Задача 19.8. Найти гамильтониан и составить канонические уравениния движения:

$$L = \frac{1}{4} \left( \frac{d}{dt} \, \mathbf{q}_{1} (t) + \frac{d}{dt} \, \mathbf{q}_{3} (t) \right)^{2} + \frac{1}{4} \left( \frac{d}{dt} \, \mathbf{q}_{2} (t) + \frac{d}{dt} \, \mathbf{q}_{4} (t) \right)^{2}$$

$$- 2 \, \mathbf{q}_{1}^{2} (t) + 2 \, \mathbf{q}_{1} (t) \, \mathbf{q}_{2} (t) - 2 \, \mathbf{q}_{2}^{2} (t) - \frac{1}{4} \, \mathbf{q}_{3}^{2} (t)$$

$$- \frac{1}{4} \, \mathbf{q}_{4}^{2} (t) + \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} \, \mathbf{q}_{1} (t) \right)^{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} \, \mathbf{q}_{2} (t) \right)^{2}$$

$$(1)$$

Решение

$$\begin{split} \frac{\partial L}{\partial \dot{q_1}} &= \frac{3}{2} \dot{q_1}(t) + \frac{1}{2} \dot{q_3}(t) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q_2}} &= \frac{3}{2} \dot{q_2}(t) + \frac{1}{2} \dot{q_4}(t) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q_3}} &= \frac{1}{2} \dot{q_1}(t) + \frac{1}{2} \dot{q_3}(t) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q_4}} &= \frac{1}{2} \dot{q_2}(t) + \frac{1}{2} \dot{q_4}(t) \end{split}$$

Решая систему, получим:

$$q_{1} = p_{1}(t) - p_{3}(t)$$

$$q_{2} = p_{2}(t) - p_{4}(t)$$

$$q_{3} = -p_{1}(t) + 3p_{3}(t)$$

$$q_{4} = -p_{2}(t) + 3p_{4}(t)$$
(2)

Теперь можно выписать гамильтониан

$$H = (-p_{1}(t) + 3p_{3}(t)) p_{3}(t) + (p_{1}(t) - p_{3}(t)) p_{1}(t) + (-p_{2}(t) + 3p_{4}(t)) p_{4}(t)$$

$$+ (p_{2}(t) - p_{4}(t)) p_{2}(t) - \frac{1}{2} (p_{1}(t) - p_{3}(t))^{2} + \frac{1}{2} (p_{2}(t) - p_{4}(t))^{2} + p_{3}^{2}(t)$$

$$+ p_{4}^{2}(t) - 2q_{1}^{2}(t) + 2q_{1}(t) q_{2}(t) - 2q_{2}^{2}(t) - \frac{1}{4}q_{3}^{2}(t) - \frac{1}{4}q_{4}^{2}(t)$$

$$= p_{1}^{2}(t) - 2p_{1}(t) p_{3}(t) + p_{2}^{2}(t) - 2p_{2}(t) p_{4}(t) + 3p_{3}^{2}(t) + 3p_{4}^{2}(t)$$

$$- \frac{1}{2} (p_{1}(t) - p_{3}(t))^{2} + \frac{1}{2} (p_{2}(t) - p_{4}(t))^{2} + p_{3}^{2}(t) + p_{4}^{2}(t)$$

$$- 2q_{1}^{2}(t) + 2q_{1}(t) q_{2}(t) - 2q_{2}^{2}(t) - \frac{1}{4}q_{3}^{2}(t) - \frac{1}{4}q_{4}^{2}(t)$$

$$= \frac{1}{2} p_{1}^{2}(t) - p_{1}(t) p_{3}(t) + \frac{1}{2} p_{2}^{2}(t) - p_{2}(t) p_{4}(t) + \frac{3}{2} p_{3}^{2}(t)$$

$$+ \frac{3}{2} p_{4}^{2}(t) + 2q_{1}^{2}(t) - 2q_{1}(t) q_{2}(t) + 2q_{2}^{2}(t) + \frac{1}{4}q_{3}^{2}(t) + \frac{1}{4}q_{4}^{2}(t)$$

$$(3)$$

Это совпадает с ответами. Я реально заебался, когда это писал.

