FYS2140 - Oblig 11

Aleksander Hansen, gruppe 1

14. mai 2012

Oppgave 1

a) Energien til en fri, ikke-relativistisk partikkel er:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

bruker vi de Broglies bølge-partikkel relasjoner, $p = \hbar k$ og $E = \hbar\omega$, får vi dispersjonsrelasjonen:

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Rightarrow \omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

Fasehastigheten er gitt ved:

$$v_f = \lambda\nu = \frac{h}{p} \cdot \frac{E}{h} = \frac{E}{p} = \frac{mv^2}{2mv} = \frac{v}{2}$$

mens gruppehastigheten er:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\left(\frac{\hbar k^2}{2m}\right) = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m} = v$$

Det er altså gruppehastigheten som svarer til partikkelens hastighet.

b) Siden $s = \frac{1}{2}$, kan m_s ta verdiene $\pm\frac{1}{2}$. Tilstandene til superposisjonen har begge samme egenverdi for $\hat{S}^2$, og er derfor en egenfunksjon for $\hat{S}^2$. Dette er ikke tilfellet for $\hat{S}_z$, og $\psi(x)$ er dermed ikke en egenfunksjon for $\hat{S}_z$.

c) Hvis vi antar at uskarpheten er minimal blir ulikhetstegnet i uskarphetsrelasjonen et likhetstegn.

$$\sigma_x\sigma_p \geq \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \sigma_p = \frac{\hbar}{2\sigma_x}$$

$$\sigma_p = \frac{\hbar c}{2\sigma_x c} = \frac{192.3eVnm}{2 \cdot 5.0 \cdot 10^6 nm \cdot c} = 19.73MeV/c$$

Dette er uskarpheten i momentet, deler vi på nøytronmassen får vi uskarpheten i hastigheten.

$$\sigma_v = \frac{\sigma_p}{m_p} = \frac{19.73MeV/c}{939.6MeV/c^2} \approx 0.02c$$

Vi kan altså forvente å måle hastigheter opp mot 2% av lyshastigheten.

d) For en fri partikkel er potensialet $V = 0$. Hamilton operatoren blir da bare:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}}{2m} = \frac{1}{2m}(\hat{p_x}^2 + \hat{p_y}^2 + \hat{p_z}^2)$$

Setter vi nå inn $p_x \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ osv. får vi:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$$

Oppgave 2

a)

$$T = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{M^2v^2R^2}{2MR^2} = \frac{L_z^2}{2MR^2}$$

Substituerer $L_z \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}$, (og antar at $V = 0$)

$$\hat{H} = \hat{T} = \frac{\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^2}{2MR^2} = -\frac{\hbar^2}{2MR^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

b) Vi har,

$$\hat{H}\psi_k = E_k\psi_k$$
$$-\frac{\hbar^2}{2MR^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\left(N_k e^{ik\phi}\right) = E_k N_k e^{ik\phi}$$
$$\frac{\hbar^2k^2}{2MR^2}N_k e^{ik\phi} = E_k N_k e^{ik\phi}$$

$\psi_k(\phi) = N_k e^{ik\phi}$ er altså en løsning av TUSL.

$$\hat{L_z}\psi_k = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}\left(N_k e^{ik\phi}\right) = \hbar k N_k e^{ik\phi}$$

$$\hat{L_z}\psi_k = \hbar k\psi_k$$

$\psi_k(\phi)$ er også en egenfunksjon for $\hat{L_z}$ med egenverdi $\hbar k$.

$$1 = \int_0^{2\pi}\psi_k^*\psi_k d\phi = N_k^2\int_0^{2\pi}e^{-ik\phi}e^{ik\phi}d\phi = N_k^2\int_0^{2\pi}d\phi$$

$$2\pi N_k^2 = 1 \Rightarrow N_k = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$$

c) Vi har at,

$$\psi_k(\phi) = \psi_k(\phi + 2\pi)$$
$$N_k e^{ik\phi} = N_k e^{ik(\phi+2\pi)}$$
$$e^{ik\phi} = e^{ik\phi}e^{2\pi ik}$$

Altså,

$$e^{2\pi ik} = 1 \Rightarrow k \in \mathbb{Z}$$

Energien er $E_k = \frac{\hbar^2k^2}{2MR^2}$, og angulærmomentet er $L_z = \hbar k$. Uten spinn er degenerasjonsgraden til E_k, 1 for $k = 0$, og 2 for $k \neq 0$. Med spinn dobbles degenerasjonsgraden.

d) Paulis eksklusjonsprinsipp sier at ingen identiske fermioner kan ha samme kvantetilstand samtidig.

e)

$$\psi_{sym}(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_{k_1}(\phi_1)\psi_{k_2}(\phi_2) + \psi_{k_1}(\phi_2)\psi_{k_2}(\phi_1)]$$

$$\psi_{asym}(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_{k_1}(\phi_1)\psi_{k_2}(\phi_2) - \psi_{k_1}(\phi_2)\psi_{k_2}(\phi_1)]$$

Energien er gitt ved:

$$E = E(k_1) + E(k_2) = \frac{\hbar^2(k_1^2 + k_2^2)}{2MR^2}$$