Igra bazirana na uklanjanju grana u grafu - BNUGUG

Milica Vasiljević
Gimnazija ,,Sveti Sava" Požega
e-mail: vasiljevicmilica33@gmail.com

Aleksandra Savić
Gimnazija Kraljevo
e-mail: aleksana001@gmail.com

1. avgust, 2018

Apstrakt

Posmatraćemo igru između dva igrača na grafu G. Igra se zasniva na tome da svako od igrača obriše po jednu granu u grafu tako da ne ukloni ili izmeni izolovanu strukturu grafa zadatu u uslovu igre. Igrač koji obriše poslednju granu koja je moguća da se ukloni je pobednik. Posmatraćemo specijalne i posebne klase grafova i ispitivati ishode naše igre na njima.

Ključne reči: graf, nim zbir, suma igara, igre na grafovima

1 Uvod

Postoje različite vrste igara, koje se razlikuju po svojim pravilima, potpunim i nepotpunim informacijama ili možda elementima slučajnosti. Zato je potrebno da definišemo kakve ćemo igre posmatrati u našem radu i koje uslove treba da zadovoljavaju:

1. u igri učestvuju dva igrača koje ćemo nazivati Prvim i Drugim igračem,
2. Prvi i Drugi igrač vuku poteze naizmenično,
3. oba igrača igraju optimalno, tj. što je bolje moguće,
4. igra ima jasno definisanu validnost poteza,
5. oba igrača raspolažu potpunom informacijom,
6. igra se završava nakon konačno mnogo poteza, kada jedan od igrača nije u mogućnosti da odigra dozvoljen potez. Igrač koji se nađe u takvoj situaciji je gubitnik. Pozicija iz koje ne može da se odigra dozvoljen potez naziva se završna pozicija.

Našu igru baziranu na uklanjanju grana u grafu ćemo ispitati u različitim modifikacijama, tačnije u modifikacijama grafa na kojem igramo i grafa koji ne smemo da uklonimo ukoliko ga napravimo. Znači, taj podgraf će smeti da se napravi u toku igre, ali ne sme biti obrisan. Igrač koji ne bude mogao da obriše nijednu validnu granu je gubitnik.
Na nivou celog rada se pod terminom grafa, smatra prost graf (neusmeren graf bez petlji i višestrukih grana). Dalje ćemo u radu pominjati i specijalne klase grafova i ustaljene termine iz teorije igara i teorije grafova. $V(G)$ nam predstavlja skup čvorova, a $E(G)$ skup grana grafa G.

U drugom poglavlju ćemo uvesti teoriju nim igara i uz pomoć nje, uopštiti i ispitati neke specijalne slučajeve u našoj igri.

U trećem poglavlju ćemo uvesti pojam suma igara i tako objediniti prethodne pojmove.

U četvrtom poglavlju ćemo da posmatramo našu igru u različitim slučajevima, analizirati ih i izvlačiti zaključke. Takođe ćemo navesti posebno osmišljene grafove čija će se igra bazirana na uklanjanju grana svesti na neku od već poznatih igara, kao što je npr. već pomenuti nim.

2 Nim

Definicija 2.1 *Na stolu se nalazi n gomila novčića gde prva gomila ima a_1 novčića, druga a_2 novčića, ..., n-ta gomila a_n novčića. Igrači igraju naizmenično poteze. Pod potezom se podrazumeva uklanjanje proizvoljnog broja novčića (barem jednog) sa jedne od gomila gde ima barem jedan novčić. Igrač koji ne bude u mogućnosti da odigra dozvoljen potez, tj. kada na stolu ne bude više novčića, gubi.*

U Nim igrama sa n gomila novčića poziciju igre ćemo predstaviti kao uređenu n-torku brojeva $(a_1, a_2, ..., a_n)$, koja označava da je na prvoj gomili ostalo a_1 novčića, na drugoj gomili a_2 novčića, ... , na n-toj gomili a_n novčića.

Igrača koji počinje igru zvaćemo prvi igrač. Kako se pri svakom potezu ukupan broj štapića smanjuje (bar za 1), u jednom trenutku će se sve gomile isprazniti i igrač koji je tada na potezu biće gubitnik, a njegov rival pobednik. Ako su na početku gomile $A_1, A_2, ..., A_n$ i ako gomila A_i ima a_i štapića, $|A_i| = a_i \geq 0$, takvu situaciju ćemo zvati $(a_1, a_2, ..., a_n)$ pozicija. Ako oba igrača povlače najbolje moguće poteze, prirodno se postavlja pitanje: U datoj poziciji $(a_1, a_2, ..., a_n)$ koji od igrača ima pobedničku strategiju?

