Oblig 1 MAT1120

Aleksander Fasting

Oppgave 1

```
1  import matplotlib.pyplot as plt
2  import numpy as np # importerer modulene
3
4  def sirkel(x,y,r): # definerer funksjonen som tegner sirkler
5      t = np.linspace(0, 2 * np.pi, 100)
6      plt.plot(x + r * np.cos(t), y + r * np.sin(t), linewidth = 2)
7
8  def finn_d(A): # definerer en funksjon som finner alle d_j
9      d_list = [] # lager en tom liste som vi skal legge d-verdiene i
10     for j in range(np.shape(A)[0]): # for-lokke for aa gaa gjennom
       alle radene
11         d_list.append(A[j,j]) # legger til verdiene langs
       diagonalen
12
13     return d_list
14
15 def finn_r(A): # definerer funksjonen som finner alle r_j
16     r_list = [] # lager en tom liste som vi skal legge r_veridene i
17     for j in range(np.shape(A)[0]): # for-lokke for aa gaa gjennom
       alle radene
18         r_j = 0 # startverdi for r_j lik 0
19         for i in range(np.shape(A)[1]): # for-lokke for aa gaa
       gjennom alle elementene i raden
20             if j != i: # sjekker om elementet er paa diagonalen
21                 r_j = r_j + abs(A[j,i]) # legger elementet til i
       r_j (med absoluttverdi)hvis det ikke er i diagonalen
22         r_list.append(r_j) # legger til en utregnet r_j i listen
23
24     return r_list
25
26 def egensirkler(A):
27     d_list = finn_d(A) # bruker funksjonen for aa finne d-verdier
       paa matrisen
28     r_list = finn_r(A) # bruker funksjonen for aa finne r-verdier
       paa matrisen
29
30     for i in range(np.shape(A)[1]): # for-lokke for aa gaa gjennom
       alle radene
31         sirkel(d_list[i], 0, r_list[i]) # tegner egensirklene
32
33     plt.show() # viser plottet
```

Listing 1: kode for Oppgave 1

Funksjonen som tegner egensirklene er `egensirkler(A)` i linje 26. Den bruker `finn_d(A)` for å finne alle d_j, `finn_r(A)` for å finne alle r_j, og bruker `sirkel(x,y,r)` som gitt i oppgaven til å tegne egensirklene.

Oppgave 2

I koden under er `d_finn(A)`, `r_finn(A)` og `sirkel(x,y,r)` det samme.

```python
def egensirkler(A):
    d_list = finn_d(A) # bruker funksjonen for aa finne d-verdier paa matrisen
    r_list = finn_r(A) # bruker funksjonen for aa finne r-verdier paa matrisen

    for i in range(np.shape(A)[1]): # for-lokke for aa gaa gjennom alle radene
        sirkel(d_list[i], 0, r_list[i]) # tegner egensirklene

    egenverdier = np.linalg.eig(A)[0] # finner egenverdiene
    '''
    np.linalg.eig() gir en tuple hvor det forste elementet er egenverdiene, saa vi henter paa index 0
    '''
    for i in range(len(egenverdier)): # for-lokke for aa gaa gjennom alle egenverdiene
        re = np.real(egenverdier[i]) # henter realdelen av egenverdien
        im = np.imag(egenverdier[i]) # henter imagineardelen av egenverdiene
        plt.plot(re,im,'.',markersize = 30) # plotter egenverdiene med realverdiene langs x-aksen og imaginaerdelene langs y-aksen


    plt.show() # viser plottet
```

Listing 2: kode for Oppgave 2

Oppgave 3

(a)

Vi bruker funksjonen `egensirkler(A)` på matrisen A (1)

```python
A = np.matrix([
    [-2,0,1/2,1],
    [-1/4,1,1/4,0],
    [0,0,3,-1],
    [1/8,1/8,1/4,2]]) # matrisen fra eskempel 1

egensirkler(A) # funksjonen paa matrisen A
```

Listing 3: Oppgave 3a

Under ser vi plottet som `egensirkler(A)` skaper.

