Aleksandra Mitek

Algorytmy i struktury danych - lista 2

Zad 3

a) iloczyn skalarny dwóch wektorów rozmiaru n

$v_1 = [a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n]$ → rozmiar v_1 i v_2

$v_2 = [b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots, b_n]$ musi być równy

$$v_1 \circ v_2 = \underbrace{\underset{1}{a_1 \cdot b_1} + \underset{2}{a_2 \cdot b_2} + \ldots + \underset{n}{a_n b_n}}_{n \text{ mnożeń}}$$

b) Wartość wielomianu n (schemat Hornera)

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

np.

$$W(x) = 2x^4 - 5x^2 + 4x + 1 = x(2x^3 - 5x + 4) + 1 =$$

$$= x(x(2x^2 - 5) + 4) + 1 = x(x(x(2x+0) - 5) + 4) + 1$$

zatem $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 =$

$$= x(a_1 + x(a_2 + \ldots + x(a_{n-2} + x(a_{n-1} + x a_n)) \ldots)) + a_0$$

suma ciągu arytmetycznego

↓

$$n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 + 0$$

$$S_n = \frac{\overset{\text{ostatni + pierwszy}}{n + 0}}{2} \underset{\text{ilość wyrazów}}{(n+1)} = \frac{n}{2}(n+1) = \frac{n^2 + n}{2}$$

c) iloczyn dwóch wielomianów

$w(x) \cdot u(x) =$

np. $\underbrace{(x^2+2x+4)}_{\text{stopień 2 el: 3}}\underbrace{(x+5)}_{\text{st: 1 el: 2}}$ → każdy element razy każdy

$3 \cdot 2 = 6$ → ilość mnożeń

$w(x)$ → stopień n → ilość wyrazów $n+1$

$u(x)$ → stopień m → — " — $m+1$

ilość mnożeń $(n+1)(m+1)$

Dla dwóch wielomianów tego samego stopnia

$m=n \rightarrow (n+1)(n+1) = (n+1)^2 = n^2+2n+1$

d) iloczyn dwóch macierzy $n \times n$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{n \times n} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & & b_{nn} \end{bmatrix}}_{n \times n} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & & c_{nn} \end{bmatrix}}_{n \times n}$$

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$

dla $A=[a_{ij}]_{n \times p}$, $B=[b_{ij}]_{p \times m}$, $C=[c_{ij}]_{n \times m}$

⇓

$m=n=p$

⇓

$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ → ilość mnożeń na jeden element

macierz $n \times n$ ma n^2 elementów

zatem ilość mnożeń na wszystkie elementy

$n^2 \cdot n = n^3$

c) Metoda La Place'a dla macierzy kwadratowych

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ogólny wzór metody:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \det A_{ij}$$

i – jest ustalone, numer wiersza względem, którego rozwijamy dany wyznacznik

A_{ij} – dopełnienie algebraiczne elementu a_{ij} (czyli wyznacznik powstały przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny w macierzy A pomnożony przez $(-1)^{i+j}$.

Wykreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{bmatrix} n \rightarrow A' = (n-1) \times (n-1)$$

po wykreśleniu

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det \left(\begin{bmatrix} & \end{bmatrix}_{n-1} \right) \rightarrow 2 \text{ mnożenia}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} A'_{kl} \cdot (-1)^{k+l} \det \left(\begin{bmatrix} & \end{bmatrix}_{n-2} \right) \rightarrow 2 \text{ mnoż}$$

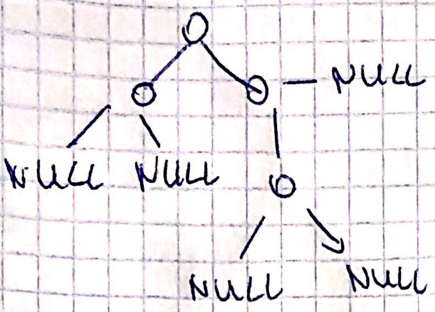
$$\sum_{s=1}^{4} A_{rs} \cdot (-1)^{r+s} \cdot \det \left(\begin{bmatrix} & \end{bmatrix}_{3} \right)$$

14 mnożeń

wyznacznik macierzy 3x3 – (wymaga 12 mnożeń)

zatem ilość kroków $\rightarrow n-3$ $\underbrace{(2+2+2 \dots +2)}_{n-3}$

Zad 8



$k=0 \quad 2^0$

$k=1 \quad 2^1$

$k=2 \quad 2^3$

↑ ilość węzłów

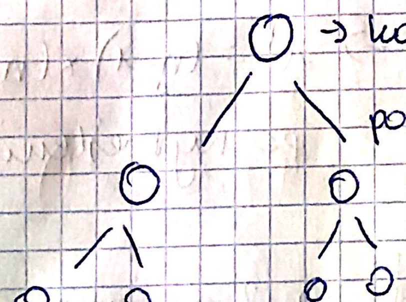
Każdy węzeł, który nie wskazuje na nic więcej wskazuje na NULLa lewego i prawego. Dlatego zawsze minimalna ilość pól wskazujących na null jest równa lub większa połowie.

Zad 9

h - ilość poziomów, na których występują węzły
(sam korzeń: $h=1$; korzeń i dzieci: $h=2$...)

n - ? (ilość węzłów)

maksymalne wartości:



→ korzeń: 1 - $2^{1-1} = 2^0 = 1$

poziom: 2 - $2^{2-1} = 2^1 = 2$

poziom 3 - $2^{3-1} = 2^2 = 4$

zatem max ilość n w zależności od poziomu h

$n = 2^{h-1}$

n poziomów $= 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} \dots + 2^0$

ciąg geometryczny $q = 2$

$$S_h = 1 \cdot \frac{1-2^h}{1-2} = \frac{1-2^h}{1-2} = \frac{1-2^h}{-1} = -1+2^h = 2^h - 1$$

q ↑ maksymalna ilość węzłów

analogicznie otrzymujemy

$$n = 2^h - 1 \quad /+1$$

$$n+1 = 2^h \Leftrightarrow \log_2(n+1) = h$$