2. Macierze. Podstawowe operacje na macierzach. Rząd i wyznacznik macierzy.

Definicja macierzy:

Definicja *Macierzą* o m wierszach i n kolumnach (gdzie $m, n \in \mathbb{R}$) lub krótko *macierzą* $m \times n$ nazywamy każde odwzorowanie $A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to \mathbb{R}$.

Piszemy wówczas $A = [a_{ij}]_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$ lub

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Wektor

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$$

nazywamy i–tym *wierszem* macierzy A, a wektor

$$\begin{bmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{jm} \end{bmatrix}$$

j–tą *kolumną* macierzy A.

Definicja: **Macierz kwadratowa**

Jeżeli liczba kolumn i wierszy w macierzy są sobie równe, to macierz nazywamy kwadratową.

Definicja: **Macierz diagonalna**

Macierzą diagonalną nazywamy macierz kwadratową, której wszystkie elementy poza przekątną (diagonalą) są równe zero.

Suma (różnica) macierzy:

Niech A = [aij], B = [bij] będą macierzami wymiaru m x n.
Sumą (rożnicą) macierzy A i B nazywamy macierz C = [cij],
której elementy określone są wzorem: cij = aij ± bij dla 1 ≤ i ≤ m oraz 1 ≤ j ≤ n. Piszemy C = A ± B.

Przykład:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 8 & 1 & -2 \\ 5 & 8 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 9 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \end{bmatrix} \qquad A + B = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 13 \\ 8 & 0 & -2 \\ 8 & 15 & 0 \end{bmatrix}, A - B = \begin{bmatrix} -5 & -6 & -5 \\ 8 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Iloczyn macierzy przez liczbę:

Niech A = [aij] będzie macierzą wymiaru m x n oraz niech α∊R.
Iloczynem macierzy A przez liczbę α nazywamy macierz B = [bij],
której elementy określone są wzorem:
bij = α* aij dla 1 ≤ i ≤ m oraz 1 ≤ j ≤ n.
Piszemy B = α * A=[α* aij].

Przykład:

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -9 \\ 15 & 21 & -3 \end{bmatrix}, \alpha = 1/3. \qquad \alpha * A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & -3 \\ 5 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad 2 \cdot C = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Iloczyn macierzy przez macierz:

$$A=\begin{bmatrix}2&1&3\\5&-1&2\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}3&1\\4&2\\0&2\end{bmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}2&1&3\\5&-1&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3&1\\4&2\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot3+1\cdot4+3\cdot0+2\cdot1+1\cdot2+3\cdot2\\5\cdot3+(-1)\cdot4+2\cdot0+5\cdot1+(-1)\cdot2+2\cdot2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}10&10\\11&7\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\-4&3\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}5&1\\2&0\end{bmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}2&1\\-4&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5&1\\2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot5+1\cdot2 & 2\cdot1+1\cdot0\\-4\cdot5+3\cdot2 & (-4)\cdot1+3\cdot0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12&2\\-14&-4\end{bmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{bmatrix}5&1\\2&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&1\\-4&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&8\\4&2\end{bmatrix}$$

TAK

A = 3x4 B = 4x2

bo A k=4 = B w=4

bo B k=2 a A w=3

NIE

II sposób

	2 4 0	1 2 2
2 1 3	10	10
5 -1 2	11	7

UWAGA! Macierz A można pomnożyć przez macierz B z prawej strony tylko wtedy, gdy ilość kolumn macierzy A jest równa ilości wierszy macierzy B.

Definicja Macierzy Transponowanej

Macierzą transponowaną A^T względem macierzy A nazywamy macierz powstałą z macierzy A przez przestawienie w niej wierszy na miejsce kolumn z zachowaniem kolejności.

Własności macierzy transponowanej:

- $(AB)^T = B^T A^T$,
- $(A^T)^T = A$
- $(cA)^T = cA^T$, c - stała

Przykład:

Dla macierzy $A=\begin{bmatrix}3&2&5\\1&2&3\end{bmatrix}$ macierzą transponowaną jest: $A^T=\begin{bmatrix}3&1\\2&2\\5&3\end{bmatrix}$

Rząd macierzy

Podmacierz macierzy A powstaje poprzez skreślenie pewnej ilości wierszy i kolumn.

