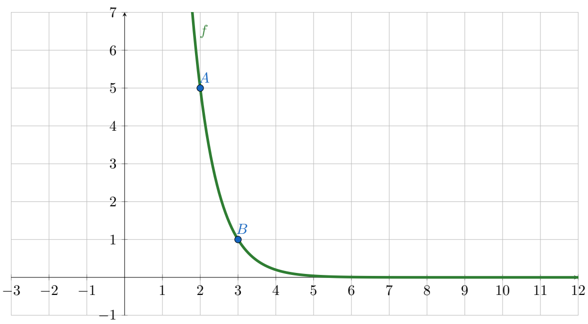
Домаћи задатак из анализе

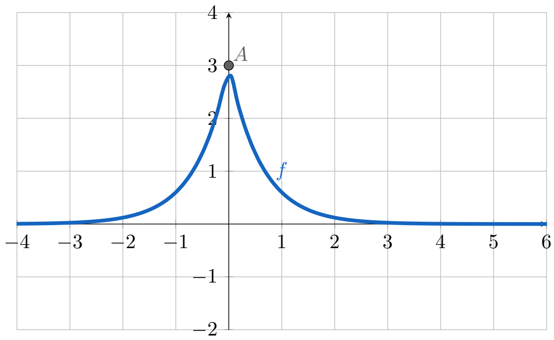
Алекса Вучковић, 2ц

Задатак 1. Скицирати графике следећих функција:

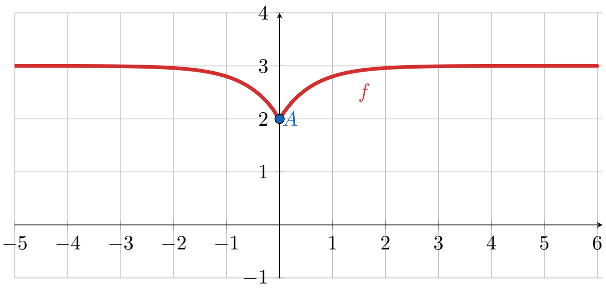
а) $f(x) = 5^{3-x}$



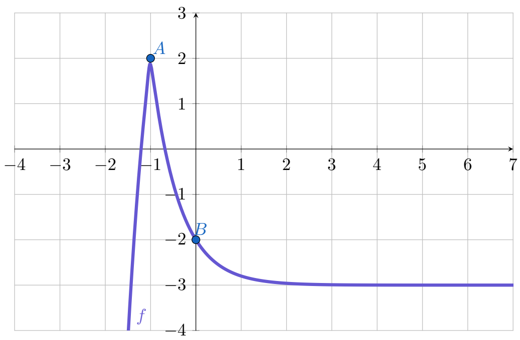
б) $f(x) = 3 \cdot 5^{-|x|}$



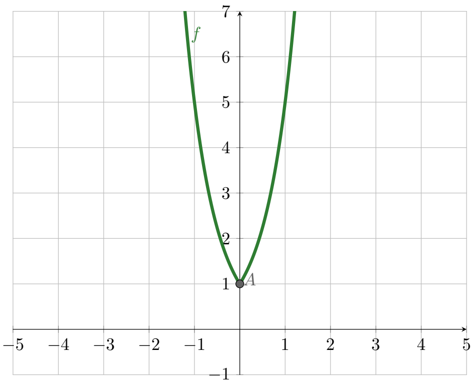
в) $f(x) = 3 - 5^{-|x|}$



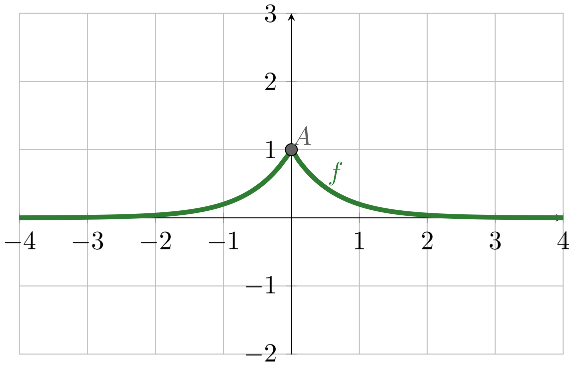
г) $f(x) = 2 - |5 - 5^{-x}|$



д) $f(x) = max\{5^{-x}, 5^{x}\}$



ђ) $f(x) = min\{5^{-x}, 5^{x}\}$



Задатак 2. Одредити домен и скуп вредности функције:

а) $f(x) = 3^{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow x \in [-1, 1] \Rightarrow f(x) \in [1, 3]$

б) $f(x) = 2^{\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \Rightarrow f(x) \in [1, +\infty)$

в) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sin x} \Rightarrow x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \in [\frac{1}{3}, 3]$

