Паскалова теорема

Алекса Вучковић

Математичка гимназија

Март 2019.

Садржај

Паскалова теорема

Теорема

Нека су $A, Б, Ц, Д, Е, Ф$ тачке на кругу. Праве $АБ$ и $ДЕ$ секу се у $Л$, праве $БЦ$ и $ЕФ$ у $М$, а $ЦД$ и $ФА$ у $Н$. Тада су тачке $Л, М, Н$ колинеарне.

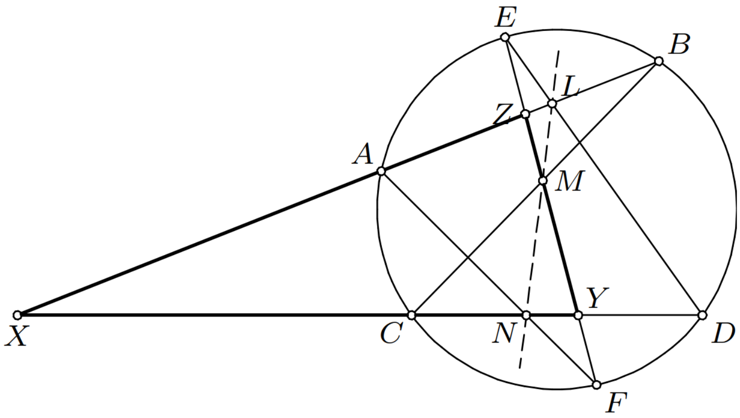
Паскалова теорема

Теорема

Нека су $A, Б, Ц, Д, Е, Ф$ тачке на кругу. Праве $АБ$ и $ДЕ$ секу се у $Л$, праве $БЦ$ и $ЕФ$ у $М$, а $ЦД$ и $ФА$ у $Н$. Тада су тачке $Л, М, Н$ колинеарне.

У пројективној геометрији, Паскалова теорема каже да ако се изабере шест произвољних тађака на кругу и да се споје линијским сегментима у било ком редоследу да формира шестоугао, онда се три пара супротних страна шестоугла састају у три тачке које леже на правој линији.

Доказ



Посебни случајеви

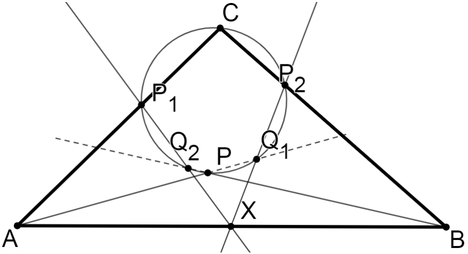
Паскалова теорема очигледно не захтева да $ABЦДEФ$ буде конвексан шестоугао, тако да су сви распореди тачака дозвољени. Можемо да посматрамо и дегенерисане случајеве, када су неке две праве паралелне или се неке две тачке поклапају. На пример, ако је $A = Б$, за праву $AБ$ узимамо тангенту на круг у A.

Задатак 1.

Нека је Π тачка у унутрашњости троугла $АБЦ$. Означимо са Π_1 и Π_2 редом подножја нормала из Π на $АЦ$ и $БЦ$, и са $Ч_1$ и $Ч_2$ редом подножја нормала из $Ц$ на $А\Pi$ и $Б\Pi$. Доказати да се праве $Ч_1\Pi_2$, $Ч_2\Pi_1$ и $АБ$ секу у једној тачки.

Задатак 1.

Нека је $П$ тачка у унутрашњости троугла $АБЦ$. Означимо са $П_1$ и $П_2$ редом подножја нормала из $П$ на $АЦ$ и $БЦ$, и са $Ч_1$ и $Ч_2$ редом подножја нормала из $Ц$ на $АП$ и $БП$. Доказати да се праве $Ч_1 П_2$, $Ч_2 П_1$ и $АБ$ секу у једној тачки.

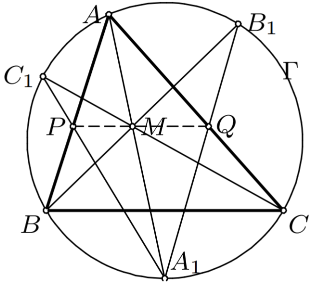


Задатак 2.

Троугао ABC је уписан у круг Г. Одабрана је тачка M на симетрали угла A, унутар троугла. Праве AM, BM и CM поново секу у A_1, B_1 и C_1 редом. Нека права A_1C_1 сече AB у P, а A_1B_1 сече AC у Q. Доказати да је $PQ \parallel BC$.

Задатак 2.

Троугао *АБЦ* је уписан у круг Г. Одабрана је тачка *М* на симетрали угла *А*, унутар троугла. Праве *АМ*, *БМ* и *ЦМ* поново секу у *А*$_1$, *Б*$_1$ и *Ц*$_1$ редом. Нека права *А*$_1$*Ц*$_1$ сече *АБ* у *П*, а *А*$_1$*Б*$_1$ сече *АЦ* у *Ч*. Доказати да је *ПЧ* $\parallel$ *БЦ*.

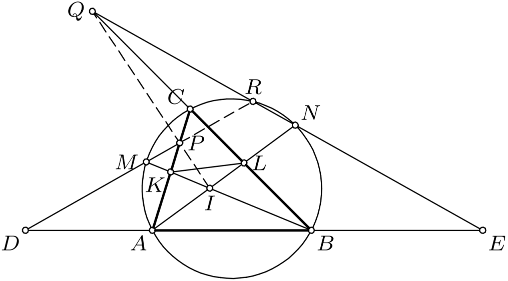


Задатак 3.

У троуглу $АБЦ$, тачке $Д$ и $Е$ на правој $АБ$ су такве да је $Д - А - Б - Е$ и $АД = АЦ$, $БЕ = БЦ$. Означимо са $М$ и $Н$ редом средишта лукова $АЦ$ и $БЦ$ описаног круга $\Delta АБЦ$ који не садрже треће теме. Праве $ДМ$ и $ЦА$ се секу у $П$, а праве $ЕН$ и $ЦБ$ се секу у $Ч$. Доказати да центар уписаног круга $И$ троугла $АБЦ$ лежи на правој $ПЧ$.

Задатак 3.

У троуглу *АБЦ*, тачке *Д* и *Е* на правој *АБ* су такве да је *Д* – *А* – *Б* – *Е* и *АД* = *АЦ*, *БЕ* = *БЦ*. Означимо са *М* и *Н* редом средишта лукова *АЦ* и *БЦ* описаног круга Δ*АБЦ* који не садрже треће теме. Праве *ДМ* и *ЦА* се секу у *П*, а праве *ЕН* и *ЦБ* се секу у *Ч*. Доказати да центар уписаног круга *И* троугла *АБЦ* лежи на правој *ПЧ*.



Хвала на пажњи!