

# Системы нечеткого вывода

## Fuzzy Inference Systems

О.М. Аншаков

Российский государственный гуманитарный университет

# Нечеткие множества

## Лингвистические переменные



Понятие *лингвистической переменной*, также как понятие нечеткого множества ввел Лотфи Аскер Заде. Он обратил внимание на тот факт, что в обычной жизни мы не только измеряем значение величины, но и даем величине словесную оценку («маленький», «средний», «большой» и т.п.)

# Нечеткие множества

## Лингвистические переменные

Л.Заде также обратил внимание на тот факт, что в быту люди часто вместо **точных числовых значений** переменных употребляют **словесную оценку** и используют эту оценку при принятии решений.

Например, руководствуются правилом

Если на улице **ХОЛОДНО**, то следует **ТЕПЛО** одеться.

Здесь слово **ХОЛОДНО** является словесной оценкой температуры воздуха, а слово **ТЕПЛО** обозначает характер одежды.

### Лингвистическая переменная

Лингвистическая переменная может принимать как обычные **числовые** значения, так и **лингвистические** (словесные) значения, которые являются неформальной оценкой количества или интенсивности.

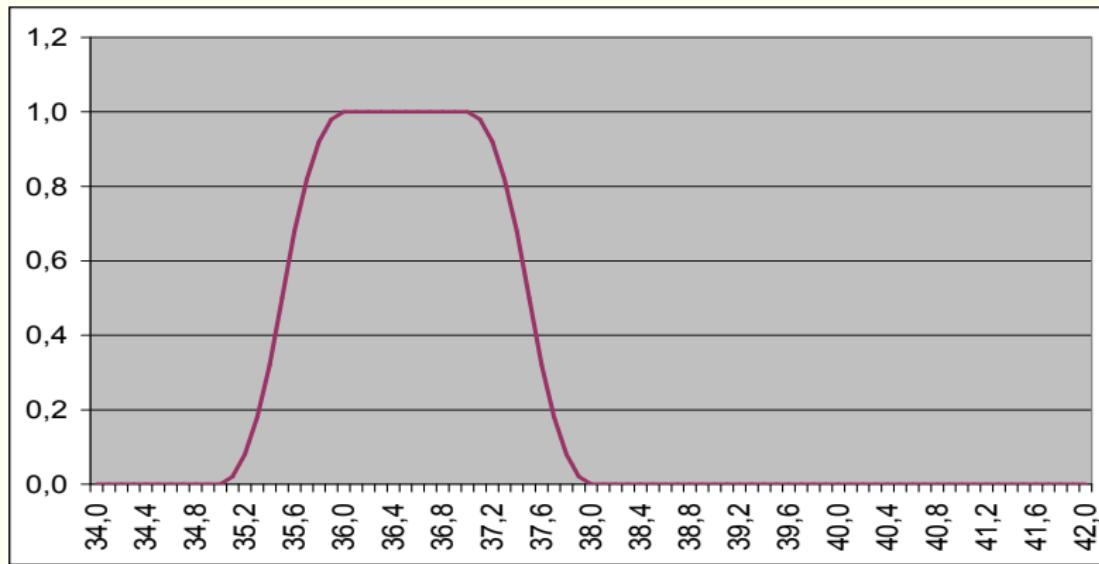
Л.Заде также обратил внимание на тот факт, что словесной оценке переменной можно поставить в соответствие функцию, принимающую значения на отрезке  $[0, 1]$ , т.е. функцию принадлежности некоторому нечеткому множеству.

Словесную оценку лингвистической переменной можно рассматривать как выражение  $x$  is  $l$ , где  $x$  – переменная,  $l$  – словесное (лингвистическое) значение, являющееся неформальной оценкой количества или интенсивности (Л.Заде называл такое значение лингвистическим термом).

Рассмотрим переменную  $Temperature$ , обозначающую температуру тела человека и оценим ее как нормальную, т.е. рассмотрим словесную оценку  $Temperature$  is  $Normal$ . Этой оценке можно поставить в соответствие функцию принадлежности.

