ГЕОМЕТРИЈСКЕ НЕЈЕДНАКОСТИ
GEOMETRIC INEQUALITIES

Ученик: Алекса Вучковић,
I разред, Математичка гимназија, Београд
РЦТ "Михајло Пупин", Панчево

Ментор: Бранко Грбић
РЦТ "Михајло Пупин", Панчево

Децембар 2018.

Резиме

Предмет обраде овог научноистраживачког рада су геометријске неједнакости у равни, са посебним акцентом на неједнакости у троуглу. Методе истраживања су прикупљање литературе, као и њихово тумачење и решавање. Поред елементарних планиметријских неједнакости дат је осврт на Птоломејеву неједнакост која важи и у простору и чија је примењивост и ефективност у решавању такмичарских задатака показана у овом раду. Осим тога показана је и Ојлерова неједнакост ($R \geq 2r$) која је и даље једно од највећих открића у овој области математике у протекла два и по века. Иако је једноставна, Ојлерова неједнакост није ни који начин тривијална и доприноси разумевању односа два важна аспекта троугла. Сликовно су представљене и неједнакости између бројевних средина, које на неки начин показују повезаност између саме алгебре и геометрије. Осим претходно поменутих ствари, начињен је избор најбитнијих ствари на ову тему по ауторовом мишљењу са којима ће се читалац сусрети у предстојећем тексту.

Кључне речи: неједнакост, Птоломејева нејдеднакост, троугао, Ојлерова неједнакост, неједнакости између средина

Summary

The object of this scientific research work is geometric inequalities in the plane, with a particular emphasis on inequalies in a triangle. Methods of research are collecting literature, as well as their interpretation and resolution. In addition to elementary planimetric inequalities, Ptolemy's inequality was shown, which is valid in space, and whose applicability and effectiveness in solving the competition tasks is shown in this paper. In addition, Euler's inequality ($R \geq 2r$) is also shown, which remains one of the greatest discoveries in this field of mathematics in the past two and a half centuries. Although simple, Euler's inequality is not trivial in any way and contributes to understanding the relationship between two important aspects of the triangle. The inequalities between means, which are showing the connection between the algebra and geometry itself in some way, are also presented in the picture. In addition to the aforementioned things, a selection of the most important things about this topic was made in the author's opinion with which the reader will meet in the upcoming text.

Keywords: inequality, Ptolemy's inequality, triangle, Euler's inequality, inequalities between means

Листа скраћеница и симбола

У овом раду коришћене су следеће ознаке:

A, B, C	тачке троугла ABC
a, b, c	странице BC, CA, AB
α, β, γ	углови
h_a, h_b, h_c	висине
O	центар описане кружнице
R	полупречник описане кружнице
I	центар уписане кружнице
r	пречник уписане кружнице
s	полуобим
r_a, r_b, r_c	полупречници спољашњих кружница
P_{ABC}	површина троугла ABC

List of abbreviations and symbols

In this paper, the following notations were used:

A, B, C	vertices of a triangle ABC
a, b, c	sides BC, CA, AB
α, β, γ	angles
h_a, h_b, h_c	altitudes
O	circumcentre
R	radius of circumcircle
I	incentre
r	radius of incircle
s	semi-perimeter
r_a, r_b, r_c	radii of excircles
P_{ABC}	area of a triangle ABC

Увод

Под **геометријском неједнакошћу** се најчешће подразумева она неједнакост која важи за елементе(странице, углове, тежишне дужи,...) произвољног троугла или неке сложеније фигуре(четвороугла...). У ширем смислу геометријска је свака неједнакост која се односи на неку конкретну геометријску слику.
Најједноставније геометријске неједнакости су последица **основне неједнакости троугла**, дакле чињенице да су позитивни реални бројеви a, b, c дужине страница троугла **акко** важи:

$$a + b > c \quad b + c > a \quad c + a > b$$

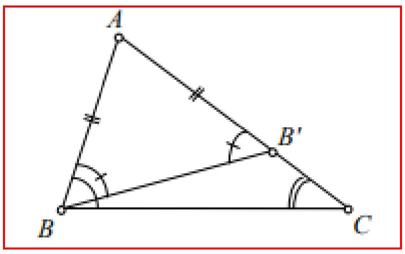
или, еквивалентно,

$$|a - b| < c < a + b.$$

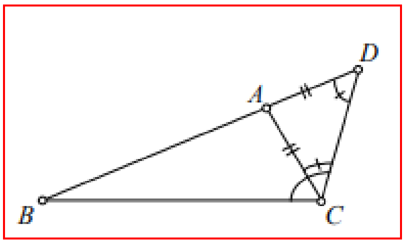
Основне неједнакости троугла

Теорема 1. Наспрам веће ивице у троуглу је већи угао тог троугла; и обратно, наспрам већег угла троугла троугла је већа ивица.

