Задача 20.17. Проверить, являются ли функции $\varphi_1 = p_1^2 + q_2^2$ и $\varphi_2 = p_2^2 + q_1^2$ первыми интегралами.

Решение Для проверки воспользуемся скобками Пуассона:
$\underline{\varphi_1}$:

$$(\varphi_1, H) = \begin{bmatrix} 0 & 2q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ p_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2p_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ q_1 \end{bmatrix} = 2p_1q_2 - 2p_1q_2 = 0$$

$\Rightarrow \varphi_1$ <u>является</u> первым интегралом
$\underline{\varphi_2}$:

$$(\varphi_2, H) = \begin{bmatrix} 2q_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ p_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ q_1 \end{bmatrix} = 2p_2q_1 - 2p_2q_1 = 0$$

$\Rightarrow \varphi_2$ <u>является</u> первым интегралом
Найдем φ_3:

$$\varphi_3 = (\varphi_1, \varphi_2) = \begin{bmatrix} 0 & 2q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2p_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2p_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2q_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 4p_2q_2 - 4p_1q_1 = -4p_1q_1 + 4p_2q_2 = \varphi_3$$

Вообще, мы могли бы сразу сказать, что φ_3 является первым интегралом по т. Пуассона. Но мы это и проверим!
$\underline{\varphi_3}$:

$$(\varphi_3, H) = \begin{bmatrix} -4p_1 & 4p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ p_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4q_1 & 4q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ q_1 \end{bmatrix} = 0 - 0 = 0$$

$\Rightarrow \varphi_3$ <u>является</u> первым интегралом

Проверим независимость φ_1, φ_2, φ_3 :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial p_1}\varphi_1(p_1,p_2,q_1,q_2) & \frac{\partial}{\partial p_2}\varphi_1(p_1,p_2,q_1,q_2) & \frac{\partial}{\partial q_1}\varphi_1(p_1,p_2,q_1,q_2) & \frac{\partial}{\partial q_2}\varphi_1(p_1,p_2,q_1,q_2) \\ \frac{\partial}{\partial p_1}\varphi_2(p_1,p_2,q_1,q_2) & \frac{\partial}{\partial p_2}\varphi_2(p_1,p_2,q_1,q_2) & \frac{\partial}{\partial q_1}\varphi_2(p_1,p_2,q_1,q_2) & \frac{\partial}{\partial q_2}\varphi_2(p_1,p_2,q_1,q_2) \\ \frac{\partial}{\partial p_1}\varphi_3(p_1,p_2,q_1,q_2) & \frac{\partial}{\partial p_2}\varphi_3(p_1,p_2,q_1,q_2) & \frac{\partial}{\partial q_1}\varphi_3(p_1,p_2,q_1,q_2) & \frac{\partial}{\partial q_2}\varphi_3(p_1,p_2,q_1,q_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2p_1 & 0 & 0 & 2q_2 \\ 0 & 2p_2 & 2q_1 & 0 \\ -4q_1 & 4q_2 & -4p_1 & 4p_2 \end{bmatrix}$$

Подсчитаем, например, минор, состоящий из первых трех столбцов:

$$\Delta_1 = -16p_1^2p_2 - 16p_1q_1q_2 = -16p_1\left(p_1p_2 + q_1q_2\right) \neq 0$$

Отсюда заключаем, что первые интегралы <u>независимы</u>.