ВЕРИЖНИ РАЗЛОМЦИ
CONTINUED FRACTIONS

Аутор:
АЛЕКСА ВУЧКОВИЋ, II разред, Математичка гимназија, Београд; Регионални центар за таленте „Михајло Пупин”, Панчево

Ментор:
ДАНИЦА ЗЕЧЕВИЋ, Регионални центар за таленте „Михајло Пупин”, Панчево

Резиме

Предмет обраде овог научноистраживачког рада су верижни разломци, конвергенте верижних разломака, као и њихова својства и примене. Методе истраживања су прикупљање литературе, а потом и њихово тумачење и решавање. Приказан је поступак одређивања конвергенти, као и начин примене својства конвергената приликом решавања линеарних диофанцких једначина. Описана је и улога верижних разломака у задацима апроксимације реалних бројева рационалним, која је једна од најочигледнијих и најкориснијих. Осим претходно поменутих ствари, начињен је избор најбитнијих ствари на ову тему по ауторовом мишљењу са којима ће се читалац сусрети у предстојећем тексту.

Кључне речи: верижни разломци, конвергенте

Summary

The subject of this scientific research work are continued fractions, convergents of continued fractions, as well as their characteristics and applications. Methods of research are collecting literature, as well as their interpretation and resolution. The convergence determination procedure was shown in addition to

Key words: continued fractions, convergents

УВОД

Дефинција 1. Прост верижни разломак је израз облика

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}}, \tag{$*$}$$

где су a_1, a_2,... природни бројеви и a_0 цео број.

Израз ($*$) често пишемо као $[a_0, a_1, a_2, ..., a_n]$ ради компактности. У овом запису не подразумевамо обавезно да су a_i цели бројеви.
Постоје и општи верижни разломци у којима a_i нису обавезно цели и бројиоци разломака нису обавезно једнаки 1:

Дефинција 2. Општи верижни разломак је израз облика

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ldots}}}.$$

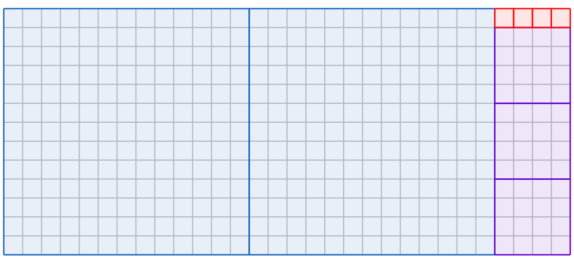
Осим ако другачије нагласимо, под појмом верижног разломка подразумеваћемо прост верижни разломак. Верижни разломци су један од начина представљања рационалних и, уопште, реалних бројева, који је посебно значајан у теорији бројева.

Пример 1. Број $\frac{30}{13}$ има тачно два престављања у облику простог верижног разломка.
Пошто је $0 \leq \frac{30}{13} - a_0 \leq 1$, мора бити $a_0 = 2$. Даље $a_1 + \frac{1}{a_2 + \ldots} = \frac{1}{\frac{30}{13} - a_0} = \frac{13}{4}$, па a_1 мора бити једнако 3; због $a_2 + \frac{1}{a_3 + \ldots} = \frac{1}{\frac{13}{4} - a_1} = 4$ је $a_2 = 3$.У завршном кораку, међутим, имамо две могућности: може бити $a_2 = 4$ при чему се верижни разломак ту завршава, а може бити и $a_2 = 3$ и $a_3 = 1$ као последњи члан. Добијамо

$$\frac{30}{13} = 2 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{4}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{1}}}$$

тј. $\frac{30}{13} = [2, 3, 4] = [2, 3, 3, 1]$.

У претходном примеру представљање верижним разломком је јединствено ако захтевамо да се развој не завршава јединицом - у том случају друго представљање отпада.
Овај поступак се може илустровати на следећи начин:



Слика 1. - Приказ верижног разломка

МЕТОДИКА РАДА

1. Развој рационалног броја у верижни разломак

Теорема 1. Сваки рационалан број се може на тачно један начин развити у коначан верижни разломак $[a_0, a_1, ..., a_n]$ у коме је $a_n \neq 1$.

Ако допустимо да се развој заврши јединицом, постоји још тачно један начин, и то $[a_0, a_1, ..., a_n - 1, 1]$.