Доказ: Нека је ABC троугао код кога је $AC > AB$. Докажимо да је тада $\sphericalangle ABC > \sphericalangle ACB$. Како је $AC > AB$, постоји тачка B' између тачака A и C таква да је $AB \cong AB'$.Тада је на основу раније леме $\sphericalangle ABB' \cong \sphericalangle AB'B$. Полуправа BB' је унутар угла ABC, па је $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABB'$. Даље, угао ABB' је спољашњи угао троугла BCB' па је на основу тереме већи од његовог несуседног унутрашњег угла $B'CB$. Користећи све доказано сада је $\sphericalangle ABC > \sphericalangle ABB' \cong \sphericalangle AB'B > \sphericalangle B'CB = \sphericalangle ACB$. Дакле, заиста је $\sphericalangle ABC > \sphericalangle ACB$. На сличан начин доказујемо и обратно.



Слика 1.



Слика 2.

Теорема 2. (Неједнакост троугла) Збир две ивице троугла већи је од треће.

Доказ: Нека је ABC произвољан троугао. Докажимо да је $AB + AC > BC$. Са D означимо тачку такву да је $\beta(B, A, D)$ и $AD \cong AC$. На основу доказане леме је тада $\sphericalangle BDC \cong \sphericalangle ACD$. Полуправа CA је унутар угла DCB па је $\sphericalangle ACD < \sphericalangle DCB$. Тада је и $\sphericalangle BCD < \sphericalangle DCB$. Примењујући претходну теорему на троугао BCD закључујемо да је $BC < BD = AB + AD = AB + AC$.

Геометријске неједнакости троугла

Пример 1. Доказати да је збир дужина тежишних дужи произвољног троугла већи од полуобима, а мањи од обима тог троугла.

Нека су a, b, c дужине страница троугла ABC и $t_a = AD$ тежишна дуж, (Слика 3). Из троугла ABD је $t_a > c - \frac{a}{2}$, а из троугла ADC је $t_a > b - \frac{a}{2}$. Сабирањем ових неједнакости добијамо

$$t_a > \frac{b+c-a}{2}.$$

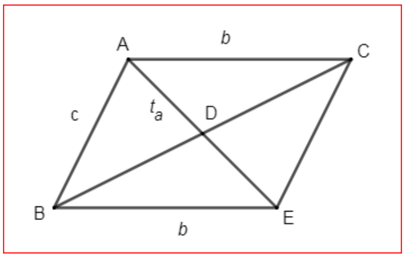
С друге стране, ако продужимо тежишну дуж AD преко D до тачке E тако да је $AD = DE$, из троугла ABE добијамо да је

$$t_a < \frac{b+c}{2}.$$

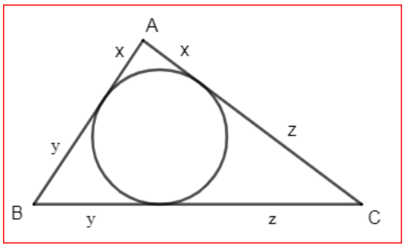
Дакле, $\frac{b+c-a}{2} < t_a < \frac{b+c}{2}$ и аналогно

$$\frac{a+c-b}{2} < t_b < \frac{a+c}{2} \quad \text{и} \quad \frac{a+b-c}{2} < t_c < \frac{a}{b}.$$

Сабирањем последње три двоструке неједнакости добија се тврђење примера.



Слика 3.



Слика 4.

Многе неједнакости које се односе на странице a, b, c произвољног троугла могу се доказати тако што се величине a, b и c изразе преко три позитивна броја. Наиме, ако са x, y и z означимо (Слика 4) тангентне дужи из темена A, B и C троугла на његов уписани круг, имаћемо

$$\begin{gathered} a = y+z, \quad b = z+x, \quad c = x+y, \\ x, y, z > 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Јасно је да и обратно, ако важе ове формуле, тада су бројеви a, b и c дужине страница неког троугла.

