ЛЕКЦИЯ 17
Графы

1. Графы

Граф — множество вершин и инцедентных им ребер.

$$G = (V, E)$$

$$v \in V, \qquad e \in E$$

Говорят, что ребро e инцедентно вершине v, если она является его концом.

Допустимы графы:

$$G = (\varnothing, \varnothing)$$

$$G = (1, \varnothing)$$

Недопустим граф:

$$G = (\varnothing, a)$$

Граф — "упрощенная модель".

У ребра 2 конца. Это не обязательно отрезок.

Ребро может быть петлей.

2 разных ребра могут быть инцедентно двум вершинам — кратные ребра.

У классического графа 2 конца. Но может быть ориентированный граф. Т.е. либо у ребра 2 конца, либо у него есть начало и конец. Тогда ребро называется дуга. Короткое название **орграф**.

2. Задача Эйлера о семи кёнигсбергских мостах

Как пройти по всем городским мостам (через реку Преголя), не проходя ни по одному из них дважды?

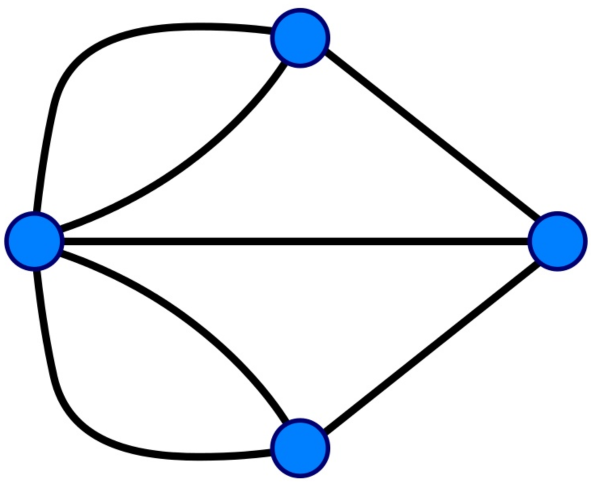

Рис. 1. Граф к задаче о мостах

Введем дополнительные понятия:

Степень вершины — количество инцедентных ей ребер.

Граф G' = (V', E') является подграфом G, если V' ⊂ V, E' ⊂ E.

Путь — последовательность ребер (в которой конец каждого ребра есть начало следующего).

Путь тоже является графом, а точнее это орграф, подграф исходного.

Любой неориентированный граф можно представить как ориентированный.

Цикл — путь, в котором начало пути (начало первого ребра) совпадает с концом (конец последнего ребра).

Рассмотрим граф A—B.

Возможны пути

$$[AB, BA]$$

Простой путь — путь, у которого не повторяются ребра (вершины повторятся могут).

Простой цикл — цикл, у которого не повторяются ребра (вершины повторятся могут).

Вернемся к задаче.

Пусть вершина верхняя вершина — старт. Пройдем по ребру и выкинем его (т.е. степень у вершины понизится). Продолжим процесс аналогично. В итоге какой бы путь мы не строили, степени у всех промежуточных вершин понизятся на четное число, а у вершин финиша и начала понизятся на нечетное число. Т.о. это невозможно. Подробнее в вики.

Эйлеров цикл — простой цикл, включающий все ребра графа.

Эйлеров граф — граф, в котором существует Эйлеров цикл.

Полуйэлеров граф — граф, в котором есть Эйлеров путь, но нет Эйлерого цикла.

3. Связность графов

Граф является связным, если для $\forall A,B \in V$ существует путь от A к B.
$A \longrightarrow B \longrightarrow C$ — несвязный граф.

Компонента связности — связный подграф, в который включены все вершины исходного, связаные с принадлежащими подграфами. Связный граф имеет 1 компоненту связности. Крайний случай: вершины без ребер. Количество компонент связности от 1 до количества вершин.

Слабая связность графа — "забываем" про направленность графов и смотрим на связность.

Сильно связный граф — граф связан при условии направленности.

"Вес" ребра — некоторая числовая характеристика ребра (расстояние, время прохождения, стоимость, энергия реакции и т.д.). Это необязательно положительное число.

Взвешенный граф — граф, у которого все ребра имеют вес.

4. Хранение графа в памяти ПК

Введем понятие: смежные вершины — «соседи», т.е. это вершины, которые имеют общее ребро. Ациклический граф — орграф без цикла.

4.1. Формы хранения

Есть 3 основные формы хранения:
1. Список ребер (множество ребер)

AB 5
BC 3
CD 1
DE 2

2. Матрица смежности
Матрица смежности не умеет хранить кратные ребра (если только массив не трехмерный (но это бред)).

	A	B	C	D	E
A	x	1	0	0	0
B	1	x	1	0	0
C	0	1	x	1	0
D	0	0	1	x	1
E	0	0	0	1	x

Можно также составить матрицу взвешенности, если записать в эту матрицу вес каждого ребра.
3. Списки смежности

$$\begin{aligned} &A : B \\ &B : A, \quad C \\ &C : B, \quad D \\ &D : C, \quad E \\ &E : D \end{aligned}$$

4.2. Реализация на Python

1. Список ребер

Программа №4.1.

```
G = ('AB', 5),
    ('BC', 3),
    ('CD', 1),
    ('DE', 2)
```

Но кортежами не очень удобно.

Программа №4.2.

```
G = 'AB' : 5
    'BC' : 3
    'CD' : 1
    'DE': 2
```

Задачи:

(a) Проверка смежности.

(b) Перебор "соседей".

2. Таблица смежности

Программа №4.3.

```
G = [[0,1,0,0,0],
     [1,0,1,0,0],
     [0,1,0,1,0],
     [0,0,1,0,1],
     [0,0,0,1,0]]
```

Решение задач:

(a) Проверка смежностей

Программа №4.4.

```
G[i][k] == 1 - значит смежные
```

(b) Перебор соседей: нужно пробежать по строке.

3. Списки смежности

Словарь множеств смежностей:

Программа №4.5.

```
G = {'A':{'B':5}
     'B':{'A':5, 'C':3}
     'C': {'B':3, 'D':1}
     'D': {'C':1, 'E':2}
     'E': {'D':2}}
```

Проверка факта смежностей:

```
'B' in G['A'] #O(1)
```

Перебор соседей:

```
for v in G['A']:
```

$O(N_{e_{max}})$, N_e - средняя степень вершины.