FYS3140 - Hjemmeeksamen

Kand.nr. 61

26. september 2013

Problem 1: Residue theory

a)

b)

Problem 2: Fourier series

a) Se figur 1 for skisse av $f(x)$.

Vi finner koeffisientene:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\cos(nx)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} k\cdot\cos(nx)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 0\cdot\cos(nx)dx\right] = \frac{k}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(nx)dx$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{k}{n\pi}\cdot\sin(nx)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \begin{cases} 2\cdot\frac{k}{n\pi} & \text{for } n = 1,5,9,... \\ -2\cdot\frac{k}{n\pi} & \text{for } n = 3,7,11,... \end{cases} \\ \frac{k}{\pi}\cdot\pi = k \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{for } n = 0 \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\sin(nx)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} k\cdot\sin(nx)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 0\cdot\sin(nx)dx\right]$$

$$= \frac{k}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin(nx)dx = \frac{k}{n\pi}\cdot -\cos(nx)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0, \quad \forall n$$

Fourierserien kan altså skrives som:

$$\boxed{f(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\cos(x) - \frac{2k}{3\pi}\cos(3x) + \frac{2k}{5\pi}\cos(5x) - \frac{2k}{7\pi}\cos(7x) + ...}$$

b) Vi lar $k = \frac{\pi}{2}$ og ser på $f(\pi)$:

$$f(\pi) = 0 = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - ..$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...}$$

c) Se figur 2 for skisse av $f(x)$.

Vi finner koeffisientene:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x(1-in)}dx = \frac{e^{x(1-in)}}{2\pi(1-in)}\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{e^{\pi(1-in)} - e^{-\pi(1-in)}}{2\pi(1-in)} = \frac{i\sinh(\pi - i\pi n)}{\pi(n+i)}$$

Vi kan skrive serien som:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i\sinh(\pi - i\pi n)}{\pi(n+i)}e^{inx}}$$

d) Vi har at,

$$e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i\sinh(\pi - i\pi n)}{\pi(n+i)}\Big[\cos(nx) + i\sin(nx)\Big]}$$

Ja, det er mulig å forenkle...

Problem 3: Fröbenius method

a) Det vil vise seg å være hensiktsmessig å multiplisere differensiallikningen med x:

$$4x^2y'' + 2xy' + xy = 0 \tag{1}$$

Denne vil ha samme løsning og *indicial* likning (IE) som den opprinnelige likningen. Vi leter etter en løsning på formen:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{s+n} \tag{2}$$

De deriverte er:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(s+n)a_n x^{s+n-1} \tag{3}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(s+n)(s+n-1)a_n x^{s+n-2} \tag{4}$$

Vi plugger så inn likning 2, 3 og 4 inn i 1, og samler leddene av samme orden:

Tabell 1: Ledd av samme orden

	x^s	x^{s+1}	x^{s+n}
$4x^2y''$	$4s(s-1)a_0$	$4s(s+1)a_1$	$4(s+n)(s+n-1)a_n$
$2xy'$	$2sa_0$	$2(s+1)a_1$	$2(s+n)a_n$
xy	0	a_0	a_{n-1}

Fra første kolonne i tabell 1 har vi,

$$[4s(s-1)+2s]a_0 = 0$$

Vi ser altså at IE kan skrives som:

$$\boxed{s(s-1)+\frac{1}{2}s = 0} \tag{5}$$

$$s(s-\frac{1}{2}) = 0$$

Og har løsningene:

$$\boxed{s_1 = 0 \quad \wedge \quad s_2 = \frac{1}{2}}$$

b) For $s_1 = 0$ får vi fra andre kolonne i tabell 1 at:

$$2a_1 + a_0 = 0 \quad \Rightarrow \underline{a_1 = -\frac{1}{2}a_0}$$

Generelt har vi fra tredje kolonne at:

$$4n(n-1)a_n + 2na_n + a_{n-1} = 0$$

$$(4n^2-2n)a_n = -a_{n-1}$$

$$a_n = \frac{-a_{n-1}}{4n^2-2n} = \frac{-a_{n-1}}{2n(2n-1)}$$

$$\underline{a_n = (-1)^n\frac{a_0}{(2n)!}}$$

Som faktisk holder for alle n. Vi kan nå skrive løsningen for s_1 som:

$$\boxed{y_1 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{a_0x^n}{(2n)!}} \tag{6}$$

Nå gjenstår det bare å vise at likning 6 er lik Taylorserien til $a_0\cos(\sqrt{x})$. Vi vet at,

$$\cos(u) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^{2n}}{(2n)!}$$

Substituerer vi $u = x^{1/2}$, får vi:

$$\cos(\sqrt{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_0 \cos(\sqrt{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a_0 x^n}{(2n)!} = y_1}$$