# Нечеткие множества

## Лингвистические переменные



## Определение

Лингвистическая переменная — это кортеж

$$\langle N, D, T, G, M \rangle,$$

где

- $N$  — имя переменной;
- $D$  — домен (универсум — область изменения переменной);
- $T$  — непустое множество исходных (элементарных) лингвистических термов — лингвистических констант;
- $G$  — грамматика (множество правил порождения новых лингвистических термов);
- $M$  — способ приписывания значений лингвистическим термам.

### Грамматика

Грамматику  $G$  можно описать, определив лингвистические термы по индукции.

**БАЗИС ИНДУКЦИИ.** Если  $t \in T$ , то  $t$  — лингвистический терм.

**ШАГ ИНДУКЦИИ.** Пусть  $t$  и  $s$  — лингвистические термы.

Тогда лингвистическими термами являются также выражения:  $(t \wedge s)$ ,  $(t \vee s)$ ,  $(\neg t)$ ,  $(\sharp t)$ ,  $(\flat t)$ .

### Значения лингвистических термов

Значения лингвистических термов также определим по индукции:

**БАЗИС ИНДУКЦИИ.** Каждому исходному лингвистическому терму  $t \in T$  поставим в соответствие нечеткое множество  $M(t)$  над универсумом  $D$ .

**ШАГ ИНДУКЦИИ.** Пусть  $M(t)$  и  $M(s)$  — уже определены.

Тогда положим по определению:

- $M(t \wedge s) = M(t) \cap M(s),$
- $M(t \vee s) = M(t) \cup M(s),$
- $M(\neg t) = \overline{M(t)},$

### Значения лингвистических термов

Значения  $M(\sharp t)$  и  $M(\flat t)$  определяются с помощью функции принадлежности:

- $\mu_{M(\sharp t)}(x) = (\mu_{M(t)}(x))^2,$
- $\mu_{M(\flat t)}(x) = \sqrt{\mu_{M(t)}(x)}.$

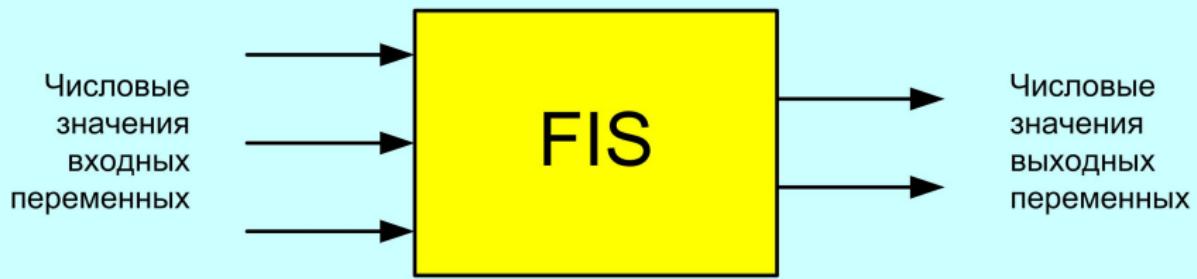
# Система нечеткого вывода Fuzzy Inference System (FIS)



Первую систему управления, основанную на нечетких множествах и лингвистических переменных предложил Ибрагим Мамдани (Ebrahim Mamdani) в 1975 г.