RZĄD MACIERZY

Rząd macierzy, to stopień największego niezerowego minora macierzy

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\end{bmatrix}_{2\times4} \qquad \begin{vmatrix}1&2\\5&6\end{vmatrix}=6-10=-4\neq0$$

$$\downarrow$$

$$r(A)=2$$

$$\max(r)=\min(m,n)$$

MINORY MACIERZY

Minorem macierzy A nazywamy wyznacznik z podmacierzy macierzy A powstałej poprzez wykreślenie jakiejś ilości wierszy oraz kolumn.
Powstała podmacierz musi być kwadratowa.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Minor jest to taki podwyznacznik macierzy lub innego wyznacznika. Powstaje on, jeżeli w macierzy (lub wyznaczniku) skreślimy pewną ilośd kolumn i wierszy, a z pozostałych elementów zbudujemy wyznacznik.

Tak jak poniżej:

Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

Jeżeli skreślimy pierwszą kolumnę tej macierzy i pierwszy wiersz to otrzymamy minor drugiego stopnia:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Innym minorem drugiego stopnia wyjętym z macierzy A może byd np. $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

W macierzy A został skreślony drugi wiersz i trzecia kolumna.

Minory mogą byd też stopnia pierwszego, jeżeli skreślimy drugi i trzeci wiersz oraz drugą i trzecią kolumnę to powstanie: $m_{11} = |1|$

Wyznacznik macierzy 2 x 2

Wyznacznik, jest to pewna liczba, którą przyporządkowujemy każdej macierzy kwadratowej. Wyznacznik macierzy wymiaru 2x2 obliczamy następująco:

Dla macierzy:

Obliczamy wyznacznik: $detB = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 7 \cdot (-4) = -2 + 28 = 26$

Wyznacznik macierzy 3 x 3

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - b_1a_2c_3 + b_1a_3c_2 + c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2$$

Mamy macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Aby obliczyć wyznacznik tej macierzy, najpierw pomocniczo pod wyznacznikiem, jeszcze raz przepisujemy pierwszy i drugi wiersz tej macierzy. Tak jak poniżej:

$$\begin{array}{l} det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \\ \qquad\quad \begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \end{matrix} \end{array}$$

Pierwsza część obliczania wyznacznika to: (wzór Sarrusa)

$$\begin{array}{l} det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 5 + 3 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \cdot (-4) \ldots \\ \qquad\quad \begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \end{matrix} \end{array}$$

Mnożymy elementy zaznaczone tym samym kolorem a następnie sumujemy te iloczyny.

Przechodzimy do drugiej części.

$$\begin{array}{l} det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 5 + 3 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \cdot (-4) \\ \qquad\quad \begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \end{matrix} \qquad - 2 \cdot 0 \cdot 2 - (-4) \cdot 3 \cdot 1 - 5 \cdot (-1) \cdot 3 \end{array}$$

Mnożymy wyrazy zaznaczone tym samym kolorem i odejmujemy te iloczyny.

Po wykonaniu tych wszystkich działao otrzymujemy, że wyznacznik macierzy A jest równy:

$$det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 5 + 3 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \cdot (-4)$$

$$-2 \cdot 0 \cdot 2 - (-4) \cdot 3 \cdot 1 - 5 \cdot (-1) \cdot 3 = 13$$

Wyznacznik większego stopnia

Metoda Laplace'a

Dana jest macierz kwadratowa $A = [a_{ij}]$ stopnia $n \geq 2$
Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy A nazywamy liczbę D_{ij} taką, że

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

gdzie A_{ij} oznacza macierz otrzymaną przez skreślenie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny w macierzy A.

