Oblig 1 MAT1120

Aleksander Fasting

Oppgave 1

Vi bruker samme metode som vi så tildligere i oppgavearket. Da finner vi matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Så, for å finne score-vektoren, må vi finne nullrommet til matrisen $A - I$. Da starter vi med å radredusere den utvidede matrisen $\begin{bmatrix} A - I & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & -1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

til matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Og vi får forholdene $x_1 = \frac{4}{3}x_4,\ x_2 = \frac{4}{9}x_4,\ x_3 = \frac{2}{3}x_4$. Vi velger $x_4 = 9$, og vi får vektoren

$$v_1 = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

For å finne score vektoren må vi finne score-vektoren til v_1. Lengden på denne vektoren $\|v_1\| = \sqrt{277}$. Da er

$$v = \frac{1}{\sqrt{277}} v_1 = \begin{bmatrix} 12/\sqrt{277} \\ 4/\sqrt{277} \\ 6/\sqrt{277} \\ 9/\sqrt{277} \end{bmatrix}$$

Da har vi den følgende rangeringen av dokumentene: 1, 4, 3, 2

Oppgave 2

Fra Figur 3 kan vi sette opp link-matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Og den utvidede matrisen $\begin{bmatrix} A - I & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ kan radreduseres til

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Og vi har forholdene, $x_1 = x_5,\ x_2 = x_4,\ x_3 = 0$. Vi har 2 frie variabler og nullrommet har dermed dimensjon lik 2. Da finnes det ingen unik nullvektor.

Vi konstruerer en basis ved å velge $x_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_5 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ for hver sin vektor. Vi definerer vektorene

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \ v_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Da utgjør v_1 og v_2 en basis for nullrommet.

Oppgave 3

Begge matrisene i oppgave 1 og 2 er stokastiske, siden begge har rader som legges sammen til 1. Matrisen i oppgave 1 er regulær, men den vi ser i oppgave 2 er ikke regulær, siden en regulær matrise er garantert til å ha en unik score-vektor, som den ikke har.

Vi kan få en link-matrise som ikke er stokastisk hvis vi har et web der ett av dokumentene, dokument nr. i, ikke har en hyperlenke til noe annet dokument. Da legges rad i sammen til å bli 0, og matrisen er ikke stokastisk.

Oppgave 4

La

$$M = [m_{i,j}] = (1 - m)A + mS$$

Der S er matrisen der alle koeffisientene er $\frac{1}{n}$.

I det første leddet i matrisen M har vi $(1-m)A,\ 0 < m < 1$. Siden $1-m > 0$ og A er stokastisk så er alle elementer $m_{i,j} \geq 0,\ 0 \leq i, j \leq n$, og det andre leddet har alle koeffisienter lik $\frac{m}{n}$, som er over 0. Da har vi

$$m_{i,j} > 0,\ 0 \leq j, i \leq n$$

Vi begrunner at M er stokastisk ved å ta for oss en rad i i matrisen M. Summen av koeffisientene i den i-te raden i $(1-m)A$ er $1-m$, siden A er stokastisk. og summen av koeffisientene den i-te raden i mS er m, siden hver koeffisient i S er $\frac{1}{n}$, og raden har n elementer. Når disse legges sammen har vi at summen av den i-te raden i M har summen 1.

Vi begrunner at M er regulær ved at M i seg selv kun har elementer over 0.

Oppgave 5

Vi har matrisen fra Oppgave 2,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da får vi at M er

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0.45 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0.45 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.02 \\ 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.02 \\ 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.02 \\ 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.02 \\ 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.02 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.92 \\ 0.02 & 0.02 & 0.47 & 0.92 & 0.02 \\ 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.02 \\ 0.02 & 0.92 & 0.47 & 0.02 & 0.02 \\ 0.92 & 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.02 \end{bmatrix}$$

Vi bruker Matlab til å finne nullrommet. Vi starter med å definere matrisen. I koden kaller vi den A istedenfor M, også bruker vi funksjonen **null()** på matrisen, slik som i bildet.

```
A =

    0.0200    0.0200    0.0200    0.0200    0.9200
    0.0200    0.0200    0.4700    0.9200    0.0200
    0.0200    0.0200    0.0200    0.0200    0.0200
    0.0200    0.9200    0.4700    0.0200    0.0200
    0.9200    0.0200    0.0200    0.0200    0.0200

>> null(A)

ans =

         0
   -0.4082
    0.8165
   -0.4082
   -0.0000
```

Da får vi basisen som vi ser nederst i bildet. Denne vektoren har også lengden 1, så dette er den unike score-vektoren vi leter etter.

Oppgave 6

Denne matrisen gir en stokastisk link-matrise siden, den garanterer at alle diagonalene er 0 i linje 4 og 11. Dette antok vi for link-matrisene i definisjonen. I tilleg så garanterer den at alle kolonnene ikke har sum lik 0 i linje 6 og 13. Til slutt garanterer den at alle matrisene legges sammen til 1, så lenge summen ikke er 0, i linje 9 og 16. Da er alle kravene for en stokastisk link-matrise oppfylt.

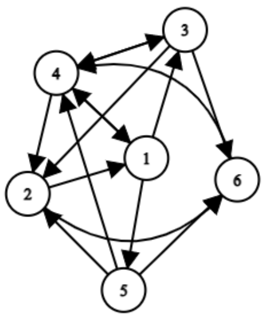
Oppgave 7

Vi definerte $n = 6$ og utførte programmet. Følgende matrise ble generert.

```
ans =

         0    0.5000         0    0.3333         0         0
         0         0    0.3333    0.3333    0.3333         0
    0.3333         0         0    0.3333         0         0
    0.3333         0    0.3333         0    0.3333    1.0000
    0.3333         0         0         0         0         0
         0    0.5000    0.3333         0    0.3333         0
```

Vi tegner det tilhørende webet.



Oppgave 8

Her er koden i Matlab.

```
function v = ranking(A)
    x = size(A);
    if (x(1) ~= x(2))
        fprintf('Matrisen er ikke kvadratisk')
        return
    end
    x = x(1)
    for k=1:x
        if (A(:,k) == 0)
            fprintf('Matrisen er ikke stokastisk')
            return
        end
    end
    m = 0.1
    S = ones(size(A))/x(1)
    M = (1-m) * A + m * S
    v = null(M - eye(x(1)))
    v = abs(v/norm(v))
```

Listing 1: kode for Oppgave 8

Oppgave 9

Her er koden i Matlab.

```
function x = rankingapprox(A, d)
    n = size(A);
    if (n(1) ~= n(2))
        fprintf('Matrisen er ikke kvadratisk')
        return
    end
    n = n(1)
    for k=1:n
        if (A(:,k) == 0)
            fprintf('Matrisen er ikke stokastisk')
            return
        end
    end
    m = 0.1
    S = ones(size(A))/n(1)
    M = (1-m) * A + m * S
    x = ones([n(1) 1])/n(1)
    cont = 1
    while cont
        x_0 = M * x
        if (norm(x_0 - x) < d)
            cont = 0
        end
        x = x_0
    end
```

Listing 2: kode for Oppgave 9

Oppgave 10

Her kan du se vektoren som vi får med ranking(A)

```
ans =

    0.7050
    0.2586
    0.3749
    0.5436
```

Og her kan du se vektoren som vi får med rankingapprox(A,d)

```
ans =

    0.7013
    0.2601
    0.3779
    0.5457
```