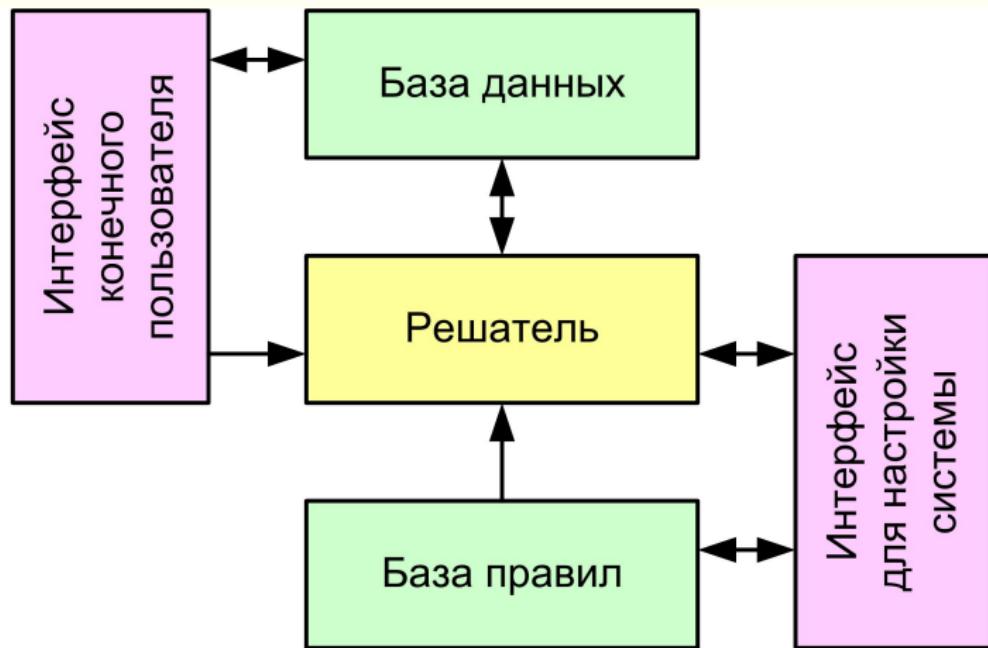
# Система нечеткого вывода

## Черный ящик



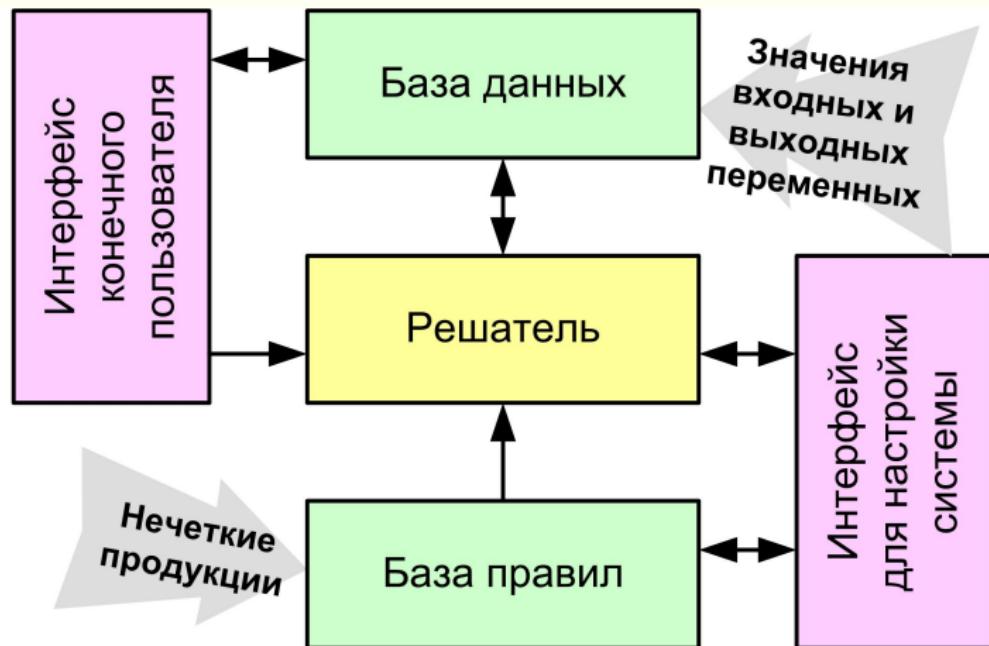
# Система нечеткого вывода

## Интеллектуальная система



# Система нечеткого вывода

## Интеллектуальная система



## Определение

*Алфавит* языка системы нечеткого вывода включает:

- конечное множество **I** входных переменных,
- конечное множество **O** выходных переменных,
- для каждого  $X \in I \cup O$  терм-множество переменной  $X$  — множество элементарных лингвистических термов для  $X$  (обозначается  $T(X)$ ),
- бинарный предикатный символ **is**,
- логические связки  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ .

## Определение

Выражение вида  $X \text{ is } t$ , где  $X \in \mathbf{I} \cup \mathbf{O}$ ,  $t \in T(X)$ , назовем *атомарной формулой*.

Если  $X \in \mathbf{I}$ , то атомарная формула называется *входной*, если  $X \in \mathbf{O}$  — *выходной*.

## Определение

*Литералом* называется атомарная формула  $X \text{ is } t$  или ее отрицание  $\neg X \text{ is } t$ .

Мы будем рассматривать только *входные* литералы.

