Реализация решения уравнения Хопфа на основе двух дивергентных форм

Будем рассматривать задачу Коши для уравнения Хопфа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

С начальными данными

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad (2)$$

Пусть для определенности $\varphi(x) \geq \varepsilon > 0$

Кроме характеристической формы (1) с данными Коши будем рассматривать формулировку задачи с дивергентной формой записи (1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2}{2} = 0 \qquad (3)$$

Если и правую и левую части (1) умножить на u, то можно получить другую дивергентную форму (1)

$$\frac{\partial u^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{2u^3}{3} = 0 \qquad (4)$$

Рассмотрим теперь множество разностных схем для численного решения уравнения Хопфа.

1. Простейшая консервативная явная схема получается при замене производных на шаблоне «явный левый уголок» разностями первого порядка. В этом случае получаем консервативную схему Куранта-Изаксона-Риса (схема против потока)

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + \frac{\left(y_m^n\right)^2 - \left(y_{m-1}^n\right)^2}{2h} = 0, \qquad (5)$$

$$y_m^0 = \varphi(x_m).$$

Схема имеет первый порядок аппроксимации по обоим переменным.

2. Главный член погрешности аппроксимации схемы (5) на точном решении (1) будет $\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{h}{4}\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}$. Для увеличения порядка аппроксимации надо из левой части уравнения (5) вычесть разностную аппроксимацию главного члена погрешности. Прежде, чем выписать схему, используем для оценки $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ дивергентные формы (3) и (4). Тогда

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2}{2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u^2}{\partial t}$ в силу (3) и далее $-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u^2}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{2}{3}\frac{\partial u^3}{\partial x} = \frac{1}{3}\frac{\partial^2 u^3}{\partial x^2}$ в силу (4).

Тогда разностная схема второго порядка аппроксимации запишется в виде

$$\frac{y_m^{n+1}-y_m^n}{\tau}+\frac{\left(y_m^n\right)^2-\left(y_{m-1}^n\right)^2}{2h}=\frac{\tau}{6}\frac{\left(y_{m+1}^n\right)^3-2\left(y_m^n\right)^3+\left(y_{m-1}^n\right)^3}{h^2}-\frac{h}{4}\frac{\left(y_{m+1}^n\right)^2-2\left(y_m^n\right)^2+\left(y_{m-1}^n\right)^2}{h^2}, \quad (6a)$$

$$y_m^0=\varphi(x_m).$$

Или

$$\frac{y_m^{n+1}-y_m^n}{\tau}+\frac{\left(y_{m+1}^n\right)^2-\left(y_{m-1}^n\right)^2}{4h}=\frac{\tau}{6}\frac{\left(y_{m+1}^n\right)^3-2\left(y_m^n\right)^3+\left(y_{m-1}^n\right)^3}{h^2}, \quad (6)$$

Это – консервативный аналог симметричной схемы Лакса-Вендроффа

Наряду с уравнением (3) рассмотрим вторую дивергентную форму (4). Введем обозначение $u^2=v$, тогда имеем следствие (3)

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

А (4) перепишем в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}uv=0$$

Или $\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{2}{3}v\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{2}{3}u\frac{\partial v}{\partial x}=0$.

В качестве данных Коши рассмотрим $u(x,0)=\varphi(x)$, $v(x,0)=\varphi^2(x)$

Тогда можно строить сеточно-характеристические разностные схемы для решения системы уравнений.

Запишем систему в матричной форме

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial t}\\ \frac{\partial v}{\partial t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1/2\\ 2v/3 & 2u/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial x}\end{pmatrix}=0 \quad (7)$$

Для построения схем в инвариантах найдем собственные числа матрицы системы (7) и набор левых собственных векторов

$$\det\begin{pmatrix}-\lambda & 1/2\\ 2v/3 & 2u/3-\lambda\end{pmatrix}=0,$$

$$\lambda^2-\frac{2}{3}u\lambda-\frac{v}{3}=0$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{3}\left(u\pm\sqrt{u^2+3v}\right)$$

Как и ожидалось, оба собственных числа действительные, система имеет гиперболический тип.

Интересный и несколько неожиданный факт – для уравнения Хопфа при использовании двух дивергентных форм появилась характеристика с «противоположенным» наклоном (одно из собственных значений при любом знаке решения положительное, а одно – отрицательное).

