Копипаста с работ Эйлера

Кожарин Алексей

15 июля 2018 г.

2

Пусть фиг. 2 представляет собой положения Солнца S, Земли T и Луны L, и пусть Θ есть центр тяжести Земли и Луны. Делаем следующие обозначения:

Масса	Солнца	...	S
»	Земли	...	T
»	Луны	...	L

Расстояние:

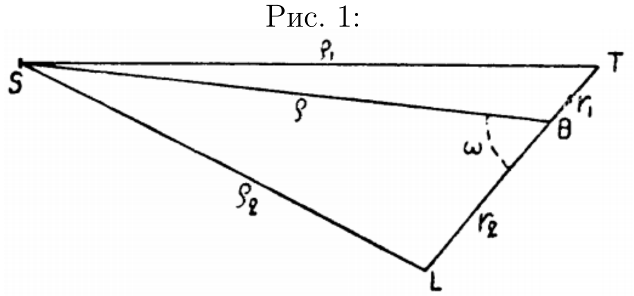
$$S\Theta = \rho\,;\ ST = \rho_1\,;\ SL = \rho_2\,;\ TL = r$$

тогда будет:

$$\begin{aligned} T\Theta = r_1 = \frac{L}{T+L} r \\ L\Theta = r_2 = \frac{T}{T+L} r \end{aligned} \tag{1}$$

Составим теперь выражения ускорений, которые эти тела сообщат друг другу.

Рис. 1:



Солнце S сообщает ускорения:

$$\begin{array}{llll} \text{Земле:} & f \cdot \dfrac{S}{\rho_1^2} & \text{по} \quad \text{направлению} & TS \\ \text{Луне:} & f \cdot \dfrac{S}{\rho_2^2} & » \qquad\qquad » & LS \end{array}$$

чего точка Θ имеет ускорения:

$$\frac{T}{T+L} \cdot f \cdot \frac{S}{\rho_1^2} \quad \text{по} \quad \text{направлению,} \quad \text{параллельному} \quad TS$$
$$\frac{T}{T+L} \cdot f \cdot \frac{S}{\rho_2^2} \quad \text{»} \qquad \text{»} \qquad \text{»} \qquad LS$$

Ускорения Солнца, происходящее от притяжения Земли и Луны, соответственно, суть:

$$f \cdot \frac{T}{\rho_1^2} \quad \text{по} \quad \text{направлению} \quad ST$$
$$f \cdot \frac{T}{\rho_2^2} \quad \text{»} \qquad \text{»} \qquad SL$$

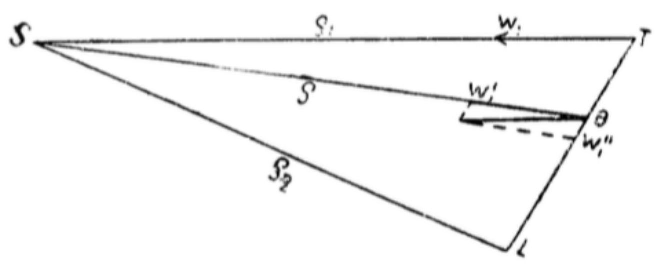
поэтому ускорения точки Θ относительно точки S будет:

$$w_1 = f \cdot \frac{(S+T+L)}{T+L} \cdot \frac{T}{\rho_1^2} \quad \text{по} \quad \text{направлению} \quad \text{параллельно} \quad TS$$
$$w_2 = f \cdot \frac{S+T+L}{T+L} \cdot \frac{L}{\rho_2^2} \quad \text{»} \qquad \text{»} \qquad \text{»} \qquad LS$$

Разлагая эти ускорения, соответственно, по направлениям ΘS и ΘL, получим, как легко видеть из подобия показанных на фиг. 2 и 2 треугольников:

$$w_1' = w_1 \cdot \frac{\rho}{\rho_1} \quad \text{по} \quad \text{направлению} \quad \Theta\ \mathrm{S}$$
$$w_1'' = w_1 \cdot \frac{r_1}{\rho_1} \quad \text{»} \qquad \text{»} \qquad \Theta L$$
$$w_2' = w_2 \cdot \frac{\rho}{\rho_2} \quad \text{»} \qquad \text{»} \qquad \Theta S$$
$$w_2'' = w_2 \cdot \frac{r_2}{\rho_2} \quad \text{»} \qquad \text{»} \qquad L\Theta$$