## Определение

*Конъюнктом* будем называть конъюнкцию одного или нескольких литералов. Более формально:

**БАЗИС ИНДУКЦИИ.** Каждый литерал является *конъюнктом*.

**ШАГ ИНДУКЦИИ.** Если  $A$  — *конъюнкт*,  $L$  — литерал, то выражение  $A \wedge L$  — также является *конъюнктом*.

Мы будем рассматривать только *входные* конъюнкты.

## Определение

*Дизъюнктом* будем называть дизъюнкцию одного или нескольких конъюнктов. Более формально:

**БАЗИС ИНДУКЦИИ.** Каждый конъюнкт является *дизъюнктом*.

**ШАГ ИНДУКЦИИ.** Если  $A$  — *дизъюнкт*,  $B$  — конъюнкт, то выражение  $A \vee B$  — также является *дизъюнктом*.

Мы будем рассматривать только *входные* дизъюнкты.

## Определение

Выражение вида  $A \rightarrow C$  будем называть (нечеткой) *продукцией*, если  $A$  — *входной дизюнкт*,  $C$  — *выходная атомарная формула*.

$A$  будем называть *антецедентом* (посылкой) *продукции*.

$C$  будем называть *консеквентом* (заключением) *продукции*.

## Обозначение

Пусть продукция обозначена через  $p$ .

Тогда через  $A(p)$  будем обозначать *антecedент* продукции  $p$ .

Через  $C(p)$  будем обозначать *консеквент* продукции  $p$ .

## Определение

*Система нечеткого вывода* считается заданной, если заданы:

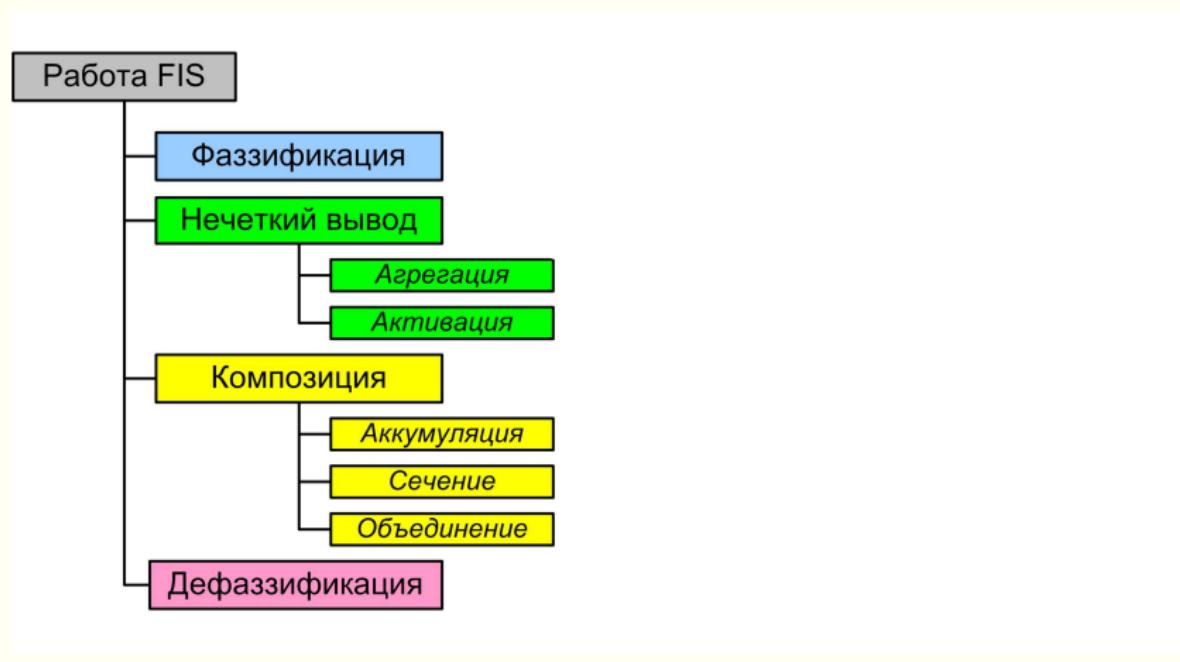
- ① конечное множество  $I$  входных переменных,
- ② конечное множество  $O$  выходных переменных,
- ③ для каждого  $X \in I \cup O$  заданы:
  - домен (универсум) переменной  $X$  (обозначается  $D(X)$ ),
  - терм-множество переменной  $X$  (обозначается  $T(X)$ ),
- ④ для каждого  $X \in I \cup O$  и каждого  $t \in T(X)$  задана функция принадлежности  $M_t^X: D(X) \rightarrow [0, 1]$ ,

