FYS2140 - Oblig 4

Aleksander Hansen, gruppe 1

13. februar 2012

Oppgave 1

a) Vi har at,

$$\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-\lambda(x-a)^2}dx = A\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda(x-a)^2}dx = 1$$

Vi substituerer $u = (x-a)$ og $du = dx$ og får,

$$A\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda u^2}du = 1$$

Fra Rottmann finner vi løsningen på integralet:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda u^2}du = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

Dermed er,

$$A\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda u^2}du = A\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}$$

b) Vi substituerer igjen med $u = x - a$, $du = dx$ og $x = u + a$

$$< x >= \int_{-\infty}^{\infty} xAe^{-\lambda(x-a)^2}dx = A\int_{-\infty}^{\infty}(u+a)e^{-\lambda u^2}du$$

$$< x >= Aa\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda u^2}du + A\int_{-\infty}^{\infty} ue^{-\lambda u^2}du$$

$$< x >= Aa\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + 0 = Aa\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

Siden $A = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}$ får vi:

$$< x >= \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}a = a$$

$$< x^2 >= A\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-\lambda(x-a)^2}dx = A\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-(\lambda x^2+2\lambda ax+\lambda a^2}dx$$

Fra Rottmann har vi at,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-(ax^2+2bx+c)}dx = \frac{a+2b^2}{2a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{(b^2-ac)/b^2}$$

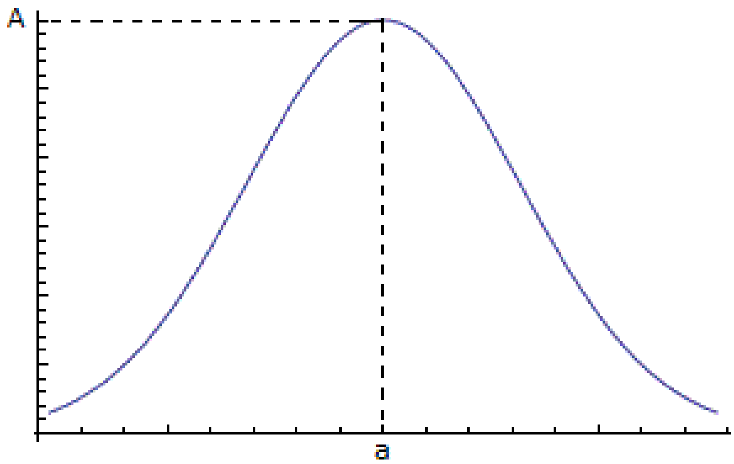
Hvor våre konstanter er $a = \lambda$, $b = -\lambda a$ og $c = \lambda a^2$. Vi har derfor:

$$< x^2 >= \frac{\lambda + 2(-\lambda a)^2}{2\lambda^2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}e^{((-\lambda a)^2-\lambda\lambda a^2)/\lambda}$$

$$< x^2 >= \frac{1}{2\lambda} + a^2$$

$$\sigma = \sqrt{< x^2 > - < x >^2} = \sqrt{\frac{1}{2\lambda} + a^2 - a^2} = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$$

c)



Figur 1: Grafen til $\rho(x)$

Oppgave 2

a) For å normalisere bølgefunksjonen må vi finne den vilkårlige konstanten A slik at,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = 1$$

Vi løser for A:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,t)^* \psi(x,t) dx$$

der $\psi(x,t)^*$ er den konjungerte.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (Ae^{-\lambda|x|}e^{-i\omega t})(Ae^{-\lambda|x|}e^{i\omega t})dx = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-2\lambda|x|}e^{i\omega t - i\omega t})dx$$

$$A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\lambda|x|} dx = 2A^2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{2A^2}{2\lambda} = 1$$

$$A = \sqrt{\lambda}$$

Normaliseringen til ψ er da:

$$\psi(x,y) = \sqrt{\lambda} e^{-\lambda|x|} e^{-i\omega t}$$

b) Forventningsverdien til x er:

$$< x >= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi x dx = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-2\lambda|x|} dx = 0$$

Dette ser vi fra symmetri. $e^{-2\lambda|x|}$ er symmetrisk om y-aksen, mens x er anti-symmetrisk. Disse kansellerer hverandre i grensen $x \to \pm\infty$.