Базис из левых собственных векторов

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}\left(u + \sqrt{u^2 + 3v}\right)$$

$$\begin{pmatrix}\omega_1 & \omega_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\left(u + \sqrt{u^2 + 3v}\right) & 1/2 \\ 2v/3 & \frac{1}{3}\left(u - \sqrt{u^2 + 3v}\right)\end{pmatrix} = (0, 0)$$

$$\begin{pmatrix}\omega_1 & \omega_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2 & \frac{1}{3}\left(u + \sqrt{u^2 + 3v}\right)\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{3}\left(u - \sqrt{u^2 + 3v}\right)$$

$$\begin{pmatrix}\omega_1 & \omega_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\left(u - \sqrt{u^2 + 3v}\right) & 1/2 \\ 2v/3 & \frac{1}{3}\left(u + \sqrt{u^2 + 3v}\right)\end{pmatrix} = (0, 0)$$

$$\begin{pmatrix}\omega_1 & \omega_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2 & \frac{1}{3}\left(u - \sqrt{u^2 + 3v}\right)\end{pmatrix}$$

Тогда матрица системы представима в виде $\mathbf{A} = \mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Omega}$, где

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(u + \sqrt{u^2 + 3v}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\left(u - \sqrt{u^2 + 3v}\right)\end{pmatrix} \quad \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 1/2 & \frac{1}{3}\left(u + \sqrt{u^2 + 3v}\right) \\ 1/2 & \frac{1}{3}\left(u - \sqrt{u^2 + 3v}\right)\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega}^{-1} = -\frac{3}{\sqrt{u^2 + 3v}}\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(u - \sqrt{u^2 + 3v}\right) & -\frac{1}{3}\left(u + \sqrt{u^2 + 3v}\right) \\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

Подставляем эти разложения в (7). Теперь, умножая правую и левую части (7) на матрицу Ω слева, получим запись системы (7) в инвариантах Римана

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial R^+}{\partial t} \\ \frac{\partial R^-}{\partial t}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(u + \sqrt{u^2 + 3v}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\left(u - \sqrt{u^2 + 3v}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial R^+}{\partial x} \\ \frac{\partial R^-}{\partial x}\end{pmatrix} = 0$$

Где $R^+ = \frac{u}{2} - \frac{1}{3}\left(u + \sqrt{u^2 + 3v}\right)v,\ R^- = \frac{u}{2} - \frac{1}{3}\left(u - \sqrt{u^2 + 3v}\right)v,$

С формулами восстановления «естественных» переменных

$$u = -\frac{1}{\sqrt{u^2+3v}}\left(\left(u-\sqrt{u^2+3v}\right)R^{+}-\left(u+\sqrt{u^2+3v}\right)R^{-}\right)$$

$$v = -\frac{3}{2\sqrt{u^2+3v}}\left(R^{+}-R^{-}\right)$$

Запишем две схемы в инвариантах – «первого» и «второго» порядков

Аналог схемы Куранта -Изаксона -Риса (первого порядка с аппроксимацией против потока)

$$\frac{R^{+n+1}_{m}-R^{+n}_{m}}{\tau}+\frac{1}{3}\left(u+\sqrt{u^2+3v}\right)^{n}_{m}\frac{R^{+n}_{m}-R^{+n}_{m-1}}{h}=0,$$

$$\frac{R^{-n+1}_{m}-R^{-n}_{m}}{\tau}+\frac{1}{3}\left(u-\sqrt{u^2+3v}\right)^{n}_{m}\frac{R^{-n}_{m+1}-R^{-n}_{m}}{h}=0,$$

И аналог схемы Лакса-Вендроффа для инвариантов

$$\frac{R^{+n+1}_{m}-R^{+n}_{m}}{\tau}+\frac{1}{3}\left(u+\sqrt{u^2+3v}\right)^{n}_{m}\frac{R^{+n}_{m+1}-R^{+n}_{m-1}}{2h}=\frac{\tau}{18}\left[\left(u+\sqrt{u^2+3v}\right)^{n}_{m}\right]^{2}\frac{R^{+n}_{m+1}-2R^{+n}_{m}-R^{+n}_{m-1}}{h^2},$$

$$\frac{R^{-n+1}_{m}-R^{-n}_{m}}{\tau}+\frac{1}{3}\left(u-\sqrt{u^2+3v}\right)^{n}_{m}\frac{R^{-n}_{m+1}-R^{-n}_{m-1}}{2h}=\frac{\tau}{18}\left[\left(u-\sqrt{u^2+3v}\right)^{n}_{m}\right]^{2}\frac{R^{-n}_{m+1}-2R^{-n}_{m}-R^{-n}_{m-1}}{h^2}.$$