Приметимо да се у том случају полуобим $s = \frac{a+b+c}{2}$ тог троугла изражава као $s = x + y + z$.

Пример 2. (MO.67.2) Ако су a, b, c странице троугла и α, β, γ одговарајући углови (изражени у радијанима) доказати да је

$$\frac{\pi}{3} \leq \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c} < \frac{\pi}{2}.$$

Решење: (а) Како је неједнакост $a \geq b$ еквивалентна неједнакости $\alpha \geq \beta$, то је $(a - b)(\alpha - \beta) \geq 0$. При томе једнакост важи акко је $a = b$. Слично је $(b - c)(\beta - \gamma) \geq 0$ и $(c - a)(\gamma - \alpha) \geq 0$, па следи

$$(a - b)(\alpha - \beta) + (b - c)(\beta - \gamma) + (c - a)(\gamma - \alpha) \geq 0,$$

при чему једнакост важи само у случају $a = b = c$. Користећи услов $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ претходну неједнакост можемо трансформисати на сл. начин:

$$\begin{aligned}
a(2\alpha - \beta - \gamma) + b(2\beta - \gamma - \alpha) + c(2\gamma - \alpha - \beta) &\geq 0,\\
a(3\alpha - \pi) + b(3\beta - \pi) + c(3\gamma - \pi) &\geq 0,\\
3(a\alpha + b\beta + c\gamma) &\geq \pi(a + b + c),\\
\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c} &\geq \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Једнакост важи акко је троугао једнакостраничан.

(б) Како је збир две странице троугла већи од треће, то је

$$(b + c - a)\alpha + (c + a - b)\beta + (a + b - c)\gamma > 0,$$

па даље лако следи:

$$\begin{aligned}
a(\beta + \gamma - \alpha) + b(\gamma + \alpha - \beta) + c(\alpha + \beta - \gamma) &> 0,\\
a(\pi - 2\alpha) + b(\pi - 2\beta) + c(\pi - 2\gamma) &> 0,\\
\pi(a + b + c) &> 2(a\alpha + b\beta + c\gamma),\\
\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c} &< \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Приметимо да вредност израза $\dfrac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c}$ може произвољно близу вредности $\pi/2$.

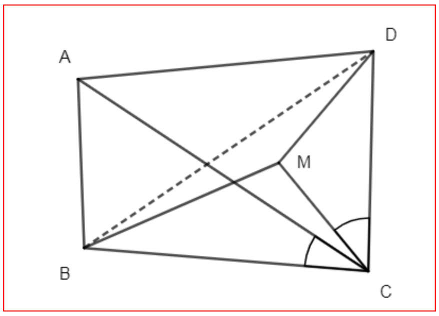
Птоломејева неједнакост

Нека су A, B, C, D било које четири тачке у равни. Тада важи неједнакост

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD.$$

Једнакост важи акко је четвороугао $ABCD$ тетивни са дијагоналама AC и BD или су тачке A, B, C, D колинеарне при чему једна од тачака B и D лежи ижмеђу тачака A и C, а друга не.

Доказ: Нека је M тачка у равни таква да су троуглови CMB и CDA слични и исто оријентисани. Тада је $\dfrac{CM}{BC} = \dfrac{CD}{AC}$ и $\sphericalangle BCM = \sphericalangle ACD$. Томе је еквивалентно и $\dfrac{CM}{DC} = \dfrac{CB}{AC}$ и $\sphericalangle DCM = \sphericalangle ACB$, одакле следи сличност троуглова CMD и CBA. У складу са утврђеним сличностима је $BM = \dfrac{BC \cdot AD}{AC}$ и $MD = \dfrac{CD \cdot AB}{AC}$,

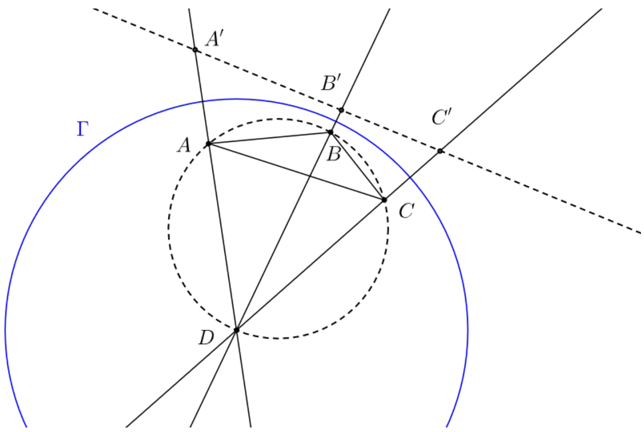


Слика 5.

