Задача 19.8. Найти гамильтониан и составить канонические уравнениния движения:

$$L = \frac{1}{4}\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{q}_1(t) + \frac{d}{dt}\,\mathrm{q}_3(t)\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{q}_2(t) + \frac{d}{dt}\,\mathrm{q}_4(t)\right)^2 - 2\,{\mathrm{q}_1}^2(t) + 2\,\mathrm{q}_1(t)\,\mathrm{q}_2(t) - 2\,{\mathrm{q}_2}^2(t) - \frac{1}{4}\,{\mathrm{q}_3}^2(t) - \frac{1}{4}\,{\mathrm{q}_4}^2(t) + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{q}_1(t)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{q}_2(t)\right)^2 \tag{1}$$

Решение

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q_1}} = \frac{3}{2}\dot{q_1}(t) + \frac{1}{2}\dot{q_3}(t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q_2}} = \frac{3}{2}\dot{q_2}(t) + \frac{1}{2}\dot{q_4}(t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q_3}} = \frac{1}{2}\dot{q_1}(t) + \frac{1}{2}\dot{q_3}(t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q_4}} = \frac{1}{2}\dot{q_2}(t) + \frac{1}{2}\dot{q_4}(t)$$

Решая систему, получим:

$$q_1 = \mathrm{p}_1(t) - \mathrm{p}_3(t)$$

$$q_2 = \mathrm{p}_2(t) - \mathrm{p}_4(t)$$

$$q_3 = -\,\mathrm{p}_1(t) + 3\,\mathrm{p}_3(t)$$

$$q_4 = -\,\mathrm{p}_2(t) + 3\,\mathrm{p}_4(t) \tag{2}$$

Теперь можно выписать гамильтониан

$$\begin{aligned}
H &= \left(-\mathrm{p}_1(t)+3\,\mathrm{p}_3(t)\right)\mathrm{p}_3(t)+\left(\mathrm{p}_1(t)-\mathrm{p}_3(t)\right)\mathrm{p}_1(t)+\left(-\mathrm{p}_2(t)+3\,\mathrm{p}_4(t)\right)\mathrm{p}_4(t)\\
&\quad+\left(\mathrm{p}_2(t)-\mathrm{p}_4(t)\right)\mathrm{p}_2(t)-\frac{1}{2}\left(\mathrm{p}_1(t)-\mathrm{p}_3(t)\right)^2+\frac{1}{2}\left(\mathrm{p}_2(t)-\mathrm{p}_4(t)\right)^2+{\mathrm{p}_3}^2(t)\\
&\quad+{\mathrm{p}_4}^2(t)-2\,{\mathrm{q}_1}^2(t)+2\,\mathrm{q}_1(t)\,\mathrm{q}_2(t)-2\,{\mathrm{q}_2}^2(t)-\frac{1}{4}\,{\mathrm{q}_3}^2(t)-\frac{1}{4}\,{\mathrm{q}_4}^2(t)\\
&= {\mathrm{p}_1}^2(t)-2\,\mathrm{p}_1(t)\,\mathrm{p}_3(t)+{\mathrm{p}_2}^2(t)-2\,\mathrm{p}_2(t)\,\mathrm{p}_4(t)+3\,{\mathrm{p}_3}^2(t)+3\,{\mathrm{p}_4}^2(t)\\
&\quad-\frac{1}{2}\left(\mathrm{p}_1(t)-\mathrm{p}_3(t)\right)^2+\frac{1}{2}\left(\mathrm{p}_2(t)-\mathrm{p}_4(t)\right)^2+{\mathrm{p}_3}^2(t)+{\mathrm{p}_4}^2(t)\\
&\quad-2\,{\mathrm{q}_1}^2(t)+2\,\mathrm{q}_1(t)\,\mathrm{q}_2(t)-2\,{\mathrm{q}_2}^2(t)-\frac{1}{4}\,{\mathrm{q}_3}^2(t)-\frac{1}{4}\,{\mathrm{q}_4}^2(t)\\
&= \frac{1}{2}\,{\mathrm{p}_1}^2(t)-\mathrm{p}_1(t)\,\mathrm{p}_3(t)+\frac{1}{2}\,{\mathrm{p}_2}^2(t)-\mathrm{p}_2(t)\,\mathrm{p}_4(t)+\frac{3}{2}\,{\mathrm{p}_3}^2(t)\\
&\quad+\frac{3}{2}\,{\mathrm{p}_4}^2(t)+2\,{\mathrm{q}_1}^2(t)-2\,\mathrm{q}_1(t)\,\mathrm{q}_2(t)+2\,{\mathrm{q}_2}^2(t)+\frac{1}{4}\,{\mathrm{q}_3}^2(t)+\frac{1}{4}\,{\mathrm{q}_4}^2(t)
\end{aligned} \tag{3}$$

Это совпадает с ответами. Я реально заебался, когда это писал.