Pre nego što se upustimo u opšte rešenje, razmotrićemo specijalan slučaj kad su sve gomile jednake, tj. $x_1 = x_2 = ... = x_n = x$. To je pozicija $\underbrace{(x, x, ..., x)}_{n}$. Pokazaćemo da važi sledeće tvrđenje

Teorema 2.2 *U poziciji $\underbrace{(x, x, ..., x)}_{n}$, za n parno pobedničku strategiju ima drugi igrač, a za n neparno prvi igrač.*

Dokaz.

- $n = 2k, k \geq 1$ Gomile možemo razbiti na k parova. Recimo, $\{A_1, A_{k+1}\}$, $\{A_2, A_{k+2}\}$, ... , $\{A_k, A_{2k}\}$. Reći ćemo da su gomile iz istog para simetrične.
  Neka prvi igrač, u prvom potezu, izabere gomilu A_i i iz nje ukloni t, $1 \leq t \leq x$, štapića. U daljem toku igre drugi igrač kopira poteze prvog, ali na simetričnoj gomili. Dokle god prvi igrač bude mogao da povlači poteze, moći će i drugi. Prema tome, u poziciju $(0, 0, ..., 0)$ na redu će biti prvi igrač, te je on gubitnik, pa je drugi igrač pobednik.

- $n = 2k+1, k \geq 0$. U prvom potezu prvi igrac ukloni gomilu, recimo A_{2k+1}. Nakon toga, nastaje prethodna situacija s tim što je sad drugi igrač na potezu. Drugim rečima, igrači su zamenili uloge. Dalje, prvi igrač sledi „ simetričnu strategiju" iz prethodne situacije i pobeđuje.

$\square$

Primećujemo da igre tipa NIM teoretski uvek možemo rešavati određivanjem pobedničkih i gubitničkih pozicija, međutim praktično je moguće rešavati samo male primere. Sada ćemo pokušati da pronađemo efikasniji način rešavanja NIM igre.

2.1 Nim zbir

Za razmatranje opšteg slučaja, kad gomile ne moraju da budu sve jednake, potrebna nam je operacija $\oplus$, poznata pod imenom Nim zbir. (Operaciji $\oplus$ odgovara ekskluzivna disjunkcija u algebri iskaza. Ona je tačna ako i samo ako je tačno jedan od iskaza tačan. U programiranju je poznata i pod nazivom *xor*.) Nim zbir je binarna operacija u oznaci $a \oplus b$. $a \oplus b$ se računa tako što brojeve a i b predstavimo u binarnom zapisu i saberemo ih po modulu dva bez prenosa.

Lema 2.3 *Za nim zbir n sabiraka, $n \geq 2$, važe sledeća tvrđenja:*

1. *Ako se u nim zbiru promeni tačno jedan sabirak promeniće se i nim zbir.*

2. *Ako je nim zbir nekoliko brojeva različit od nule, onda postoji barem jedan sabirak koji se može smanjiti tako da novi nim zbir bude nula.*

Dokaz.

1. Ako se promeni bilo koja cifra nekom broju u binarnom zapisu promeniće se i njegova celokupna vrednost. To onda menja i zapis nim zbira, pa samim tim i cifre u svim razredima u kojima se nalazi promenjena cifra.