па неједнакост троугла $BM + MD \geq BD$ даје тражену неједнакост.

Да би важила једнакост тачке B, D и M морају бити колинеарне, но у том случају је $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CAD$, па је четвороугао $ABCD$ тетивни, или важи последњи услов наведен у формулацији тврђења.

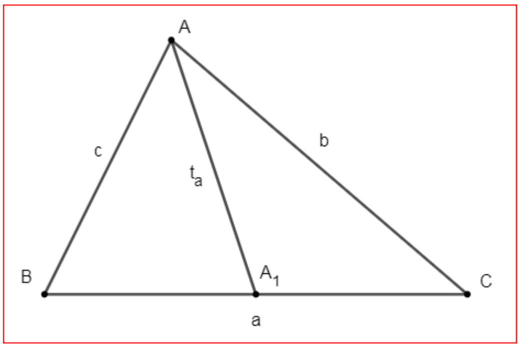
Доказ помоћу инверзије:
Изаберимо помоћни круг Γ са центром у тачки D у односу на који је описани круг око четвороугла $ABCD$ пресликан у линију (Слика 6.). Тада је $A'B' + B'C' = A'C'$. Без губитка општости Γ има радијус 1. Тада $A'B', B'C'$ и $A'C'$ могу да се представе као $\dfrac{AB}{DA \cdot DB}, \dfrac{BC}{DB \cdot DC}, \dfrac{AC}{DA \cdot DC}$ редом. Множењем претходних израза са $DA \cdot DB \cdot DC$ добија се Птоломејева једнакост која важи акко је дати четвороугао тетиван као у овом случају.



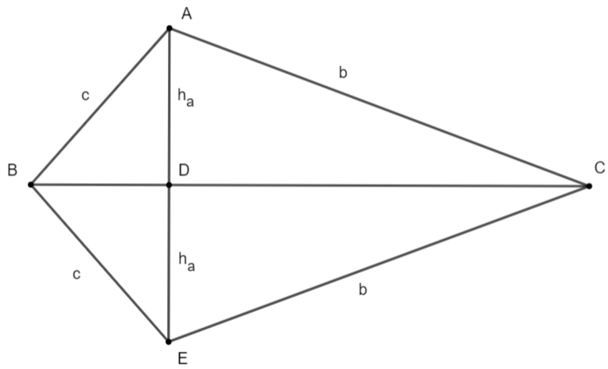
Слика 6.

Примена Птоломејеве неједнакости

Задатак 1. Докажи да важи:
а) $t_a < \dfrac{b+c}{2}$
б) $2P \leq bc$
в) $l_a < \dfrac{2bc}{b+c}$ (где је l_a одсечак бисектрисе)
применом Птоломејеве неједнакости.
Решење:
а) Тачка A_1 је средиште странице BC, а AA_1 тежишна дуж троугла ABC. Примењујући Птоломејеву неједнакост на четвороугао ABA_1C (Слика 7.) добијамо
$AB \cdot A_1C + BA_1 \cdot CA > BC \cdot AA_1$. Заменом $BA_1 = A_1C = \dfrac{BC}{2}$ добија се
$AB \cdot \dfrac{BC}{2} + \dfrac{BC}{2} \cdot CA > BC \cdot AA_1$ и скраћивањем са BC добија се $\dfrac{AB+CA}{2} > AA_1$ што је еквивалентно траженој једнакости.



Слика 7.



Слика 8.

б) Из тачке A повлачимо висину h_a коју продужавамо ван троугла до тачке E тако да је $AE = 2h_a$. Применом Птоломејеве неједнакости на четвороугао $ABEC$ (Слика 8.) добија се $bc + bc \leq 2ah_a$. Знајући да је $P = \dfrac{ah_a}{2}$ добијамо једнакост $2bc \leq 4P$ коју скраћивањем доводимо до тражене једнакости.

