FYS2160 - Oblig 1 - rettet

Aleksander Hansen

15. november 2012

Alle endringer fra orginalen er skrevet i fargen rødt.

Problem 1

a) Termodynamikkens første lov sier,

$$dU = Q + W \tag{1}$$

hvor dU er enderingen in energien, Q er tilførselen av varme til systemet og W er arbeidet gjordt på systemet. For kvasistatisk kompresjon er $W = -PdV$. Vi har også at $Q = CdT$. Vi får,

$$dU = CdT - PdV \tag{2}$$

Varmekapasiteten ved konstant volum er definert som, $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$. Antar vi at den termiske energien bare er lagret i kvadratiske frihetsgrader sier ekvipartisjonsteoremet at $U = \frac{1}{2}NfkT$. De partiellderiverte i C_V er altså ikke nødvendig, og uttrykket reduseres til,

$$C_V = \frac{dU}{dT} \;\Rightarrow\; dU = C_V dT \tag{3}$$

Dette uttrykket for energien kan vi nå bruke i likning (2).

$$C_V dT = CdT - PdV$$

$$(C - C_V)dT = PdV \tag{4}$$

b) Idealgasloven sier, $PV = nRT \;\Rightarrow\; T = \frac{PV}{nR}$. Vi kan da skrive det totale differensialet dT som,

$$dT = \frac{\partial T}{\partial V}dV + \frac{\partial T}{\partial P}dP = \frac{P}{nR}dV + \frac{V}{nR}dP$$

Setter vi dette inn i likning (4) får vi,

$$\frac{(C - C_V)}{nR}(PdV + VdP) = PdV \tag{5}$$

Regner vi ut $C_p - C_V$ får vi,

$$C_P - C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P + P\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P - \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

For en idealgas er,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

så vi får videre,

$$C_P - C_V = P\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = P\frac{\partial}{\partial T}\frac{nRT}{P} = P\frac{nR}{P} = nR$$

Vi kan nå bruke dette i likning (5),

$$(C - C_V)(PdV + VdP) = (C_P - C_V)PdV$$

$$(C - C_P)PdV = -(C - C_V)VdP$$

$$\frac{C - C_P}{C - C_V}\frac{dV}{V} = -\frac{dP}{P}$$

Likningen er nå separert og vi kan integrere på begge sider:

$$\alpha\int\frac{dV}{V} = -\int\frac{dP}{P}$$

$$\alpha\ln V = -\ln P + K$$

her er K er separasjonskonstanten. Dette uttrykket kan vi omforme videre til,

$$\ln(V^\alpha) + \ln P = K$$

$$e^{\ln(V^\alpha)+\ln P} = e^K$$

$$PV^\alpha = K$$

hvor vi bare har omdøpt konstanten til K igjen.

Problem 2

2.24 a) Vi finner Ω_{max} ved å plugge inn $N_\uparrow = \frac{N}{2}$ i multiplisitetsfunksjonen,

$$\Omega_{max} = \Omega(N, N/2) = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}\right)!\left(N - \frac{N}{2}\right)!} = \frac{N!}{\left(\left(\frac{N}{2}\right)!\right)^2}$$

Vi bruker så Stirlings approksimasjon, $N! \approx N^N e^{-N}\sqrt{2\pi N}$,

$$\Omega_{max} \approx \frac{N^N e^{-N}\sqrt{2\pi N}}{\left(\left(\frac{N}{2}\right)^{\left(\frac{N}{2}\right)} e^{-\left(\frac{N}{2}\right)}\sqrt{2\pi\left(\frac{N}{2}\right)}\right)^2} = \frac{N^N e^{-N}\sqrt{2\pi N}}{\left(\frac{N}{2}\right)^N e^{-N}\pi N}$$

$$\Omega_{max} \approx \frac{2^{N+1}}{\sqrt{2\pi N}}$$

2.24 b) Vi lar $N_\uparrow = \frac{N}{2} + x$,

$$\Omega(N, \frac{N}{2} + x) = \frac{N!}{(\frac{N}{2}+x)!\,(N-(\frac{N}{2}-x))!} = \frac{N!}{(\frac{N}{2}+x)!\,(\frac{N}{2}-x)!}$$

