Домаћи задатак из анализе

Алекса Вучковић, 2ц

Задатак 1. Ако је $a^2 + b^2 = c^2$ докажи да $3|a \vee 3|b$.

$x^2 \equiv 0, 1 \pmod 3$

$$\underbrace{i)\, c^2 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow 3|a^2 \wedge 3|b^2 \Rightarrow 3|a \wedge 3|b \quad ii)\, c^2 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 3|a^2 \vee 3|b^2 \Rightarrow 3|a \vee 3|b}_{\text{На основу тога бар један мора бити дељив са три.}}$$

Лема. Ако је $a^2 + b^2 = c^2$ докажи да $5|abc$.

$x^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 5$

Остаци при дељењу са пет могу бити $0 + 0 = 0,\ 0 + 1 = 1,\ 0 + 4 = 4,\ 1 + 4 = 0$

На основу тога бар један од бројева a, b, c мора бити дељив са пет.

Задатак 2. Ако је a, b, c Питагорина тројка, докажи да је $60|a \cdot b \cdot c$.

Ако докажемо да тврђење важи за примитивне тројке, доказали смо и за све друге питагорине тројке јер је тада производ једнак $k^3 \cdot a \cdot b \cdot c$.

$60 = 3 \cdot 4 \cdot 5 \Rightarrow$ Морамо доказати дељивост са 3, 4 и 5.
Из претходног задатка јасно је да 3 дели бар један од бројева a или b.
Дељивост са 4 доказујемо на следећи начин:
$(a, b, c) = (2mn, n^2 - m^2, n^2 + m^2)$, где су m и n различите парности.
Стога, 4 дели један од бројева a или b који је облика $2mn$.
На основу прошле леме имамо и дељивост са пет. ■

Задатак 3. Нађи све Питагорине тројке такве да је $O = P$.

Решење задатка могу бити само примитивне тројке:
За неку примитивну тројку (a, b, c) која задовољава услове задатка не важи да ће (ka, kb, kc) задовољавати услове задатка због тога што $k \cdot O \neq P \cdot k^2$
Због тога једина решења могу бити када је $k = 1$, тј када су тројке примитивне.

$(a, b, c) = (2mn, n^2 - m^2, n^2 + m^2)$ или $(a, b, c) = (n^2 - m^2, 2mn, n^2 + m^2)$
Стога имамо да важи $2mn + n^2 - m^2 + n^2 + m^2 = mn(n^2 - m^2)$.
Срећивањем претходног израза добијамо следеће $2 = (n - m) \cdot m$ па је због тога једино могуће решење $n = 3$ и $m = 2$. На основу тога једино решење је облика $(a, b, c) = (5, 12, 13)$. ■

У даљем тексту видећете пар задатака рађених на преходном часу.

Задатак 4. Решити j-ну $1! + 2! + ... + x! = y^2$ у $\mathbb{N}$.

$x = 1 \Rightarrow 1! = y^2 \Rightarrow y = 1$
$x = 2 \Rightarrow 1! + 2! = y^2 \Rightarrow y^2 = 3 \perp$
$x = 3 \Rightarrow 1! + 2! + 3! = y^2 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = 3$
$x = 4 \Rightarrow 1! + 2! + 3! + 4! = y^2 \Rightarrow y^2 = 33 \perp$
$x \geq 5 \Rightarrow 1! + ... + 4! + 5! + ... + x! = y^2 \Rightarrow \underbrace{33 + 5! + ... + x!}_{\equiv 3 \pmod 5} = y^2 \Rightarrow y^2 \equiv 3 \pmod 5 \perp$(Лема)

Задатак 5. Решити j-ну $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.

Ако je $xyz \neq 0 \Rightarrow x = 2^a \cdot \alpha, y = 2^b \cdot \beta, z = 2^c \cdot \gamma,\ a, b, c \in \mathbb{N}_0,\ 2 \not| \alpha, 2 \not| \beta, 2 \not| \gamma$

Без умањења општости нека je $0 \leq a \leq b \leq c$.
$2^{2a}\alpha^2 + 2^{2b}\beta^2 + 2^{2c}\gamma^2 = 2^{a+b+c+1}\alpha\beta\gamma \,/ : 2^{2a}$
$\alpha^2 + 2^{2b-2a}\beta^2 + 2^{2c-2a}\gamma^2 = 2^{b+c+1-a}\alpha\beta\gamma$
$\alpha^2 + (2^{b-a} \cdot \beta)^2 + (2^{c-a} \cdot \gamma)^2 = 2^{b+c+1-a}\alpha\beta\gamma$
$b > a \Rightarrow 2|2^{b-a} \cdot \beta,\ 2|2^{c-a} \cdot \gamma,\ 2|2^{b+c+1-a} \cdot \alpha\beta\gamma \Rightarrow 2|\alpha^2 \Rightarrow 2|\alpha \perp$
$\Rightarrow b = a \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + (2^{c-a} \cdot \gamma)^2 = 2^{c+1} \cdot \alpha\beta\gamma$
$c > a \Rightarrow 2|2^{c-a} \cdot \gamma \Rightarrow (2^{c-a} \cdot \gamma)^2 \equiv 0 \pmod 4,\ 2 \not| \alpha, 2 \not| \beta \Rightarrow \alpha^2 \equiv 1 \pmod 4,\ \beta^2 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{c+1} \cdot \alpha\beta\gamma \equiv 2 \pmod 4 \perp (4|2^{c+1})$
$\Rightarrow c = a \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2^{c+1}\alpha\beta\gamma,\ 2 \not| \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,\ 2|2^{c+1}\alpha\beta\gamma \perp$

$\Rightarrow xyz = 0$, тj. $x = 0 \ \vee y = 0 \ \vee z = 0$.
$\dots$
$\Rightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0)$. ■