Верижни разломци

Аутор: *Алекса Вучковић, ученик 2. разреда Математичке гимназије*
Ментор: *Даница Зечевић*
Регионални центар за таленте „Михајло Пупин", Димитрија Туцовића 2, Панчево

Увод

Прост верижни разломак је израз облика

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}, \qquad (*)$$

где су a_1, a_2,... природни бројеви и a_0 цео број. Израз $(*)$ често пишемо као $[a_0, a_1, a_2, ..., a_n]$ ради компактности. У овом запису не подразумевамо обавезно да су a_i цели бројеви. Израз $[a_0, a_1, ..., a_k]$ зовемо k-тим **конвергентом** за $[a_0, a_1, ..., a_n]$, а израз $a'_k = [a_k, a_{k+1}, ..., a_n]$ k-тим комплетним количником $(n \geq k)$. Ова два израза ће нам бити врло значајна за доказивање својства верижних разломака и њихових конвергената.

Верижни разломци постоје већ стотинама година. Сваки коначан запис верижног разломка одговара рационалном броју, док бесконачан одговара ирационалном. Верижни разломци су повезани са Еуклидовим алгоритмом, имају своју примену у календару, записивању броја π и броја e у облику разломка, користе се код налажења решења Пелове једначине($x^2 - dy^2 = 1$).

Циљ

Циљ овог научноистраживачког рада је доказивање својства верижних разломака, приказивање реалних бројева у виду верижног разломка, проналажење најбоље апроксимације ирационалног броја рационалним или апроксимација разломка са великим вредностима имениоца и бројиоца на мање бројевне вредности у циљу лакшег израчунавања и примене у пракси са минималном грешком.

Метода рада

Методе истраживања су прикупљање литературе, као и њихово тумачење и решавање. Тражена је корелација између теоријских поставки и практичне примене, детаљно је приказан процес долажења до решења. У раду је коришћена комбинована метода истраживања, проучавана је литература где је разноврсна примена верижних разломака. Осим тога, развој рационалног броја у верижни разломак приказан је сликовно, ради лакшег појмљивања.

Резултати истраживања

Предмет обраде овог рада су верижни разломци, конвергенте верижних разломака, као и њихова својства и примене. У даљем тексту имаћете прилику да видите неке од многобројних теорема и њихових последица. Начињен је избор најбитнијих ствари на ову тему по ауторовом мишљењу са којима ће се читалац сусрети у предстојећем тексту.

Верижни разломци нису погодни за основне рачунске операције. Ипак, није тешко извести операције $x \to 1/x$ и $x \to -x$ помоћу њих, коришћењем једнакости:

$$[a_0, a_1, ..., a_n] \cdot [0, a_0, a_1, ..., a_n] = 0 \qquad \text{за } a_0 \geq 1, \text{ и}$$
$$[a_0, a_1, ..., a_n] + [-1 - a_0, 1, a_1 - 1, a_2, ..., a_n] \qquad \text{за } a_1 > 1.$$

Верижни разломак $[a_0, a_1, ..., a_n]$ је једнак $\frac{p_n}{q_n}$, где низови (p_n) и (q_n) задовољавају

$$\begin{matrix} p_{-1} = 1, & p_0 = a_0, & p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \\ q_{-1} = 1, & q_0 = 1, & q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \end{matrix} \qquad \text{за } 2 \leq k \leq n.$$

Осим претходно наведених операција и рекурзивне везе између конвергенти верижних разломака битно је поменути и:

Теорему, односно наредна два идентитета

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1} \quad \text{и}$$
$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n$$

на основу којих се заснивају следеће последице:

(1) Конвергенти $\frac{p_n}{q_n}$ простог верижног разломка су нескративи: нзд$(p_n, q_n) = 1$.

(2) $\dfrac{p_0}{q_0} < \dfrac{p_2}{q_2} < \dfrac{p_4}{q_4} \cdots < \dfrac{p_n}{q_n} < \cdots \dfrac{p_3}{q_3} < \dfrac{p_1}{q_1}$.

И на крају, идентитет који даје везу између верижног разломка и "обрнутог" парњака.

Ако је $[a_0, a_1, ..., a_n] = \frac{p_n}{q_n}$, онда је $[a_n, a_{n-1}, ..., a_0] = \frac{p_n}{p_{n-1}}$.

Закључак

Иако се ови разломци више не спомињу у средњошколским уџбеницима, њихова примена је и даље необично широка и занимљива. Верижни разломци се појављују у многим гранама математике: Диофантовим апроксимацијама, алгебарској теорији бројева, теорији кодирања, алгебарској геометрији, динамичким системима, ергодичкој теорији, топологији, итд. Математичко објашњење за овај феномен је базирано на интересантној структури подскупа реалних бројева са само две операције: сабирање и инверзија. Ова структура се први пут појављује у Еуклидовом алгоритму, који је познат већ неколико хиљада година. То је разлог због којег се верижни разломци могу пронаћи далеко ван теорије бројева.

Литература

[1] Д. Ђукић *Верижни разломци*, Београд, 2010/11. `https://imomath.com/srb/dodatne/veriznirazlomci_ddj.pdf`

[2] S. Krushchev *Orthogonal Polynomials and Continued Fractions*, Cambridge University Press, 2008.

[3] W. Bosma, C. Kraaikamp *Continued Fractions* `https://www.math.ru.nl/~bosma/Students/CF.pdf`