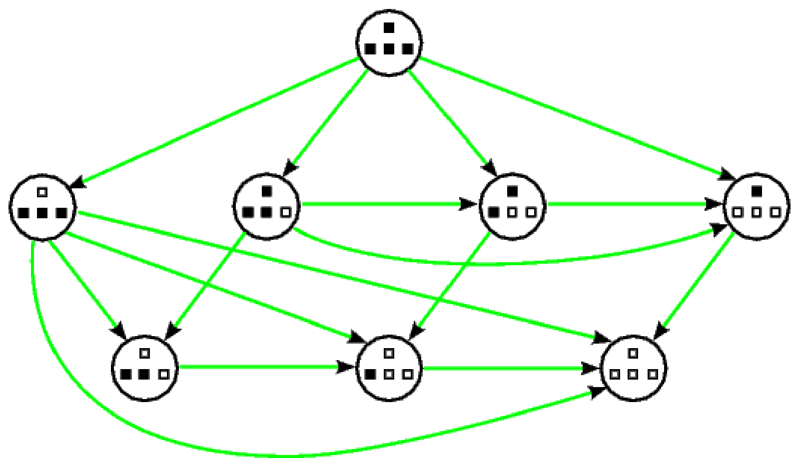
2. Uočimo najstariji razred u kome je nim zbir jednaka 1 u binarnom zapisu. Tada postoji barem jedan sabirak koji na tom mestu ima cifru 1 u binarnom zapisu. Označimo jedan od takvih sabiraka s. Neka nim zbir ima k cifara 1 u binarnom zapisu i označimo ta mesta $\{j_1, j_2, ..., j_k\}$. Sada promenimo sabirak s tako što ćemo promeniti cifre u binarnom zapisu sabirka s na mestima $\{j_1, j_2, ..., j_k\}$ (1 u 0, 0 u 1). Na taj način nim zbir biće jednak nuli. Jasno je da se promenama sabirka s dobio manji broj s (jer je u najstarijem razredu u kome je promenjena cifra, cifra 1 zamenjena sa 0). $\square$

Teorema 2.4 *U nim igri pozicija je gubitnička ako i samo ako je nim zbir za tu poziciju jednak nuli, a pozicija je pobednička ako i samo ako je nim zbir za tu poziciju različit od nule.*

Dokaz. Označimo sve pozicije koje su različite od nule kao pobedničke, a ostale kao gubitničke. Sve što treba da uradimo jeste da dokažemo uslove pobedničkih i gubitničkih pozicija.

1. *Završna pozicija je gubitnička*
   Završna pozicija igre nim je $(0, 0, ..., 0)$, a znamo da je nim zbir $0 \oplus 0 \oplus ... \oplus 0 = 0$, samim tim smo se uverili da je zadovoljen prvi uslov iz definicije.

2. *Ne postoji dozvoljen potez kojim se iz gubitničke pozicije prelazi u gubitničku poziciju*
   Iz 2.3 možemo videti da iz pozicije u kojoj je nim zbir jednak 0, jednim dozvoljenim potezom ne možemo otići u poziciju u kojoj je nim zbir jednak 0



Slika 1: Nim prikazan na usmerenom grafu

3. *Iz svake pobedničke pozicije postoji barem jedan dozvoljen potez koji vodi u gubitničku poziciju*
   Iz 2.3 možemo da zaključimo da iz pozicije gde nim zbir nije nula možemo da ga pretvorimo u nulu barem jednim dozvoljenim potezom.

$\square$

Posledica 2.5 *Prvi igrač ima pobedničku strategiju ako i samo ako je nim zbir početne pozicije različit od 0.*
Drugi igrač ima pobedničku strategiju ako i samo ako je nim zbir početne pozicije jednak 0.

Svaku igru možemo predstaviti u obliku usmerenog grafa. Čvor u grafu će nam označavati poziciju igre a grana potez.

2.2 Usmeren graf

Definicija 2.6 *Usmeren graf G je određen uređenim parom (X, F) gde je X neprazan skup čvorova u grafu (pozicija), a F je funkcija koja za svako $x \in X$ vraća podskup skupa X. Za svako $x \in X, F(x)$ predstavlja skup pozicija do kojih igrač može da dođe iz pozicije x. U slučaju kada je $F(x)$ prazan skup onda je pozicija završna, igrač ne može da odigra bilo kakav potez.*

Na slici 1 vidimo primer jednog usmerenog grafa na kome su prikazane Nim pozicije. Preko njega su prikazani svi mogući potezi koji su predstavljeni granama, a pozicije su predstavljene čvorovima. Čvor iz kog grane nisu ni u jedan drugi čvor usmerene predstavlja završnu poziciju.