Forventningsverdien til x^2 er:

$$< x^2 >= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 A^2 e^{-2\lambda|x|} dx = 2A^2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-2\lambda x} dx$$

Bak i Griffiths står løsningen av integraler på formen:

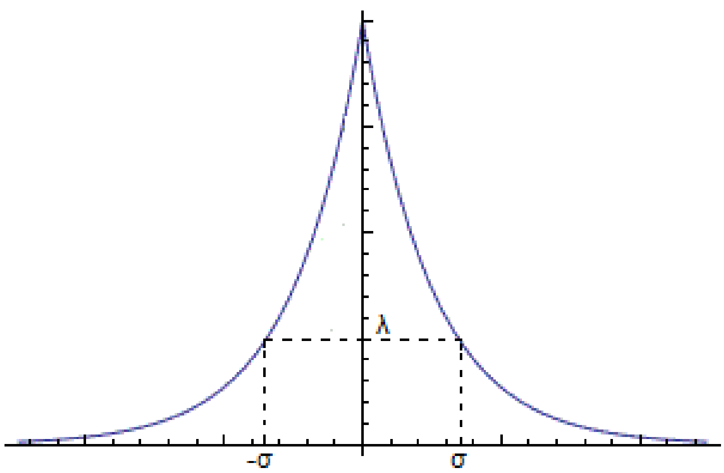
$$\int_0^{\infty} x^n e^{\frac{-x}{a}} dx = n! a^{n+1}$$

Vi har $n = 2$ og $a = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$, dermed er:

$$< x^2 >= 2A^2 2! \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^3 = \frac{4\lambda}{8\lambda^3} = \frac{1}{2\lambda^2}$$

c) Standardavviket til x er:

$$\sigma = \sqrt{< x^2 > - < x >^2} = \sqrt{\frac{1}{2\lambda^2} - 0} = \frac{1}{\sqrt{2}\lambda}$$



Figur 2: Grafen til $1\psi|^2$

Sannsynligheten for å finne partikkelen utenfor standardavviket er:

$$P = 1 - \int_{-\sigma}^{\sigma} |\psi|^2 dx = 1 - 2\int_{0}^{\sigma} |\psi|^2 dx = 1 - 2A^2 \int_{0}^{\sigma} e^{-2\lambda x} dx$$

$$= 1 - 2A^2 \left[-\frac{1}{2\lambda} e^{-2\lambda x} + C \right]_{x=0}^{x=\sigma} = 1 - \frac{2A^2}{2\lambda} \left(-e^{\frac{-2\lambda}{\sqrt{2}\lambda}} + e^0 \right)$$

$$= 1 - \frac{A^2}{\lambda} \left(e^{-\sqrt{2}} + 1 \right) = e^{-\sqrt{2}} \approx 0.24$$

Oppgave 3

a) Vi har at,

$$P_{ab}(t) = \int_a^b |\psi|^2 dx$$

da er,

$$\frac{dP_{ab}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_a^b |\psi|^2 dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \psi) dx$$

Vi bruker produktregelen for derivasjon:

$$\frac{dP_{ab}(t)}{dt} = \int_a^b \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi dx$$

Vi kan skrive Schrödinger likningen som:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - V\psi \frac{i}{\hbar}$$

Dens konjungerte er:

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + V\psi^* \frac{i}{\hbar}$$

Vi får da,

$$\frac{dP_{ab}(t)}{dt} = \int_a^b \psi^* \left(\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - V\psi \frac{i}{\hbar} \right) + \left(-\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + V\psi^* \frac{i}{\hbar} \right) \psi dx$$

$$= \frac{i\hbar}{2m} \int_a^b \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \psi dx = \frac{i\hbar}{2m} \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi \right) dx$$

$$= \frac{i\hbar}{2m} \left[\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi \right]_{x=a}^{x=b} = J(a,t) - J(b,t)$$

Enheten til sannsynlighetsstrømmen må vel være Herts, "sannsynlighet" per sekund? Er litt usikker på dette. Kunne jo også vært $\frac{J \cdot s}{kg} = \frac{m^2}{s}$ siden ψ er vel dimensjonsløs, og kun $\hbar$ og m har enheter.

b) Først finner vi de deriverte:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(Ae^{-a((mx^2/\hbar)+it)}\right) = -2A\frac{am}{\hbar}xe^{-a((mx^2/\hbar)+it)}$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(Ae^{-a((mx^2/\hbar)-it)}\right) = -2A\frac{am}{\hbar}xe^{-a((mx^2/\hbar)-it)}$$

Sannsynlighetsstrømmen er da:

$$J(x,t) = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi\frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\psi^*\right)$$

$$= \frac{i\hbar}{2m}\left(Ae^{-a((mx^2/\hbar)+it)}\right)\left(-2A\frac{am}{\hbar}xe^{-a((mx^2/\hbar)-it)}\right)$$
$$-\frac{i\hbar}{2m}\left(-2A\frac{am}{\hbar}xe^{-a((mx^2/\hbar)+it)}\right)\left(Ae^{-a((mx^2/\hbar)-it)}\right)$$
$$= -iA^2axe^{-2a(mx^2/\hbar)} + iA^2axe^{-2a(mx^2/\hbar)} = 0$$