в)Бисектриса сече страницу у тачки D тако да је $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ и $BD + DC = BC$ (теорема о симетрали угла). Знајући да је $\sphericalangle CAD = \sphericalangle DAB = \dfrac{\alpha}{2}$ примењујемо косинусну теорему редом на троуглове DCA и BDA да би изразили страницу наспрам угла $\dfrac{\alpha}{2}$ код оба троугла. Применом Птоломејеве теореме на четвороугао $ABDC$ добијамо
$AB \cdot DC + BD \cdot CA > BC \cdot AD$. Изражавањем непознатих вредности из предходних једначина добија се $l_a \leq \dfrac{bc(c+a)}{a(c-b)}$. Из основне неједнакости троугла $a < b + c$ следи израз $l_a < \dfrac{bc(2c+b)}{(c-b)(b+c)}$ из којег даљим поступком добијамо тражену неједнакост.

Задатак 2. Нека је ABC једнакостранични троугао и тачка P на луку BC круга описаног око троугла ABC. Доказати да је $PA = PB + PC$.
Решење:
Применом Птоломејеве теореме на четвороугао $ABPC$ добија се
$AB \cdot PC + AC \cdot BP = BC \cdot PA$ због тога што је овај четвороугао тетиван, па важи једнакост. Због једнакости страница троугла, скраћивањем долазимо до $PA = PB + PC$ што је уједно и решење задатка.

Задатак 3. (ЈБМО.11.4) Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао, и тачке E и F на страницама AB, CD такве да
$$\frac{AB}{AE}=\frac{CD}{DF}.$$
Ако је S површина четвороугла $AEFD$ докажи да
$$S\leq\frac{AB\cdot CD+n(n-1)AD^2+n^2DA\cdot BC}{2n^2}.$$

Лема:
Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао са површином P. Тада $P\leq\dfrac{AB\cdot CD+BC\cdot AD}{2}$.

Доказ:
Применом Птоломејеве неједнакости добијамо $\dfrac{AB\cdot CD+BC\cdot AD}{2}\geq\dfrac{AC\cdot BD}{2}$...[1]
Нека су AA_1 и DD_1 нормалне на AC. Тада је $P=\dfrac{AC(AA_1+DD_1)}{2}$, али због $AA_1+DD_1\leq BD$ следи $P\leq\dfrac{AC\cdot BD}{2}$...[2]
Из [1] и [2] добијамо $P\leq\dfrac{AB\cdot CD+BC\cdot AD}{2}$ чиме је доказ комплетан.

Решење:

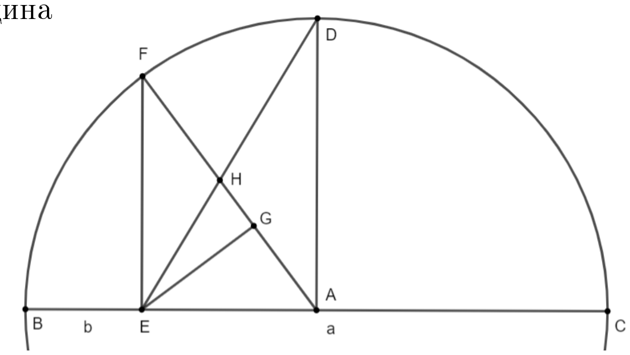
Применом претходне леме на четвороугао $AEFD$ добијамо:
$$S\leq\frac{AE\cdot DF+EF\cdot AD}{2}=\frac{\frac{AB\cdot BC}{n^2}+EF\cdot AD}{2}\Longleftrightarrow\frac{n-1}{n}\cdot AD+\frac{1}{n}\cdot BC\geq EF.$$

Нека је P тачка на AC таква да $AC:AP=n$. По Талесовој теореми $PF=\dfrac{n-1}{n}AD$ и $PE=\dfrac{1}{n}BC$. Због неједнаксти у троуглу $PE+PF\geq EF\Leftrightarrow\dfrac{n-1}{n}\cdot AD+\dfrac{1}{n}\cdot BC\geq EF$.
Из претходна два израза добија се решење задатка.

