Hjemmeeksamen FYS2160, Høsten 2012

Kanidat nr. 24

22. oktober 2012

Oppgave 1

a) Siden $C \equiv \frac{Q}{\Delta T}$, har vi,

$$Q = C(T - T_0) = \frac{Q}{\Delta T}(T - T_0) = Q$$

Under kvasistatiske forhold er $Q = TdS \;\Rightarrow\; dS = \frac{Q}{T}$. Endringen i entropi er da,

$$\int_{S_0}^{S} dS = S - S_0 = \Delta S = \int_{T_0}^{T} \frac{Q}{T}$$

bruker vi at $Q = CdT$ og antar at C holder seg konstant,

$$\Delta S = \int_{T_0}^{T} \frac{C}{T} dT = C(\ln T - \ln T_0) = C \ln \frac{T}{T_0}$$

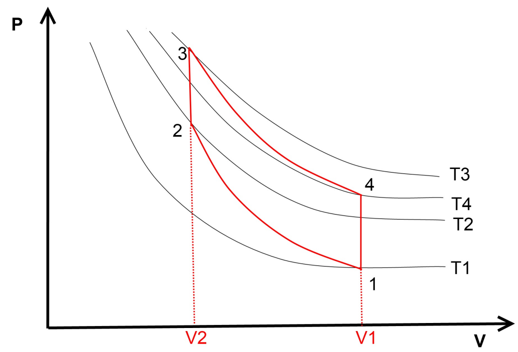
b) Syklussen er skisset i Figur 1.

Effektiviteten til motoren er definert som $e \equiv \frac{W}{Q_h}$, altså arbeidet vi får ut delt på varmen tilført. Siden energi er konservert så må summen av den avgitte varmen, Q_c, og arbeidet vi får ut være lik den absorberte varmen, $Q_c + W = Q_h \;\Rightarrow\; W = Q_h - Q_c$. Vi har altså at effektiviteten er,

$$e = \frac{Q_h - Q_c}{Q_h}$$

I steget $2 \rightarrow 3$ tilføres varme, Q_h, og i steget $4 \rightarrow 1$ avgis varme, Q_c. I steget $1 \rightarrow 2$ gjøres det positivt arbeid på systemet, mens i steget $3 \rightarrow 4$ gjøres det negativt arbeid på systemet, evt. systemet gjør positivt arbeid på omgivelsene.

c) Siden volumet er konstant når varme tilføres og avgis, så er $Q = \Delta U$. For en monatomisk ideell gass er $\Delta U = \frac{3}{2}Nk\Delta T$. Bruker vi den ideelle



Figur 1: PV-diagram

gassloven så kan vi finne temperaturen ved gitt volum og trykk, $T = \frac{PV}{Nk}$.

$$Q_h = \frac{3}{2}Nk\left(\frac{P_3V_2}{Nk} - \frac{P_2V_2}{Nk}\right) = \frac{3}{2}V_2(P_3 - P_2)$$

Tilsvarende for Q_c,

$$Q_c = \frac{3}{2}V_1(P_1 - P_4)$$

Oppgave 2

a) Tar vi først logaritmen til multiplisitetsfunksjonen får vi,

$$\ln\Omega = \ln\left(\frac{A^N\pi^N(2mU)^N}{(N!)^2h^{2N}}\right) = N\ln(A\pi(2mU)) - 2\ln(N!h^N)$$
$$= N\ln(A\pi(2mU)) - 2\ln N! - 2\ln h$$

Bruker vi nå Stirligs approximasjon, $N! \approx N^N e^{-N}\sqrt{2\pi N}$, får vi,

$$\ln\Omega = N\ln(A\pi(2mU)) - 2\ln(N^N e^{-N}\sqrt{2\pi N}) - 2N\ln h$$
$$= N\ln(A\pi(2mU)) - 2N\ln N + 2N - \ln(2\pi N) - 2N\ln h$$
$$= N\left[\ln\left(\frac{A\pi(2mU)}{N^2 2\pi N h^2}\right) + 2\right] = N\left[\ln\left(\frac{AmU}{N^3h^2}\right) + 2\right]$$

Entropien kan altså da uttrykkes som,

$$S = k\ln\Omega = Nk\left[\ln\left(\frac{AmU}{N^3h^2}\right) + 2\right]$$

b) Temperaturen er,

$$T = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{N,A}^{-1} = \left(\frac{\partial}{\partial U} NK\ln(AmU)\right)^{-1} = \left(\frac{Nk}{U}\right)^{-1}$$

$$T = \frac{U}{Nk} \;\Rightarrow\; U = NkT$$

Som er hva ekvipartisjonsteoremet sier, for en monatomisk gass i to dimensjoner ($f = 2$).

