

Imię i Nazwisko	Przedmiot	Data oddania	Ocena
Paulina Roszkowska Aleksandra Szum	Algorytmy i struktury danych	18 grudnia 2019	
Sprawozdanie I			
Temat sprawozdania	Obliczenie objętości bryły metodą Monte Carlo		

1 Opis ćwiczenia

Celem ćwiczenia było obliczenie objętości bryły opisanymi dwoma nierównościami: wyznaczając ją analitycznie oraz wykorzystując metodę Monte Carlo.

Aby wyznaczyć analitycznie objętość bryły, przypomniano własności kuli oraz walca. Po wyprowadzeniu wzoru, dokonano obliczeń w środowisku Python.

Wykorzystując metodę Monte Carlo, podjęto się obliczeń numerycznych mających na celu wyznaczenie objętości analizowanej bryły.

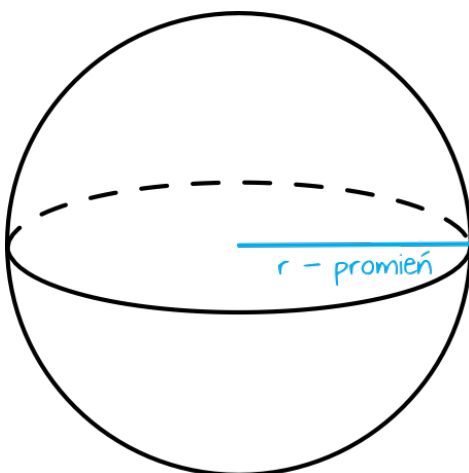
Następnie porównano wyniki uzyskane metodą Monte Carlo z wartością rzeczywistą. Wyznaczono błąd przybliżenia. Wyniki zapisano w tabeli 1. Wykonano wykres dokładności algorytmu do liczby kroków, a następnie dopasowano linię trendu (rysunki 6-7). Określono empiryczną złożoność algorytmu względem założonej dokładności.

2 Analiza bryły

Analizowana bryła opisana jest następującymi nierównościami:

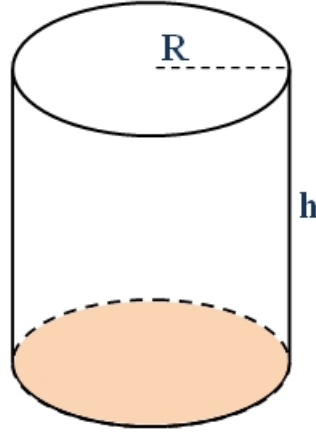
$$\begin{cases} x^2 + y^2 < \frac{1}{4} \\ x^2 + y^2 + z^2 < 1. \end{cases}$$

Wzór $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ opisuje kulę o środku we współrzędnych $(0, 0, 0)$ i promieniu $r = 1$. Kula jest bryłą obrotową powstałą przez obrót koła wokół osi zawrotnej w płaszczyźnie koła i do którego należy środek koła. Środek koła obracanego jest środkiem kuli, a promień koła obracanego promieniem kuli. Objętość kuli wyraża się wzorem: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

