Задача 19.26. Две материальные точки массами m_1 и m_2 связаны между собой упругим стержнем жесткости c и помещены на гладкую горизонтальную плоскость; стержень неработает на изгиб и на кручение и в нерастянутом состоянии имеет длину l_0; массойстержня можно пренебречь. Составить канонические уравнения движения системы.

Решение Запишем выражение для кинетической и потенциальной энергии:

$$T = \frac{m_1 m_2}{2\left(m_1 + m_2\right)}\left(\dot{\varphi}^2(t) r^2(t) + \dot{r}^2(t)\right) + \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\right)\left(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)\right)$$

$$\Pi = \frac{c}{2}\left(-l_0 + r(t)\right)^2$$

Остюда найдем лагранжиан, а потом гамильтониан:

$$\begin{aligned} L &= T - \Pi \\ &= -\frac{c}{2}\left(-l_0 + r(t)\right)^2 + \frac{m_1 m_2}{2\left(m_1 + m_2\right)}\left(\dot{\varphi}^2(t) r^2(t) + \dot{r}^2(t)\right) \\ &\quad + \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\right)\left(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)\right) \end{aligned} \tag{1}$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2\left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\right)\dot{x}(t)$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 2\left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\right)\dot{y}(t)$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{m_1 m_2 \dot{r}(t)}{m_1 + m_2}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{m_1 m_2 r^2(t)}{m_1 + m_2}\dot{\varphi}(t)$$

Решая систему, находим:

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m_1 + m_2}$$

$$\dot{y} = \frac{p_y}{m_1 + m_2}$$

$$\dot{r} = \frac{p_r\left(m_1 + m_2\right)}{m_1 m_2}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_{\varphi}\left(m_1 + m_2\right)}{m_1 m_2 r^2(t)}$$

Теперь выпишем гамильтониан:

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L \Big|_{\dot{q}_i = f_i(p,q)} \\
&= \frac{c}{2}\left(-l_0 + r(t)\right)^2 - \frac{m_1 m_2}{2\left(m_1 + m_2\right)}\left(\dot{\varphi}^2(t) r^2(t) + \dot{r}^2(t)\right) \\
&\quad + p_{\varphi}\dot{\varphi}(t) + p_r \dot{r}(t) + \frac{2 p_x \dot{x}(t)}{m_1 + m_2}\left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\right) \\
&\quad + \frac{2 p_y \dot{y}(t)}{m_1 + m_2}\left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\right) - \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\right)\left(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)\right)\Big|_{\dot{q}_i = f_i(p,q)} \\
&= \frac{c}{2}\left(-l_0 + r(t)\right)^2 - \frac{m_1 m_2}{2\left(m_1 + m_2\right)}\left(\frac{p_{\varphi}^2\left(m_1 + m_2\right)^2}{m_1^2 m_2^2 r^2(t)} + \frac{p_r^2\left(m_1 + m_2\right)^2}{m_1^2 m_2^2}\right) \\
&\quad + \frac{2 p_x^2\left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\right)}{\left(m_1 + m_2\right)^2} + \frac{2 p_y^2\left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\right)}{\left(m_1 + m_2\right)^2} \\
&\quad - \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\right)\left(\frac{p_x^2}{\left(m_1 + m_2\right)^2} + \frac{p_y^2}{\left(m_1 + m_2\right)^2}\right) \\
&\quad + \frac{p_{\varphi}^2\left(m_1 + m_2\right)}{m_1 m_2 r^2(t)} + \frac{p_r^2\left(m_1 + m_2\right)}{m_1 m_2}
\end{aligned} \tag{2}$$

Отсюда легко найти канонические уравнения движения:

$$\dot{p_x} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

$$\dot{p_y} = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0$$

$$\dot{p_r} = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{c}{2}\left(-2 l_0 + 2 r(t)\right) - \frac{p_{\varphi}^2\left(m_1 + m_2\right)}{m_1 m_2 r^3(t)}$$

$$\dot{p_{\varphi}} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$$