**Задача 19.26.** Две материальные точки массами  $m_1$  и  $m_2$  связаны между собой упругим стержнем жесткости c и помещены на гладкую горизонтальную плоскость; стержень неработает на изгиб и на кручение и в нерастянутом состоянии имеет длину  $l_0$ ; массойстержня можно пренебречь. Составить канонические уравнения движения системы.

**Решение** Запишем выражение для кинетической и потенциальной энергии:

$$T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \left( \dot{\varphi}^2(t) r^2(t) + \dot{r}^2(t) \right) + \left( \frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2} \right) \left( \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) \right)$$
$$\Pi = \frac{c}{2} \left( -l_0 + r(t) \right)^2$$

Остюда найдем лагранжиан, а потом гамильтониан:

$$L = T - \Pi$$

$$= -\frac{c}{2} (-l_0 + r(t))^2 + \frac{m_1 m_2}{2 (m_1 + m_2)} (\dot{\varphi}^2(t) r^2(t) + \dot{r}^2(t))$$

$$+ \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\right) (\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))$$
(4)

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2\left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\right)\dot{x}(t)$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 2\left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\right)\dot{y}(t)$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{m_1 m_2 \dot{r}(t)}{m_1 + m_2}$$

$$p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{m_1 m_2 r^2(t)}{m_1 + m_2} \dot{\varphi}(t)$$

Решая систему, находим:

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m_1 + m_2}$$

$$\dot{y} = \frac{p_y}{m_1 + m_2}$$

$$\dot{r} = \frac{p_r \left( m_1 + m_2 \right)}{m_1 m_2}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_{\varphi} \left( m_1 + m_2 \right)}{m_1 m_2 r^2(t)}$$

Теперь выпишем гамильтониан:

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_{i}\dot{q}_{i} - L \Big|_{\dot{q}_{i}=f_{i}(p,q)}$$

$$= \frac{c}{2} \left(-l_{0} + r(t)\right)^{2} - \frac{m_{1}m_{2}}{2\left(m_{1} + m_{2}\right)} \left(\dot{\varphi}^{2}(t)r^{2}(t) + \dot{r}^{2}(t)\right)$$

$$+ p_{\varphi}\dot{\varphi}(t) + p_{r}\dot{r}(t) + \frac{2p_{x}\dot{x}(t)}{m_{1} + m_{2}} \left(\frac{m_{1}}{2} + \frac{m_{2}}{2}\right)$$

$$+ \frac{2p_{y}\dot{y}(t)}{m_{1} + m_{2}} \left(\frac{m_{1}}{2} + \frac{m_{2}}{2}\right) - \left(\frac{m_{1}}{2} + \frac{m_{2}}{2}\right) \left(\dot{x}^{2}(t) + \dot{y}^{2}(t)\right) \Big|_{\dot{q}_{i}=f_{i}(p,q)}$$

$$= \frac{c}{2} \left(-l_{0} + r(t)\right)^{2} - \frac{m_{1}m_{2}}{2\left(m_{1} + m_{2}\right)} \left(\frac{p_{\varphi}^{2}\left(m_{1} + m_{2}\right)^{2}}{m_{1}^{2}m_{2}^{2}r^{2}(t)} + \frac{p_{r}^{2}\left(m_{1} + m_{2}\right)^{2}}{m_{1}^{2}m_{2}^{2}}\right)$$

$$+ \frac{2p_{x}^{2}\left(\frac{m_{1}}{2} + \frac{m_{2}}{2}\right)}{\left(m_{1} + m_{2}\right)^{2}} + \frac{2p_{y}^{2}\left(\frac{m_{1}}{2} + \frac{m_{2}}{2}\right)}{\left(m_{1} + m_{2}\right)^{2}}$$

$$- \left(\frac{m_{1}}{2} + \frac{m_{2}}{2}\right) \left(\frac{p_{x}^{2}}{\left(m_{1} + m_{2}\right)^{2}} + \frac{p_{y}^{2}}{\left(m_{1} + m_{2}\right)^{2}}\right)$$

