

## Задача А. Разбор утверждения

Имя входного файла: стандартный ввод  
Имя выходного файла: стандартный вывод  
Ограничение по времени: 2 секунды  
Ограничение по памяти: 256 мегабайт

На вход вашей программе дается утверждение в следующей грамматике:

$$\begin{aligned}\langle \text{Файл} \rangle &::= \langle \text{Выражение} \rangle \\ \langle \text{Выражение} \rangle &::= \langle \text{Дизъюнкция} \rangle \mid \langle \text{Дизъюнкция} \rangle \text{ '}' \langle \text{Выражение} \rangle \\ \langle \text{Дизъюнкция} \rangle &::= \langle \text{Конъюнкция} \rangle \mid \langle \text{Дизъюнкция} \rangle \text{ '}' \langle \text{Конъюнкция} \rangle \\ \langle \text{Конъюнкция} \rangle &::= \langle \text{Отрицание} \rangle \mid \langle \text{Конъюнкция} \rangle \text{ '}' \langle \text{Отрицание} \rangle \\ \langle \text{Отрицание} \rangle &::= \text{ '!' } \langle \text{Отрицание} \rangle \mid \langle \text{Переменная} \rangle \mid \text{ '(' } \langle \text{Выражение} \rangle \text{ ')' } \\ \langle \text{Переменная} \rangle &::= (\text{ 'A' } \dots \text{ 'Z' }) \{ \text{ 'A' } \dots \text{ 'Z' } \mid \text{ '0' } \dots \text{ '9' } \mid \text{ '}' \}^*\end{aligned}$$

Имена переменных не содержат пробелов. Между символами оператора '}' нет пробелов. В остальных местах пробелы могут присутствовать. Символы табуляции и возврата каретки должны трактоваться как пробелы. Символ апострофа (') имеет код 39.

Вам требуется написать программу, разбирающую утверждение и строящую его дерево разбора, и выводящую полученное дерево в единственной строке без пробелов в следующей грамматике:

$$\begin{aligned}\langle \text{Файл} \rangle &::= \langle \text{Вершина} \rangle \\ \langle \text{Вершина} \rangle &::= \text{ '(' } \langle \text{Знак} \rangle \text{ '}' \langle \text{Вершина} \rangle \text{ '}' \langle \text{Вершина} \rangle \text{ ')' } \\ &\quad \mid \text{ '(' } \langle \text{Вершина} \rangle \text{ ')' } \\ &\quad \mid \langle \text{Переменная} \rangle \\ \langle \text{Знак} \rangle &::= \text{ '}' \mid \text{ '}' \mid \text{ '}' \\ \langle \text{Переменная} \rangle &::= (\text{ 'A' } \dots \text{ 'Z' }) \{ \text{ 'A' } \dots \text{ 'Z' } \mid \text{ '0' } \dots \text{ '9' } \mid \text{ '}' \}^*\end{aligned}$$

### Формат входных данных

В единственной строке входного файла дано утверждение в грамматике из условия. Размер входного файла не превышает 100 КБ.

### Формат выходных данных

В единственной строке выходного файла выведите дерево разбора утверждения без пробелов.

### Примеры

стандартный ввод
!A&!B->!(A B)
стандартный вывод
(->,( & , (!A) , (!B)) , (! (   , A , B ) ) )
стандартный ввод
P1' ->!QQ->!R10&S !T&U&V
стандартный вывод
(-> , P1' , (-> , (!QQ) , (   , ( & , (!R10) , S ) , ( & , ( & , (!T) , U ) , V ) ) )

## Задача В. Истинность высказываний

Имя входного файла: стандартный ввод  
Имя выходного файла: стандартный вывод  
Ограничение по времени: 1 секунда  
Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Как известно, формула классического исчисления высказываний может быть:

1. невыполнимой — нет значений переменных, при которых формула истинна;
2. одновременно выполнимой и опровержимой — то есть, существуют такие наборы значений переменных, что формула истинна (формула выполнима), и такие значения, что формула ложна (формула к тому же ещё и опровержима);
3. общезначимой — при всех значениях переменных формула истинна.

По данной на вход формуле определите, какой из вариантов имеет место.

### Формат входных данных

На вход подаётся формула классического исчисления высказываний с не более чем 16 различными переменными, состоящая из не более чем 256 символов, заданная в грамматике из первой задачи.

### Формат выходных данных

Выведите одну из трёх строк:

1. `Unsatisfiable` — если формула невыполнима.
2. `Satisfiable and invalid,  $t$  true and  $f$  false cases` — если формула выполнима и опровержима. Числа  $t$  и  $f$  обозначают количество наборов значений переменных, при которых формула истинна ( $t$ ) и ложна ( $f$ ).
3. `Valid` — если формула общезначима.

