Aleksandra Kaszubska

Laboratorium 4

Całkowanie numeryczne równań różniczkowych zwyczajnych

Celem ćwiczenia było zapoznanie się z podstawowymi metodami całkowania numerycznego równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu.

1. Metoda Eulera

Metoda Eulera jest metodą jawną, pierwszego rzędu. Jest jedną z najprostszych lecz bardziej niestabilnych metod. Formułę tej metody wyprowadzamy stosując rozwinięcie Taylora.

Schemat iteracyjny:

$$t_{i+1} = t_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + h * f(t_i, y_i)$$

2. Metoda Rungego-Kutty 4-ego rzędu

Jest to metoda jawna, która charakteryzuje się stosunkowo wysokim rzędem, łatwością implementacji oraz relatywnie wysoką stabilnością.

Schemat iteracyjny:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

Opis zadania

Dane jest zagadnienie początkowe postaci :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \lambda * y(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

W przykładzie podaję

λ = 4

t_0 = 2

y_0 = 3

Na początku programu znajdują się deklaracje użytych funkcji.
Funkcja 'fun' oblicza nam prawą stronę równania. W funkcji 'euler' tworzymy schemat i rozwiązujemy zagadnienie początkowe. Wykorzystujemy plik rk4.cpp, w którym zaimplementowana jest metoda Rungego-Kutty. Użyta jest funkcja rk4. Funkcja 'analityczna' zwraca nam wartość dokładnego rozwiązania naszego zagadnienia.
Dokładne rozwiązanie:

$$y(t) = y_0 * e^{\lambda*(t-t_0)}$$

W funkcji głównej znajduje się deklaracja wszystkich potrzebnych zmiennych. Podajemy wartość t_k dla której szukamy rozwiązania y(t_k) oraz inne wartości.

W przykładzie podałam wartość $t_k = 6$

Zgodnie z zadaniem 3 wyświetlamy na ekran kolejne wartości t, y oraz błędy metody Eulera oraz metody RK4.

Następnie modyfikujemy program. Liczba kroków będzie wynosić teraz N=2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6. Program wykonuje obliczenia dla obydwu metod i zapisuje do pliku liczbę kroków, długość kroku oraz względne wartości błędów.

Wyniki

Wykres przedstawia zależność błędów dla obydwu metod od ilości kroków N.