= -\hbar^2\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} 2\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)\left[2\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)x^2 - 1\right]e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx$$

$$= -2\hbar\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m\omega}{\hbar}x^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx - \int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx\right]$$

$$= -m\omega\hbar\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\left[\frac{2m\omega}{\hbar}\int_0^\infty x^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx - \int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx\right]$$

$$= -m\omega\hbar\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\left[\frac{2m\omega}{\hbar}\frac{1}{2}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}}\right]$$

$$= -m\omega\hbar\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}m\omega\hbar$$

Forventningsverdiene til ψ_1:

$$< x^2 >= \int_{-\infty}^{\infty}\psi_1^* x^2\psi_1 dx = \int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\frac{2m\omega}{\hbar}x^4 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx$$

$$= 2\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\frac{2m\omega}{\hbar}\int_0^\infty x^4 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\frac{4m\omega}{\hbar}\frac{1}{2}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{-\frac{5}{2}}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$

$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$. Vi har videre,

$$< x^2 >= \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\hbar^2}{m^2\omega^2}} = \frac{3}{2}\frac{\hbar}{m\omega}$$

$$< p^2 >= \int_{-\infty}^{\infty}\psi_1^*\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)^2\psi_1 dx$$

$$= -\hbar^2\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\frac{2m\omega}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\frac{d^2}{dx^2}\left(xe^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\right)dx$$

$$= -\hbar^2\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\frac{2m\omega}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)\left[\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)x^2 - 3\right]x^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx$$

$$= -\hbar^2\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\frac{2m\omega}{\hbar}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)\left[\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)\int_{-\infty}^{\infty}x^4e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx - 3\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx\right]$$

$$= -2m^2\omega^2\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\left[2\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)\int_{0}^{\infty}x^4e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx - 6\int_{0}^{\infty}x^2e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx\right]$$

$$= -2m^2\omega^2\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\left[\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{\frac{5}{2}}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) - 3\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{\frac{3}{2}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]$$

$$= -2m^2\omega^2\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{\frac{5}{2}}\frac{3\sqrt{\pi}}{4} + 6m^2\omega^2\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$= -\frac{3}{2}m^2\omega^2\sqrt{\frac{m^3\omega^3\hbar^5\pi}{\pi\hbar^3m^5\omega^5}} + 3m^2\omega^2\sqrt{\frac{m\omega\hbar^3\pi}{\pi\hbar m^3\omega^3}}$$

$$= -\frac{3}{2}m\omega\hbar + 3m\omega\hbar = \frac{3}{2}m\omega\hbar$$

b) For ψ_0 er,

$$\sigma_x = \sqrt{< x^2 > - < x >^2} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}}$$

og,

$$\sigma_p = \sqrt{< p^2 > - < p >^2} = \sqrt{\frac{1}{2}m\omega\hbar}$$

Da har vi at:

$$\sigma_x\sigma_p = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}}\sqrt{\frac{1}{2}m\omega\hbar} = \sqrt{\frac{1}{4}\hbar^2} = \frac{1}{2}\hbar$$

For ψ_1 er,

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{\hbar}{m\omega}}$$

og,

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{3}{2}m\omega\hbar}$$

Da har vi at:

$$\sigma_x\sigma_p = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{\hbar}{m\omega}}\sqrt{\frac{3}{2}m\omega\hbar} = \sqrt{\frac{9}{4}\hbar^2} = \frac{3}{2}\hbar$$

c) Kinetisk energi er $K = \frac{p^2}{2m}$ og potensiell energi er $V = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. Fra disse relasjonene kan vi finne $< K >$ og $< V >$.

For ψ_0:

$$< K >= \frac{1}{2m} < p^2 >= \frac{1}{2m}\frac{1}{2}m\omega\hbar = \frac{1}{4}\omega\hbar$$

$$< V >= \frac{1}{2}m\omega^2 < x^2 >= \frac{1}{2}m\omega^2\frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega} = \frac{1}{4}\omega\hbar$$

Summen er:

$$< K > + < V >= \frac{1}{2}\omega\hbar = E_0$$

For ψ_1:

$$< K >= \frac{1}{2m} < p^2 >= \frac{3}{2m}\frac{1}{2}m\omega\hbar = \frac{3}{4}\omega\hbar$$

$$< V >= \frac{1}{2}m\omega^2 < x^2 >= \frac{1}{2}m\omega^2\frac{3}{2}\frac{\hbar}{m\omega} = \frac{3}{4}\omega\hbar$$

Summen er:

$$< K > + < V >= \frac{3}{2}\omega\hbar = E_1$$

Oppgave 3

Denne har jeg ikke fått til. Tenkte at sannsynligheten for å finne partikkelen utenfor det klassisk tillatte området var:

$$P = 1 - \int_{-a}^{a} |\psi_0|^2 dx = P = 1 - 2\int_{0}^{a} |\psi_0|^2 dx$$

Hvor $a = \sqrt{\frac{2E_0}{m\omega^2}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$, men siden m og ω ikke er kjent kan jeg ikke bare gjøre en numerisk integrasjon slik som integralet er nå. Har ikke lykkes med å fjerne m og ω.