Vi bruker så Stirlings approksimasjon,

$$\Omega(N, \frac{N}{2} + x) \approx$$

$$\frac{N^N e^{-N}\sqrt{2\pi N}}{\left(\frac{N}{2}+x\right)^{\left(\frac{N}{2}+x\right)} e^{-\left(\frac{N}{2}+x\right)}\sqrt{2\pi\left(\frac{N}{2}+x\right)}\left(\frac{N}{2}-x\right)^{\left(\frac{N}{2}-x\right)} e^{-\left(\frac{N}{2}-x\right)}\sqrt{2\pi\left(\frac{N}{2}-x\right)}}$$

$$= \frac{N^N\sqrt{2\pi N}}{\left(\frac{N}{2}+x\right)^{\left(\frac{N}{2}+x\right)}\left(\frac{N}{2}-x\right)^{\left(\frac{N}{2}-x\right)}\sqrt{2^2\pi^2\left(\frac{N}{2}+x\right)\left(\frac{N}{2}-x\right)}}$$

$$= \frac{N^N\sqrt{2\pi N}}{\left(\frac{N}{2}+x\right)^{\left(\frac{N}{2}+x\right)}\left(\frac{N}{2}-x\right)^{\left(\frac{N}{2}-x\right)}\sqrt{(\pi N)^2+\left(\frac{\pi x}{2}\right)^2}}$$

Tar vi nå logaritmen:

$$\ln\Omega = N\ln N + \frac{1}{2}\ln(2\pi N) - \left(\frac{N}{2}+x\right)\ln\left(\frac{N}{2}+x\right)$$

$$-\left(\frac{N}{2}-x\right)\ln\left(\frac{N}{2}+x\right) - \frac{1}{2}\ln\left[(\pi N)^2+\left(\frac{\pi x}{2}\right)^2\right]$$

for så å manipulere,

$$\left(\frac{N}{2}+x\right)\ln\left(\frac{N}{2}+x\right) = \left(\frac{N}{2}+x\right)\ln\left[\frac{N}{2}\left(1+\frac{2x}{N}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{N}{2}+x\right)\left[\ln\left(\frac{N}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{2x}{N}\right)\right] \approx \left(\frac{N}{2}+x\right)\left[\ln\left(\frac{N}{2}\right)+\frac{2x}{N}\right]$$

og,

$$\left(\frac{N}{2}-x\right)\ln\left(\frac{N}{2}-x\right) \approx \left(\frac{N}{2}-x\right)\left[\ln\left(\frac{N}{2}\right)-\frac{2x}{N}\right]$$

hvor vi bruker at $\ln(1+x) \approx x$. Har vi at,

$$\ln\Omega \approx N\ln N + \frac{1}{2}\ln(2\pi N) - \left(\frac{N}{2}+x\right)\left[\ln\left(\frac{N}{2}\right)+\frac{2x}{N}\right]$$

$$-\left(\frac{N}{2}-x\right)\left[\ln\left(\frac{N}{2}\right)-\frac{2x}{N}\right] - \frac{1}{2}\ln\left[(\pi N)^2+\left(\frac{\pi x}{2}\right)^2\right]$$

$$= N\ln N + \frac{1}{2}\ln(2\pi N) - N\ln\left(\frac{N}{2}\right) - \frac{4x^2}{N} - \frac{1}{2}\ln\left[(\pi N)^2+\left(\frac{\pi x}{2}\right)^2\right]$$

Eksponensierer vi uttrykket igjen, får vi,

$$e^{\ln \Omega} = \Omega \approx \frac{N^N \sqrt{2\pi N} e^{-4x^2/N}}{\left(\frac{N}{2}\right)^N \sqrt{(\pi N)^2 + \left(\frac{\pi x}{2}\right)^2}} = \frac{2^N 2\pi N e^{-4x^2/N}}{\pi N \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2N}\right)^2} \sqrt{2\pi N}}$$

$$\Omega \approx \frac{2^{N+1}}{\sqrt{2\pi N}} \times \frac{e^{-4x^2/N}}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{2N}\right)^2}}$$