г) $f(x) = \sqrt{0.5^x - 8} = \sqrt{2^{-x} - 2^3} \Rightarrow 2^{-x} - 2^3 \leq 0 \Rightarrow x \leq -3 \Rightarrow x \in (-\infty, -3] \Rightarrow f(x) \in [0, +\infty)$

Задатак 3. Решити једначине:

а) $$\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} = \sqrt{2}$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$1 - x = -\frac{1}{2}$$
$$\boxed{x = \frac{3}{2}}.$$

б) $$15^x = 5 \cdot 3^x$$
$$\cancel{3^x} \cdot 5^x = 5 \cdot \cancel{3^x}$$
$$\boxed{x = 1}.$$

в) $$3 \cdot 2^{2x-1} = 6^x$$
$$\frac{3}{2} \cdot 4^x = 6^x$$
$$\frac{3}{2} = \left(\frac{6}{4}\right)^x$$
$$\frac{3}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$
$$\boxed{x = 1}.$$

г) $$36^x - 42 \cdot 6^x + 216 = 0$$
$$6^{2x} - 42 \cdot 6^x + 216 = 0$$
$$6^x = \frac{42 \pm \sqrt{42^2 - 4 \cdot 216}}{2}$$
$$6^x = \frac{42 \pm 30}{2}$$
$$6^x = 36 \vee 6^x = 6$$
$$\boxed{x \in \{1, 2\}}.$$

д) $$\sqrt{\left(5\sqrt{2}+7\right)^x} + \sqrt{\left(5\sqrt{2}-7\right)^x} = 198$$
$$t = \sqrt{\left(5\sqrt{2}+7\right)^x}$$
$$t + \frac{1}{t} = 198$$
$$t^2 - 198t + 1 = 0$$
$$t = \frac{198 \pm \sqrt{198^2 - 4}}{2}$$
$$t = 99 \pm 70\sqrt{2}$$
$$t = 99 \pm 70\sqrt{2} = \left(5\sqrt{2}+7\right)^{\frac{x}{2}}$$
$$99 + 70\sqrt{2} = (5\sqrt{2}+7)^2,$$
$$99 - 70\sqrt{2} = (5\sqrt{2}-7)^2 = \frac{1}{(5\sqrt{2}+7)^2} = (5\sqrt{2}+7)^{-2},$$
$$\frac{x}{2} = \pm 2$$
$$\boxed{x = \pm 4}.$$

ђ) $$4 \cdot 2^{2x} = 18 \cdot 3^{2x} + 6^x / : 2^x$$
$$4 = 18 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x$$
$$t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$
$$0 = 18t^2 + t - 4$$
$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 18 \cdot 4}}{36}$$
$$t = -\frac{1}{2} \vee t = \frac{4}{9}$$
$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{4}{9} \vee \left(\frac{3}{2}\right)^x = -\frac{1}{2}$$
$$x = -2 \vee \perp$$
$$\boxed{x \in \{-2\}}.$$

е) $$9 \cdot (9^x + 9^{-x}) - 3 \cdot (3^x + 3^{-x}) = 72$$
$$t = 3^x$$
$$9 \cdot (t^2 + \frac{1}{t^2}) - 3 \cdot (t + \frac{1}{t}) = 72$$
$$y = t + \frac{1}{t}$$
$$y^2 = t^2 + \frac{1}{t^2} + 2$$
$$9 \cdot (y^2 - 2) - 3 \cdot y = 72$$
$$3 \cdot y^2 - 6 - 3 \cdot y = 72$$
$$3 \cdot y^2 - y - 30 = 0$$
$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 30 \cdot 3 \cdot 4}}{6}$$
$$y_1 = -3 \vee y_2 = \frac{10}{3}$$
$$\frac{10}{3} = t + \frac{1}{t}$$
$$t^2 - \frac{10}{3} \cdot t + 1 = 0$$
$$t = \frac{\frac{10}{3} \pm \sqrt{\frac{100}{9} - 4}}{2}$$
$$t_1 = 3 \vee t_2 = \frac{1}{3}$$
$$\boxed{x_{1,2} = \pm 1}$$
$$-3 = t + \frac{1}{t}$$
$$t^2 + 3 \cdot t + 1 = 0$$
$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2}$$
$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$
$$3^x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Други део нема решења,
јер је десна страна једначине мања од 0.
Стога једина решења су:

$$\boxed{x \in \{1, 2\}}.$$

ж) $\left(\left(\sqrt[6]{81}\right)^{\frac{x}{5}-\sqrt{x}}\right)^{\frac{x}{5}+\sqrt{x}} = 3^{\frac{9}{5}}$

$\left(\left(3^{\frac{4}{6}}\right)^{\frac{x}{5}-\sqrt{x}}\right)^{\frac{x}{5}+\sqrt{x}} = 3^{\frac{9}{5}}$

$\left(\frac{4}{6}\right)\cdot\left(\frac{x}{5}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(\frac{x}{5}+\sqrt{x}\right) = \frac{9}{5}$

$\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{25}-x\right)\cdot = \frac{9}{5}$

$x^2 - 25x - \frac{135}{2} = 0$

$x = \frac{25 \pm \sqrt{625 + \frac{135}{2}\cdot 4}}{2}$

$\boxed{x = \frac{25+\sqrt{895}}{2}}$ јер је $x > 0$.