2.3 Sprague-Grundy teorema

Teorema nosi ime po nemačkom matematičaru Špragu (J. P. Sprague 1884-1967) i engleskom matematičaru Grandiju (P. M. Grandy 1917-1959) koji su, nezavisno jedan od drugog, došli do istog rezultata u kombinatornoj teoriji igara. Za formulaciju i primene teoreme Sprague-Grundy neophodno je nekoliko novih pojmova.
Matematička igra koju igraju dva igrača naizmenično povlačeći poteze je *nepristrasna* (*impartial game*) ako ispunjava sledeće uslove:

- sastoji se od skupa mogućih pozicija;
- povlačenjem poteza jedna od mogućih pozicija prevodi se u drugu; formalno, povlačenje poteza je uređen par pozicija;
- postoji zajednički skup završnih pozicija u kojima nema dozvoljenih (legalnih) poteza; skup završnih pozicija ne može da se prevede ni u jednu drugu moguću poziciju;
- u svakoj poziciji koja nije završna postoji skup dozvoljenih (legalnih) poteza koji je isti za oba igrača;
- igrač koji neku poziciju prevede u završnu je pobednik.

Tako je NIM nepristrasna igra. Ako je $(x_1, x_2, ..., x_n)$ početna pozicija , moguće da su sve pozicije oblika $(y_1, y_2, ..., y_n)$, gde je $0 \leq y_i \leq x_i$, za svako $1 \leq i \leq n$. Povlačenje poteza se sastoji u prevođenju neke moguće pozicije $(a_1, a_2, ..., a_n)$ u poziciju $(a_1, a_2, ..., a_i', ..., a_n)$, gde je $1 \leq i \leq n$ i $1 \leq a_i' \leq a_i$. Završna pozicija je $(0, 0, ..., 0)$.

Definicija 2.7 *Sprague-Grundy funkcija nad grafom G = (X,F) je funkcija g, definisana nad skupom X, takva da važi:*

$$g(x) = min\{n \geq 0 : n \neq g(y) | y \in F(x)\}$$

g(x) predstavlja najmanji nenegativan broj koji ne postoji međupozicija u koje se može doći jednim dozvoljenim potezom iz pozicije x (možemo zaključiti da je vrednost g(x) = 0, gde x predstavlja završnu poziciju

Primetimo da ako hoćemo da izračunamo $g(x)$, pre toga moramo da izračunamo $g(y)$ za svako $y \in F(x)$, tj. ova funkcija se popunjava rekurzivno.

Za izračunavanje vrednosti funkcije $g(x)$ nad grafom $G = (X, F)$, koristićemo sledeći algoritam:

1. Uočimo završne pozicije. Završne pozicije ćemo prepoznati po tome što iz čvorova koji predstavljaju završne pozicije ne postoji dozvoljen potez, tj. ne izvire nijedna grana iz čvora. Znamo daje vrednost Sprague-Grundy funkcije u završnim pozicijama 0.

2. Uočimo čvor u grafu, x, za koji nismo izračunali vrednost Sprague-Grundy funkcije, a znamo vrednosti $g(y)$ za svako $y \in F(x)$. izračunamo $g(x)$ i nastavimo sa 2. Algoritam će se završiti kada izračunamo vrednosti $g(x)$ za svako $x \in X$

Teorema 2.8 *Neka je matematička igra predstavljena grafom $G = (X, F)$. Pozicija igre $x \in X$ je pobednička ako i samo ako je $g(x) \neq 0$, a pozicija $y \in X$ je gubitnička ako i samo ako je $g(y) = 0$.*

Dokaz. Označimo sve pozicije gde je kao gubitničke, a preostale kao pobedničke.Dokažimo da važe uslovi definicije pobedničkih i gubitničkih pozicija.

1. Za završnu poziciju x važi da je $F(x) =$, pa je $g(x) = 0$.
2. Neka za poziciju x postoji $y \in F(X)$ takvo da je $g(y) = 0$, onda znamo da je $g(x) > 0$.
3. Neka za poziciju x važi $g(x) = k, k > 0$. Iz definicije funkcije g znamo da za svako $0 \leq z < k$ postoji $y \in F(x)$ takvo da važi da je $g(y) = z$.

. □

Posledica 2.9 *Prvi igrač ima pobedničku strategiju ako i samo ako je vrednost Sprague-Grundy funkcije u početnoj poziciji rayličit od 0. Drugi igrač ima pobedničku strategiju ako i samo ako je vrednost Sprague-Grundy funkcije u početnoj poziciji jednak 0.*

3 Suma igara

Primetimo da je igranje NIM igre sa n gomila novčica ekvivalentno igranju sa n igara oduzimanja istovremeno, sa pravilom da se može uzeti bilo koji broj novčica sa gomile (najmanje 1). Poziciju NIM igre smo dobili tako što smo napravili $n-$torku $(a_1, a_2, ..., a_n)$, gde a_i ustvari predstavlja i-te igre oduzimanja.