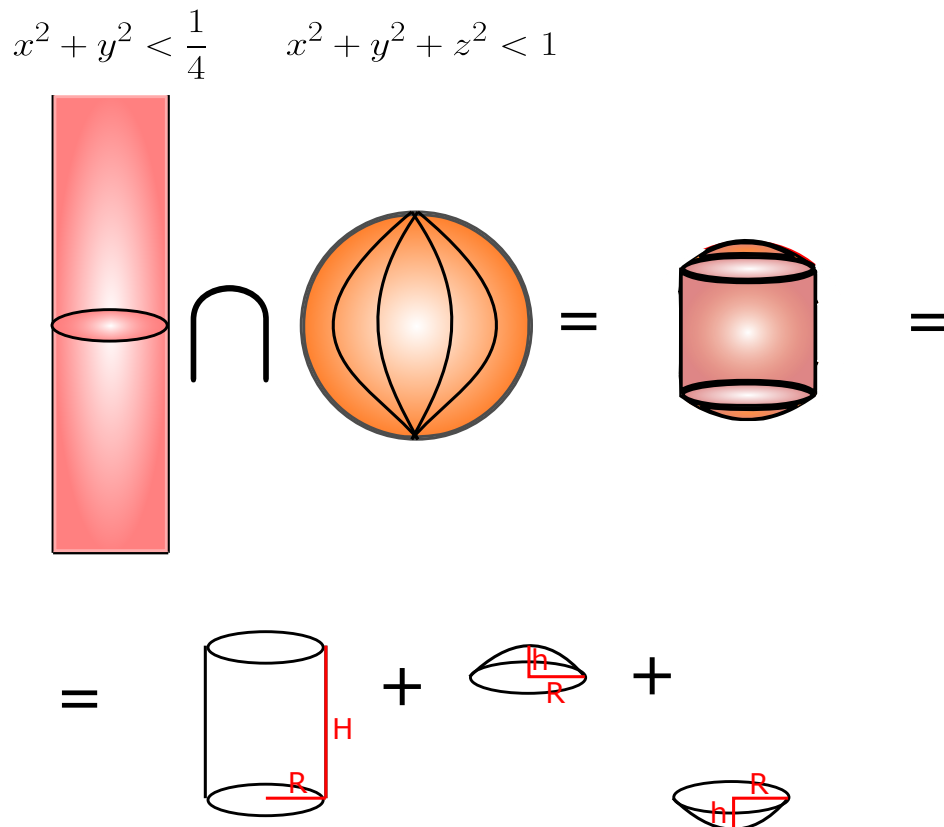


Rysunek 1: Kula o promieniu r .

Natomiast wzór $x^2 + y^2 < \frac{1}{4}$ definiuje walec o podstawie o środku $(0, 0)$, promieniu $R = \frac{1}{2}$ i wysokości $h = \infty$. Walcem nazywa się bryłę obrotową powstałą przez obrót prostokąta wokół prostej zawierają jeden bok (oś walca), którego połowa jest promieniem walca. Objętość walca wyraża się wzorem $V = \pi R^2 h$.



Rysunek 2: Walec o promieniu R i wysokości h .



Rysunek 3: Schematyczne przedstawienie analizowanej bryły - pierwsze równanie opisuje walec o nieskończonej wysokości w kierunku osi z oraz promieniu równym $r = 0,5$, natomiast równanie drugie jest równaniem kuli o promieniu równym $R = 1$. Częścią wspólną brył jest walec o wysokości H oraz promieniu r oraz dwie części kuli o promieniu r i wysokości h .

Częścią wspólną obu brył jest walec o promieniu R oraz wysokości H oraz dwóch czasz kuli, których promień podstawy wynosi R , a wysokość h_c . Objętość analizowanej bryły można wyrazić wzorem:

$$V = V_w + 2 \cdot V_k, \quad (1)$$

gdzie V_w to objętość walca, a V_k to objętość czaszy kuli.

Wiadomo, że wzór na objętość walca to: $V_w = \pi R^2 H$, gdzie R to promień podstawy walca, a H to wysokość walca. Objętość czaszy kuli wyraża się wzorem $V = \frac{\pi h_c^2}{3}(3r - h_c)$, gdzie h_c to wysokość czaszy kuli, a r to promień kuli. Wykorzystując powyższe zależności, wzór 1 można przedstawić jako:

$$V = \pi R^2 \cdot H + 2 \left(\frac{\pi h_c^2}{3}(3r - h_c) \right). \quad (2)$$

Znana jest wartość parametru r oraz R ze wzorów opisujących analizowaną bryłę i wynosi odpowiednio: $R = 0,5$ oraz $r = 1$. W celu znalezienia wartości wysokości H skorzystano z twierdzenia Pitagorasa. Z rysunku 4 wynika, że szukana wartość H to $H = |BC|$, zatem wykorzystując twierdzenie Pitagorasa wyznaczono wartość parametru H z poniższej zależności:

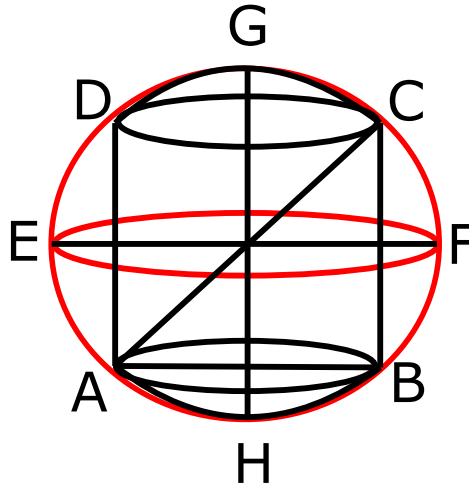
$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2 \iff |BC| = H = \sqrt{|AC|^2 - |AB|^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}.$$

Długość prostej $|GH|$ wynosi $|GH| = 2R = 2$. Prosta $|GH|$ można również opisać zależnością $|GH| = 2 \cdot h_c + H$, która umożliwi wyznaczenie wartości parametru h_c . Zatem wartość wysokości h_c wynosi:

$$h_c = \frac{|GH| - H}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

Znając wartości wszystkich zmiennych, obliczono wartość teoretyczną objętości analizowanej bryły:

$$V = \pi R^2 \cdot H + 2 \left(\frac{\pi h_c^2}{3}(3r - h_c) \right) = \pi \left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot \sqrt{3} + 2 \left(\frac{\pi \cdot \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2} \right)^2}{3} \left(3 \cdot 1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \right) \right) \\ \approx 1.46809.$$



Rysunek 4: Przedstawienie sposobu analizy bryły.

3 Obliczenia numeryczne

Aby dokonać obliczeń numerycznych dotyczących wyznaczenia objętości analizowanej bryły, wykorzystano metodę Monte Carlo.

Metoda Monte Carlo należy do metod symulacyjnych. Metody tej używa się najczęściej do całkowania numerycznego. Metoda Monte Carlo polega na wielokrotnym losowym próbkowaniu w celu uzyskania wyników numerycznych. Szczególnie przydatna w rozwiązywaniu problemów fizycznych i matematycznych, szczególnie w sytuacji, gdy zastosowanie innych metod jest trudne bądź niemożliwe. Do zalet metody można zaliczyć:

- możliwość rozwiązywania trudnych problemów,
- uwalnianie od trudnych wzorów, pozwalając na skupienie się na istocie pytania, na które ma odpowiedzieć statystyka.

Wadami metody Monte Carlo są:

- uzyskanie eksperymentów dla skończonej liczby próbek,
- wynik zawsze będzie przybliżeniem,
- wynik zależy od generatora liczb pseudolosowych.

Metoda Monte Carlo polega na wykonaniu następujących kroków:

1. Zdefiniowanie dziedziny możliwych danych wejściowych.
2. Wygenerowanie danych losowo z rozkładu prawdopodobieństwa w dziedzinie.
3. Wykonanie obliczeń deterministycznych na wejściach.
4. Zebranie wyników.

Kod związany z ćwiczeniem znajduje się pod poniższym linkiem: https://github.com/aleksandrasmus/AiSD_projekty/tree/master/report1.

