FYS2140 - Oblig 3

Aleksander Hansen, gruppe 1

6. februar 2012

Oppgave 1

a) I følge de Broglie er bølgelengden til en partikkel gitt ved:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

En relativistisk partikkel har moment lik:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \rightarrow \sqrt{\frac{E^2 - m_0^2c^4}{c^2}}$$

Den totale energien til en partikkel med masse m_0, akselerert i et potensial V, med ladning e er:

$$E = E_k + E_0 = eV + m_0c^2$$

Setter vi alt dette sammen får vi:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{\frac{E^2 - m_0^2c^4}{c^2}}} = \frac{h}{\sqrt{\frac{(eV + m_0c^2)^2 - m_0^2c^4}{c^2}}} = \frac{h}{\sqrt{\frac{(eV)^2 + 2m_0eVc^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{h}{\sqrt{2m_0eV + \frac{(eV)^2}{c^2}}} = \frac{h}{\sqrt{2m_0eV\left(1 + \frac{eV}{2m_0c^2}\right)}} = \frac{h}{\sqrt{2m_0eV}}\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{eV}{2m_0c^2}}}$$

b) I den ikke-relativistiske grensen er,

$$E_k = \frac{p^2}{2m_0} = eV \rightarrow p = \sqrt{2m_0eV}$$

de Broglie bølgelengden er da:

$$\lambda = \frac{h}{p}\left(1 + \frac{eV}{m_0c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Siden $E_k << m_0c^2$ er leddet $\frac{eV}{2m_0c^2} \approx 0$ og vi sitter igjen med $\lambda = \frac{h}{p}$.

c) For en relativistisk partikkel er, $E = \gamma mc^2$, hvor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ og $\beta = \frac{v}{c}$.
Vi får da,

$$(\gamma mc^2)^2 = \frac{h^2}{\lambda^2}c^2 + m^2c^4$$

$$\frac{1}{1-\beta^2}m^2c^4 = \frac{h^2}{\lambda^2}c^2 + m^2c^4$$

$$\frac{h^2}{\lambda^2}c^2 = m^2c^4\left(\frac{1}{1-\beta^2} - 1\right) = E_0^2\frac{\beta^2}{1-\beta^2}$$

$$\lambda^2 = \left(\frac{hc}{E_0}\right)^2 \frac{1-\beta^2}{\beta^2}$$

$$\lambda = \frac{1240eVnm}{E_0(MeV)MeV} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}$$

$$\lambda = \frac{1.24 \times 10^{-2}}{E_0(MeV)} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}$$

Oppgave 2

a) Energien til en fri relativistisk partikkel er:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

Vi setter inn $E = \hbar\omega$ for energien og $p = \hbar k$ for bevegelsesmengden og løser for ω:

$$\hbar^2\omega^2 = \hbar^2k^2c^2 + m^2c^4$$

$$\omega(k) = \sqrt{k^2c^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}} = c\sqrt{k^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2}$$

b) Fasehastigheten er:

$$v_f(k) = \frac{\omega}{k} = \frac{c\sqrt{k^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2}}{k} = c\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{\hbar k}\right)^2}$$

Gruppehastigheten er:

$$v_g(k) = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\left(c\sqrt{k^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2}\right) = \frac{c}{2\sqrt{k^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2}} \cdot 2k$$

$$= \frac{ck}{\sqrt{k^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{\hbar k}\right)^2}}$$

Produktet blir da:

$$v_f(k) \cdot v_g(k) = c\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{\hbar k}\right)^2} \cdot \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{\hbar k}\right)^2}} = c^2$$

c) At $v_f > c$ bryter den spesielle relativitetsteorien. v_f kan altså ikke være hastigheten til partikkelen. v_g er nødvendigvis større enn c og er hastigheten til partikkelen.

Oppgave 3

a) Vi legger sammen funksjonene $y_1(x,t) = \sin[k_1 x - \omega(k_1)t]$ og $y_2(x,t) = \sin[k_2 x - \omega(k_2)t]$ hvor vi bruker relasjonen,

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

Vi har,

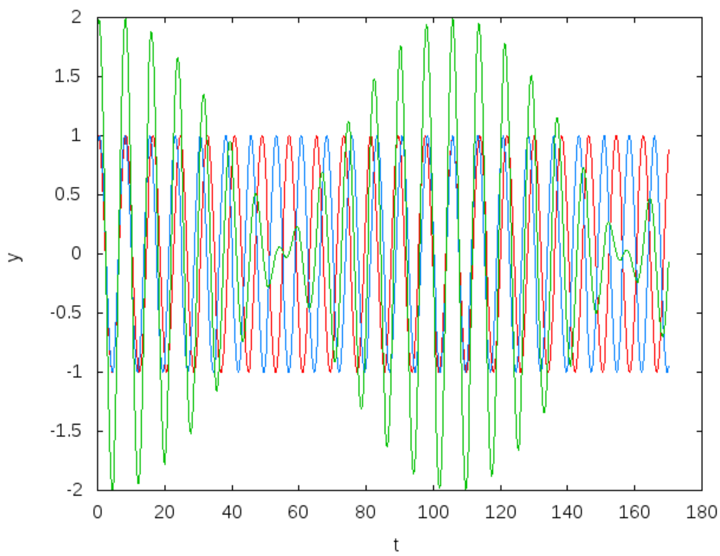
$$\begin{aligned} y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) &= \sin[k_1 x - \omega(k_1)t] + \sin[k_2 x - \omega(k_2)t] \\ &= 2\sin\frac{k_1 x - \omega(k_1)t + k_2 x - \omega(k_2)t}{2} \\ &\cdot \cos\frac{k_1 x - \omega(k_1)t - k_2 x + \omega(k_2)t}{2} \end{aligned}$$

Vi har at $k_1 = k_0 + \Delta k$ og $k_2 = k_0 - \Delta k$. Og får videre,

$$y(x,t) = 2\sin\frac{2k_0 x - (\omega(k_1) + \omega(k_2))t}{2} \cdot \cos\frac{2\Delta k x + (\omega(k_2) - \omega(k_1))t}{2}$$

Definerer vi $\Delta\omega \equiv \frac{\omega(k_2)-\omega(k_1)}{2}$ får vi:

$$y(x,t) = 2\sin(k_0 x - \Delta\omega t)\cdot\cos(\Delta k x + \Delta\omega t)$$



b)

Figur 1: Superposisjon av y_1 og y_2

Fasehastigheten blir:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = ...$$

Jeg er litt usikker på om svaret jeg fikk i 3a er riktig, så jeg ble ikke ferdig...