Домаћи задатак из геометрије

Алекса Вучковић, 3ц

Задатак 5. Нека је G група и n природан број такав да за све a, $b \in G$ важе једнакости

$$\begin{aligned} (ab)^n =& a^n b^n, & (1) \\ (ab)^{n+1} =& a^{n+1} b^{n+1} \quad \text{и} & (2) \\ (ab)^{n+1} =& a^{n+1} b^{n+1}. & (3) \end{aligned}$$

Доказати да је G Абелова група.

Решење.
Из (2) добијамо следеће:

$$\begin{aligned} a \cdot b \cdot (ab)^n =& a \cdot a^n \cdot b^n \cdot b \\ \cancel{a} \cdot b \cdot a^n \cdot \cancel{b^n} =& \cancel{a} \cdot a^n \cdot b \cdot \cancel{b^n} \\ b \cdot a^n =& a^n \cdot b \qquad (*) \end{aligned}$$

Из (3) добијамо следеће:

$$\begin{aligned} a \cdot b \cdot (ab)^{n+1} =& a \cdot a^{n+1} \cdot b^{n+1} \cdot b \\ \cancel{a} \cdot b \cdot a^{n+1} \cdot \cancel{b^{n+1}} =& \cancel{a} \cdot a^{n+1} \cdot b \cdot \cancel{b^{n+1}} \\ b \cdot a^{n+1} =& a^{n+1} \cdot b \\ b \cdot a^n \cdot a =& a^n \cdot a \cdot b \end{aligned}$$

Убацивањем (*) у последњу једначину добијамо:

$$\begin{aligned} \cancel{a^n} \cdot b \cdot a =& \cancel{a^n} \cdot a \cdot b \\ b \cdot a =& a \cdot b. \end{aligned}$$

Задатак 26. Центар групе $Z(G)$ групе G је

$$Z(G) = \{x \in G \mid gx = xg \text{ за све } g \in G\}$$

скуп елемената који комутирају са свим елементима у групи. Доказати да је $Z(G)$ подгрупа од G. Дати пример групе G такве да је $Z(G) \neq e, G$.

Решење.
а) $Z(G)$ је подгрупа од G стога је потребно само доказати да је $Z(G)$ група.
1) затвореност

$$a \in Z(G), \quad b \in Z(G), \quad g \in G$$
$$(a * b) * g \overset{AS}{=} a * (b * g) \overset{b \in Z(G)}{=} a * (g * b) \overset{AS}{=} (a * g) * b \overset{a \in Z(G)}{=} (g * a) * b \overset{AS}{=} g * (a * b)$$

2) асоцијативност (рестрикција од G)
3) неутрални елемент

$$e * g = g * e \text{ (по дефиницији)}$$
$$e \in Z(G)$$

4) инверзни елемент
$g * g^{-1} = g^{-1} * g = e \quad \Rightarrow \quad g^{-1} \in Z(G)$

На основу претходне 4 ставке важи да је $Z(G)$ подгрупа од G.

б) Пример групе G такве да је $Z(G) \neq e, G$ је

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid \quad a,b,c,d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1 \right\},$$
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} am + bp & an + bq \\ cm + dp & cn + dq \end{bmatrix}.$$

Потребно је показати да је $(G, \cdot)$ група и да $Z(G) \neq e, G$.
I) Доказ да је $(G, \cdot)$ група:
1) затвореност

$$\begin{aligned} ad - bc = 1 \quad \wedge \quad mq - np = 1 \quad &\Rightarrow \\ (am + bp) \cdot (cn + dq) - (an + bq) \cdot (cm + dp) &= 1 \\ \cancel{amcn} + bpcn + dqam + \cancel{bpdq} - \cancel{ancm} - bqcm - \cancel{dpbq} - dpqn &= 1 \\ bpcn + dqam - bqcm - dpqn &= 1 \\ mq(da - bc) + ph(bc - ad) &= 1 \\ (mq - ph) \cdot (da - bc) &= 1 \\ 1 \cdot 1 &= 1 \end{aligned}$$

2) асоцијативност (важи из множења матрица)
3) неутрал

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4) инверз

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} am + bp & an + bq \\ cm + dp & cn + dq \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} mq - np &= 1 \\ am = 1 - bp \quad an &= -bq \\ cm = -dp \quad cn &= 1 - dq \\ m, n, p, q &= ? \end{aligned}$$

Као решење претходних једначина добијамо да је инверз за матрицу $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ једнак $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

II) Доказ да група $(G, \cdot)$ није комутативна и да $Z(G) \neq e, G$ тј. да има бар два различита елемента.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} am + bp & an + bq \\ cm + dp & cn + dq \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ma + nc & mb + nd \\ pa + qc & pb + qd \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

па множење матрица није комутативно.

Остаје нам само да покажемо да $Z(G)$ има бар два различита елемента.
Испробавањем добијамо да групи $Z(G)$ осим инверза припада и $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
Центар групе је $Z(G) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \cdots \right\}$.

На основу тога показали смо да постоји група $(G, \cdot)$ таква да $Z(G) \neq e, G$.