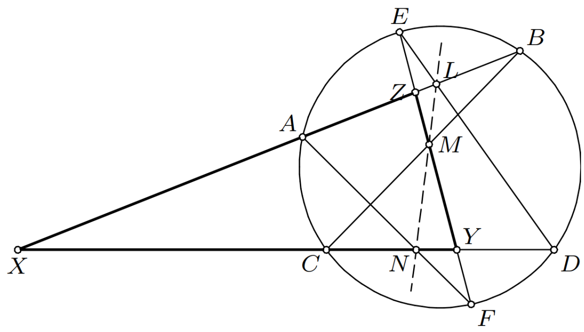
Паскалова теорема

Алекса Вучковић

Нека су A, B, C, D, E, F тачке на кругу. Праве AB и DE секу се у L, праве BC и EF у M, а CD и FA у N. Тада су тачке L, M, N колинеарне.

Доказ:



Слика 1.

Нека се AB и CD секу у X, CD и EF у Y, а EF и AB у Z. Тачке L, M, N леже на страницама троугла XYZ, па можемо да применимо Менелајеву теорему: треба показати да је $\frac{ZL}{LX} \cdot \frac{XN}{NY} \cdot \frac{YM}{MZ} = -1$. Радимо са ΔXYZ као базним троуглом. Знамо да су тачке L, D, E на правој, па Менелајева теорема даје $\frac{XD}{DY} \cdot \frac{YE}{EZ} \cdot \frac{ZL}{LX} = -1$. И тачке C, M, B су колинеарне, па имамо и $\frac{XC}{CY} \cdot \frac{YM}{MZ} \cdot \frac{ZB}{BX} = -1$. Најзад, тачке N, F, A су колинеарне, па је $\frac{XN}{NY} \cdot \frac{YF}{FZ} \cdot \frac{ZA}{AX} = -1$. Множењем ове три једнакости, користећи једнакости потенције $XD \cdot XC = XB \cdot XA$, $YD \cdot YC = YF \cdot YE$ и $ZF \cdot ZE = ZB \cdot ZA$, добијамо оно што нам треба.

Паскалова теорема очигледно не захтева да $ABCDEF$ буде конвексан шестоугао, тако да су сви распореди тачака дозвољени. Можемо да посматрамо и дегенерисане случајеве, када су неке две праве паралелне или се неке две тачке поклапају. На пример, ако је $A = B$, за праву AB узимамо тангенту на круг у A.

Задаци:

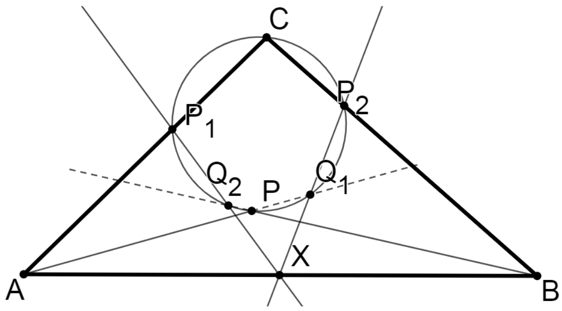
1. Нека је P тачка у унутрашњости троугла ABC. Означимо са P_1 и P_2 редом подножја нормала из P на AC и BC, и са Q_1 и Q_2 редом подножја нормала из C на AP и BP. Доказати да се праве Q_1P_2, Q_2P_1 и AB секу у једној тачки.

2. Троугао ABC је уписан у круг Γ. Одабрана је тачка M на симетрали угла A, унутар троугла. Праве AM, BM и CM поново секу у A_1, B_1 и C_1 редом. Нека права A_1C_1 сече AB у P, а A_1B_1 сече AC у Q. Доказати да је $PQ \parallel BC$.

3. У троуглу ABC, тачке D и E на правој AB су такве да је $D - A - B - E$ и $AD = AC$, $BE = BC$. Означимо са M и N редом средишта лукова AC и BC описаног круга ΔABC који не садрже треће теме. Праве DM и CA се секу у P, а праве EN и CB се секу у Q. Доказати да центар уписаног круга I троугла ABC лежи на правој PQ.