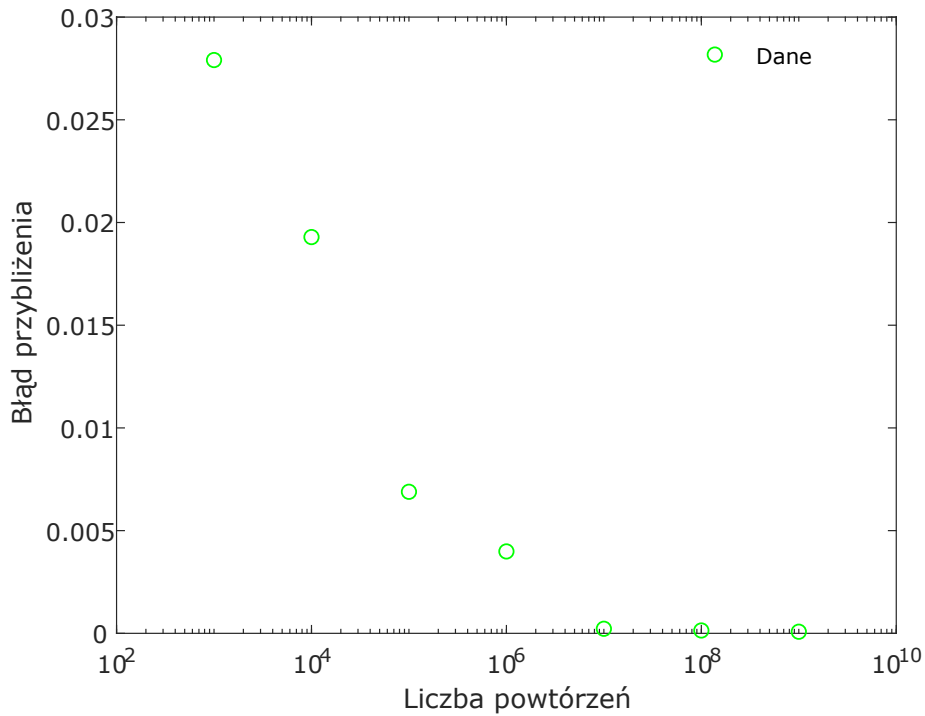
Zmodyfikowano kod otrzymany od prowadzącego zajęcia:

- funkcja `czy_wewnatrz_figury` - zmieniono warunek w poleceniu `if`;
- opracowano funkcję `teoretyczna_objętość`, która na wyjściu zwraca rzeczywistą wartość objętości analizowanej bryły;
- opracowano funkcję `zapisz_wynik`, która na wejściu pobiera tabelę zawierającą liczbę powtórzeń wywołania algorytmu Monte Carlo. Następnie po wykonaniu się algorytmu funkcja dokonuje zapisu do plików następujących informacji: liczby powtórzeń, obliczona objętość dla zadanej liczby powtórzeń, błąd przybliżenia oraz czas trwania obliczeń dotyczących objętości brył dla zadanej liczby powtórzeń. Dane zapisano w pliku w taki sposób, aby można je było bezpośrednio przekopiować do tabeli w środowisku L^AT_EX.

W tabeli 1 przedstawiono uzyskane wyniki. Rysunek 5 przedstawia zależność między liczbą wywołań algorytmu, a błędem przybliżenia.

Tabela 1: Zbiorcze przedstawienie wyników uzyskanych podczas działania algorytmu.

Liczba powtórzeń	Wyznaczona objętość	Błąd przybliżenia
1000	1.55200000	$8.39088416 \cdot 10^{-2}$
10000	1.46000000	$8.09115844 \cdot 10^{-3}$
100000	1.46448000	$3.61115844 \cdot 10^{-3}$
1000000	1.46909600	$1.00484156 \cdot 10^{-3}$
10000000	1.46707280	$1.01835844 \cdot 10^{-3}$
100000000	1.46819896	$1.07801565 \cdot 10^{-4}$
1000000000	1.46798723	$1.03926435 \cdot 10^{-4}$



Rysunek 5: Wykres przedstawiający zależność między liczbą wywołań algorytmu, a błędami przybliżenia.