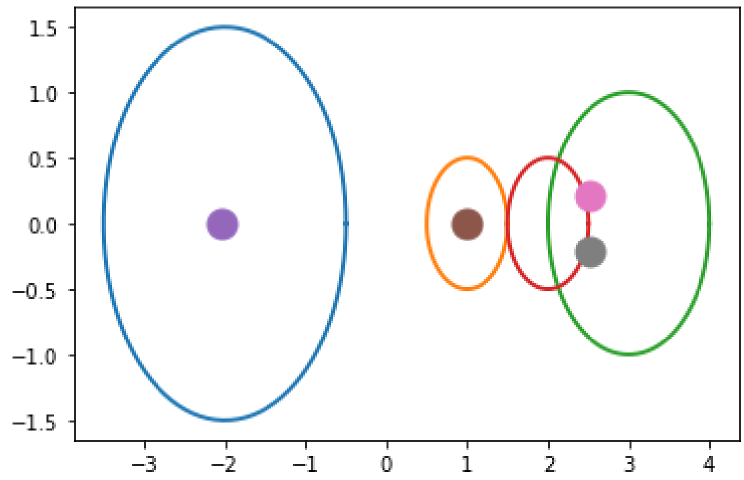

Figure 1: matrisen A sine egensirkler og egenverdier

(b)

Vi bruker funksjonen `egensirkler(A)` på matrisen B.

```
B = np.matrix([
     [5,-1,1],
     [1,2,1],
     [1,-1,-1]]) # matrisen fra oppgaven

egensirkler(B) # funksjonen paa matrisen B
```

Listing 4: Oppgave 3b

Under ser vi plottet som `egensirkler(B)` skaper.

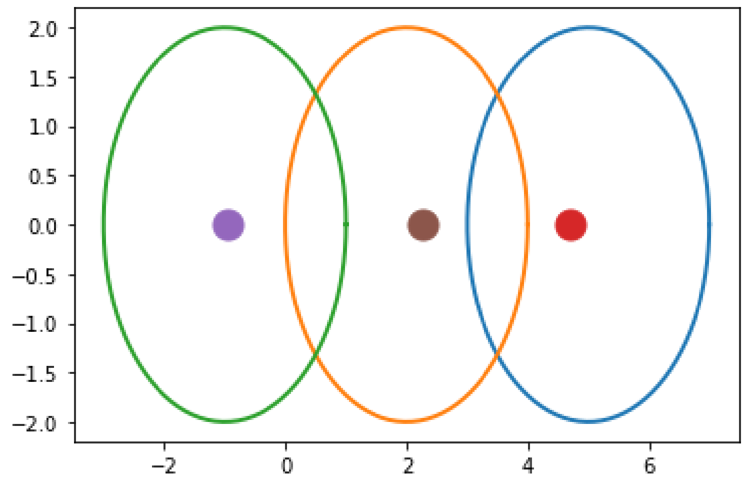

Figure 2: matrisen B sine egensirkler og egenverdier

(c)

Vi bruker funksjonen `egensirkler(A)` på matrisen C.

```
C = np.matrix([
    [1,0,0,-1,0],
    [0,1,0,0,-1],
    [-1,0,-2,0,1],
    [0,0,0,-1,1],
    [1,0,-1,1,0]]) # selvvalgt matrise

egensirkler(C) # funksjonen paa matrisen C
```

Listing 5: Oppgave 3c

Under ser vi plottet som `egensirkler(C)` skaper.

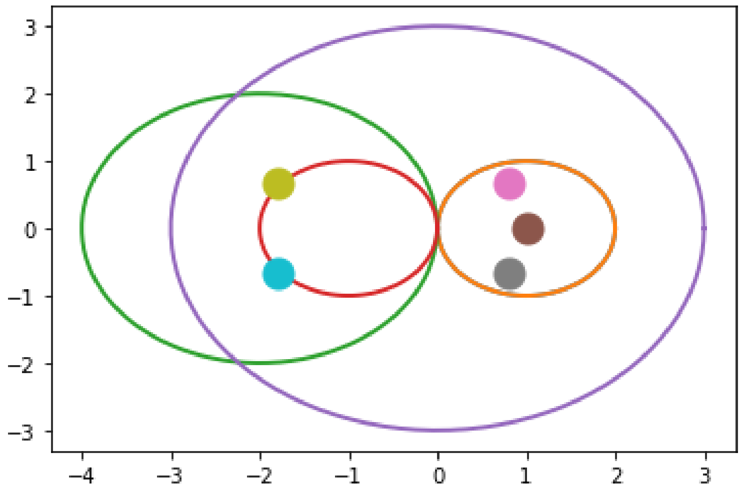

Figure 3: matrisen C sine egensirkler og egenverdier

(d)

Vi bruker funksjonen `egensirkler(A)` på matrisen D.

```
D = np.matrix([
    [-2,0,0,0],
    [0,-1-1j,0,0],
    [0,0,1+1j,0],
    [0,0,0,2]]) # diagonalmatrise

egensirkler(D) # funksjonen paa matrisen D
```

Listing 6: Oppgave 3d

Under ser vi plottet som `egensirkler(D)` skaper.

Her ligger egenverdiene på tallene langs diagonalen. Dette gjelder for alle triangulære matriser. Egensirklene ligger på de samme punktene, men siden alle tallene som ikke er på diagonalen er 0, er radiusen til sirklene 0.

