8. KLASYCZNA DEFINICJA PRAWDOPODOBIEŃSTWA. PRAWDOPODOBIEŃSTWO GEOMETRYCZNE.

Doświadczenie losowe to takie, którego wyniku nie możemy przewidzieć. Każdy możliwy wynik takiego doświadczenia nzw. ***zdarzeniem elementarnym***. Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych danego doświadczenia nzw. przestrzenią zdarzeń i oznaczamy Ω.

Prawdopodobieństwo

Każdemu zdarzeniu A przyporządkowujemy liczbę $P(A) \in [0, 1]$. Liczba ta określa szansę, że to zdarzenie zajdzie i nzw. ją prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia A.

Własności:

Niech A i B będą dowolnymi zdarzeniami:

- $P(A) \in [0, 1]$
- $P(\Omega) = 1$
- Jeżeli $A \cap B = \emptyset$, to $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

zbiór pusty

Podstawowym pojęciem probabilistycznym jest ***przestrzeń probabilistyczna***, czyli trójka (Ω, F, P), gdzie Ω - przestrzeń zdarzeń elementarnych, czyli pewien zbiór, F jest ∂ - ciałem podzbiorów Ω, zaś P miarą unormowaną na F, czyli prawdopodobieństwem.

Model probabilistyczny

(Ω, F, p)

zbiór zdarzeń elementarnych (wyborów doświadczenia)

rodzina (zbiór) zdarzeń ∂ - ciało

funkcja prawdopodobieństwa p: F -> [0,1]

Własności funkcji prawdopodobieństwa:

suma zbiorów

1. $p(\emptyset) = 0$

2. $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ dla $A \cap B = \emptyset$

3. $p(A') = 1 - p(A)$

4. Jeżeli $A \subseteq B$, to $p(A) \leq p(B)$

5. $\forall_{A \in F} \quad p(A) \in [0, 1]$

iloczyn zbiorów(część wspólna)

6. a) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

   b) $p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$

7. Dla dowolnych $A, B \in F$ takich, że $A \subset B$ mamy $P(A) \leq P(B)$

8. Dla dowolnych $A, B \in F$ takich, że $A \subset B$ mamy $P(B - A) = P(B) - P(A)$

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Niech Ω zbiór skończony, $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, \ldots\}$ oraz wszystkie zdarzenia są tak samo prawdopodobne to prawdopodobieństwem klasycznym nazywamy funkcję P określoną na F wzorem:

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$$

$\overline{\overline{A}}$ - ilość zdarzeń elementarnych

$\overline{\overline{\Omega}}$ - ilość wszystkich zdarzeń elementarnych

Przykład 1:

Rzucamy kostką do gry, wtedy Ω = {1,2,3,4,5,6},
wszystkie zdarzenia są tak samo prawdopodobne,
zaś prawdopodobieństwo zdarzenia A – wyrzucenia parzystej liczby oczek wynosi:

$$P(A) = \frac{\overbrace{\overline{\overline{\{2,4,6\}}}}^{\textit{ilość zdarzeń elementarnych}}}{\underbrace{\overline{\overline{\{1,2,3,4,5,6\}}}}_{\textit{ilość wszystkich zdarzeń elementarnych}}} = \frac{3}{6} = 0,5$$

Przykład 2:

W urnie jest 5 kul czerwono-czarnych, 3 biało-niebieskie, 6 zielono-żółtych, 8 białych.

Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli dwukolorowej?