$$+ \frac{p_{\varphi}^{2}\left(m_{1} + m_{2}\right)}{m_{1}m_{2}r^{2}(t)} + \frac{p_{r}^{2}\left(m_{1} + m_{2}\right)}{m_{1}m_{2}}$$

$$(5)$$

Отсюда легко найти канонические уравнения движения:

$$\begin{split} \dot{p_x} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \dot{p_y} &= -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \\ \dot{p_r} &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{c}{2} \left( -2l_0 + 2r(t) \right) - \frac{p_{\varphi}^2 \left( m_1 + m_2 \right)}{m_1 m_2 r^3(t)} \\ \dot{p_{\varphi}} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \end{split}$$

**Задача 20.17.** Проверить, являются ли функции  $\varphi_1=p_1^2+q_2^2$  и  $\varphi_2=p_2^2+q_1^2$  первыми интегралами.

Решение Для проверки воспользуемся скобками Пуассона:

 $\varphi_1$ :

$$(\varphi_1, H) = \begin{bmatrix} 0 & 2q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ p_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2p_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ q_1 \end{bmatrix} = 2p_1q_2 - 2p_1q_2 = 0$$

 $\Rightarrow \varphi_1$  <u>является</u> первым интегралом

 $\varphi_2$ :

$$(\varphi_2, H) = \begin{bmatrix} 2q_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ p_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ q_1 \end{bmatrix} = 2p_2q_1 - 2p_2q_1 = 0$$

 $\Rightarrow \varphi_2$  <u>является</u> первым интегралом Найдем  $\varphi_3$ :

$$\varphi_3 = (\varphi_1, \varphi_2) = \begin{bmatrix} 0 & 2q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2p_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2p_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2q_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 4p_2q_2 - 4p_1q_1 = -4p_1q_1 + 4p_2q_2 = \varphi_3$$

Вообще, мы могли бы сразу сказать, что  $\varphi_3$  является первым интегралом по т. Пуассона. Но мы это и проверим!  $\varphi_3$ :

$$(\varphi_3, H) = \begin{bmatrix} -4p_1 & 4p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ p_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4q_1 & 4q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ q_1 \end{bmatrix} = 0 - 0 = 0$$

 $\Rightarrow \varphi_3$  <u>является</u> первым интегралом

Проверим независимость  $\varphi_1, \ \varphi_2, \ \varphi_3$ :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial p_1} \varphi_1(p_1, p_2, q_1, q_2) & \frac{\partial}{\partial p_2} \varphi_1(p_1, p_2, q_1, q_2) & \frac{\partial}{\partial q_1} \varphi_1(p_1, p_2, q_1, q_2) & \frac{\partial}{\partial q_2} \varphi_1(p_1, p_2, q_1, q_2) \\ \frac{\partial}{\partial p_1} \varphi_2(p_1, p_2, q_1, q_2) & \frac{\partial}{\partial p_2} \varphi_2(p_1, p_2, q_1, q_2) & \frac{\partial}{\partial q_1} \varphi_2(p_1, p_2, q_1, q_2) & \frac{\partial}{\partial q_2} \varphi_2(p_1, p_2, q_1, q_2) \\ \frac{\partial}{\partial p_1} \varphi_3(p_1, p_2, q_1, q_2) & \frac{\partial}{\partial p_2} \varphi_3(p_1, p_2, q_1, q_2) & \frac{\partial}{\partial q_1} \varphi_3(p_1, p_2, q_1, q_2) & \frac{\partial}{\partial q_2} \varphi_3(p_1, p_2, q_1, q_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2p_1 & 0 & 0 & 2q_2 \\ 0 & 2p_2 & 2q_1 & 0 \\ -4q_1 & 4q_2 & -4p_1 & 4p_2 \end{bmatrix}$$

Чтобы первые интегралы были независимы, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы равнялся максимально возможному, т.е. 3. Для проверки этого используются миноры (погуглите, как)Подсчитаем, например, минор, состоящий из первых трех столбцов:

$$\Delta_1 = -16p_1^2p_2 - 16p_1q_1q_2 = -16p_1(p_1p_2 + q_1q_2) \neq 0$$

Отсюда заключаем, что первые интегралы независимы.