## Продолжение определения

- ⑤ конечное множество  $P$  нечетких продукций,
- ⑥ для каждого  $p \in P$  задана степень доверия  $B(p) \in [0, 1]$ ,
- ⑦  $t$ -нормы и  $s$ -нормы для разных этапов работы системы нечеткого вывода (обозначаются  $\Pi_a, \Pi_b, \Pi_c, \sqcup_a, \sqcup_c$ ),
- ⑧ методы дефазификации (возможно, разные для разных выходных переменных).

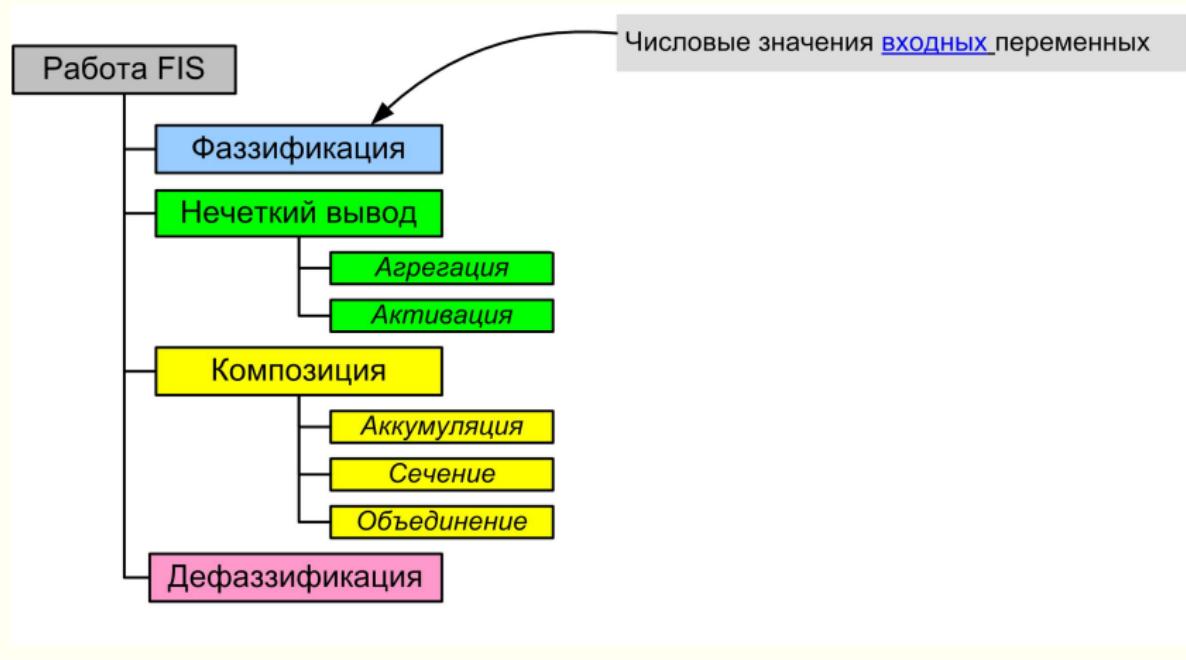
# Система нечеткого вывода

## Этапы работы



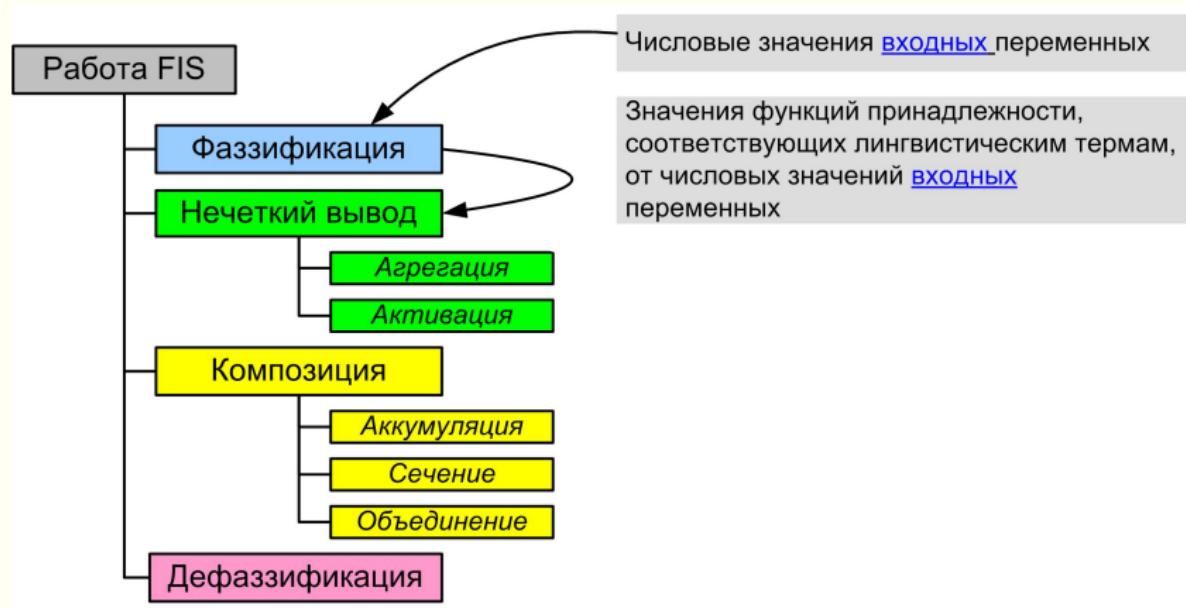
# Система нечеткого вывода

## Этапы работы



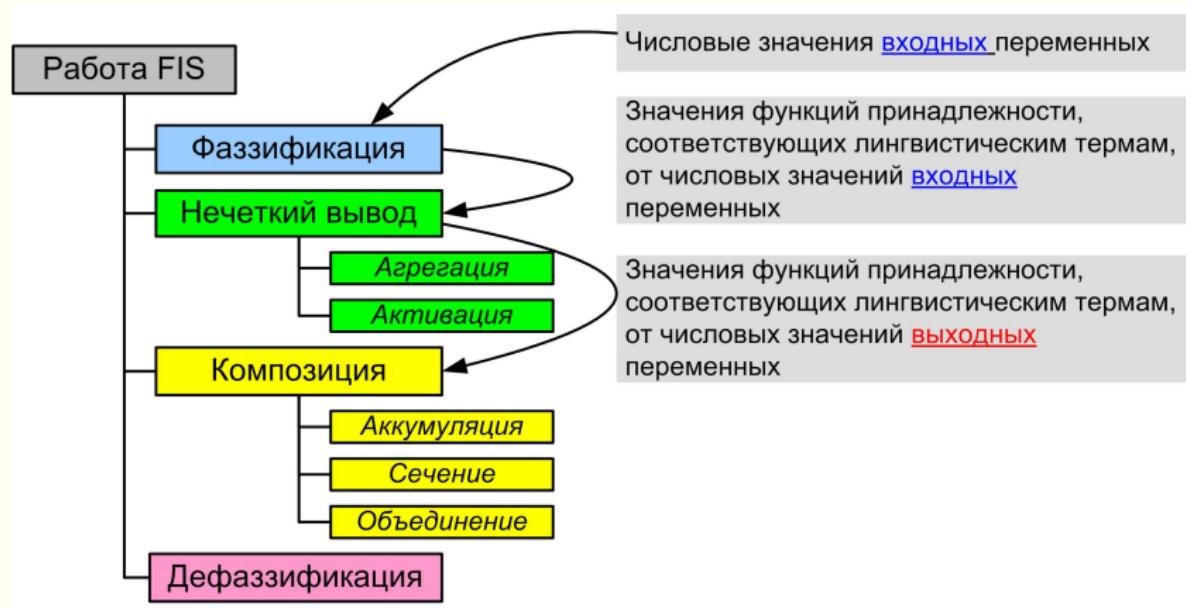
# Система нечеткого вывода

## Этапы работы



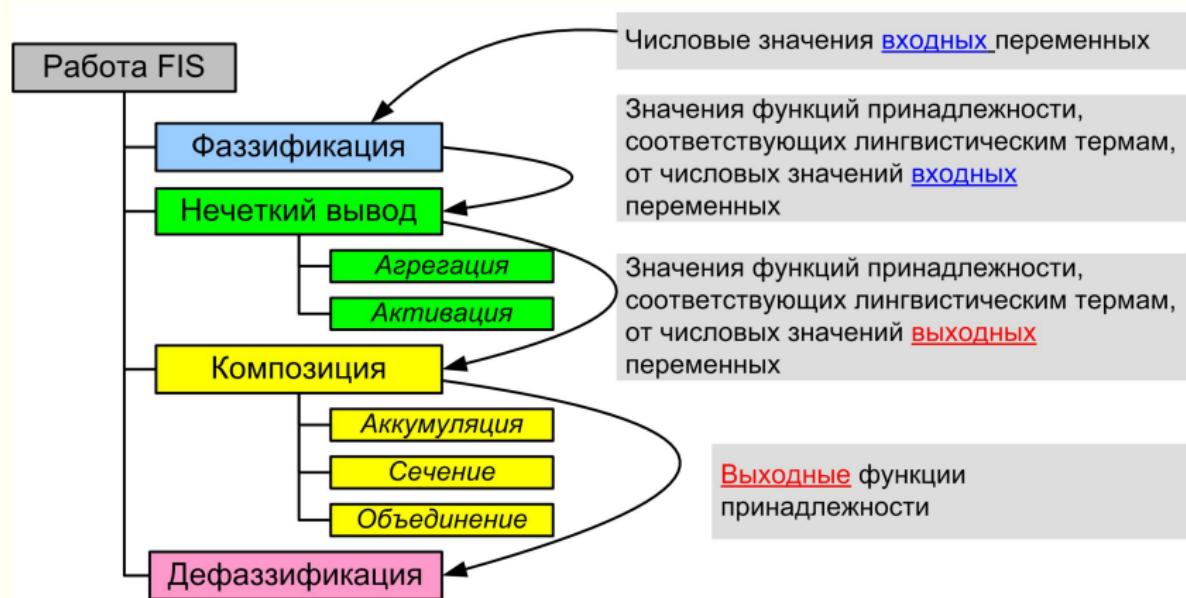