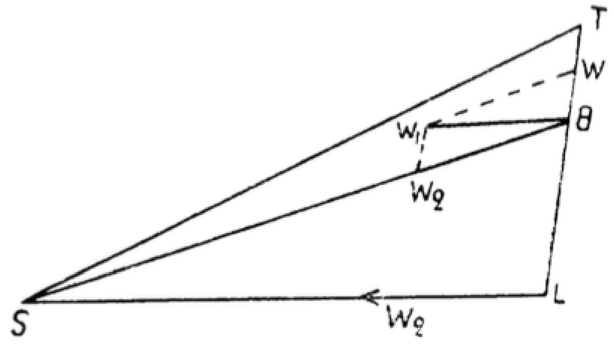
Рис. 2:



получим для ускорений точки Θ слагающие:

$$W_1 = w_1' + w_2' = f \cdot \frac{S+T+L}{T+L} \cdot \left[T \cdot \frac{\rho}{\rho_1^3} + L \cdot \frac{\rho}{\rho_2^3} \right] \quad \text{по} \quad \Theta S$$
$$W_2 = w_1'' - w_2'' = f \cdot \frac{S+T+L}{T+L} \cdot \left[T \cdot \frac{r_1}{\rho_1^3} - L \cdot \frac{r_2}{\rho_2^3} \right] \quad \text{по} \quad \Theta L$$

Рис. 3:



Заменив r_1 и r_2 их выражениями (1), имеем:

$$W_1 = f \cdot \frac{S+T+L}{T+L} \cdot \rho \cdot \left[\frac{T}{\rho_1^3} + \frac{L}{\rho_2^3} \right] \text{по направлению } \Theta S$$
$$W_2 = f \cdot \frac{S+T+L}{(T+L)^2} \cdot T \cdot L \cdot r \left[\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{1}{\rho_2^3} \right] \text{по направлению } \Theta L$$

Но

$$\rho_1^2 = \rho^2 + 2\rho \cdot \frac{L}{T+L} \cdot r \cos\omega + \left(\frac{L}{T+L} \cdot r \right)^2$$
$$\rho_2^2 = \rho^2 - 2\rho \cdot \frac{L}{T+L} \cdot r \cos\omega + \left(\frac{L}{T+L} \cdot r \right)^2$$

следовательно:

$$\frac{1}{\rho_1^3} = \frac{1}{\rho_3} \left[1 + 3\,\frac{L}{T+L} \cos\omega + \left(\frac{L}{T+L} r \right)^2 \left(-\frac{3}{2} + \frac{15}{2} \cos^2\omega \right) + \ldots \right]$$
$$\frac{1}{\rho_2^3} = \frac{1}{\rho_3} \left[1 + 3\,\frac{T}{T+L} \cos\omega + \left(\frac{T}{T+L} r \right)^2 \left(-\frac{3}{2} + \frac{15}{2} \cos^2\omega \right) + \ldots \right]$$

Подставляя эти выражения, имеем:

$$W_1 = f \cdot \frac{S+T+L}{\rho^2} \left[1 + \frac{T \cdot L}{(T+L)^2} \cdot \frac{r^2}{\rho^2} \left(-\frac{3}{2} + \frac{15}{2} \cos^2\omega \right) + \ldots \right]$$
$$W_2 = f \cdot \frac{S+T+L}{\rho^2} \left[-3 \cdot \frac{T \cdot L}{(T+L)^2} \cdot \frac{r^2}{\rho^2} \cos\omega + \ldots \right]$$

Но отношения

$$\frac{L}{T+L} \approx \frac{1}{80}; \quad \frac{r}{\rho} \approx \frac{1}{400}; \quad \left(\frac{r}{\rho}\right)^2 = \frac{1}{160000}$$

поэтому будет

$$\frac{T \cdot L}{(T+L)^2} \cdot \frac{r^2}{\rho^2} \approx \frac{1}{12800000}$$

и члены, содержащие этот множитель, могут быть отброшены, так что будет:

$$W_1 = f \cdot \frac{S+T+L}{\rho^2} \text{ по направлению } \Theta S$$
$$W_2 = 0 \text{ по направлению } \Theta L$$

Отсюда следует, что точка Θ движется вокруг Солнца по эллиптической орбите по законам Кеплера.

Рассмотрим теперь ускорение Луны по отношению к Земле, для чего к ускорениям, сообщаемым Луне Солнцем и Землею, надо присовокупить ускорение, равное и противоположное ускорению Земли, происходящему от действия Солнца и Луны. Поступив подобно предыдущему, получим:

$$f \cdot \frac{T+L}{r^2} + f \cdot S\left[\frac{r_2}{\rho_2^3} + \frac{r_1}{\rho_1^3}\right] \text{ по направлению } L\Theta$$
$$f \cdot S \cdot \rho\left[\frac{1}{\rho_2^3} - \frac{1}{\rho_1^3}\right] \text{ параллельно } \Theta S$$

положим:

$$T + L = \mu; \quad S = M$$