Siden vi vil finne et uttrykk for Ω nær toppen, så er $x << N$ og $\sqrt{1 + \left(\frac{x}{2N}\right)^2} \approx 1$. Vi får altså,

$$\Omega(N, x) \approx \Omega_{max} \times e^{-4x^2/N}$$

Vi ser at når $x = 0$, reduseres uttrykket til:

$$\Omega(N, 0) = \Omega_{max} \times e^0 = \Omega_{max}$$

2.24 c) Hva bredden på grafen ved toppen er, er et tvetydig spørsmål. Men gjør vi som i boka og definerer breden på grafen ved toppen, som bredden når multiplisiteten har falt til $1/e$ av Ω_{max}, så er bredden lik $2x$, når $\frac{-4x^2}{N} = 1$. Altså bredden er $2 \cdot \frac{\sqrt{N}}{2} = \sqrt{N}$. Eller $\frac{\sqrt{N}}{N}$, som i andelen av hele bredden. Vi ser at når N øker, så blir bredden mindre.

2.24 d) Sannsynligheten for å få $\frac{N}{2} + x$ "heads" etter N kast er,

$$P(N, x) = \frac{\Omega(N, x)}{\Omega(all)} = \frac{\Omega_{max}}{2^N} \times e^{-4x^2/N} = P(N, 0) \times e^{-4x^2/N}$$

Hvor $P(N, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \approx 7.98 \cdot 10^{-4}$ er sannsynligheten for det mest sannsynlige utfallet.

Hvis vi lar $N = 10^6$ og $x = 1000$ er sannsynligheten lik,

$$P(10^6, 10^3) = P(10^6, 0) \times e^{-4} \approx 1.8 \cdot 10^{-2} \times P(10^6, 0)$$

Sannsynligheten er ca. 2% av det mest sannsynlige utfallet. Altså ikke veldig oppsikstvekkende.

Lar vi istedet, $x = 10^6$. Er sannsynligheten:

$$P(10^6, 10^6) = P(10^6, 0) \times e^{-4000} = P(10^6, 0) \times 10^{-4000/\ln(10)}$$

$\ln(10) \approx 2.3025 \;\Rightarrow\; \frac{-4000}{2.3025} \approx -1737.24$

$$P(10^6, 10^6) \approx P(10^6, 0) \times 10^{-1737.24} = 10^{0.24} \cdot 10^{-1737} \times P(10^6, 0)$$

$$P(10^6, 10^6) \approx 1.74 \cdot 10^{-1737} \times P(10^6, 0)$$

Som er et tall som like gjerne kunne vært null. Det ville vært svært oppsiktsvekkende å få det resultatet.

Problem 3

2.37 a) Endringen i entropien for en gass som endrer volum fra V_i til V_f, med U og N holdt konstant er,

$$\Delta S = Nk \ln \frac{V_f}{V_i}$$

Hvis $N_A = (1-x)N$, $N_B = xN$, $V_{A,i} = (1-x)V$, $V_{B,i} = xV$ og $V_{A,f} = V_{B,f} = V$, så får vi:

$$\Delta S_A = N_A k \ln \frac{V_{A,f}}{V_{A,i}} = (1-x)Nk \ln \frac{V}{(1-x)V} = -(1-x)Nk \ln(1-x)$$

og,

$$\Delta S_B = N_B k \ln \frac{V_{B,f}}{V_{B,i}} = xNk \ln \frac{V}{xV} = -xNk \ln x$$

Dette gir oss,

$$\Delta S_{mixing} = \Delta S_A + \Delta S_B = -(1-x)Nk \ln(1-x) - xNk \ln x$$
$$= -Nk[x \ln x + (1-x)\ln(1-x)]$$

b) Multiplisiteten til en gass med N identiske molekyler er:

$$\Omega_N = \frac{1}{N!} \frac{V^N}{h^{3N}} \frac{\pi^{3N/2}}{(3N/2)!} \left(\sqrt{2mU}\right)^{3N}$$

Multiplisiteten til en gass med to forskjellige typer molekyler, $N_A = (1-x)N$ og $N_B = xN$, er:

$$\Omega_{N_A+N_B} = \frac{1}{N_A! N_B!} \frac{V^N}{h^{3N}} \frac{\pi^{3N/2}}{(3N/2)!} \left(\sqrt{2mU}\right)^{3N}$$