з) $2^x + 3^x = 5^x / : 3^x$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x + 1 = \left(\frac{5}{3}\right)^x$

Лева страна је опадајућа, а десна растућа,

Стога је једино могуће решење:

$\boxed{x = 1}$.

и) $10^x + 11^x + 12^x = 13^x + 14^x / : 12^x$

$\left(\frac{5}{6}\right)^x + \left(\frac{11}{12}\right)^x + 1 = \left(\frac{13}{12}\right)^x + \left(\frac{7}{6}\right)^x$

Лева страна је опадајућа, а десна растућа,

Стога је једино могуће решење:

$\boxed{x = 2}$.

Задатак 4. Решити неједначине:

а) $\left(\frac{5}{4}\right)^{1-x} < (0,64)^{2(1+\sqrt{x})}$

$\left(\frac{5}{4}\right)^{1-x} < \left(\frac{4}{5}\right)^{4(1+\sqrt{x})}$

$\left(\frac{5}{4}\right)^{1-x} < \frac{5}{4}^{-4(1+\sqrt{x})}$

$1 - x < -4\cdot(1+\sqrt{x})$

$0 < x - 4\cdot\sqrt{x} - 5$

$(\sqrt{x}-5)\cdot(\sqrt{x}+1) > 0$

$\sqrt{x} \geq 0 \wedge \sqrt{x} > 5 \Rightarrow x > 25$

$\boxed{x \in (25, +\infty)}$.

б) $10^{4x^2-2x-2} \geq 100^{x-1,5}$

$10^{4x^2-2x-2} \geq 10^{2x-3}$

$4\cdot x^2 - 2\cdot x - 2 \geq 2\cdot x - 3$

$4\cdot x^2 - 4\cdot x + 1 \geq 0$

$(2\cdot x - 1)^2 \geq 0$

$\boxed{x \in \mathbb{R}}$.

в) $\frac{3^x - 9}{x^2 - 5x + 6} > 0$

$\frac{3^x - 3^2}{(x-3)\cdot(x-2)} > 0$

$i) x < 2 \Rightarrow 3^x - 3^2 < 0, (x-3)\cdot(x-2) > 0 \Rightarrow \perp$

$ii) 2 \leq x \leq 3 \Rightarrow 3^x - 3^2 > 0, (x-3)\cdot(x-2) < 0 \Rightarrow \perp$

$iii) x > 3 \Rightarrow 3^x - 3^2 > 0, (x-3)\cdot(x-2) > 0 \Rightarrow x > 3$

$\boxed{x \in (3, +\infty)}$.

г) $3^{x-1} + 3^{x-2} - 3^{x-4} < 315$

$3^x\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{81}\right) < 315$

$3^x\left(\frac{35}{81}\right) < 315$

$3^x < 81\cdot 9$

$3^x < 3^6$

$\boxed{x \in (-\infty, 6)}$.

д) $\sqrt{\left(5+2\sqrt{6}\right)^x} + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x \leq 10$

$t = \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x$

$\sqrt{\frac{1}{t^2}} + t \leq 10$

$t + \frac{1}{t} \leq 10$

$t^2 - 10\cdot t + 1 \leq 0$

$t = 5 \pm 2\cdot\sqrt{6}$

$t \in [(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-2}, (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2]$

$\boxed{x \in \{-2, 2\}}$.

ђ) $3^{x+2} \geq 3^{2x+5} - x$

$x \geq 3^{2x+5} - 3^{x+2}$

$i) x < -3 \Rightarrow 3^{2x+5} - 3^{x+2} > -1 \Rightarrow \perp$

$ii) -3 \leq x < 0 \Rightarrow 3^{2x+5} - 3^{x+2} \geq 0 \Rightarrow \perp$

$iii) 0 \leq x \Rightarrow f(x) = 3^{2x+5} - 3^{x+2}$

$f(x)$ расте експоненцијално за разлику од x

Стога ова неједнакост нема решења.

е) $2^x + 3^x + 12 < 5^x / : 5^x$

$1 - \frac{2^x}{5} - \frac{3^x}{5} - \frac{12}{5^x} > 0$

$f(x) = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^x - \left(\frac{3}{5}\right)^x - \frac{12}{5^x}$ је $\nearrow$

за $x = 2$ $f(x) = 0 \Rightarrow x > 2$

$\boxed{x \in (2, +\infty)}$.