Sada ćemo izneti opštu verziju igre koja je sačinjena od nekoliko matematičkih igara.

Posmatrajmo igru sačinjenu od n matematičkih igara, gde je svaka igra data svojim pravilima i svojom početnom pozicijom. Igrači (Prvi i Drugi) igraju naizmenično. Potez igrača se sastoji u tome da odabere jednu od igara i da odigra dozvoljen potez u toj igri. Igra se završava kad igrač ne može napraviti nijedan dozvoljen potez, tj. svaka od n igara se nalazi na završnoj poziciji.

3.1 Suma n matematičkih igara

Neka nam je dato n igara predstavljenih grafovima $G_1 = (X_1, F_1)$, $G_2 = (X_2, F_2)$,...,$G_n = (X_n 1, F_n)$. Mozemo posmatrati graf $G = (X, F)$, koji je suma datih n grafova, u oznaci $G = G_1 + G_2 + ... + G_n$. Skup čorova je Dekatrov proizvod skupova $X_1, X_2, ..., X_n$, tj. $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$. Element skupa X je uređena $n-$torka $x_1, x_2, ..., x_n$ takva da važi $x_i \in X_i$ za svako i iz skupa $1, 2, ..., n$. Za svako $x_i \in X_i$, funkcija $F(x)$ je definisana na sledeci način:

$$\begin{gathered} F(x) = F(x_1, x_2, ..., x_n) = F_1(x_1) \times \{x_2\} \times ... \times \{x_n\} \\ \cup\{x_1\} \times F_2(x_2) \times ... \times \{x_n\} \\ \cup \quad ... \\ \cup\{x_1\} \times \{x_2\} \times ... \times F_n(x_n) \end{gathered}$$

Igra koja se igra nad grafom G se naziva suma igara $G_1, G_2, ..., G_n$.

Ostaje da saznamo kako da odredimo ko ima pobedničku strategiju u igri sačinjenoj od više igara. Iskoristićemo Sprague-Grundy funkcije za sve pojedinačne igre, da bismo dobili Sprague-Grundy funkciju za sumu igara.

Teorema 3.1 *Dato je n grafova koji predstavljaju n matematičkih igara. Ako g_i predstavlja Sprague-Grundy funkciju za graf G_i za svako i iz skupa $\{1, 2, ..., n\}$ onda graf $G = G_1 + G_2 + ... + G_n$ ima Sprague-Grundy funkciju $g(x_1, x_2, ..., x_n) = g_1(x_1) \oplus g_2(x_2) \oplus ... \oplus g_n(x_n)$.*

Dokaz. Operaciju $\oplus$ smo uveli kod NIM-zbira.
Posmatrajmo poziciju $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ iz skupa X i neka je $b = g_1(x_1) \oplus g_2(x_2) \oplus ... \oplus g_n(x_n)$ Treba da dokažemo sledeće:

1. Za svaki nenegativan broj a, za koji važi $a < b$, postoji potez koji vodi iz pozicije x u poziciju x' za koju važi da je $g(x') = a$

2. Ne postoji potez koji vodi iz pozicije x u poziciju x' za koju važi da je $g(x') = b$

Dokaz. 1. Uzmimo da je $d = a \oplus b$ i neka je k broj cifara broja d u binarnom zapisu. Znamo da se cifra 1 nalazi na $k-$tom mestu u binarnom zapisu broja d. Zbog načina na koji se računa NIM-zbir, možemo zaključiti da broj a ima cifru 0 na $k-$tom mestu u binarnom zapisu. Definisali smo broj b kao NIM-zbir pojedinačnih igara, pa ponovo zbir načina na koji se računa NIM-zbir možemo da tvrdimo da postoji najmanje jedan x_i, $i \in 1, 2, ..., n$, kod koga se na $k-$tom mestu u binarnom zapisu nalazi cifra 1. Bez umanjenja opštosti uzmimo da je predhodno tvrđenje važi za x_1 koji vodi u poziciju x'_1 za koju važi da je $g(x'_1) = d \oplus g(x_1)$. Znamo da je potez koji vodi iz pozicije $(x_1, x_2, ..., x_n)$ u poziciju $(x'_1, x_2, ..., x_n)$ dozvoljen, te možemo zaključiti da važi:

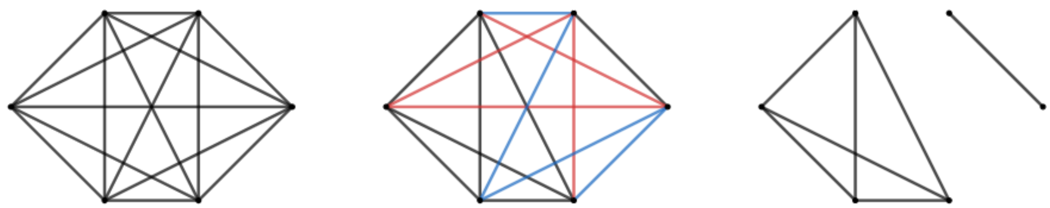
$$g_1(x'_1) \oplus g_2(x_2) \oplus ... \oplus g_n(x_n) = d \oplus g_1(x_1) \oplus g_2(x_2) \oplus ... \oplus g_n(x_n) = d \oplus b = a$$

Ovim je dokaz 1 završen.

Dokaz. 2. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji potez koji vodi iz pozicje x u poziciju x' za koju važi da je $g(x') = b$. Bez umanjena opštosti pretpostavimo da se do pretpostavljenog dolazi potezom u prvoj igri, tj. da važi $x_1 \in F_1(x_1)$ i

$$g(x') = g_1(x'_1) \oplus g_2(x_2) \oplus ... \oplus g_n(x_n) = b = g_1(x_1) \oplus g_2(x_2) \oplus ... \oplus g_n(x_n) = g(x)$$

Međutim ako bi to važilo, onda bi mogli da zaključimo da je $g_1(x'_1) = g_1(x_1)$ što nije moguće. Došli smo do kontradikcije, iz čega sledi da je pretpostavka pogrešna. $\square$



Slika 2: Primer igre

4 Naše igre na grafovima

Definicija 4.1 *Bnugug je igra* $\Gamma(G, \Phi)$ *bazirana na uklanjanju grana u grafu* G*, gde igraju dva igrača naizmenično tako da ne smeju obrisati grane izolovanih podgrafova koji pripadaju familiji skupova* Φ*.*

U toku igre, brišući naizmenično grane, može se desiti da se pojavi izolovani podgraf iz Φ koji definišemo na početku igre. To znači da smemo da napravimo i obrišemo grane podgrafa Φ, ali samo ako on nije izolovan. Izolovan graf H je podgraf grafa G koji je nastao brisanjem grana grafa G tako da nijedan cvor podgrafa H nije povezan sa preostalim čvorovima iz G.

Na slici 2 prikazan je jedan primer igre gde je zabranjeno obrisati granu podgrafa koji sadrži manje od n čvorova, tj. kada razbijemo graf na dve komponente koje nisu povezane tu se igra zaustavlja i pobednik je onaj koji je poslednji obrisao granu. To zapravo znači, da u skup zabranjenih podgrafova Φ spadaju grafovi sa manje od n čvorova. U ovom primeru obrisane grane prvog igrača su prikazane plavom, a drugog igrača crvenom bojom. Pošto vidimo da je broj plavih grana jednak broju crvenih zaključujemo da je drugii igrač pobedio.

Teorema 4.2 *Ako igramo igru* Γ *na grafu* $G(V,E)$ *i važi uslov da ne smemo da obrišemo podgraf* H*, teorema glasi: Ako je* $|E(H)| \equiv_2 0$ *prvi igrač će pobediti ako i samo ako je* $|E(G)| \equiv_2 1$*.*

Dokaz. Uočimo sledeću invarijantu: na grafu koji ima neparan broj grana uvek pri potezu prvog igrača on će smanjiti broj grana na paran, a drugi će opet smanjiti na neparan. Pošto je u ovoj igri broj grana na grafu H paran,kao da se nikakvi potezi nisu odigrali. Tačnije taj graf ne utiče na parnost, a samim tim ni na igru. Prvi igrač će nakon konačnog broja poteza doći u situaciju da obriše poslednju granu koja sme da bude obrišana i da tako drugom igraču preostane samo zabranjen graf H. Igra se tada zaršava pobedom prvog igrača. $\square$

4.1 Igra na putevima

Proučavajući našu igru na grafu, primetili smo da su naše igre ili ekvivalentne ili strogo ekvivalentne sa nekim drugim igrama.