### Примеры

стандартный ввод
<code>A&amp;!A</code>
стандартный вывод
<code>Unsatisfiable</code>
стандартный ввод
<code>A-&gt;!B123</code>
стандартный вывод
<code>Satisfiable and invalid, 3 true and 1 false cases</code>
стандартный ввод
<code>((PPP-&gt;PPP')-&gt;PPP)-&gt;PPP</code>
стандартный вывод
<code>Valid</code>

### Замечание

Построим таблицу истинности для формулы  $A \rightarrow \neg B123$ :

$A$	$B$	$\neg B123$	$A \rightarrow \neg B123$
Л	Л	И	И
Л	И	Л	И
И	Л	И	И
И	И	Л	Л

Подсчитаем: формула истинна на трёх наборах значений переменных, и ложна на одном наборе.

## Задача С. Теорема о дедукции

Имя входного файла: стандартный ввод  
Имя выходного файла: стандартный вывод  
Ограничение по времени: 15 секунд  
Ограничение по памяти: 1024 мегабайта

На вход вашей программе даётся корректное доказательство высказывания  $\beta$  в контексте  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \alpha$ . Требуется перестроить его в доказательство  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \vdash \alpha \rightarrow \beta$ .

### Формат входных данных

На вход дается доказательство утверждения в соответствии со следующей грамматикой:

$$\begin{aligned} \langle \text{Файл} \rangle &::= \langle \text{Контекст} \rangle \text{'|-' } \langle \text{Выражение} \rangle \text{'\n' } \{ \langle \text{Строка} \rangle \}^+ \\ \langle \text{Контекст} \rangle &::= \langle \text{Выражение} \rangle \text{'[' } \{ \langle \text{Выражение} \rangle \}^* \\ \langle \text{Строка} \rangle &::= \langle \text{Выражение} \rangle \text{'\n'} \\ \langle \text{Выражение} \rangle &::= \langle \text{Выражение} \rangle \text{'\&' } \langle \text{Выражение} \rangle \\ &\quad | \langle \text{Выражение} \rangle \text{'|' } \langle \text{Выражение} \rangle \\ &\quad | \langle \text{Выражение} \rangle \text{'->' } \langle \text{Выражение} \rangle \\ &\quad | \text{'!' } \langle \text{Выражение} \rangle \\ &\quad | \text{'(' } \langle \text{Выражение} \rangle \text{'(' } \\ &\quad | \langle \text{Переменная} \rangle \\ \langle \text{Переменная} \rangle &::= (\text{'A' } \dots \text{'Z'}) \{ \text{'A' } \dots \text{'Z' } | \text{'0' } \dots \text{'9' } | \text{'.' } \}^* \end{aligned}$$

Операторы  $\&$  и  $|$  левоассоциативны. Оператор  $\rightarrow$  правоассоциативен. Операторы в порядке уменьшения приоритета:  $!$ ,  $\&$ ,  $|$ ,  $\rightarrow$ . Коды символов: код апострофа (') — 39, код вертикальной черты (|) — 124.

Имена переменных не содержат пробелов. Между символами одного оператора нет пробелов ( $\rightarrow$  и  $|$ ). В остальных местах пробелы могут присутствовать. Символы табуляции и возврата каретки должны трактоваться как пробелы.

### Формат выходных данных

Формат выходного файла совпадает с форматом входного файла.

### Примеры

стандартный ввод
A -A A
стандартный вывод
- A -> A A -> (A -> A) A -> ((A -> A) -> A) (A -> (A -> A)) -> ((A -> ((A -> A) -> A)) -> (A -> A)) (A -> ((A -> A) -> A)) -> (A -> A) A -> A
стандартный ввод
A -B->B->B B->B->B
стандартный вывод
- A -> (B -> (B -> B)) B -> (B -> B) (B -> (B -> B)) -> (A -> (B -> (B -> B))) A -> (B -> (B -> B))

стандартный ввод
$A \mid \neg A \rightarrow A$ $A \rightarrow A \rightarrow A$ $A$ $A \rightarrow A$
стандартный вывод
$\mid \neg A \rightarrow (A \rightarrow A)$ $A \rightarrow (A \rightarrow A)$ $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A)))$ $A \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A))$ $A \rightarrow (A \rightarrow A)$ $A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$ $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ $(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ $A \rightarrow A$ $(A \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A))) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A)))$ $(A \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A))) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A))$ $A \rightarrow (A \rightarrow A)$

## Задача D. Теорема Гливленко

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	15 секунд
Ограничение по памяти:	512 мегабайт

На вход вашей программе дается **корректное** доказательство утверждения  $\alpha$  в классическом исчислении высказываний. Вам требуется построить корректное доказательство утверждения  $\neg\alpha$  в интуиционистском исчислении высказываний.

### Формат входных данных

Во входном файле задано доказательство утверждения  $\alpha$  в классическом исчислении высказываний. Размер входного файла не превышает 5 КБ.