Задача 19.26. Две материальные точки массами m_1 и m_2 связаны между собой упругим стержнем жесткости c и помещены на гладкую горизонтальную плоскость; стержень неработает на изгиб и на кручение и в нерастянутом состоянии имеет длину l_0; массойстержня можно пренебречь. Составить канонические уравнения движения системы.

Решение Запишем выражение для кинетической и потенциальной энергии:

$$T=\frac{m_1m_2}{2\left(m_1+m_2\right)}\left(\dot{\varphi}^2(t)r^2(t)+\dot{r}^2(t)\right)+\left(\frac{m_1}{2}+\frac{m_2}{2}\right)\left(\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)\right)$$

$$\Pi=\frac{c}{2}\left(-l_0+r(t)\right)^2$$

Остюда найдем лагранжиан, а потом гамильтониан:

$$\begin{aligned}
L &= T-\Pi\\
&= -\frac{c}{2}\left(-l_0+r(t)\right)^2+\frac{m_1m_2}{2\left(m_1+m_2\right)}\left(\dot{\varphi}^2(t)r^2(t)+\dot{r}^2(t)\right)\\
&\quad+\left(\frac{m_1}{2}+\frac{m_2}{2}\right)\left(\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)\right)
\end{aligned} \tag{4}$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2\left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\right)\dot{x}(t)$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 2\left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\right)\dot{y}(t)$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{m_1 m_2 \dot{r}(t)}{m_1 + m_2}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{m_1 m_2 r^2(t)}{m_1 + m_2}\dot{\varphi}(t)$$

Решая систему, находим:

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m_1 + m_2}$$

$$\dot{y} = \frac{p_y}{m_1 + m_2}$$

$$\dot{r} = \frac{p_r\left(m_1 + m_2\right)}{m_1 m_2}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi\left(m_1 + m_2\right)}{m_1 m_2 r^2(t)}$$

Теперь выпишем гамильтониан:

$$
\begin{aligned}
H &= \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L \Big|_{\dot{q}_i = f_i(p,q)} \\
&= \frac{c}{2}\left(-l_0 + r(t)\right)^2 - \frac{m_1 m_2}{2\left(m_1+m_2\right)}\left(\dot{\varphi}^2(t) r^2(t) + \dot{r}^2(t)\right) \\
&\quad + p_\varphi \dot{\varphi}(t) + p_r \dot{r}(t) + \frac{2 p_x \dot{x}(t)}{m_1+m_2}\left(\frac{m_1}{2}+\frac{m_2}{2}\right) \\
&\quad + \frac{2 p_y \dot{y}(t)}{m_1+m_2}\left(\frac{m_1}{2}+\frac{m_2}{2}\right) - \left(\frac{m_1}{2}+\frac{m_2}{2}\right)\left(\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)\right)\Big|_{\dot{q}_i = f_i(p,q)} \\
&= \frac{c}{2}\left(-l_0 + r(t)\right)^2 - \frac{m_1 m_2}{2\left(m_1+m_2\right)}\left(\frac{p_\varphi^2\left(m_1+m_2\right)^2}{m_1^2 m_2^2 r^2(t)} + \frac{p_r^2\left(m_1+m_2\right)^2}{m_1^2 m_2^2}\right) \\
&\quad + \frac{2 p_x^2\left(\frac{m_1}{2}+\frac{m_2}{2}\right)}{\left(m_1+m_2\right)^2} + \frac{2 p_y^2\left(\frac{m_1}{2}+\frac{m_2}{2}\right)}{\left(m_1+m_2\right)^2} \\
&\quad - \left(\frac{m_1}{2}+\frac{m_2}{2}\right)\left(\frac{p_x^2}{\left(m_1+m_2\right)^2} + \frac{p_y^2}{\left(m_1+m_2\right)^2}\right) \\
&\quad + \frac{p_\varphi^2\left(m_1+m_2\right)}{m_1 m_2 r^2(t)} + \frac{p_r^2\left(m_1+m_2\right)}{m_1 m_2}
\end{aligned} \tag{5}
$$

