Домаћи задатак из прстена

Алекса Вучковић, 3ц

Задатак 9. Нека је $\mathbb{H} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{C} \right\}$ и сабирање и множење уобичајене операције над матрицама. Доказати да ова структура јесте прстен, а није поље. Уколико је $A \neq 0$, доказати да је $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\overline{a}}{|a|^2+|b|^2} & \frac{-b}{|a|^2+|b|^2} \\ \frac{\overline{b}}{|a|^2+|b|^2} & \frac{a}{|a|^2+|b|^2} \end{bmatrix}$ инверзна матрица матрици A у односу на множење. Елементи из $\mathbb{H}$ се зову *кватерноиони.*

I $(\mathbb{H}, +)$ је Абелова група:

1) Затвореност

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -\overline{b_1} & \overline{a_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -\overline{b_2} & \overline{a_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1+a_2) & (b_1+b_2) \\ -(\overline{b_1}+\overline{b_2}) & (\overline{a_1}+\overline{a_2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1+a_2) & (b_1+b_2) \\ -\overline{(b_1+b_2)} & \overline{(a_1+a_2)} \end{bmatrix} \in \mathbb{H}\cdot$$

2) Асоцијативност

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -\overline{b_1} & \overline{a_1} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -\overline{b_2} & \overline{a_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ -\overline{b_3} & \overline{a_3} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -\overline{b_1} & \overline{a_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (a_2+a_3) & (b_2+b_3) \\ -(\overline{b_2}+\overline{b_3}) & (\overline{a_2}+\overline{a_3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1+a_2+a_3) & (b_1+b_2+b_3) \\ -(\overline{b_1}+\overline{b_2}+\overline{b_3}) & (\overline{a_1}+\overline{a_2}+\overline{a_3}) \end{bmatrix},$$

$$\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -\overline{b_1} & \overline{a_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -\overline{b_2} & \overline{a_2} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ -\overline{b_3} & \overline{a_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1+a_2) & (b_1+b_2) \\ -(\overline{b_1}+\overline{b_2}) & (\overline{a_1}+\overline{a_2}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ -\overline{b_3} & \overline{a_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1+a_2+a_3) & (b_1+b_2+b_3) \\ -(\overline{b_1}+\overline{b_2}+\overline{b_3}) & (\overline{a_1}+\overline{a_2}+\overline{a_3}) \end{bmatrix}.$$

3) Неутрал за сабирање

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4) Инверз

за $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix}$ инверз је $A^{-1} = \begin{bmatrix} (-a) & (-b) \\ -\overline{(-b)} & \overline{(-a)} \end{bmatrix}$

$A + A^{-1} = A^{-1} + A = 0$

5) Комутативност

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -\overline{b_1} & \overline{a_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -\overline{b_2} & \overline{a_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1+a_2) & (b_1+b_2) \\ -(\overline{b_1}+\overline{b_2}) & (\overline{a_1}+\overline{a_2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_2+a_1) & (b_2+b_1) \\ -(\overline{b_2}+\overline{b_1}) & (\overline{a_2}+\overline{a_1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -\overline{b_2} & \overline{a_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -\overline{b_1} & \overline{a_1} \end{bmatrix}$$

II Дистрибутивност:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -\overline{b_1} & \overline{a_1} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -\overline{b_2} & \overline{a_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ -\overline{b_3} & \overline{a_3} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -\overline{b_1} & \overline{a_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -\overline{b_2} & \overline{a_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -\overline{b_1} & \overline{a_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ -\overline{b_3} & \overline{a_3} \end{bmatrix}$$

1)

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -\overline{b_1} & \overline{a_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (a_2+a_3) & (b_2+b_3) \\ -(\overline{b_2}+\overline{b_3}) & (\overline{a_2}+\overline{a_3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 + a_1a_3 - b_1\overline{b_2} - b_1\overline{b_3} & a_1b_2 + a_1b_3 + b_1\overline{a_2} + b_1\overline{a_3} \\ -\overline{b_1}a_2 - \overline{b_1}a_3 - \overline{a_1}\overline{b_2} - \overline{a_1}\overline{b_3} & -\overline{b_1}b_2 - \overline{b_1}b_3 + \overline{a_1}\overline{a_2} + \overline{a_1}\overline{a_3} \end{bmatrix},$$

2)

$$\begin{bmatrix} a_1a_2 - b_1\overline{b_2} & a_1b_2 + b_1\overline{a_2} \\ -\overline{b_1}a_2 - \overline{a_1}\overline{b_2} & -\overline{b_1}b_2 + \overline{a_1}\overline{a_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1a_3 - b_1\overline{b_3} & a_1b_3 + b_1\overline{a_3} \\ -\overline{b_1}a_3 - \overline{a_1}\overline{b_3} & -\overline{b_1}b_3 + \overline{a_1}\overline{a_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 - b_1\overline{b_2} + a_1a_3 - b_1\overline{b_3} & a_1b_2 + b_1\overline{a_2} + a_1b_3 + b_1\overline{a_3} \\ -\overline{b_1}a_2 - \overline{a_1}\overline{b_2} - \overline{b_1}a_3 - \overline{a_1}\overline{b_3} & -\overline{b_1}b_2 + \overline{a_1}\overline{a_2} - \overline{b_1}b_3 + \overline{a_1}\overline{a_3} \end{bmatrix}.$$

III $(\mathbb{H}, \cdot)$, Важи затвореност и асоцијативност, али ово није Абелова група:

1) Затвореност

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -\overline{b_1} & \overline{a_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -\overline{b_2} & \overline{a_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 - b_1\overline{b_2} & a_1b_2 + b_1\overline{a_2} \\ -\overline{b_1}a_2 - \overline{a_1}\overline{b_2} & -\overline{b_1}b_2 + \overline{a_1}\overline{a_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1a_2 - b_1\overline{b_2}) & (a_1b_2 + b_1\overline{a_2}) \\ -\overline{(b_1\overline{a_2} + a_1b_2)} & \overline{(-b_1\overline{b_2} + a_1a_2)} \end{bmatrix} \in \mathbb{H}\cdot$$

2) Асоцијативност

$$\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -\overline{b_1} & \overline{a_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -\overline{b_2} & \overline{a_2} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ -\overline{b_3} & \overline{a_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -\overline{b_1} & \overline{a_1} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -\overline{b_2} & \overline{a_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ -\overline{b_3} & \overline{a_3} \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} a_1a_2 - b_1\overline{b_2} & a_1b_2 + b_1\overline{a_2} \\ -\overline{b_1}a_2 - \overline{a_1}\overline{b_2} & -\overline{b_1}b_2 + \overline{a_1}\overline{a_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ -\overline{b_3} & \overline{a_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2a_3 - b_1\overline{b_2}a_3 - a_1b_2\overline{b_3} - b_1\overline{a_2}\overline{b_3} & a_1a_2b_3 - b_1\overline{b_2}b_3 + a_1b_2\overline{a_3} + b_1\overline{a_2}\overline{a_3} \\ -\overline{b_1}a_2a_3 - \overline{a_1}\overline{b_2}a_3 + \overline{b_1}b_2\overline{b_3} - \overline{a_1}\overline{a_2}\overline{b_3} & -\overline{b_1}a_2b_3 - \overline{a_1}\overline{b_2}b_3 - \overline{b_1}b_2\overline{a_3} + \overline{a_1}\overline{a_2}\overline{a_3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -\overline{b_1} & \overline{a_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2a_3 - b_2\overline{b_3} & a_2b_3 + b_2\overline{a_3} \\ -\overline{b_2}a_3 - \overline{a_2}\overline{b_3} & -\overline{b_2}b_3 + \overline{a_2}\overline{a_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2a_3 - a_1b_2\overline{b_3} - b_1\overline{b_2}a_3 - b_1\overline{a_2}\overline{b_3} & a_1a_2b_3 + a_1b_2\overline{a_3} - b_1\overline{b_2}b_3 + b_1\overline{a_2}\overline{a_3} \\ -\overline{b_1}a_2a_3 + \overline{b_1}b_2\overline{b_3} - \overline{a_1}\overline{b_2}a_3 - \overline{a_1}\overline{a_2}\overline{b_3} & -\overline{b_1}a_2b_3 - \overline{b_1}b_2\overline{a_3} - \overline{a_1}\overline{b_2}b_3 + \overline{a_1}\overline{a_2}\overline{a_3} \end{bmatrix}$$

3) Неутрал за множење

$$e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot e = e \cdot A = A$$

4) Инверз

за матрицу $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$ инверз за множење је $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{a}}{|a|^2+|b|^2} & \frac{-b}{|a|^2+|b|^2} \\ \frac{\bar{b}}{|a|^2+|b|^2} & \frac{a}{|a|^2+|b|^2} \end{bmatrix}$

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Доказ:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a\bar{a}}{|a|^2+|b|^2} + \frac{b\bar{b}}{|a|^2+|b|^2} & -\frac{ab}{|a|^2+|b|^2} + \frac{ab}{|a|^2+|b|^2} \\ -\frac{\bar{b}\bar{a}}{|a|^2+|b|^2} + \frac{\bar{a}\bar{b}}{|a|^2+|b|^2} & \frac{b\bar{b}}{|a|^2+|b|^2} + \frac{a\bar{a}}{|a|^2+|b|^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{|a|^2+|b|^2}{|a|^2+|b|^2} & \frac{ab-ab}{|a|^2+|b|^2} \\ \frac{-\bar{b}\bar{a}+\bar{a}\bar{b}}{|a|^2+|b|^2} & \frac{b\bar{b}+a\bar{a}}{|a|^2+|b|^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{a\bar{a}}{|a|^2+|b|^2} + \frac{b\bar{b}}{|a|^2+|b|^2} & -\frac{ab}{|a|^2+|b|^2} + \frac{ab}{|a|^2+|b|^2} \\ -\frac{\bar{b}\bar{a}}{|a|^2+|b|^2} + \frac{\bar{a}\bar{b}}{|a|^2+|b|^2} & \frac{b\bar{b}}{|a|^2+|b|^2} + \frac{a\bar{a}}{|a|^2+|b|^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{|a|^2+|b|^2}{|a|^2+|b|^2} & \frac{ab-ab}{|a|^2+|b|^2} \\ \frac{-\bar{b}\bar{a}+\bar{a}\bar{b}}{|a|^2+|b|^2} & \frac{b\bar{b}+a\bar{a}}{|a|^2+|b|^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5) Не важи комутативност

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -\overline{b_1} & \overline{a_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -\overline{b_2} & \overline{a_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 - b_1\overline{b_2} & a_1b_2 + b_1\overline{a_2} \\ -\overline{b_1}a_2 - \overline{a_1}\overline{b_2} & -\overline{b_1}b_2 + \overline{a_1}\overline{a_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -\overline{b_2} & \overline{a_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -\overline{b_1} & \overline{a_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2a_1 - b_2\overline{b_1} & a_2b_1 + b_2\overline{a_1} \\ -\overline{b_2}a_1 - \overline{a_2}\overline{b_1} & -\overline{b_2}b_1 + \overline{a_2}\overline{a_1} \end{bmatrix}$$

Чиме је доказ завршен.