Неједнакости између средина

Геометријска репрезентација бројних средина два броја a и b дата је на следећој слици:

$H-$хармонијска средина дужи a и b
$G-$геометријска средина дужи a и b
$A-$аритметичка средина дужи a и b
$Q-$квадратна средина дужи a и b



Слика 9.

На основу слике се може претпоставити да важи $H \leq G \leq A \leq Q$, тј. израчунавањем долазимо до следећег облика неједнакости између средина за странице a и b: $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2} \leq \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

Ојлерова неједнакост

Ако су R и r, редом, центар описане и центар уписане кружнице троугла, тада важи $R \geq 2r$.

Доказ:

Означимо са a, b и c странице троугла, са s полуобим, са r_a, r_b и r_c полупречнике спољашњих кружница и са $P_{\Delta ABC}$ површину троугла ABC. Тада знамо да важи следеће:

$$P_{\Delta ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = sr = r_x(s-x), x \in \{a,b,c\}$$

Тада

$$4rr_a = 4\frac{{P_{\Delta ABC}}^2}{s(s-a)} = 4(s-b)(s-c) = (a+b-c)(a+c-b) = a^2-(b-c)^2 \leq a^2$$

Аналогно $4rr_b \leq b^2$ и $4rr_c \leq c^2$. Множењем ова три израза добијамо:

$$64r^3 r_a r_b r_c \leq a^2b^2c^2$$

$$64r^3 {P_{\Delta ABC}}^3 \leq 16R^2 {P_{\Delta ABC}}^2 (s-a)(s-b)(s-c)$$
$$4r^4 s \leq R^2(s-a)(s-b)(s-c)$$
$$4r^4 s^2 \leq R^2 {P_{\Delta ABC}}^2 = R^2 s^2 r^2$$
$$4r^2 \leq R^2$$

Одакле следи Ојлерова неједнакост $R \geq 2r$.

Тврђење се може доказати и применом Ојлеровог идентитета, $OI^2 = R^2 - 2Rr$, где су O и I полупречници описане и уписане кружнице датог троугла.

Неке занимљиве неједнакости троугла

1. Ако су s полуобим и r полупречник уписане кружнице у произвољном троуглу. Докажи следећу неједнакост:

$$s \geq 3r\sqrt{3}$$

Решење 1°

$$2s = a + b + c \geq 3\sqrt[3]{3abc} = 3\sqrt[3]{4PR} = 3\sqrt[3]{4srR} \geq 3\sqrt[3]{8sr^2},$$

тј.

$$s \geq 3\sqrt[3]{sr^2}$$

или

$$s \geq 3r\sqrt{3}.$$

Једнакост важи акко је $a = b = c$.

Решење 2° Из неједнакости између геометријске и аритметичке средине имамо

$$\frac{s}{3} = \frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Осим тога

$$(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{P^2}{s} = \frac{s^2r^2}{s} = sr^2.$$

Из претходна два израза имамо $s \geq 3\sqrt[3]{sr^2}$ што лако сводимо на тражену неједнакост.

2. Нека су a, b и c странице произвољног тругла. Докажи неједнакост

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

Решење:
Како је $a + b > c$ знамо да је $2(a+b) > a+b+c$ тј. $a + b > s$. Аналогно добијамо $b + c > s$ и $a + c > s$.
Тада

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{a}{s} + \frac{b}{s} + \frac{c}{s} = 2,$$

чиме је тврђење доказано.

3. Нека су a, b и c странице произвољног троугла. Докажи неједнакост

$$\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \geq \frac{9}{s}.$$

Решење:
На основу неједнакости између средина имамо

$$\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \geq \frac{9}{(s-a)+(s-b)+(s-c)} = \frac{9}{s}.$$

Једнакост важи акко је $a = b = c$.

Литература

[1] З. Каделбург, Д. Ђукић, М. Лукић, И. Матић, *Неједнакости*, 2. допуњено издање, ДМС, Београд 2014.

[2] М. Митровић, С. Огњановић, М. Вељковић, Љ. Петровић, Н. Лазаревић, *Геометрија за први разред Математичке гимназије*, 4. издање, Круг, Београд 2013.

[3] З. Цветковски, *Inequalities, Theorems, Techniques and Selected Problems*

[4] O. Bottema, Р. Ж. Ђорђевић, Р. Р. Јанић, Д. С. Митриновић, П. М. Васић, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, Netherlands 1969.