Og størrelsen som svarer til trykket i 2 dimensjoner er,

$$P = T\left(\frac{\partial S}{\partial A}\right)_{U,N} = T\frac{\partial}{\partial A} Nk\ln(Amu) = T\frac{Nk}{A}$$

$$P = \frac{NkT}{A} \;\Rightarrow\; PA = NkT$$

Vi kan altså utlede noe som minner om den ideelle gassloven, men for en monatomisk gass i to dimensjoner.

Det kjemiske potensialet blir,

$$\mu = -T\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{U,A} = -T\frac{\partial}{\partial N}\left[Nk\ln(AmU) - Nk\ln(N^3h^2) + 2Nk\right]$$

$$= -T\left[k\ln(AmU) - k\ln(N^3h^2) - 3 + 2k\right]$$

$$\mu = T\left[k\ln\left(\frac{N^3h^2}{AmU}\right) - 2k + 3\right]$$

Jeg har ingen kommentar til det. Det likner ikke på noe jeg kjenner igjen.

c) Vi har identiteten,

$$dU = TdS - PdA + \mu dN$$

Deler vi denne med dT, får vi,

$$\frac{dU}{dT} = T\frac{dS}{dT} - P\frac{dA}{dT} + \mu\frac{dN}{dT}$$

Lar vi nå A og N være konstant, medfører det at $dA = 0$ og $dN = 0$. Vi ender dermed opp med,

$$C_A = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{A,N} = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{A,N}$$

Identiteten til H er,

$$dH = Tds + VdP + \mu dN$$

med samme framgangsmåte som over blir,

$$C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{P,N} = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{P,N}$$

d) Starter vi med den termodynamiske identiteten til Helmholtz fri energi,

$$dF = -SdT - PdA + \mu dN$$

så får vi,

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{A,N}, \qquad P = -\left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_{T,N}$$

Vi kan så derivere disse videre, og siden rekkefølgen på derivasjonen er vilkårlig får vi,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial A}\right)_{T,N} = \frac{\partial}{\partial A}\left(-\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{A,N} = \frac{\partial}{\partial T}\left(-\frac{\partial F}{\partial A}\right)_{T,N} = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{A,N}$$

e) N er holdt fast gjennom hele derivasjonen. Vi har at det totale differensialet til, $S = S(T, A, N)$, er,

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{A,N} dT + \left(\frac{\partial S}{\partial A}\right)_{T,N} dA$$

Setter vi så inn differensialet til, $A = A(T, P, N)$,

$$dA = \left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{P,N} dT + \left(\frac{\partial A}{\partial P}\right)_{T,N} dP$$

får vi,

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{A,N} dT + \left(\frac{\partial S}{\partial A}\right)_{T,N} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{P,N} dT + \left(\frac{\partial A}{\partial P}\right)_{T,N} dP\right]$$

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{A,N} dT + \left(\frac{\partial S}{\partial A}\right)_{T,N} \left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{P,N} dT$$
$$+ \left(\frac{\partial S}{\partial A}\right)_{T,N} \left(\frac{\partial A}{\partial P}\right)_{T,N} dP$$

$$dS = \left[\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{A,N} + \left(\frac{\partial S}{\partial A}\right)_{T,N} \left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{P,N}\right] dT + \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T,N} dP$$

Vi finner så det totale differensialet til $S = S(T, P, N)$,

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{P,N} dT + \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T,N} dP$$

Vi ser at,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{P,N} = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{A,N} + \left(\frac{\partial S}{\partial A}\right)_{T,N} \left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{P,N}$$

Setter vi så inn,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{A,N} = \frac{C_A}{T}$$

fra c). Maxwell relasjonen,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial A}\right)_{T,N} = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{A,N}$$

fra d), ender vi opp med,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{P,N} = \frac{C_A}{T} + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{A,N}\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{P,N}$$