FYS2140 Kvantefysikk, Oblig 11

Mitt **navn** og **gruppenummer**

20. april 2012

Obliger i FYS2140 merkes med navn og gruppenummer!

Denne obligen er satt sammen av den første delen av eksamen våren 2010 som spør litt fra forskjellige deler av pensum (se på det som nyttig repetisjon), den andre delen er identisk med den andre halvdelen av eksamen våren 2005 og handler om angulærmoment og flerpartikkelsystemer. Nytt denne uken er at vi har plassert ukens tilleggsoppgave, Oppgave 5.6 fra Griffiths, bakerst i obligen slik at den er lett å finne, men denne er altså ikke en del av obligen.

Oppgave 1

a) Skriv ned dispersjonsrelasjonen $\omega(k)$ til en fri, ikke-relativistisk partikkel. Regn ut gruppe- og fasehastigheten og vis at det er gruppehastigheten som svarer til partikkelens hastighet.

b) Anta at vi har et sett med bølgefunksjoner ψ_{s,m_s} som er egenfunksjoner for det totale spinnet og dets z–komponent, dvs.

$$\begin{aligned} \hat{S}^2\psi_{s,m_s} &= \hbar^2 s(s+1)\psi_{s,m_s}, & (1) \\ \hat{S}_z\psi_{s,m_s} &= \hbar m_s\psi_{s,m_s}, & (2) \end{aligned}$$

der $s = 1/2$. Vi ser på superposisjonen

$$\psi(x) = A\sum_{m_s} m_s\psi_{s,m_s}, \tag{3}$$

hvor A er en normeringskonstant. Hva er de tillatte verdiene for m_s? Er $\psi(x)$ en egenfunksjon for henholdsvis $\hat{S}^2$ og $\hat{S}_z$? Begrunn svaret.

c) Et nøytron i en atomkjerne kan bevege seg over et område på med en utstrekning på omlag 5 fm. Bruk uskarphetsrelasjonen til å estimere hvilke hastigheter man kan forvente å måle for dette nøytronet.

d) En partikkel med masse m beveger seg fritt i tre dimensjoner. Skriv ned Hamiltonoperatoren for partikkelen og forklar hvorfor de stasjonære tilstandene har skarpt angulærmoment (L^2 og L_z).

Oppgave 2 Vi skal i denne oppgaven se på et en-dimensjonalt problem med en partikkel med masse M som beveger seg på en sirkel med radius R.

a) Bruk det klassiske uttrykket $L_z = MvR$ til å uttrykke partikkelens kinetiske energi ved hjelp av L_z. Bruk deretter substitusjonen $L_z \to -i\hbar\partial/\partial\phi$ til å vise at

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2MR^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}. \tag{4}$$

b) Vis at

$$\psi_k(\phi) = N_k e^{ik\phi}, \tag{5}$$

er en løsning av den tidsuavhengige Schrödingerligningen og samtidig egenfunksjon for $\hat{L}_z$. Bestem normeringskonstanten N_k. Det er disse løsningene vi skal bruke i resten av oppgaven.

c) Siden partikkelen lever på en sirkel, må vi identifisere vinklene ϕ og $\phi+2\pi$ som samme punkt i rommet. Bølgefunksjonen må derfor ha samme verdi for begge disse argumentene (krav om entydighet). Formuler det matematiske kravet dette gir for bølgefunksjonen og vis hvilken betingelse dette gir for tillatte verdier av k. Skriv ned de tilsvarende kvantiserte verdiene for partikkelens angulærmoment L_z og energi E_k. Hva er degenerasjonsgraden til E_k?

Vi antar nå at det befinner seg *to* partikler i systemet, og at disse er spinn-$\frac{1}{2}$ fermioner. Vi ser bort fra eventuelle vekselvirkninger mellom dem.

d) Formuler Paulis eksklusjonsprinsipp.

e) Anta at de to partiklene befinner seg i hver sin angulærmomenttilstand k_1 og k_2 der $k_1 \neq k_2$. Skriv ned de mulige to-partikkel-bølgefunksjonene. Spesifiser både rom- og spinndel. Normér romdelen. Skriv ned egenenergien for tilstanden.

Oppgave 3 Tilleggsoppgave — ikke oblig! Tenk deg to partikler som ikke vekselvirker, hver med masse m, i en uendelig kvadratisk (endimensjonal) brønn. Hvis den ene er i tilstanden

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \tag{6}$$

og den andre i tilstanden ψ_l $(n \neq l)$, finn $\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle$, under antagelsen **a)** at de ikke er identiske partikler, **b)** at de er identiske bosoner, og **c)** at de er identiske fermioner.