4 Analiza wyników

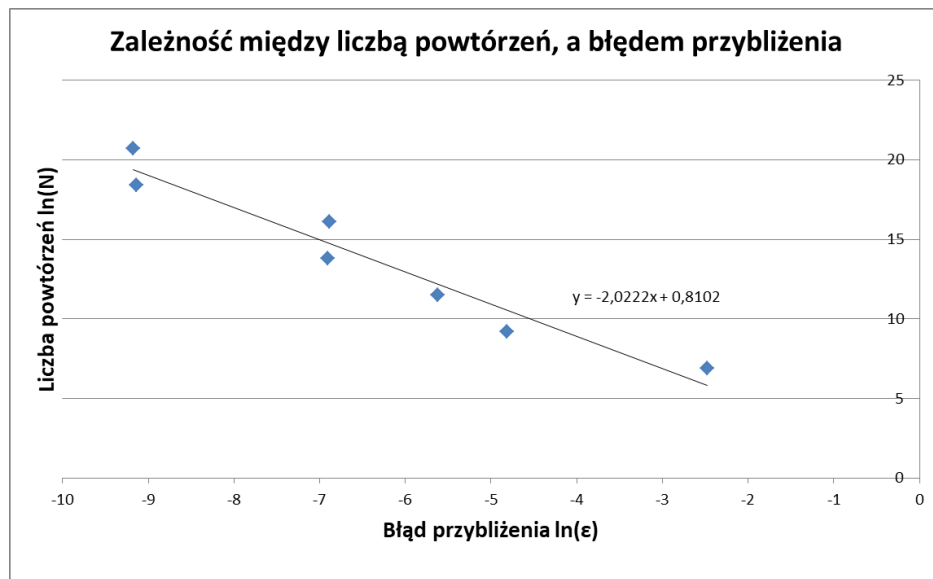
Stwierdzono zgodnie z przypuszczeniami, że zwiększając liczbę wywołań algorytmu Monte Carlo, uzyskany wynik obarczony jest mniejszym błędem. Świadczy o tym fakt, że uzyskana linia trendu jest funkcją liniową o ujemnym współczynniku kierunkowym.

Zakładano, że zależność między liczbą powtórzeń wywołania kodu, a błędem przybliżenia będzie można opisać w następujący sposób:

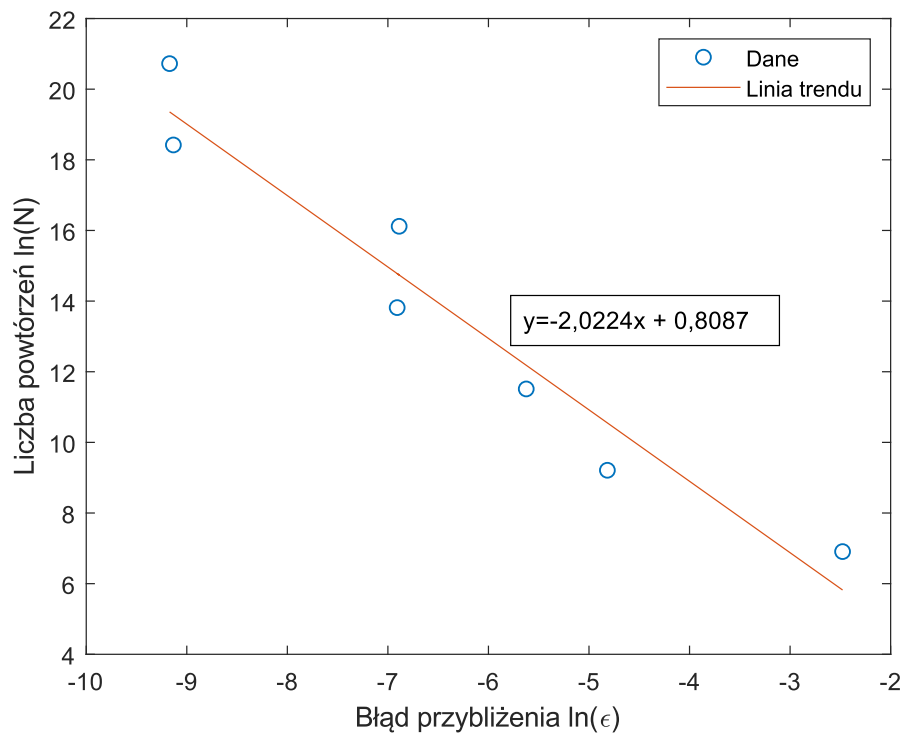
$$N \sim \frac{c}{\epsilon^2},$$

gdzie N to liczba wywołań algorytmu, ϵ to błąd przybliżenia, a c to stała. Aby uzyskać zależność liniową, zlogarytmowano obie strony:

$$\ln(N) \sim \ln\left(\frac{c}{\epsilon^2}\right) = \ln c - \ln \epsilon^2 = \ln c - 2 \ln \epsilon.$$



Rysunek 6: Wykres przedstawiający błędy przybliżenia oraz dopasowaną linię trendu. Wykres utworzono w środowisku MS Excel.



