Университет ИТМО

Факультет ПИиКТ

Дисциплина: Математический анализ

Лабораторная работа №1
Численные методы интегрирования

Выполнил: Григорьев Александр Алексеевич
группа P3130
Преподаватель: Фотин Алексей Дмитриевич

Санкт-Петербург 2022

1. Аналитическая часть

Интеграл по заданию:

$$\int\limits_0^2 2^x\,dx$$

Так как 2^x непрерывна на [0, 2], 2^x интегрируема на [0, 2], то есть интеграл Римана существует.

Составим интегральную сумму. В качестве разбиение τ возьмём разбиение [0, 2] на n равных отрезков. Тогда $x_i = \frac{2k}{n}$, $\Delta x_i = \frac{2}{n}$. Также выберем $\xi = x_i$. Тогда

$$\sigma_\tau(f, \xi) = \sum_{k=1}^{n} 2^{\frac{2k}{n}} \frac{2}{n} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} 2^{\frac{2k}{n}}$$

По сумме геометрической прогресии:

$$\frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} 2^{\frac{2k}{n}} = \frac{2}{n} \frac{2^{\frac{2}{n}}(1-2^2)}{1-2^{\frac{2}{n}}} = \frac{2}{n} \frac{3 \cdot 2^{\frac{2}{n}}}{2^{\frac{2}{n}}-1}$$

Перейдем к пределу при $n \to \infty$ и заменим предел на эквивалентный:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \frac{3 \cdot 2^{\frac{2}{n}}}{2^{\frac{2}{n}}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \frac{3 \cdot 2^{\frac{2}{n}}}{\frac{2}{n} ln2} = \frac{3}{ln2}$$

Теперь найдём значение интеграла по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_0^2 2^x\,dx = \frac{2^x}{ln2}\Big|_0^2 = \frac{3}{ln2}$$

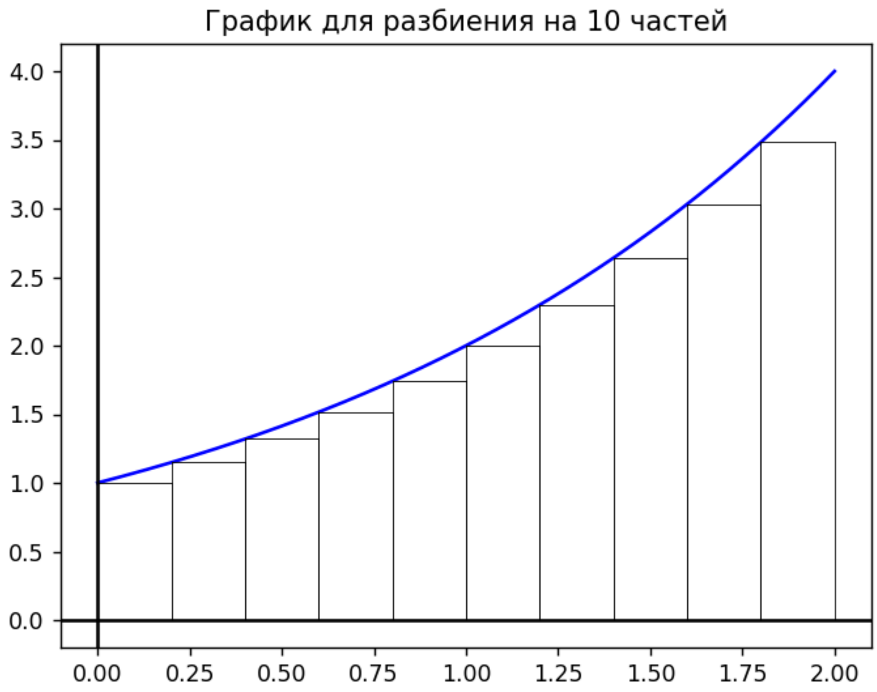
2. Описание метода и результаты

Метод прямоугольников - метод численного интегрирования функции одной переменной, заключающийся в замене подынтегральной функции на многочлен нулевой степени, то есть константу, на каждом элементарном отрезке. Он заключается в приближённом вычислении площади под графиком суммированием площадей конечного числа прямоугольников, ширина которых будет определяться расстоянием между соответствующими соседними узлами интегрирования, а высота — значением подынтегральной функции в этих узлах.