Definicija 4.3 *Igre su strogo ekvivalentne ako i samo ako su im grafovi preko kojih su predstavljene isti.*

Definicija 4.4 *Igre su ekvivalentne ako na njih dodamo neku poziciju H, a da pri tom ishodi ostanu isti. Formalno, $G \approx G'$ ako i samo ako $\forall H$, $G + H$ daje isti ishod kao i $G' + H$.*

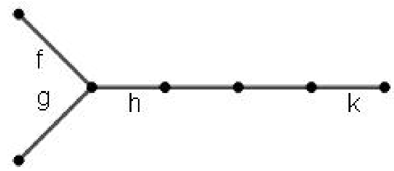
Analizirajući Grundy vrednosti i računajući njihove nim vrednosti za puteve dolazimo do niza brojeva koji je strogo ekvivalentan igri Couples-Are-Forever. Igra se zasniva na tome da imamo jednu gomilu kovanica i igrači igraju naizmenično tako što dele novac na druge dve gomile. Gomile mogu da se dele sve dok imaju strogo više od dve kovanice. Pobednik je onaj igrač koji učini poslednji potez. Ova igra je strogo ekvivalentna našoj iz razloga što su kovanice naši čvorovi i mi ne možemo da obrišemo izolovanu granu ili čvor kao što ni oni ne mogu da uklone gomilu od dve ili jedne kovanice.
Prvih 20 Grundy vrednosti iznose: 0,0,1,2,0,1,2,3,1,2,3,4,0,3,4,2,1,3,2,1,0, 2,1,4,5. Na žalost, vrednosti se ne ponavljaju periodično niti po određenom obrascu. Medjutim, ono što sada možemo da znamo jeste ko je pobednik u bilo kom putu od dužine jedan pa do pedeset miliona. Postoje analize tog niza od jedan do pedeset miliona i nula se pojavljuje 14 puta a 1 dvadeset i šest puta. Najčešće Grundy vrednosti za obe igre su:

Nim vrednost	256	257	129	128	134
Broj pojavljivanja	1,798,261	1,596,606	1,059,556	1,058,974	894,436

4.2 Igra ekvivalentna nimu

Već smo pomenuli da su ekvivalentne igre one u kojima su nam Grundy vrednosti iste, tj. njihov NIM-zbir isti. Jedan od ciljeva nam je bio da pronadjemo igru baziranu na brisanju grana u grafu koja će biti ekvivalentna nimu.

Ako zadamo da nam je H bilo koji put, tačnije izolovani podgraf koji ne sme da se obriše je upravo put, i ako se igra zasniva na brisanju grana iz grafa G kao na slici, igra će se svesti na nim. Naime, ako prvi igrač obriše grane f, g ili h, taj potez je ekvivalentan onome kada prvi igrač uzme sve sa jedne gomile. Drugi igrač nema šta da odigra, tačnije ne postoji grana koju bi obrisao tj. novčić koji bi uzeo i samim tim prvi igrač pobeđuje. Ako prvi igrač odigra tako da oduzme neku drugu granu, npr. k, taj potez je ekvivalentan onome kada uzme jedan nočic. Brisanje grana koje nisu f, g ili h ostavlja mogućnost da drugom igraču da odigra potez i nastavi igru dalje. Pošto smo videli da svaki potez u nimu ima svoj ekvivalentan potez u našem grafu G, onda je i igra bazirana na uklanjanju grana u G ekvivalentna nimu. Ako želimo da predstavimo nim sa više od jedne gomile, samo ćemo dodati isto toliki broj grafova G.



Slika 3: Graf ekvivalentan igri nim

Literatura

[1] Thomas S. Feguson, *Game theory*, University of Califonia in Los Angeles, 2014.

[2] Ian Caines, Carrie Gates, Richard K. Guy, Richard J. Nowakowski *Periods in Taking and Splitting Games*, Matemathical Association of America, 2014.

[3] www.wikipedia.org *Sprague-Grundy theorem*, Datum pristupa: 27.10.2018.

[4] www.wikipedia.org *Usmereni graf*, Datum pristupa: 25.9.2018.