Tilsvarende for $s_2 = \frac{1}{2}$ får vi fra tredje kolonne:

$$4\left(\frac{1}{2} + n\right)\left(\frac{1}{2} + n - 1\right) a_n + 2\left(\frac{1}{2} + n\right) a_n + a_{n-1} = 0$$

$$(4n^2 + 2n)a_n = -a_{n-1}$$

$$a_n = \frac{-a_{n-1}}{4n^2 + 2n} = \frac{-a_{n-1}}{2n(2n+1)}$$

$$\underline{a_n = (-1)^n \frac{a_0}{(2n+1)!}}$$

Generelt er a_0 for s_2 forskjellig fra a_0 for s_1. Vi skriver derfor løsningen for s_2 slik:

$$\boxed{y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{b_0 x^{n+\frac{1}{2}}}{(2n+1)!}} \tag{7}$$

Vi kjenner igjen likning 7 som Taylorserien til $\sin(u)$, med $u = x^{1/2}$. Vi har altså at:

$$\boxed{y_2 = b_0 \sin(\sqrt{x})} \tag{8}$$

c) Hvis,

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0$$

så er y_1 og y_2 lineært uavhengige. Vi har:

$$y_1' = -\frac{a_0}{2}\sin(\sqrt{x}), \quad y_2' = \frac{b_0}{2}\cos(\sqrt{x})$$

$$\Rightarrow W = \frac{a_0 b_0}{2}[\cos(\sqrt{x})\cos(\sqrt{x}) + \sin(\sqrt{x})\sin(\sqrt{x})]$$

$$W = \frac{a_0 b_0}{2}\cos(\sqrt{x} - \sqrt{x}) = \frac{a_0 b_0}{2} \neq 0$$

fordi $a_0, b_0 \neq 0$. i.e. y_1 og y_2 er lineært uavhengige.

Den generelle løsningen kan da skrives som en lineærkombinasjon av y_1 og y_2:

$$\boxed{y = a_0 \cos(\sqrt{x}) + b_0 \sin(\sqrt{x})}$$

Problem 4: Cauchy-Riemann equations

Vi har at $u(x,y) = \cos(bx)\cosh(y)$ må tilfredstille

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

for å være harmonisk. Vi får:

$$-b^2\cos(bx)\cosh(y) + \cos(bx)\cosh(y) = 0$$
$$b^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = 1}$$

Vi kan nå bruke Cauchy-Riemann likningene til å finne den konjungerte harmoniske funksjonen $v(x,y)$. Den første likningen gir oss,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -\sin(x)\cosh(y)$$
$$\Rightarrow v(x,y) = \int \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\sin(x)\int \cosh(y) dy$$
$$\underline{= -\sin(x)\sinh(y) + f_1(x) + C} \tag{9}$$

Hvor $f_1(x)$ er en ukjent funksjon av x og C er en konstant.

Den andre likningen gir oss,

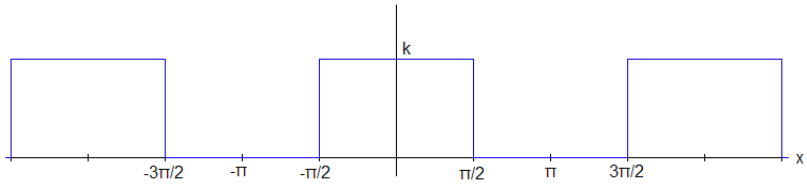
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\cos(x)\sinh(y)$$
$$\Rightarrow v(x,y) = \int \frac{\partial v}{\partial x} dx = -sinh(y)\int \cos(x) dx$$
$$\underline{= -\sin(x)\sinh(y) + f_2(y) + C} \tag{10}$$

Hvor $f_2(y)$ er en ukjent funksjon av y og C igjen er en konstant. For å få et entydig uttrykk for $v(x,y)$ må $f_1 = f_2 = 0$. Vi ender altså opp med:

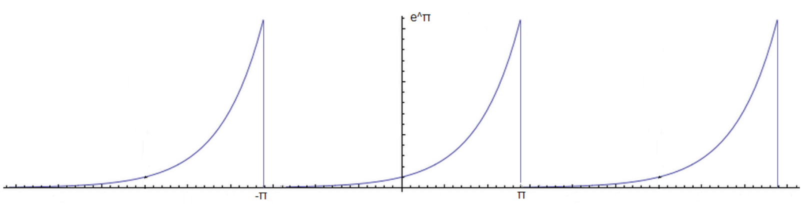
$$\boxed{v(x,y) = -\sin(x)\sinh(y) + C}$$

Vi skal finne f slik at $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, hvor $z = x + iy$. Vi har:

$$f(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\frac{1}{2}\left(e^{y} + e^{-y}\right) - i\frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\frac{1}{2}\left(e^{y} - e^{-y}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(e^{y+ix} + e^{y-ix} + e^{-y+ix} + e^{-y-ix}\right) - \frac{1}{4}\left(e^{y+ix} - e^{y-ix} - e^{-y+ix} + e^{-y-ix}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^{y-ix} + e^{-y+ix}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-i(x+iy)} + e^{i(x+iy)}\right) = \cos(x+iy)$$
$$\boxed{f(z) = \cos(z)}$$



Figur 1: $f(x)$



Figur 2: $f(x)$