Definicja
Wyznacznikiem nazywamy funkcję przyporządkowującą każdej macierzy kwadratowej A o wyrazach z $\mathbb{R}$ pewną liczbę rzeczywistą oznaczaną det *A i spełniającą:*
(i) Jeśli $A = [a]$ *to* $\det A = a$
(ii) Jeśli

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \textit{gdzie } n > 1, \textit{ to} \det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

Wyznacznik macierzy to funkcja określona na macierzach kwadratowych związana z mnożeniem i dodawaniem odpowiednich elementów danej macierzy tak, by otrzymać pojedynczą liczbę. Inaczej mówiąc wyznacznik macierzy **jest to liczba rzeczywista przyporządkowana macierzy kwadratowej.** Wyznacznik oznaczamy symbolicznie det$A$ lub $|A|$.

Tw. Laplace'a

Wyznacznik macierzy A można obliczyć:

1. Rozwijając wyznacznik względem i-tego wiersza

$$\det A = a_{i1} D_{i1} + a_{i2} D_{i2} + \ldots + a_{in} D_{in}$$

2. Rozwijając wyznacznik względem j-tej kolumny

$$\det A = a_{1j} D_{1j} + a_{2j} D_{2j} + \ldots + a_{nj} D_{nj}.$$

Własności wyznaczników.

- Jeżeli wyznacznik ma **dwa takie same wiersze**, lub dwie takie same kolumny to jest on **równy zero**.
- Jeżeli w wyznaczniku do elementów jednego wiersza (lub kolumny) dodamy lub odejmiemy dowolną kombinację liniową innych wierszy lub kolumn to wartość wyznacznika nie zmieni się.
- Zamiana kolejnością dwóch wierszy lub kolumn, powoduje, że wartość wyznacznika zmienia się na przeciwną.
- Jeżeli wiersz lub kolumnę wyznacznika pomnożymy przez pewną liczbę, to wartość wyznacznika też zostanie pomnożona przez tą liczbę.

Pamiętaj, że te same operacje co na wierszach, możemy wykonywać na kolumnach wyznacznika!

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot D_{13} + (-2)\cdot D_{23} + 1\cdot D_{33} + 3\cdot D_{43} =$$

$$= 2\cdot 6 + (-2)\cdot(-5) + 1\cdot 14 + 3\cdot(-26) = \underbrace{12 + 10 + 14}_{38} - 78 = \boxed{-42}$$

$$D_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\left(\overset{6}{2\cdot 3\cdot 1} + \overset{24}{3\cdot 2\cdot 4} + \overset{8}{1\cdot 4\cdot 2} - (\underset{12}{4\cdot 3\cdot 1} + \underset{8}{2\cdot 2\cdot 2} + \underset{12}{1\cdot 4\cdot 3})\right) = 6$$

$$\begin{matrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{matrix}$$

32 38

$$D_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1\cdot\left(\overset{-3}{(-1)\cdot 3\cdot 1} + \overset{18}{3\cdot 2\cdot 3} + \overset{10}{1\cdot 5\cdot 2} - (\underset{9}{3\cdot 3\cdot 1} + \underset{-4}{2\cdot 2(-1)} + \underset{15}{1\cdot 5\cdot 3})\right) = -5$$

$$\begin{matrix} -1 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{matrix}$$

25 20

$$D_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\left(\overset{-4}{(-1)\cdot 4\cdot 1} + \overset{12}{2\cdot 2\cdot 3} + \overset{20}{1\cdot 5\cdot 4} - (\underset{12}{3\cdot 4\cdot 1} + \underset{-8}{4\cdot 2(-1)} + \underset{10}{1\cdot 5\cdot 2})\right) = 14$$

$$\begin{matrix} -1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{matrix}$$

28 14

$$D_{43} = (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1\cdot\left(\overset{-8}{(-1)\cdot 4\cdot 2} + \overset{18}{2\cdot 3\cdot 3} + \overset{60}{3\cdot 5\cdot 4} - (\underset{36}{3\cdot 4\cdot 3} + \underset{-12}{4\cdot 3(-1)} + \underset{20}{2\cdot 5\cdot 2})\right) = -26$$

$$\begin{matrix} -1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{matrix}$$

70 44

$$\begin{array}{r} 78 \\ -36 \\ \hline 42 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 26 \\ \cdot 3 \\ \hline 78 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 70 \\ -44 \\ \hline 26 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 36 \\ 8 \\ \hline 44 \end{array}$$