Шаг интегрирования (h)	Численное решение F	Погрешность $|F-\tilde{F}|$	Количество итераций N
0.2	4.32462	$3.47*10^{-3}$	10
0.02	4.32805	$3.47*10^{-5}$	100
0.002	4.32808	$3.47*10^{-7}$	1000
$2*10^{-4}$	4.32809	$3.47*10^{-9}$	10^5
$2*10^{-5}$	4.32809	$3.79*10^{-11}$	10^6

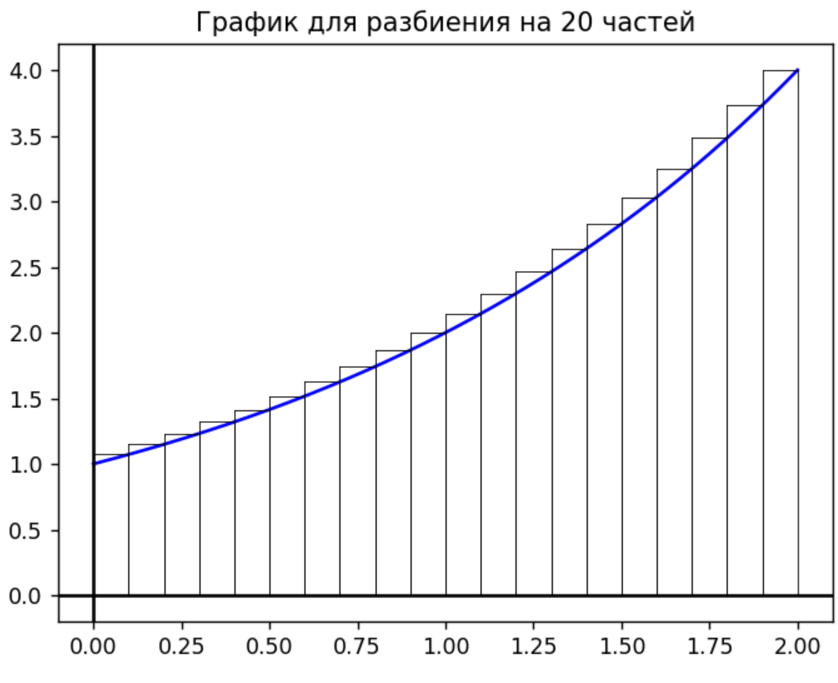
3. Графики

1)График для разбиения τ отрезка $[0, 2]$ на 10 отрезков, в качестве ξ_i выбрана точка x_{i-1}:



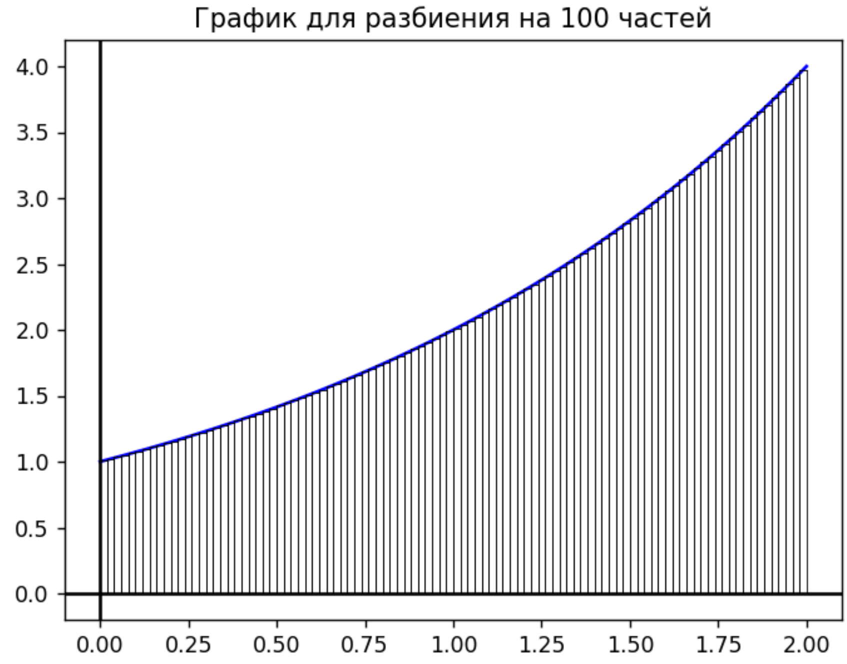
Значение заданной интегральной суммы $\sigma_\tau(2^x, \xi) = 4.32462$

2)График для разбиения τ отрезка $[0, 2]$ на 20 отрезков, в качестве ξ_i выбрана точка x_i:



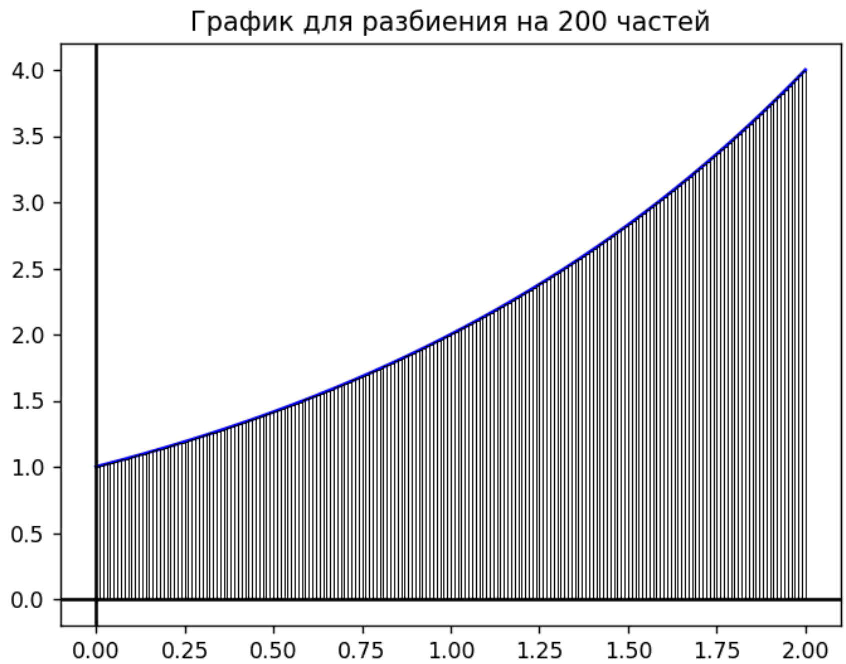
Значение заданной интегральной суммы $\sigma_\tau(2^x, \xi) = 4.32722$

3)График для разбиения τ отрезка [0, 2] на 100 отрезков, в качестве ξ_i выбрана точка $\frac{x_i - x_{i-1}}{2}$:



Значение заданной интегральной суммы $\sigma_\tau(2^x, \xi) = 4.32805$

4)График для разбиения τ отрезка [0, 2] на 200 отрезков, в качестве ξ_i выбрана точка $\frac{x_i - x_{i-1}}{2}$:



Значение заданной интегральной суммы $\sigma_\tau(2^x, \xi) = 4.32805$

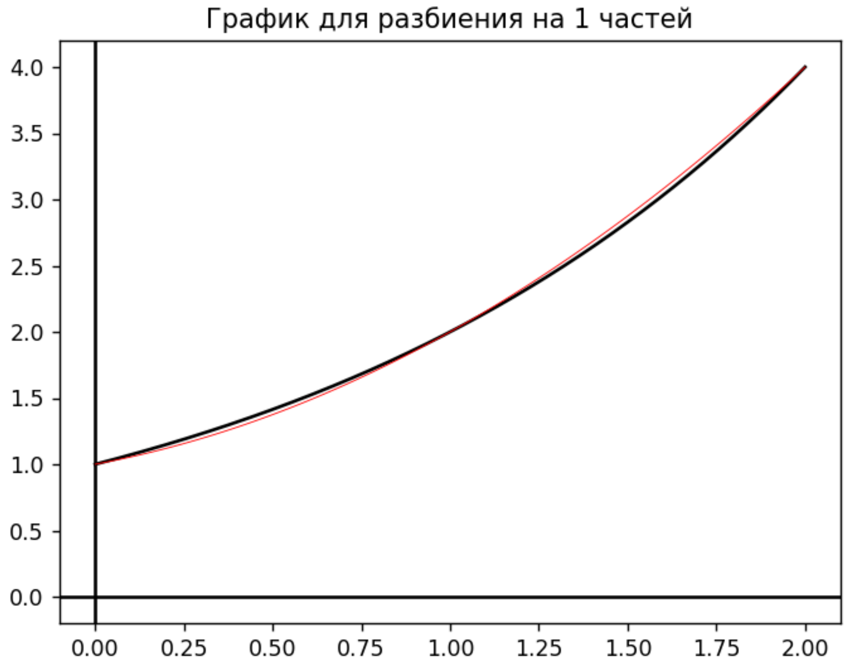
4. Код программы

Репозиторий с проектом на GitHub

5. Метод Симпсона

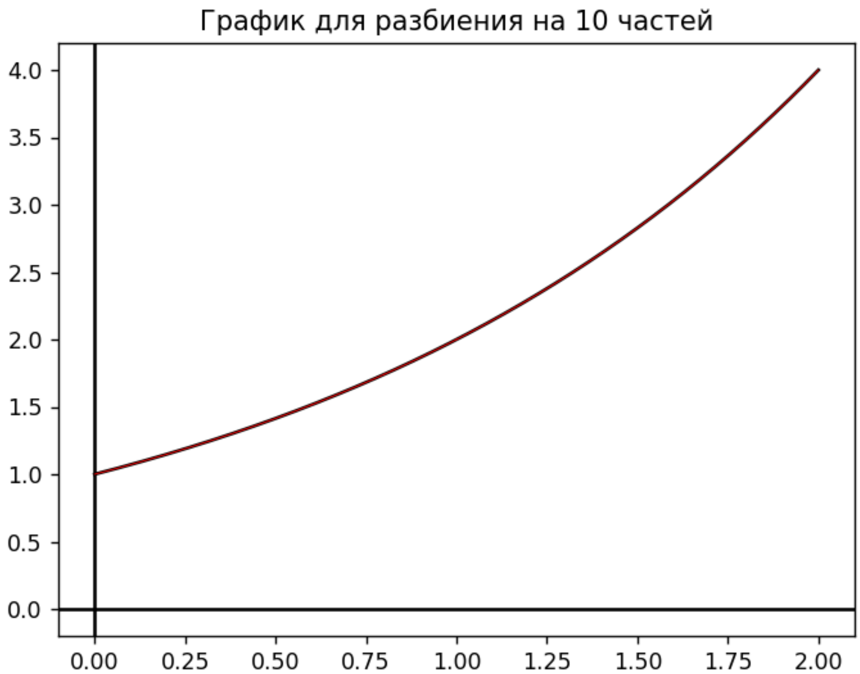
Метод прямоугольников - метод численного интегрирования функции одной переменной, заключающийся в приближении подынтегральной функции на отрезке [a,b] интерполяционным многочленом второй степени $p_2(x)$, то есть приближение графика функции на отрезке параболой.

1)График для разбиения τ отрезка [0, 2] на 1 отрезок:



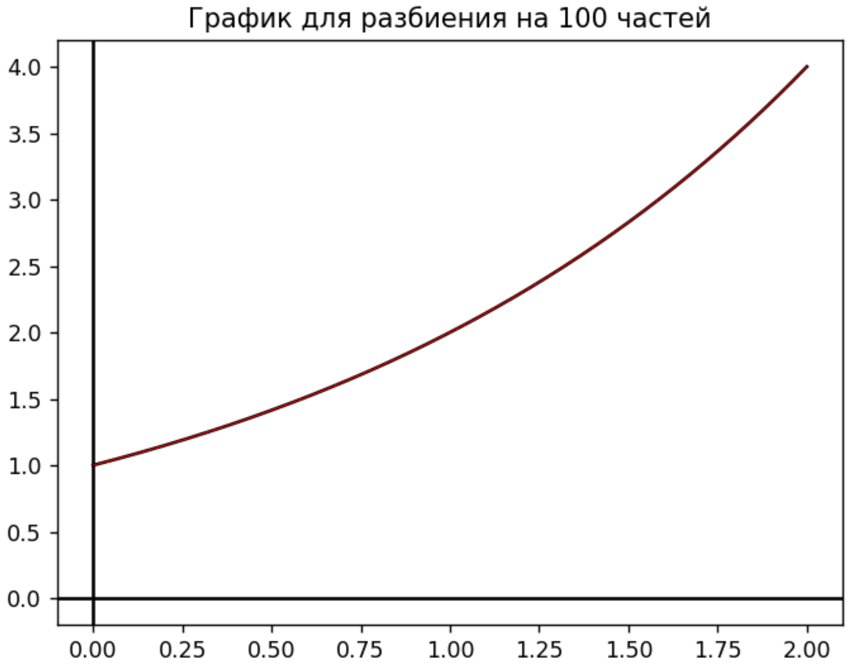
Полученное значение: 4.33333, разница с алгебраическим: 5.24*10^{-3}.

2)График для разбиения τ отрезка [0, 2] на 10 отрезков:



Полученное значение: 4.32809, разница с алгебраическим: 5.55*10^{-7}.

3)График для разбиения τ отрезка [0, 2] на 100 отрезков:



Полученное значение: 4.32809, разница с алгебраическим: $5.6*10^{-11}$.

По полученным значениям можем заметить, что при увеличении количества точек разбиения, а, следовательно, и итераций, в 10 раз, точность метода прямоугольников возрастает в сравнимое с 10^2 число раз, в то время как точность метода Симпсона - в сравнимое с 10^4 число раз. Из этого можем сделать вывод, что использование метода Симпсона рациональнее.