Геометријске неједнакости

Алекса Вучковић

Математичка гимназија

Март 2019.

Ментор: Бранко Грбић, Регионални центар за таленте „Михајло Пупин” Панчево

Садржај

Увод

Под **геометријском неједнакошћу** се најчешће подразумева она неједнакост која важи за елементе(странице, углове, тежишне дужи,...) произвољног троугла или неке сложеније фигуре(четвороугла...). У ширем смислу геометријска је свака неједнакост која се односи на неку конкретну геометријску слику.

Увод

Под **геометријском неједнакошћу** се најчешће подразумева она неједнакост која важи за елементе(странице, углове, тежишне дужи,...) произвољног троугла или неке сложеније фигуре(четвороугла...). У ширем смислу геометријска је свака неједнакост која се односи на неку конкретну геометријску слику.

Основна неједнакост троугла

$$а + б > ц \quad б + ц > а \quad ц + а > б$$

Основне неједнакости троугла

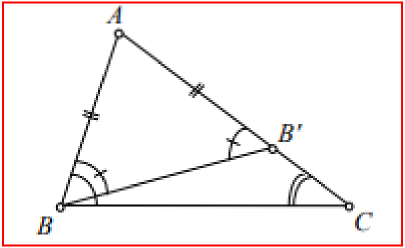
Теорема 1.

Наспрам веће странице у троуглу је већи угао тог троугла; и обратно, наспрам већег угла троугла је већа страница.

Основне неједнакости троугла

Теорема 1.

Наспрам веће странице у троуглу је већи угао тог троугла; и обратно, наспрам већег угла троугла је већа страница.



Основне неједнакости троугла

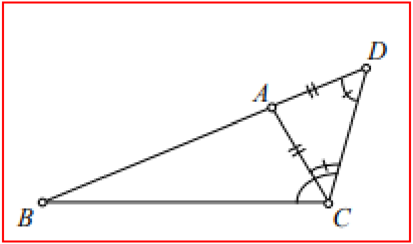
Теорема 2.

(Неједнакост троугла) Збир две ивице троугла већи је од треће.

Основне неједнакости троугла

Теорема 2.

(Неједнакост троугла) Збир две ивице троугла већи је од треће.



Птоломејева неједнакост

Дефиниција

Нека су $A, Б, Ц, Д$ било које четири тачке у равни. Тада важи неједнакост

$$AБ \cdot ЦД + AД \cdot БЦ \geq AЦ \cdot БД.$$

Птоломејева неједнакост

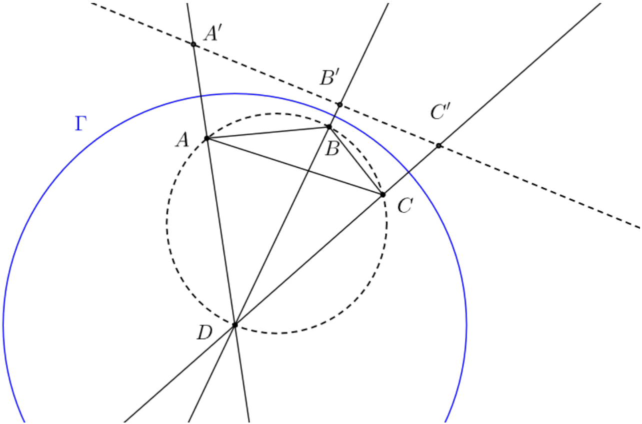
Дефиниција

Нека су $A, Б, Ц, Д$ било које четири тачке у равни. Тада важи неједнакост
$$AБ \cdot ЦД + AД \cdot БЦ \geq AЦ \cdot БД.$$

Једнакост

Једнакост важи акко је четвороугао $AБЦД$ тетивни са дијагоналама $AЦ$ и $БД$ или су тачке $A, Б, Ц, Д$ колинеарне при чему једна од тачака $Б$ и $Д$ лежи ижмеђу тачака A и $Ц$, а друга не.

Доказ инверзијом



Примена Птоломејеве неједнакости

Задатак 1.

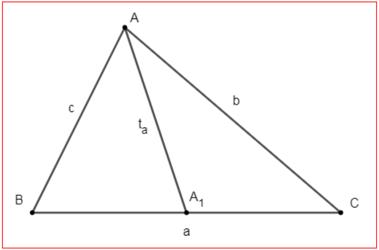
Доказати да важи: $т_а < \frac{б + ц}{2}$

Примена Птоломејеве неједнакости

Задатак 1.

Доказати да важи: $т_а < \dfrac{б + ц}{2}$

Примењујући Птоломејеву неједнакост на четвороугао $АБА_1Ц$ добијамо $АБ \cdot А_1Ц + БА_1 \cdot ЦА > БЦ \cdot АА_1$, односно $ц \cdot \frac{а}{2} + \frac{а}{2} \cdot б > а \cdot т_а$, што је еквивалентно траженој неједнакости.



Примена Птоломејеве неједнакости

Задатак 2.

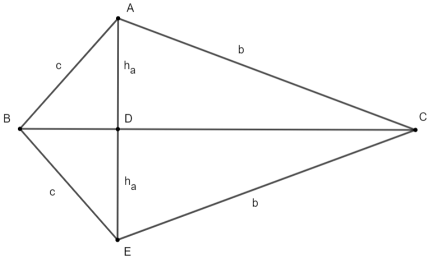
Доказати да важи: $2П \leq бц$

Примена Птоломејеве неједнакости

Задатак 2.

Доказати да важи: $2П \leq бц$

Применом Птоломејеве неједнакости на четвороугао *АБДЦ* добија се $бц + бц \leq 2ах_а$, из чега следи тражена неједнакост.



Примена Птоломејеве неједнакости

Задатак 3.

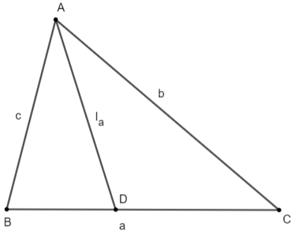
Доказати да важи: $л_а < \dfrac{2бц}{б + ц}$ (где је $л_а$ одсечак бисектрисе)

Примена Птоломејеве неједнакости

Задатак 3.

Доказати да важи: $л_a < \dfrac{2бц}{б+ц}$ (где је $л_a$ одсечак бисектрисе)

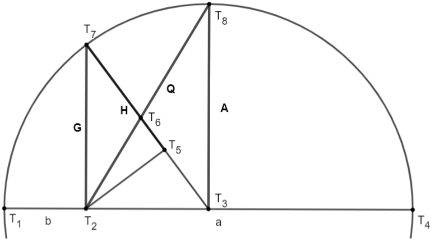
Применом Птоломејеве теореме на четвороугао $АБДЦ$ добијамо $АБ \cdot ДЦ + БД \cdot ЦА > БЦ \cdot АД$, што даљим поступком сводимо на тражену неједнакост.



Неједнакости између средина

Неједнакости између средина за a и $б$:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{б}} \leq \sqrt{aб} \leq \frac{a+б}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+б^2}{2}}.$$



Ојлерова неједнакост

Теорема

Ако су P и p, редом, полупречници описане и уписане кружнице троугла, тада важи $P \geq 2p$.

Тврђење се може доказати и применом Ојлеровог идентитета, $OИ^2 = P^2 - 2Pp$, где су O и $И$ центри описане и уписане кружнице датог троугла

Хвала на пажњи!