

Лабораторная работа №4

Презентация

Миличевич Александра

15 февраля 2025

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Цель работы

Познакомиться с алгоритмами вычисления наибольшего общего делителя (Алгоритмами Евклида).

Задание

1. Реализовать следующие алгоритмы программно:

1.1 Алгоритм Евклида

1.2 Расширенный алгоритм Евклида

1.3 Бинарный алгоритм Евклида

1.4 Расширенный бинарный алгоритм Евклида

Выполнение лабораторной работы

Объяснение алгоритмов Евклида для нахождения НОД

Этот документ описывает три функции, реализующие различные алгоритмы Евклида для вычисления наибольшего общего делителя (НОД) двух чисел.

1. euclidean_simply(first_number, second_number)

Эта функция реализует базовый итеративный алгоритм Евклида.

Как работает:

1. Функция использует цикл `while`, который выполняется до тех пор, пока оба числа (`first_number` и `second_number`) не станут равны нулю.
2. Внутри цикла, если `first_number` больше или равно `second_number`, то `first_number` заменяется на остаток от деления `first_number` на `second_number` (`first_number %= second_number`).
3. Иначе, `second_number` заменяется на остаток от деления `second_number` на `first_number` (`second_number %= first_number`).
4. Когда одно из чисел становится равным нулю, функция возвращает второе число (которое и есть НОД).

Эта функция реализует расширенный алгоритм Евклида.

```
# Функция уменьшает числа до тех пор, пока одно из них не станет нулем
# Практически, для этого используется цикл
def euclidean_simply(first_number, second_number):
    """Вычисляет наибольший общий делитель (НОД) двух чисел,
    используя простой алгоритм Евклида."""
    while first_number != 0 and second_number != 0:
        if first_number >= second_number:
            first_number %= second_number
        else:
            second_number %= first_number
    return first_number or second_number
```

Рис. 1: классический алгоритм

2. `euclidean_extended(first_number, second_number)`

Как работает:

1. Функция использует рекурсию.
2. Базовый случай: если `first_number` равно 0, то возвращается кортеж `(second_number, 0, 1)`.
3. В противном случае, функция вызывает себя рекурсивно с параметрами `second_number % first_number` и `first_number`, получает результаты `div`, `x`, `y`.
4. Затем вычисляет и возвращает новый кортеж `(div, y - (second_number // first_number) * x, x)`. Этот кортеж содержит НОД и коэффициенты Безу.

```

# Функция для расширенного алгоритма Евклида
# first_number * x + second_number * y = gcd(first_number, second_number)
# Алгоритм находит НОД и его линейное представление
def euclidean_extended(first_number, second_number):
    """Вычисляет НОД двух чисел и коэффициенты Безу.
    Возвращает кортеж (gcd, x, y), где gcd - НОД, а
    x и y удовлетворяют уравнению first_number * x + second_number * y = gcd."""
    if first_number == 0:
        return (second_number, 0, 1) # Базовый случай: НОД(0, second_number) = second_number
    else:
        div, x, y = euclidean_extended(second_number % first_number, first_number)
        return (div, y - (second_number // first_number) * x, x)

```

Рис. 2: расширенный алгоритм

3. `binary_euclidean(first_number, second_number)`

Как работает:

1. Используется переменная `common_power_of_2` для отслеживания общих степеней двойки.
2. Сначала числа делятся на 2, пока оба четные, при этом `common_power_of_2` умножается на 2.
3. Далее, используются `u` и `v` для хранения текущих значений.
4. Пока `u` не равно нулю, выполняется цикл:
 - Если `u` четное, то `u` делится на 2.
 - Иначе, если `v` четное, то `v` делится на 2.
 - Иначе, если `u` больше или равно `v`, то `u` вычитается `v`.
 - Иначе, `v` вычитается `u`.
5. Функция возвращает результат, умноженный на накопленную степень двойки.

```

# Функция для бинарного алгоритма Евклида
def binary_euclidean(first_number, second_number):
    """Вычисляет НОД двух чисел, используя бинарный алгоритм Евклида."""
    common_power_of_2 = 1 # Переменная для отслеживания общих степеней 2
    while (first_number % 2 == 0 and second_number % 2 == 0):
        first_number //= 2
        second_number //= 2
        common_power_of_2 *= 2
    u, v = first_number, second_number
    while u != 0:
        if u % 2 == 0:
            u //= 2
        elif v % 2 == 0:
            v //= 2
        elif u >= v:
            u -= v
        else:
            v -= u
    return common_power_of_2 * v

```

Рис. 3: Бинарный алгоритм

4. `binary_euclidean_extended(first_number, second_number)`

Эта функция реализует расширенный бинарный алгоритм Евклида.

Как работает:

1. Так же как и в `binary_euclidean`, выделяется общая степень двойки.
2. Используются `u` и `v` для хранения текущих значений. `A`, `B`, `C`, `D` — это коэффициенты для расширенного алгоритма.
3. Пока `u` не равно нулю, выполняется цикл:
 - Если `u` четное, то `u` делится на 2. Если `A` и `B` четные, то они тоже делятся на 2. Иначе, `A` и `B` обновляются с учетом четности и делителя.
 - Аналогично для `v` и `C`, `D`.
 - Если `u >= v`, то `u` и `A`, `B` уменьшаются.
 - Иначе, `v` и `C`, `D` уменьшаются.
4. Функция возвращает НОД и коэффициенты Безу, умноженные на общую степень двойки.


```

# Функция для расширенного алгоритма Евклида
#  $\text{first\_number} * x + \text{second\_number} * y = \text{gcd}(\text{first\_number}, \text{second\_number})$ 
# Алгоритм находит НОД и его линейное представление
def euclidean_extended(first_number, second_number):
    """Вычисляет НОД двух чисел и коэффициенты Безу.
    Возвращает кортеж (gcd, x, y), где gcd - НОД, а
    x и y удовлетворяют уравнению  $\text{first\_number} * x + \text{second\_number} * y = \text{gcd}$ ."""
    if first_number == 0:
        return (second_number, 0, 1) # Базовый случай:  $\text{НОД}(0, \text{second\_number}) = \text{second\_number}$ 
    else:
        div, x, y = euclidean_extended(second_number % first_number, first_number)
        return (div, y - (second_number // first_number) * x, x)

```

Рис. 4: расширенный бинарный алгоритм

Эти функции предоставляют три разных способа для вычисления наибольшего общего делителя (НОД). `euclidean_simply` — это простой итеративный подход, `euclidean_extended` — это рекурсивный метод, который также находит коэффициенты Безу, а `binary_euclidean` использует битовые операции для повышения эффективности.