

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики и информатики
Кафедра информационных систем управления

Отчет
По методам вычислений

Выполнил студент группы № 15
Кражевский Алексей Игоревич

Минск 2022

Код лабораторной работы написан на c++. В ходе выполнения заданий я реализовывал методы для работы с матрицами. Из встроенных функций использовал только функции для основной работы с числами.

Из-за большого размера матриц я не включал их в отчет.

Все методы можно посмотреть в исходном коде программы, поэтому я не вставлял эти скриншоты.

Задание 1.

Заполнить верхний треугольник матрицы A размером 256×256 рациональными случайными числами из полуинтервала $[-4, 4)$. Нижний треугольник матрицы A заполнить таким образом, чтобы выполнялось $A = A^T$. Диагональные элементы получить из формулы $a_{ii} = 1 + \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

Задание 2.

Заполнить вектор u длиной соответствующей размеру матрицы A рациональными случайными числами из полуинтервала $[-4, 4)$. Умножив матрицу A на вектор u получить вектор правой части b . Таким образом имеем СЛАУ $Ax = b$, точным решением которой является вектор u .

Задание 3.

Найти число обусловленности матрицы A , вычислив обратную матрицу методом Гаусса-Жордана, в качестве нормы матрицы выбрать кубическую норму

Condition number: 4.72835

Задание 4.

Решить СЛАУ $Ax = b$ методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу.

Решение данным методом совпало с вектором u .

Задание 5.

Получить LUP -разложение матрицы A и решить полученную систему.

Разложение матрицы A и последующее решение 2х систем также дало верный результат.

Задание 6.

Решить СЛАУ $Ax = b$ методом квадратного корня. Выписать $LDLT$ - разложение матрицы системы.

При решении СЛАУ методом квадратного корня погрешность была чуть больше, однако мы получили результат, близкий с точным решением.

Задание 7.

Получить максимально точное решение СЛАУ $Ax = b$ методом релаксации (с параметром $1 - 8/40$). В отчёт включить доказательство сходимости.

Метод релаксации дал близкий к точному ответ.

Задание 8.

Проделать сто раз пункты 1-7 и вывести отчёт в формате .txt. В отчет должно входить:

- Минимальное и максимальное число обусловленности, а также среднее арифметическое для всех матриц. Матрицу с максимальным числом обусловленности необходимо сохранить в отдельный файл (понадобится позже).

```
Average condition number: 4.69947
Max condition number: 4.8754
Min condition number: 4.549
```

- Среднее время нахождения обратной матрицы.

```
Average time for inverse matrix: 348208 microseconds
```

- Для каждого из использованных методов решения СЛАУ указать минимальную, максимальную и среднюю нормы разности решения с точным решением y . В качестве нормы вектора взять кубическую норму

```
Max norm of difference for Gauss method: 1.10273
Min norm of difference for Gauss method: 0.617847
Average norm of difference for Gauss method: 0.785168
Max norm of difference for LUP method: 1.10273
Min norm of difference for LUP method: 0.617751
Average norm of difference for LUP method: 0.785201
Max norm of difference for Sqrt method: 1.07219
Min norm of difference for Sqrt method: 0.519061
Average norm of difference for Sqrt method: 0.713179
Max norm of difference for Relaxation method: 1.10273
Min norm of difference for Relaxation method: 0.617751
Average norm of difference for Relaxation method: 0.785201
```

Среднее время решения СЛАУ методом Гаусса.

```
Average time for Gauss method: 139733 microseconds
```

- Среднее время построения LUP -разложения.

```
Average time for LUP method: 152001 microseconds
```

- Среднее время решения СЛАУ $LUx = \tilde{b}$.

```
Average time for LUP_solve method: 153633 microseconds
```

- Среднее время решения СЛАУ методом квадратного корня.

```
Average time for Sqrt_solve method: 29198.2 microseconds
```