A – wylosowanie kuli dwukolorowej

$$\overline{\overline{\Omega}} = 22$$

$$\overline{\overline{B}}_1 = 5 \quad \overline{\overline{B}}_2 = 3 \quad \overline{\overline{B}}_3 = 6 \quad \overline{\overline{B}}_4 = 8$$

$$P(B_1) = \frac{5}{22} \quad P(B_2) = \frac{3}{22} \quad P(B_3) = \frac{6}{22} \quad P(B_4) = \frac{8}{22}$$

$$P(A) = (B_1 \cup B_2 \cup B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) =$$

$$= \frac{5}{22} + \frac{3}{22} + \frac{6}{22} = \frac{14}{22} = \frac{7}{11}$$

Definicja 1

Rodzina zbiorów F nazywamy σ ***-ciałem*** *na zbiorze Ω jeżeli spełnia następujące warunki:*

(i) $\Omega \in F$,

(ii) $\forall_{A \in F} A' \in F$ *gdzie* A' *oznacza* $\Omega - A$ *czyli dopełnienie zbioru A.*

(iii) *dla dowolnego ciągu zbiorów* $A_1, A_2, A_3, \ldots$ *należących do F mamy* $\bigcup_n A_n \in F$.

Dwoma podstawowymi pojęciami w teorii prawdopodobieństwa, których nie należy mylić są ***rozłączność*** i ***niezależność zdarzeń***. **Zdarzenia A i B są rozłączne** tak jak zbiory, gdy $A \cap B = \emptyset$. **Niezależność** oznacza zaś następującą własność pary zbiorów:

Zbiory A, B są niezależne jeśli spełniają warunek: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Niezależność zdarzeń A i B oznacza, że prawdopodobieństwo zdarzenia A nie zmienia się, nawet wtedy gdy wiemy, że zaszło zdarzenie B.

Przykład:

$\Omega = \{$ ⚀ ⚁ ⚂ ⚃ ⚄ ⚅ $\}$ $\qquad |\Omega| = 6$

$A = \{$ ⚁ ⚃ ⚅ $\}$ – wyrzucenie parzystej liczby oczek $\qquad |A| = 3$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$B = \{$ ⚀ ⚁ ⚂ ⚃ $\}$ – wyrzucenie liczby oczek mniejszej od 5 $\qquad |B| = 4$

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$A \cap B = \{$ ⚁ ⚃ $\}$ – część wspólna zdarzeń A i B $\qquad |A \cap B| = 2$

$$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Przykład 3:

Rzucamy 2 razy monetą i rozważmy zdarzenia A-wylosowaliśmy 1 reszkę i 1 orła i B- w drugim rzucie wylosowaliśmy orła. Zbadać niezależność zdarzeń A, B.

$\Omega = \{(o,o),(r,r),(o,r),(r,o)\}$ i mamy model klasyczny.

$A=\{(o,r),(r,o)\}$, czyli $$P(A)=\frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$B=\{(o,o),(r,o)\}$, czyli $$P(B)=\frac{\overline{\overline{B}}}{\overline{\overline{\Omega}}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$A \cap B = \{(r,o)\}$, czyli $$P(A\cap B)=\frac{\overline{\overline{A\cap B}}}{\overline{\overline{\Omega}}}=\frac{1}{4}$$

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

Zdarzenia A, B są więc niezależne.

Prawdopodobieństwo geometryczne

Niech Ω podzbiór R^n taki, że ∂_n miara Lebesgue'a określona na R^n (w uproszczeniu oznacza to długość w R, pole w R^2, objętość w R^3), wtedy prawdopodobieństwem geometrycznym na Ω nazywamy miarę P określoną wzorem:

$$P(A) = \frac{\partial_n(A)}{\partial_n(\Omega)}$$

gdzie A – dowolny zbiór mierzalny względem miary Lebesgue'a.

Przykład 1:

Z odcinka [-2, 3] losujemy liczbę.
Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowana liczba będzie dodatnia.

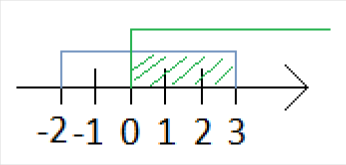
$\Omega = \{x: \; x \in [-2, 3]\} = [-2, 3]$

$\partial_1 (\, \Omega \,) = \text{długość} \, [-2, 3] = 5$

$A = \{x \in \Omega : \; x > 0\} = (0, 3]$

$\partial_1 (A) = \text{długość} \, (0, 3] = 3$

$p(A) = \frac{3}{5}$



<u>Przykład 2:</u>

Z odcinka [-1, 3] losujemy 2 liczby. Oblicz prawdopodobieństwo, że ich suma jest liczbą dodatnią.