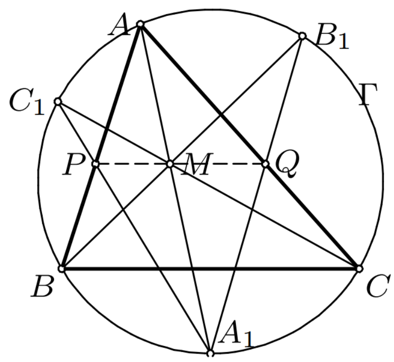
Решења:

1. Тачке P_1, P_2, Q_1, Q_2 леже на кругу над пречником PC. По Паскаловој теореми у шестоуглу $P_1PP_2Q_1CQ_2$, тачке пресека парова правих P_1C, PQ_1 (пресек A), P_1Q_2, P_2Q_1 (пресек X) и PQ_2, P_2C (пресек B) су колинеарне.



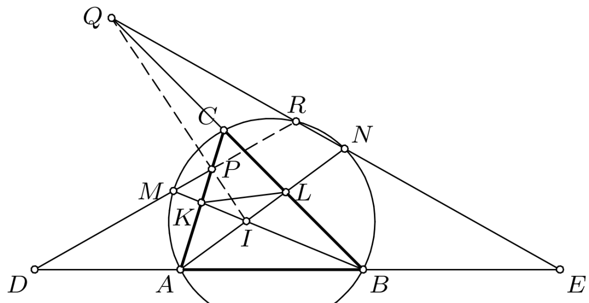
Слика 2.

2. На основу Паскалове теореме на шестоуглу $BACC_1A_1B_1$, тачке P, Q и $M = BB1 \cap CC1$ су колинеарне. Даље, по услову задатка, A_1 је средиште лука BC, па је тангента t у A_1 паралелна BC. Сада применимо Паскалову теорему на $ABCC_1A_1A_1$: тачке $P = AB \cap A_1C_1$, $M = AA_1 \cap CC_1$ и бесконачна тачка $t \cap BC$ су на правој, тј. праве t, BC и PM припадају истом прамену, што значи да је $PM \parallel BC$, дакле $PQ \parallel BC$.



Слика 3.

3. Нека BM и AN секу наспрамне странице троугла редом у K и L. Из сличности троуглова BCM и BKA ($\sphericalangle BMC = \sphericalangle BAK$, $\sphericalangle CBM = \sphericalangle KBA$) имамо $BK \cdot BM = BA \cdot BC$; осим тога, због $CD \cap AL$ важи $\dfrac{BA}{BD} = \dfrac{BL}{BC}$. Следи $BK \cdot BM = BL \cdot BD$, што заједно са $\sphericalangle DBM = \sphericalangle KBL$ даје $\Delta BDM \sim \Delta BKL$. Аналогно, $\Delta AEN \sim \Delta ALK$. Нека се праве DM и EN секу у R. Добијене сличности дају $\sphericalangle RDE = \sphericalangle MDB = \sphericalangle LKB$ и $\sphericalangle DER = \sphericalangle AEN = \sphericalangle ALK$, тако да је $\sphericalangle NRM = 180^\circ - \sphericalangle RDE - \sphericalangle DER = 180 - \sphericalangle LKB - \sphericalangle ALK = \sphericalangle KIL = \sphericalangle BIA = 180^\circ - \sphericalangle IAB - \sphericalangle ABI = 180^\circ - \sphericalangle CAN - \sphericalangle MBC = \sphericalangle NCM$ (углови су оријентисани). Према томе, R је на описаном кругу ΔABC. Сада колинеарност тачака I, P, Q следи из Паскалове теореме за тачке A, B, R; M, N, C.



Слика 4.

Литература

[1] Д. Ђукић, *Паскалова теорема, пол и полара*,
https://imomath.com/srb/dodatne/paskalova%20teorema_ddj.pdf