- Среднее время решения СЛАУ методом релаксации.

```
Average time for Relaxation_solve method: 6826.12 microseconds
```

- Максимальное, среднее и минимальное количество итераций метода релаксации, необходимых для получения приближенного решения.

```
Max iterations for Relaxation_solve method: 13
Min iterations for Relaxation_solve method: 12
Average iterations for Relaxation_solve method: 12.71
```

Выводы:

Как мы можем видеть по результатам выполнения пункта 8, все методы решения СЛАУ имеют примерно одинаковое время выполнения, однако у меня дольше всего выполнялся метод квадратного корня (примерно в 2 раза). Самым быстрым методом оказался метод релаксации, который выполнялся в среднем за 12-13 итераций.

Задание 9.

Выполнить пункты 2-7 для матриц $A1$ и $A2$.

Приведу результаты для матрицы $A1$:

```
79 7 -1 -2
7 -79 -4 -4
-1 -4 72 -8
-2 -4 -8 74
```

```
Vector y:
3.16274 -3.35805 1.10582 -2.36877

Vector b:
229.982 292.477 108.839 -177.029
```

Число обусл.:

```
Condition number for A1: 1.55465
Gauss for matrix A1:
3.16274 -3.35805 1.10582 -2.36877
```

LUP:

```
Matrix L:
1 0 0 0
0.0886076 1 0 0
-0.0126582 0.0491256 1 0
-0.0253165 0.0480127 -0.108584 1

Matrix U:
79 7 -1 -2
0 -79.6203 -3.91139 -3.82278
0 0 72.1795 -7.83752
0 4.44089e-16 0 73.2819

Vector P:
0 1 2 3
```

```
Vector b (solution using LUP):
3.16274 -3.35805 1.10582 -2.36877
```

Эта матрица не подходит для решения методом квадратного корня
У нее нет LDLT разложения

```
LDLT decomposition:  
Error: matrix is not positive definite  
Matrix is not positive definite
```

Метод релаксации:

```
Solution using Relaxation method:  
3.16274 -3.35805 1.10582 -2.36877
```

Для матрицы A2 все аналогично. Однако, если бы мы сравнили время выполнения методов, то для матрицы A1 они бы выполнялись быстрее, т.к. она явно меньше по размеру и числа в ней также меньше, что немного сокращает время выполнения.

Задание 10.

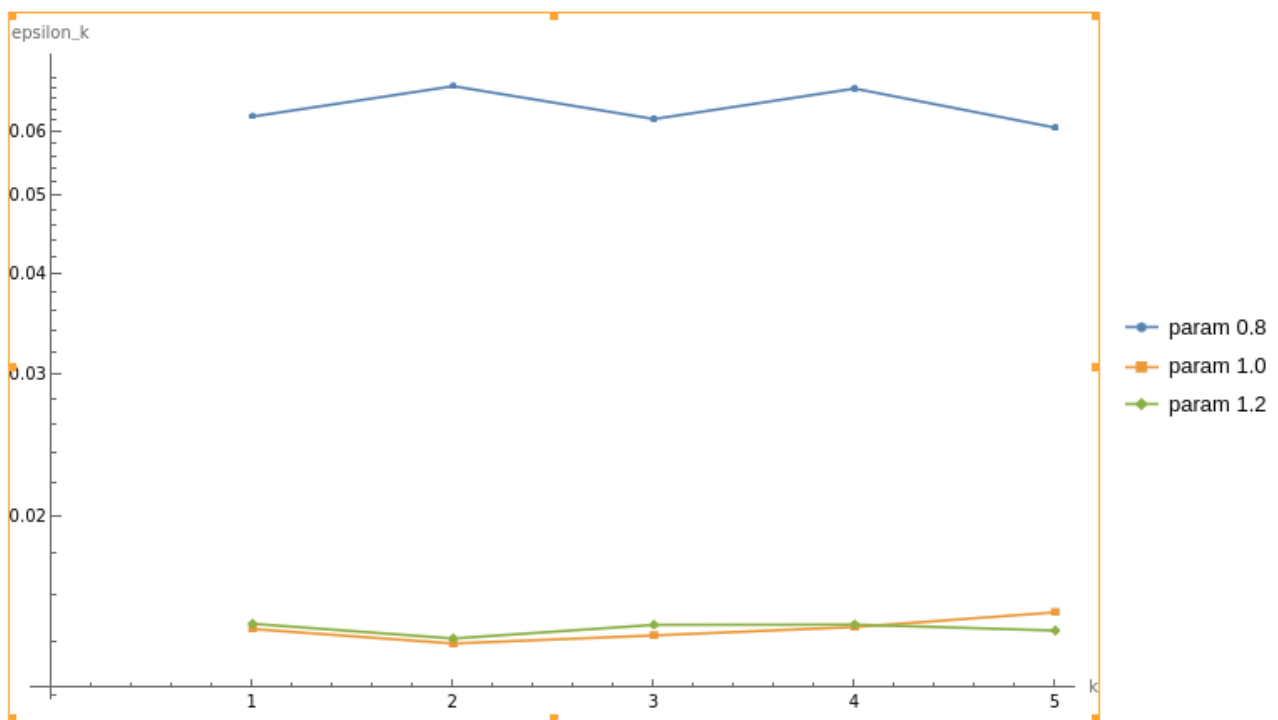
Для A2 и матрицы с максимальным числом обусловленности из пункта 8:

- исследовать (путём решения нескольких СЛАУ) влияние возмущения вектора b на погрешность полученного решения для матрицы с максимальным числом обусловленности (сравнить с теоретической оценкой). Сделайте соответствующие выводы.

```
Task 10:  
Investigate cases for matrix with max condition number:  
  
Norm for diff vector = 0.0498644  
Norm for diff vector = 0.0498449  
Norm for diff vector = 0.0506368  
Norm for diff vector = 0.050558  
Norm for diff vector = 0.0515045
```

Мы изменяли значения вектора b на 0.1 на каждой итерации и провели 5 экспериментов. При моей проверке значения норм результатов практически не изменялись, и погрешность оставалась небольшой. Как я считаю, погрешность для матрицы с максимальным числом обусловленности должна быть явно больше.

- построить диаграмму сходимости решения СЛАУ методом релаксации (с параметрами равными 0.8, 1.0, 1.2). Попробуйте оценить наиболее оптимальный параметр релаксации.



```
errors1 = {0.0627422, 0.0684231, 0.0623033, 0.0679537, 0.0607813}
errors2 = {0.0145448, 0.0139569, 0.0142817, 0.0146289, 0.0152554}
errors3 = {0.0147649, 0.0141568, 0.0147201, 0.0147315, 0.0144826}
ListLogPlot[{Legended[errors1, "param 0.8"], Legended[errors2, "param 1.0"], Legended[errors3, "param 1.2"]}, PlotMarkers -> Automatic, Joined -> True, AxesLabel -> {"k", "epsilon_k"}]
```

Итак, можно считать что оптимальным параметром (с наименьшей погрешностью) будут коэффициенты 1.0 и 1.2 (они примерно одинаковые).

```
Param = 0.8:
Norm for diff vector = 0.0605999
Norm for diff vector = 0.0560747
Norm for diff vector = 0.0645163
Norm for diff vector = 0.0564324
Norm for diff vector = 0.0633707

Param = 1.0
Norm for diff vector = 0.0150935
Norm for diff vector = 0.0156175
Norm for diff vector = 0.0165169
Norm for diff vector = 0.0152531
Norm for diff vector = 0.0152919

Param = 1.2
Norm for diff vector = 0.0150298
Norm for diff vector = 0.0153439
Norm for diff vector = 0.0151396
Norm for diff vector = 0.0147333
Norm for diff vector = 0.0140477
```