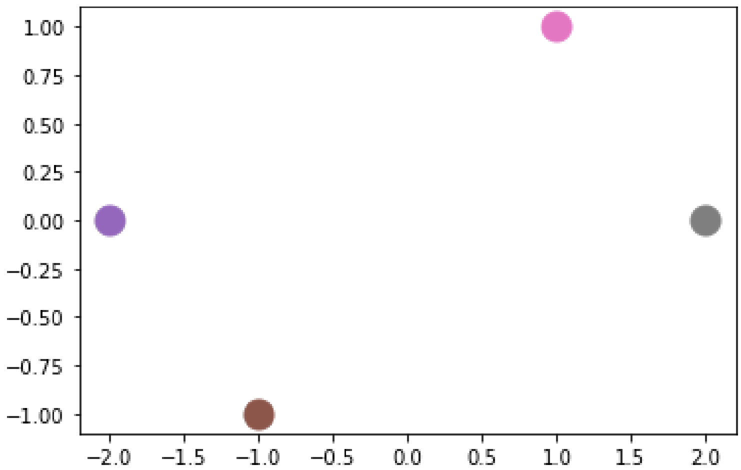

Figure 4: matrisen D sine egensirkler og egenverdier

Oppgave 4

(a)

Vi ser at alle egenverdiene befinner seg i en egensirkel i alle eksemplene fra Oppgave 3.

(b)

Vi vil vise at alle egenverdiene til en matrise befinner seg i minst 1 av egensirklene til matrisen.
Bevis:

Korollar 1

Vi starter med å vise at for en $n \times n$-matrise $A = [a_{j,k}]_{j,k}^{n}$ med egenverdi λ og tilhørende egenvektor $\boldsymbol{x}$, så gjelder det følgende

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i \tag{1}$$

La oss se på $A\boldsymbol{x}$. Vi har,

$$A\boldsymbol{x} = \lambda x = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

Vi har også

$$
A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} \tag{3}
$$

Da har vi at

$$
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = \lambda x_i \tag{4}
$$

Og vi har vist at

$$
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \lambda x_i \tag{5}
$$

□

Videre vil vi vise at

$$
\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \geq |\lambda - a_{ii}| \tag{6}
$$

Først må vi velge en i-verdi. Vi velger i slik at x_i er større enn alle andre elementer i $\boldsymbol{x}$ Vi starter med

$$
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \lambda x_i \tag{7}
$$

Og trekker fra $a_{ii}x_i$ på begge sider. Vi får

$$
\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j = (\lambda - a_{ii})x_i \tag{8}
$$

Så deler vi på x_i på begge sider og tar absoluttverdien

$$
\left| \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}\frac{x_j}{x_i} \right| = |\lambda - a_{ii}| \tag{9}
$$

På grunn av trekantlikheten vet vi også at

$$
\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left| a_{ij}\frac{x_j}{x_i} \right| \geq \left| \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}\frac{x_j}{x_i} \right| = |\lambda - a_{ii}| \tag{10}
$$

Vi har

$$
\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \left| \frac{x_j}{x_i} \right| \geq |\lambda - a_{ii}| \tag{11}
$$

Siden x_i er det største elementet i $\boldsymbol{x}$ vet vi at $\left| \frac{x_i}{x_j} \right| \leq 1$ for alle x_j, og ulikheten er bavart hvis vi fjerner $\left| \frac{x_i}{x_j} \right|$ fra likningen. Da har vi vist at

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \geq |\lambda - a_{ii}| \tag{12}$$

□

Så må vi tolke dette. På venstre siden har vi radiusen til egensirkelen. Dette er r_j som vi kjenner fra Definisjon 1. På høyre side har vi egenverdien, λ, minus a_{ii}, som er sentrum av egensirkelen. Absoluttverdien av dette er avstanden fra sentrum av egensirkelen og egenverdien. Ulikheten sier at avstanden mellom sentrum av sirkelen og egenverdien er mindre enn radiusen av sirkelen. Da må egenverdien ligge inni egensirkelen.

Da har vi vist at alle egenverdier ligger inni minst 1 egensirkel. ■

Oppgave 5

Vi vil vise at dersom en $n \times n$-matrise A er diagonaldominant, så er A invertibel.
Bevis:

La A være diagonaldominant. Da er det ingen egensirkel som dekker origo, siden sentrum er lenger unna origo enn størrelsen på radiusen. Siden alle egenverdiene dekkes av minst 1 egensirkel, så kan ingen av egenverdiene være 0.

Ved teoremet for inverterbare matriser, er en matrise som ikke har 0 som egenverdi ekvivalent med en invertibel matrise.

Da har vi vist at en diagonaldominant matrise er invertibel ■

Oppgave 6

Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

er diagonaldominant og inverterbar.