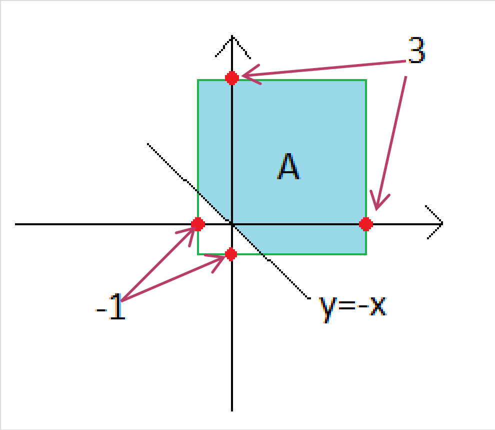
$$\Omega = \{(x,y):\ x, y \in [-1, 3]\} = [-1, 3] \times [-1, 3] = [-1, 3]^2$$

$$\partial(\Omega) = \text{pole}(\Omega) = 4^2 = 16$$

$$A = \{(x,y) \in \Omega : x + y > 0\} = \{(x,y) \in \Omega : y = -x\}$$

$$\partial_2(A) = \text{pole } A = 16 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 14$$

$$p(A) = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$



Przykład 3:

Z odcinka [0, 2] losujemy 2 liczby. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ich suma jest mniejsza niż 1?

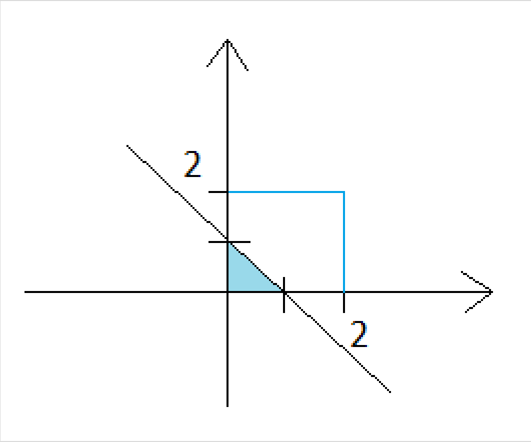
Losowanie 2 liczb z odcinka (0,2) polega na wylosowaniu punktu z kwadratu (0,2)x(0,2) czyli Ω to ten kwadrat.

$$\Omega = \{(x, y) \in \Omega : x \in [0, 2],\ y \in [0, 2]\}$$

$$p(A) = \frac{\partial_2(A)}{\partial_2(\Omega)} = \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{8}$$

$$A = \{(x,y) \in \Omega : x + y \leq 1\}$$

$$x + y \leq 1$$
$$y \leq -x + 1$$



Przykład 4:

Z odcinka [0, 5] losujemy 3 liczby.

a) Oblicz prawdopodobieństwo, że ich minimum jest większe od 2.

$\Omega = \{(x, y, z) \in \Omega : x, y, z \in [0, 5]\}$

$\Omega = V = 125$

$A = \{(x,y,z) \in \Omega : \min(x,y,z) > 2\} = \{(x,y,z) \in \Omega : x>2 \wedge y>2 \wedge z>2\}$

$\partial(A) = 3^3 = 27$

$p(A) = \frac{27}{125}$

b) Oblicz prawdopodobieństwo, że ich maksimum jest większe od 3.

$\Omega = \{(x, y, z) \in \Omega : x, y, z \in [0, 5]\}$

$\Omega = V = 125$

$A = \{(x,y,z) \in \Omega : \max(x,y,z) > 3\} = \{(x,y,z) \in \Omega : x>3 \vee y>3 \vee z>3\}$

$A' = \{(x,y,z) \in \Omega : x \le 3 \wedge y \le 3 \wedge z \le 3\}$

$\partial_3(A') = 3^3 = 27$

$p(A') = \frac{27}{125}$

$p(A) = 1 - p(A')$

$p(A) = \frac{98}{125}$

KONIEC