Задача 19.8. Найти гамильтониан и составить канонические уравнения движения:

$$L = \frac{1}{4}\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{q}_1(t) + \frac{d}{dt}\,\mathrm{q}_3(t)\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{q}_2(t) + \frac{d}{dt}\,\mathrm{q}_4(t)\right)^2$$
$$-\,2\,\mathrm{q}_1{}^2(t) + 2\,\mathrm{q}_1(t)\,\mathrm{q}_2(t) - 2\,\mathrm{q}_2{}^2(t) - \frac{1}{4}\,\mathrm{q}_3{}^2(t) \tag{1}$$
$$-\,\frac{1}{4}\,\mathrm{q}_4{}^2(t) + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{q}_1(t)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{q}_2(t)\right)^2$$

Решение

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q_1}} = \frac{3}{2}\dot{q_1}(t) + \frac{1}{2}\dot{q_3}(t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q_2}} = \frac{3}{2}\dot{q_2}(t) + \frac{1}{2}\dot{q_4}(t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q_3}} = \frac{1}{2}\dot{q_1}(t) + \frac{1}{2}\dot{q_3}(t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q_4}} = \frac{1}{2}\dot{q_2}(t) + \frac{1}{2}\dot{q_4}(t)$$

Решая систему, получим:

$$q_1 = \mathrm{p}_1(t) - \mathrm{p}_3(t)$$

$$q_2 = \mathrm{p}_2(t) - \mathrm{p}_4(t)$$

$$q_3 = -\,\mathrm{p}_1(t) + 3\,\mathrm{p}_3(t)$$

$$q_4 = -\,\mathrm{p}_2(t) + 3\,\mathrm{p}_4(t) \tag{2}$$

Теперь можно выписать гамильтониан

$$\begin{aligned}
H &= \left(-\mathrm{p}_1(t)+3\,\mathrm{p}_3(t)\right)\mathrm{p}_3(t)+\left(\mathrm{p}_1(t)-\mathrm{p}_3(t)\right)\mathrm{p}_1(t)+\left(-\mathrm{p}_2(t)+3\,\mathrm{p}_4(t)\right)\mathrm{p}_4(t)\\
&\quad+\left(\mathrm{p}_2(t)-\mathrm{p}_4(t)\right)\mathrm{p}_2(t)-\frac{1}{2}\left(\mathrm{p}_1(t)-\mathrm{p}_3(t)\right)^2+\frac{1}{2}\left(\mathrm{p}_2(t)-\mathrm{p}_4(t)\right)^2+{\mathrm{p}_3}^2(t)\\
&\quad+{\mathrm{p}_4}^2(t)-2\,{\mathrm{q}_1}^2(t)+2\,\mathrm{q}_1(t)\,\mathrm{q}_2(t)-2\,{\mathrm{q}_2}^2(t)-\frac{1}{4}\,{\mathrm{q}_3}^2(t)-\frac{1}{4}\,{\mathrm{q}_4}^2(t)\\
&= {\mathrm{p}_1}^2(t)-2\,\mathrm{p}_1(t)\,\mathrm{p}_3(t)+{\mathrm{p}_2}^2(t)-2\,\mathrm{p}_2(t)\,\mathrm{p}_4(t)+3\,{\mathrm{p}_3}^2(t)+3\,{\mathrm{p}_4}^2(t)\\
&\quad-\frac{1}{2}\left(\mathrm{p}_1(t)-\mathrm{p}_3(t)\right)^2+\frac{1}{2}\left(\mathrm{p}_2(t)-\mathrm{p}_4(t)\right)^2+{\mathrm{p}_3}^2(t)+{\mathrm{p}_4}^2(t)\\
&\quad-2\,{\mathrm{q}_1}^2(t)+2\,\mathrm{q}_1(t)\,\mathrm{q}_2(t)-2\,{\mathrm{q}_2}^2(t)-\frac{1}{4}\,{\mathrm{q}_3}^2(t)-\frac{1}{4}\,{\mathrm{q}_4}^2(t)\\
&= \frac{1}{2}\,{\mathrm{p}_1}^2(t)-\mathrm{p}_1(t)\,\mathrm{p}_3(t)+\frac{1}{2}\,{\mathrm{p}_2}^2(t)-\mathrm{p}_2(t)\,\mathrm{p}_4(t)+\frac{3}{2}\,{\mathrm{p}_3}^2(t)\\
&\quad+\frac{3}{2}\,{\mathrm{p}_4}^2(t)+2\,{\mathrm{q}_1}^2(t)-2\,\mathrm{q}_1(t)\,\mathrm{q}_2(t)+2\,{\mathrm{q}_2}^2(t)+\frac{1}{4}\,{\mathrm{q}_3}^2(t)+\frac{1}{4}\,{\mathrm{q}_4}^2(t)
\end{aligned} \tag{3}$$

Это совпадает с ответами. Я реально заебался, когда это писал.