# Система нечеткого вывода

## Этапы работы



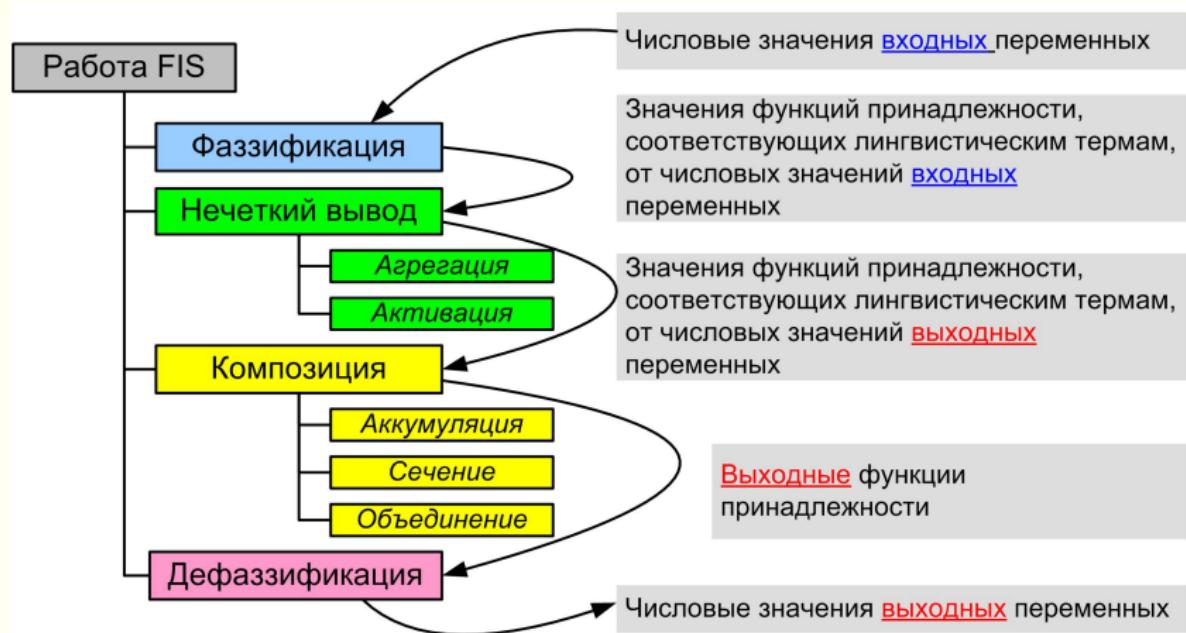
# Система нечеткого вывода

## Этапы работы



# Система нечеткого вывода

## Этапы работы



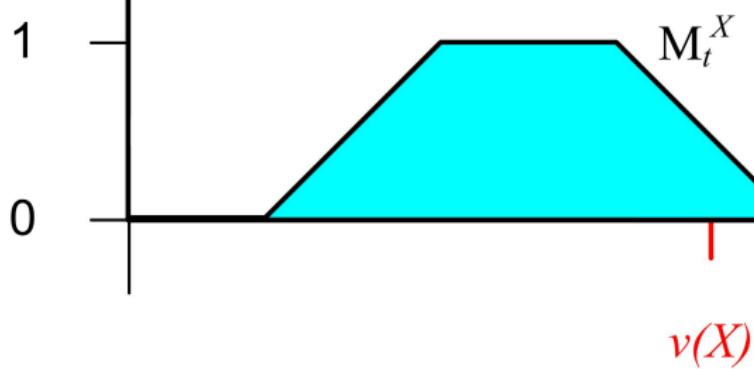
## Неформальное объяснение

Во время фаззификации для каждой пары  $\langle X, t \rangle$ , где  $X \in I$ ,  $t \in T(X)$  вычисляется *значение функции принадлежности*  $M_t^X$  от *значения* переменной  $X$ .