Доказательство утверждения даётся в соответствии со следующей грамматикой:

$\langle \text{Файл} \rangle$	::=	$\langle \text{Контекст} \rangle \text{' -' } \langle \text{Выражение} \rangle \text{'\n' } \langle \text{Строка} \rangle^*$
$\langle \text{Контекст} \rangle$	::=	$\langle \text{Выражение} \rangle [ \text{' , ' } \langle \text{Выражение} \rangle ]^*$
		$\text{' '}$
$\langle \text{Строка} \rangle$	::=	$\langle \text{Выражение} \rangle \text{'\n'}$
$\langle \text{Выражение} \rangle$	::=	$\langle \text{Выражение} \rangle \text{'\&' } \langle \text{Выражение} \rangle$
		$\langle \text{Выражение} \rangle \text{' ' } \langle \text{Выражение} \rangle$
		$\langle \text{Выражение} \rangle \text{'->' } \langle \text{Выражение} \rangle$
		$\text{'!' } \langle \text{Выражение} \rangle$
		$\text{'(' } \langle \text{Выражение} \rangle \text{' ')'}$
		$\langle \text{Переменная} \rangle$
$\langle \text{Переменная} \rangle$	::=	$(\text{'A' } \dots \text{'Z'}) \{ \text{'A' } \dots \text{'Z' }   \text{'0' } \dots \text{'9' }   \text{' ' } \}^*$

Операторы  $\&$  и  $|$  левоассоциативны. Оператор  $->$  правоассоциативен. Операторы в порядке уменьшения приоритета:  $!$ ,  $\&$ ,  $|$ ,  $->$ .

Имена переменных не содержат пробелов. Между символами одного оператора нет пробелов ( $->$  и  $|$ ). В остальных местах пробелы могут присутствовать. Символы табуляции и возврата каретки должны трактоваться как пробелы.

### Формат выходных данных

Файл должен содержать корректное доказательство утверждения  $\neg\alpha$  в интуиционистском исчислении высказываний в том же контексте, что доказательство  $\alpha$  во входном файле.

### Пример

стандартный ввод
A   - A A
стандартный вывод
A   - !!A A (A -> (!A -> A)) (!A -> A) (!A -> (!A -> !A)) ((!A -> (!A -> !A)) -> ((!A -> (!A -> !A) -> !A)) -> (!A -> !A))) ((!A -> ((!A -> !A) -> !A)) -> (!A -> !A)) (!A -> ((!A -> !A) -> !A)) (!A -> !A) ((!A -> A) -> ((!A -> !A) -> !!A)) ((!A -> !A) -> !!A) !!A

## Замечание

В классическом исчислении высказываний используются следующие схемы аксиом:

- (1)  $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
- (2)  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$
- (3)  $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \& \beta$
- (4)  $\alpha \& \beta \rightarrow \alpha$
- (5)  $\alpha \& \beta \rightarrow \beta$
- (6)  $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$
- (7)  $\beta \rightarrow \alpha \vee \beta$
- (8)  $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma)$
- (9)  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \neg \alpha$
- (10)  $\neg \neg \alpha \rightarrow \alpha$

В интуиционистском исчислении высказываний 10-я схема аксиом заменяется на:

- (10)  $\alpha \rightarrow \neg \alpha \rightarrow \beta$

## Задача Е. Полнота исчисления высказываний

Имя входного файла: стандартный ввод  
Имя выходного файла: стандартный вывод  
Ограничение по времени: 15 секунд  
Ограничение по памяти: 512 мегабайт

На вход вашей программе дается утверждение  $\alpha$  в грамматике из предыдущих заданий.  
От вас требуется найти:

- Набор гипотез  $\Gamma_1$  со следующими свойствами:

- $\Gamma_1$  состоит только из переменных
- $\Gamma_1 \vdash \alpha$

В этом случае вам нужно вывести доказательство  $\Gamma_1 \vdash \alpha$ .

- Если такого набора гипотез не нашлось, то нужно найти наименьший набор гипотез  $\Gamma_2$ :

- $\Gamma_2$  состоит только из отрицаний переменных
- $\Gamma_2 \vdash \neg\alpha$

В этом случае вам нужно вывести доказательство  $\Gamma_2 \vdash \neg\alpha$ .

- Если и такого набора гипотез не нашлось, то выведите «: (».

Если среди предыдущих случаев существует несколько подходящих наборов гипотез (а если такие наборы есть, то их всегда бесконечно много), то требуется вывести любой подходящий набор наименьшего размера.

### Формат входных данных

Во входном файле задано утверждение  $\alpha$ . Размер входного файла не превышает 50 байт. Количество различных переменных, входящих в  $\alpha$ , не превосходит 3.

### Формат выходных данных

Если требуемого набора гипотез не существует, в единственной строке выведите «: (». Иначе выведите требуемое в условии доказательство, используя грамматику из предыдущих заданий.

### Примеры

стандартный ввод
!A
стандартный вывод
: (
стандартный ввод
A -> A & B
стандартный вывод
B   - A -> A & B B B -> A -> B A -> B A -> B -> A & B (A -> B) -> (A -> B -> A & B) -> A -> A & B (A -> B -> A & B) -> A -> A & B A -> A & B