Доказ. Означимо рационални број са $\frac{p}{q}$. Користимо индукцију по q. Тврђење је тривијално за $q = 1$. Претпоставимо да је $q > 1$ и да је тврђење тачно за све рационалне бројеве са имениоцима мањим од q. Мора бити $a_0 = \left[\frac{p}{q}\right]$, па имамо $\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{(\frac{q}{p-a_0 q})}$, при чему се по индукцијској претпоставци разломак $\frac{q}{p-a_0 q} \leq 1$ може развити у верижни разломак у тачно један, односно два начина, што је крај доказа.

Верижни разломци нису погодни за основне рачунске операције. Ипак, није тешко извести операције $x \to 1/x$ и $x \to -x$ помоћу њих, коришћењем једнакости:

$$[a_0, a_1, ..., a_n] \cdot [0, a_0, a_1, ..., a_n] = 0 \qquad \text{за } a_0 \geq 1, \text{ и}$$
$$[a_0, a_1, ..., a_n] + [-1 - a_0, 1, a_1 - 1, a_2, ..., a_n] \qquad \text{за } a_1 > 1.$$

Обе једнакости се једноставно доказују. На пример, ако је $x = [a_0, a_1, ..., a_n]$ и $a_1 > 1$ тада је $[-1 - a_0, 1, a_1 - 1, a_2, ..., a_n] = -1 - a_0 + \frac{1}{1+\frac{1}{(x-a_0)^{-1}-1}} = -x$

Пример 2. Из $\frac{17}{14} = [1, 4, 1, 2]$ добијамо $\frac{14}{17} = [0, 1, 4, 1, 2]$, $-\frac{17}{14} = [-2, 1, 3, 1, 2]$ и $-\frac{14}{17} = [-1, 5, 1, 2]$.

Како одредити чему је једнако $[a_0, a_1, ..., a_n]$? На пример, за n =0, 1, 2 лако се добија:

$$[a_0] = \frac{a_0}{1}, \quad [a_0, a_1] = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}, \quad [a_0, a_1, a_2] = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1},$$

али за веће n нам је потребан практичнији начин.

Дефинција 3. Израз $[a_0, a_1, ..., a_k]$ зовемо k-тим **конвергентом** за $[a_0, a_1, ..., a_n]$, а израз $a'_k = [a_k, a_{k+1}, ..., a_n]$ k-тим комплетним количником ($n \geq k$).

Јасно је да је $x = [a_0, ..., a_n] = [a_0, ..., a_{k-1}, [a_k, ..., a_n]] = [a_0, ..., a_{k-1}, a'_k]$.

Теорема 2. Верижни разломак $[a0, a1, ..., an]$ је једнак $\frac{p_n}{q_n}$, где низови (pn) и (qn) задовољавају

$$\begin{array}{lll} p_{-1} = 1, & p_0 = a_0, & p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \\ q_{-1} = 1, & q_0 = 1, & q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \end{array} \qquad \text{за } 2 \leq k \leq n.$$

Доказ. Тврђење је тачно за $n \leq 1$. Нека је $n \geq 2$. Користимо индукцију по n. Како је $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, ..., a_n] = [a_0, ..., a_{n-2}, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}]$, по индукцијској претпоставци за $n - 1$ имамо

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{(a_{n-1} + \frac{1}{a_n})p_{n-2} + p_{n-3}}{(a_{n-1} + \frac{1}{a_n})q_{n-2} + p_{n-3}} = \frac{(a_{n-1} + \frac{1}{a_n})p_{n-2} + (p_{n-1} - a_{n-1}p_{n-2})}{(a_{n-1} + \frac{1}{a_n})q_{n-2} + (q_{n-1} - a_{n-1}q_{n-2})} = \frac{\frac{1}{a_n}p_{n-2} + p_{n-1}}{\frac{1}{a_n}q_{n-2} + q_{n-1}}$$

што даје тврђење за n.

Последица. $x = \dfrac{a'_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a'_k q_{k-1} + q_{k-2}}$ за $2 \leq k \leq n$.

Следећи идентитет даје везу између верижног разломка и "обрнутог" парњака.

Теорема 3. Ако је $[a_0, a_1, ..., a_n] = \frac{p_n}{q_n}$, онда је $[a_n, a_{n-1}, ..., a_0] = \frac{p_n}{p_{n-1}}$.

Доказ. За $n = 0$ тврђење је тривијално. Користимо индукцију по n. Претпоставимо да важи за $n - 1$, дакле $[a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_0] = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$. Тада је

$$[a_n, a_{n-1}, ..., a_0] = a_n + \frac{1}{[a_{n-1}, ..., a_0]} = a_n + \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}} = \frac{p_n}{p_{n-1}}$$

по претходној теореми.