Rysunek 7: Wykres przedstawiający błędy przybliżenia oraz dopasowaną linię trendu. Wykres utworzono w środowisku Mathworks MATLAB.

Linie trendu znajdujące się na rysunkach 6-7 przedstawiają prostą $y = ax + b$. Współczynnik kierunkowy $a = -2,02$ jest wartością zbliżoną do liczby 2, która znajduje się w potęgzie liczby ϵ . Innymi słowy, linię trendu można zapisać za pomocą równania: $\ln N = -2 \ln \epsilon + \ln c$, gdzie $\ln c = 0,81$. Na wykresach zauważono, że większy wpływ na rozkład danych ma współczynnik kierunkowy $a = -2$.

Koszt algorytmu wynosi $O(\frac{1}{\epsilon^2})$, gdzie ϵ jest błędem przybliżenia. W tabeli 2 znajdują się obliczone koszty algorytmu dla zadanej liczby kroków. Stwierdzono, że im mniejszy błąd przybliżenia, tym złożoność algorytmu jest większa. Związane jest to z faktem, że aby zmniejszyć błąd przybliżenia, należy zwiększyć liczbę wywołań algorytmu. W związku z tym zwiększa się złożoność obliczeniowa oraz czasowa.

Tabela 2: Obliczone wartości kosztu algorytmu dla zadanej liczby kroków.

Kroki	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9
Złożoność	$1,42 \cdot 10^2$	$1,53 \cdot 10^4$	$7,67 \cdot 10^4$	$9,90 \cdot 10^5$	$9,64 \cdot 10^5$	$8,60 \cdot 10^7$	$9,26 \cdot 10^7$

5 Wnioski

Celem projektu było numeryczne obliczenie objętości zadanej bryły. Objętość została obliczona zarówno metodą analityczną, jak i z wykorzystaniem algorytmu Monte Carlo. Cel został osiągnięty.

Wykazano, że zależność między liczbą powtórzeń algorytmu, a błędem przybliżenia wynosi: $N \sim \frac{c}{\epsilon^2}$.

Wykorzystując algorytm Monte Carlo nie jest możliwe uzyskanie dokładnego wyniku - algorytm ten daje wynik przybliżony.

Empiryczna złożoność algorytmu wynosi $O\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)$.

6 Bibliografia

1. *Portal math.edu.pl*, dostęp on-line: <http://www.math.edu.pl/>
2. *Czasza kuli - opis na angielskiej wersji Wikipedii*. Dostęp on-line: https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_cap
3. Sobol, I. M., *Metoda Monte Carlo*, dostęp on-line: <http://kft.umcs.lublin.pl/baran/epk/modelowanie/sobol.pdf>
4. *Wykład - Złożoność obliczeniowa*, dostęp on-line: <https://www.mimuw.edu.pl/~klin/teaching/zlo15-16/wyk10.pdf>
5. Plaskota, L., *Złożoność obliczeniowa problemów ciągłych*, dostęp on-line: <https://www.mimuw.edu.pl/~leszekp/dydaktyka/ibc/ibcbook.pdf>
6. Mostowski, T., *Metoda Monte Carlo i jej zastosowania*, dostęp on-line: <http://coin.wne.uw.edu.pl/~tmostowski/pliki/matlab/matlab7.pdf>
7. *Metoda Monte Carlo opisana na angielskiej wersji Wikipedii*, dostęp on-line: https://en.wikipedia.org/wiki/Monte_Carlo_method