Forskjellen i entropien mellom de to gassene blir:

$$\Delta S = k \ln \Omega_{N_A+N_B} - k \ln \Omega_N$$

Vi ser at de eneste leddene som blir igjen er de som er forskjellige, da alle de andre kanseleres. Vi har:

$$\Delta S = -k \ln(N_A! N_B!) + k \ln N = -k \ln N_A! - k \ln N_B! + k \ln N$$

Vi bruker Stirlings approximasjon, $\ln N! \approx N \ln N - N$:

$$\Delta S = -k(N_A \ln N_A - N_A + N_B \ln N_B - N_B - N \ln N + N)$$

Vi kan nå bruke at, $N_A = (1-x)N$, $N_B = xN$ og $N_A + N_B = N$:

$$\Delta S = -Nk[(1-x)\ln((1-x)N) + x \ln(xN) - \ln N]$$
$$= -Nk[(1-x)\ln(1-x) + x \ln x] = \Delta S_{mixing}$$

Problem 4

3.25 a) Vi tar logaritmen til multiplisitetsfunksjonen,

$$\ln\Omega = \ln\left[\left(\frac{q+N}{q}\right)^q\left(\frac{q+N}{N}\right)^N\right] = q\ln\left(\frac{q+N}{q}\right) + N\ln\left(\frac{q+N}{N}\right)$$

$$= q\ln(q+N) - q\ln q + N\ln(q+N) - N\ln N = (q+N)\ln(q+N) - q\ln q - N\ln N$$

Jeg velger å ikke utelate noen av leddene, da jeg ikke vil gjøre antakelser om forholdet mellom q og N. Entropien i sin helhet blir da,

$$S = k\ln\Omega = k[(q+N)\ln(q+N) - q\ln q - N\ln N]$$

3.25 b) $U = q\epsilon \Rightarrow q = \frac{U}{\epsilon}$. Temperaturen er da,

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U} = \frac{\partial S}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial U} = k\frac{\partial}{\partial q}[(q+N)\ln(q+N) - q\ln q - N\ln N]\frac{1}{\epsilon}$$

$$= \frac{k}{\epsilon}\left(\ln(q+N) + \frac{q}{q+N} + \frac{N}{q+N} - \ln q - \frac{q}{q}\right) = \frac{k}{\epsilon}(\ln(q+N) - \ln q) = \frac{k}{\epsilon}\ln\left(\frac{q+N}{q}\right)$$

$$T = \frac{\epsilon}{k\ln(1+\frac{N}{q})}$$

3.25 c) Vi setter inn $q = \frac{U}{\epsilon}$,

$$\frac{1}{T} = \frac{k}{\epsilon}\ln\left(1+\frac{N\epsilon}{U}\right)$$

$$\frac{e}{kT} = \ln\left(1+\frac{N\epsilon}{U}\right)$$

$$e^{\frac{\epsilon}{kT}} = e^{\ln\left(1+\frac{N\epsilon}{U}\right)} = 1 + \frac{N\epsilon}{U}$$

$$U = \frac{N\epsilon}{e^{\frac{\epsilon}{kT}} - 1}$$

Varmekapasiteten er da,

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{N\epsilon}{e^{\frac{\epsilon}{kT}} - 1}\right) = -\frac{N\epsilon}{(e^{\frac{\epsilon}{kT}} - 1)^2}\left(\frac{\partial}{\partial T}\left(e^{\frac{\epsilon}{kT}} - 1\right)\right)$$

$$= -\frac{N\epsilon}{(e^{\frac{\epsilon}{kT}} - 1)^2}\left(-\frac{\epsilon}{kT^2}e^{\frac{\epsilon}{kT}}\right) = \frac{N\epsilon^2 e^{\frac{\epsilon}{kT}}}{kT^2\left(e^{\frac{\epsilon}{kT}} - 1\right)^2}$$

3.25 d) I grensa $T \to \infty$, så $\frac{\epsilon}{kT} \to 0$. Vi kan da bruke at $e^x \approx 1 + x$ er en god approksimasjon i uttrykket for energien. Vi får,

$$U = \frac{N\epsilon}{1 + \frac{\epsilon}{kT} - 1} = NkT$$

Varmekapasiteten blir da,

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} NkT = Nk$$