Теорема 2 даје $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-1} - p_{n-1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) =$ -$(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1})$. Такође имамо $p_n q_{n-2} - p_n - 2q_n = (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - p_{n-2}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) =$ $a_n(p_{n-1} q_{n-2} - p_n - 2q_{n-1})$. Понављањем поступка за $n-1, ..., 1$ добијамо

Теорема 4. $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$ и $p_n q_{n-2} - p_n - 2q_n = (-1)^n a_n$. Еквивалентно,

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}} \quad \text{и} \quad \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{(-1)^n a_n}{q_n q_{n-2}}$$

.

Последица. Конвергенти $\frac{p_n}{q_n}$ простог верижног разломка су нескративи: нзд$(p_n, q_n) = 1$.

Последица. $\dfrac{p_0}{q_0} < \dfrac{p_2}{q_2} < \dfrac{p_4}{q_4} \cdots < \dfrac{p_n}{q_n} < \cdots \dfrac{p_3}{q_3} < \dfrac{p_1}{q_1}$.

Пример 3. Конвергенти разломка $\frac{116}{41} = [2, 1, 4, 1, 6] = \frac{p_4}{q_4}$ су

$$\frac{p_3}{q_3} = [2, 1, 4, 1] = \frac{17}{6}, \quad \frac{p_2}{q_2} = [2, 1, 4] = \frac{14}{5}, \quad \frac{p_1}{q_1} = [2, 1] = \frac{3}{1}, \quad \frac{p_0}{q_0} = [2] = \frac{2}{1}$$

и при том је $\frac{2}{1} < \frac{14}{5} < \frac{116}{41} < \frac{17}{6} < \frac{3}{1}$.

Низови $(p_i)_{i=0}^4 = (2, 3, 14, 17, 116)$ и $(q_i)_{i=0}^4 = (1, 1, 5, 6, 41)$ задовољавају

$$\begin{aligned} p_4 &= a_4 p_3 + p_2, \qquad & p_3 &= a_3 p_2 + p_1, \qquad & p_2 &= a_2 p_1 + p_0 \\ q_4 &= a_4 q_3 + q_2, \qquad & q_3 &= a_3 q_2 + q_1, \qquad & q_2 &= a_2 q_1 + q_0. \end{aligned} \quad \text{и}$$

Такође је $p_4 q_3 - p_3 q_4 = 116 \cdot 6 - 17 \cdot 41 = -1$, $p_3 q_2 - p_2 q_3 = 17 \cdot 5 - 14 \cdot 6 = 1$ и $[6, 1, 4, 1, 2] = \frac{116}{17} = \frac{p_4}{p_3}$.

Из теореме 4 следи да је

$$x = [a_0, a_1, ..., a_n] = a_0 + \frac{1}{q_1 q_0} - \frac{1}{q_1 q_2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n}$$

Такође имамо $\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| = \frac{1}{q_k q'_{k+1}}$ што нам заједно са $q'_{k+1} \geq q_{k+1} > q_k$ даје

Теорема 5. $\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{q_k^2}$

Теорема 4 нам омогућава да опишемо парове природних бројева x, y за које је $ax - by = \pm 1$, где су a и b дати природни бројеви. Заиста, ако је $\frac{a}{b} = [a_0, ..., a_{k-1}, a_k]$ и $\frac{y}{x} = [a_0, ..., a_{k-1}]$, онда је $ax - by = (-1)^k$. Ово је заправо само другачији запис Еуклидовог алгоритма.

Приметимо да на основу теореме 1 постоје тачно два развоја $\frac{a}{b}$ у верижни разломак, и њихове дужине се разликују за 1. Тако можемо по жељи подесити парност броја k.

Теорема 6. Ако су a, b, c, d природни бројеви са $ad - bc = \pm 1$ и $b > d$, и ако је

$$\frac{a}{b} = [a_0, a_1, ..., a_n] = [a_0, a_1, ..., a_n - 1, 1]$$

Литература

[1] Д. Ђукић *Верижни разломци*, Београд, 2010/11.
`https://imomath.com/srb/dodatne/veriznirazlomci_ddj.pdf`

[2] S. Krushchev *Orthogonal Polynomials and Continued Fractions*, Cambridge University Press, 2008.
`https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/khrushchev.pdf`

[3] `https://www.academia.edu/15076616/Geometry_of_Continued_Fractions`