Отсюда легко найти канонические уравнения движения:

$$\dot{p_x} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

$$\dot{p_y} = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0$$

$$\dot{p_r} = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{c}{2}\left(-2l_0 + 2r(t)\right) - \frac{p_\varphi^2\left(m_1+m_2\right)}{m_1 m_2 r^3(t)}$$

$$\dot{p_\varphi} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$$

Задача 20.17. Проверить, являются ли функции $\varphi_1 = p_1^2 + q_2^2$ и $\varphi_2 = p_2^2 + q_1^2$ первыми интегралами.

Решение Для проверки воспользуемся скобками Пуассона:
$\underline{\varphi_1}$:

$$(\varphi_1, H) = \begin{bmatrix} 0 & 2q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ p_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2p_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ q_1 \end{bmatrix} = 2p_1q_2 - 2p_1q_2 = 0$$

$\Rightarrow \varphi_1$ <u>является</u> первым интегралом
$\underline{\varphi_2}$:

$$(\varphi_2, H) = \begin{bmatrix} 2q_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ p_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ q_1 \end{bmatrix} = 2p_2q_1 - 2p_2q_1 = 0$$

$\Rightarrow \varphi_2$ <u>является</u> первым интегралом
Найдем φ_3:

$$\varphi_3 = (\varphi_1, \varphi_2) = \begin{bmatrix} 0 & 2q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2p_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2p_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2q_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 4p_2q_2 - 4p_1q_1 = -4p_1q_1 + 4p_2q_2 = \varphi_3$$

Вообще, мы могли бы сразу сказать, что φ_3 является первым интегралом по т. Пуассона. Но мы это и проверим!
$\underline{\varphi_3}$:

$$(\varphi_3, H) = \begin{bmatrix} -4p_1 & 4p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ p_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4q_1 & 4q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ q_1 \end{bmatrix} = 0 - 0 = 0$$

$\Rightarrow \varphi_3$ <u>является</u> первым интегралом

Проверим независимость $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3$:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial p_1}\varphi_1(p_1,p_2,q_1,q_2) & \frac{\partial}{\partial p_2}\varphi_1(p_1,p_2,q_1,q_2) & \frac{\partial}{\partial q_1}\varphi_1(p_1,p_2,q_1,q_2) & \frac{\partial}{\partial q_2}\varphi_1(p_1,p_2,q_1,q_2) \\ \frac{\partial}{\partial p_1}\varphi_2(p_1,p_2,q_1,q_2) & \frac{\partial}{\partial p_2}\varphi_2(p_1,p_2,q_1,q_2) & \frac{\partial}{\partial q_1}\varphi_2(p_1,p_2,q_1,q_2) & \frac{\partial}{\partial q_2}\varphi_2(p_1,p_2,q_1,q_2) \\ \frac{\partial}{\partial p_1}\varphi_3(p_1,p_2,q_1,q_2) & \frac{\partial}{\partial p_2}\varphi_3(p_1,p_2,q_1,q_2) & \frac{\partial}{\partial q_1}\varphi_3(p_1,p_2,q_1,q_2) & \frac{\partial}{\partial q_2}\varphi_3(p_1,p_2,q_1,q_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2p_1 & 0 & 0 & 2q_2 \\ 0 & 2p_2 & 2q_1 & 0 \\ -4q_1 & 4q_2 & -4p_1 & 4p_2 \end{bmatrix}$$

Чтобы первые интегралы были независимы, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы равнялся максимально возможному, т.е. 3. Для проверки этого используются миноры (погуглите, как)Подсчитаем, например, минор, состоящий из первых трех столбцов:

$$\Delta_1 = -16p_1^2p_2 - 16p_1q_1q_2 = -16p_1\left(p_1p_2 + q_1q_2\right) \neq 0$$

Отсюда заключаем, что первые интегралы <u>независимы</u>.