

Algorytm i struktury danych

Lista 3

zad 1.

rekurencja uniwersalna

$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$, gdzie $a \geq 1, b \geq 1$, $f(n)$ - asymptotycznie dodatnia

a) jeśli $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$, dla pewnego $\epsilon > 0$
to $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

b) jeśli $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

to $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$

c) jeśli $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$, dla pewnego $\epsilon > 0$

oraz $a f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c f(n)$, dla pewnego $c < 1$ i dostatecznie dużych n

to $T(n) = \Theta(f(n))$

a) $T(n) = 5T\left(\frac{n}{3}\right) + n$

$a=5 \quad b=3 \quad f(n)=n$

$\log_3 5 \approx 1,46 \Rightarrow \epsilon \approx 0,46$

$f(n) = n = O(n^{\log_3 5 - 0,46})$ postać $O(n^{\log_b a - \epsilon})$

$T(n) = \Theta(n^{\log_3 5}) \approx \Theta(n^{1,46})$

b) $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$

$a=4 \quad b=2 \quad f(n)=n^2$

$\log_2 a = \log_2 4 = 2$

$f(n) = n^2 = \Theta(n^{\log_2 4}) = \Theta(n^{\log_b a})$

↓

$T(n) = \Theta(n^{\log_2 4} \log n) = \Theta(n^2 \log n)$

$$c) T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$$

$$a=9 \quad b=3 \quad f(n)=n^2$$

$$\log_b a = \log_3 9 = 2$$

$$f(n) = n^2 = \Theta(n^{\log_3 9}) = \Theta(n^{\log_b a})$$

↓

$$T(n) = \Theta(n^{\log_3 9} \log n) = \Theta(n^2 \log n)$$

$$d) T(n) = 6T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$$

$$a=6 \quad b=3 \quad f(n)=n^2$$

$$\log_b a = \log_3 6 \approx 1,63 \Rightarrow \varepsilon \approx 0,37$$

$$f(n) = n^2 = \Theta(n^{\log_3 6 + 0,37})$$

↓

$$\frac{a f\left(\frac{n}{b}\right)}{6 - (\frac{n}{3})^2} \leq \frac{c}{6 - \frac{n^2}{9}} \leq c \cdot n^2 \Rightarrow c < 1 \quad c = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} < 1$$

$$T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^2)$$

$$e) T(n) = 3T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

$$a=3 \quad b=3 \quad f(n)=n$$

$$\log_b a = \log_3 3 = 1$$

$$f(n) = n = \Theta(n^{\log_3 3}) = \Theta(n)$$

↓

$$T(n) = \Theta(n^{\log_3 3} \log n) = \Theta(n \log n)$$

$$f) T(n) = 5T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$$

$$a=5 \quad b=2 \quad f(n)=n^2$$

$$\log_b a = \log_2 5 \approx 2,32 \Rightarrow \varepsilon \approx 0,32$$

$$f(n) = n^2 = \Theta(n^{\log_2 5 - 0,32})$$

↓

$$T(n) \not\in \Theta(n^{\log_2 5})$$

$$9) T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

$$a=1 \quad b=2 \quad f(n) = 1 = n^0$$

$$\log_2 1 = 0$$

$$f(n) = n^0 = \Theta(n^{\log_2 1}) = \Theta(n^0) = \Theta(1)$$

$$T(n) = \Theta(n^{\log_2 1} \log n) = \Theta(n^0 \log n) = \Theta(\log n)$$

zad 2

insertion-sort z warownikiem

template <class T>

void insertionSort_SS(T *p, T*k)

$$T y = p[-1];$$

$p[-1] = \text{std}::\text{numeric_limits}(T)::\text{min}();$

for ($T s = p+1; s \leq k; s++$)

{ $T x = *s;$

$T *s1 = s;$

while ($(*s1 -> x)$)

$*s1 = *s1 + 1;$

$*s1 = x;$

y

$p[-1] = y;$

y

ile porównań wykona algorytm?

$k + (n-1)$

gdzie, k - liczba inversions, $n-1$ - należy liczyć inversions danych

$n-1$ raz, ponieważ jest to liczba porównań 2 elementów nieidentycznymi miejscami

Wysokość możliwa liczba inversions dla danych rozmiarem n ?

$$n-1 + n-2 + n-3 + \dots + 1 = \frac{(n-1)+1}{2} \cdot (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

W karcie możliwe może być od 0 (jedno uporządkowane)

do $\frac{n(n-1)}{2}$ (wszystkie odwrotne uporządkowane) inversions.

Przykład + wyjaśnienie

pesymistyczne sytuacja \rightarrow lista odwrotnie posortowana

$$4 \frac{3}{2} 2 1 \rightarrow \text{porównanie / inversja } n-1 = 1$$

$$4 > 3 \rightarrow 3 4 \frac{2}{3} 1 \rightarrow n-1, \text{ porównanie } 2$$

$$\begin{matrix} 4 > 2 \\ 3 > 2 \end{matrix}$$

$$\downarrow \\ 2 3 4 \frac{1}{4} \rightarrow n-1, \text{ porównanie } 3$$

$$4 > 1$$

$$3 > 1 \rightarrow 1 2 3 4$$

$$2 > 1$$

ograniczenie
6 porównań

$n-1$ - porównania dla elementów a_n

porównujemy $n-1$ ilości razy (do porządku pierwszy wykor.)

k - liczba inversji (liczba takich par)

$$\begin{array}{ccccccc} 4 > 3 & 3 > 2 & 2 > 1 & 1 \\ \left. \begin{array}{c} 4 > 2 \\ 3 > 1 \end{array} \right\} n-1 & \left. \begin{array}{c} 3 > 1 \end{array} \right\} n-2 & \rightarrow 6 \text{ elementów } \text{ograniczenie} \\ \left. \begin{array}{c} 4 > 1 \\ 3 > 1 \end{array} \right\} n-1 & \end{array}$$

Srednia skuteczność algorytmu

max: $\frac{(n-1)n}{2}$ (inwersja pesymistyczna)

min: $n-1$ (inwersja optymistyczna)

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{(n-1)n}{2} + n-1}{2} = \frac{\frac{(n-1)n}{2} + \frac{2(n-1)}{2}}{2} = \frac{\frac{(n-1)n+2(n-1)}{2}}{2} = \\ & = \frac{(n-1)(n+2)}{4} = O(n^2) \end{aligned}$$