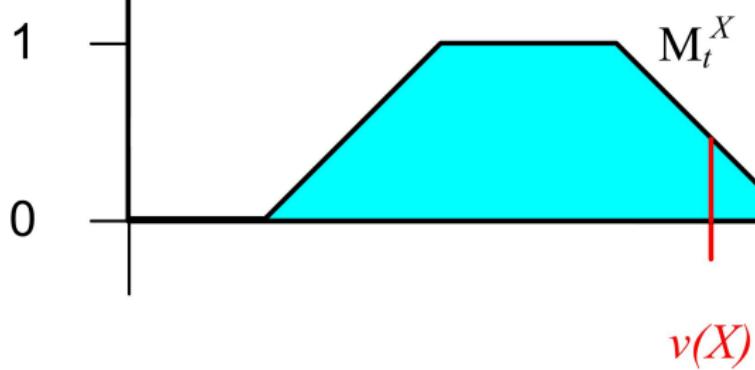
Вычисленное значение функции принадлежности запоминается в элементе, который мы будем обозначать  $M[X, t]$ , для последующего использования.

Для удобства *значение* переменной  $X$  будем обозначать через  $v(X)$ .

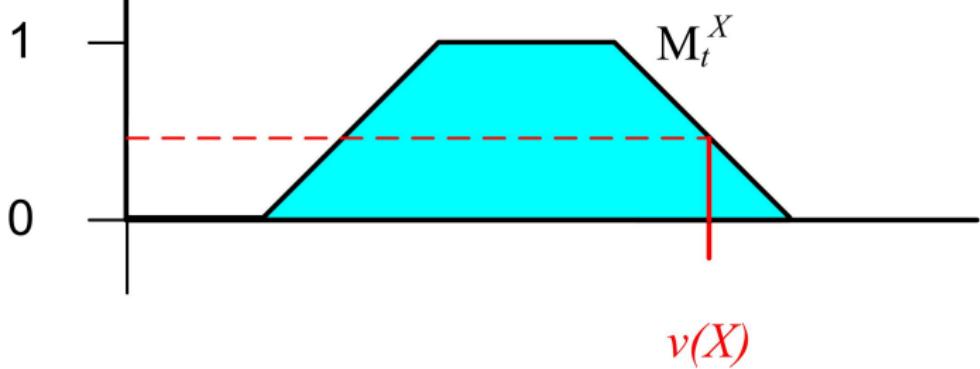
# Фазификация



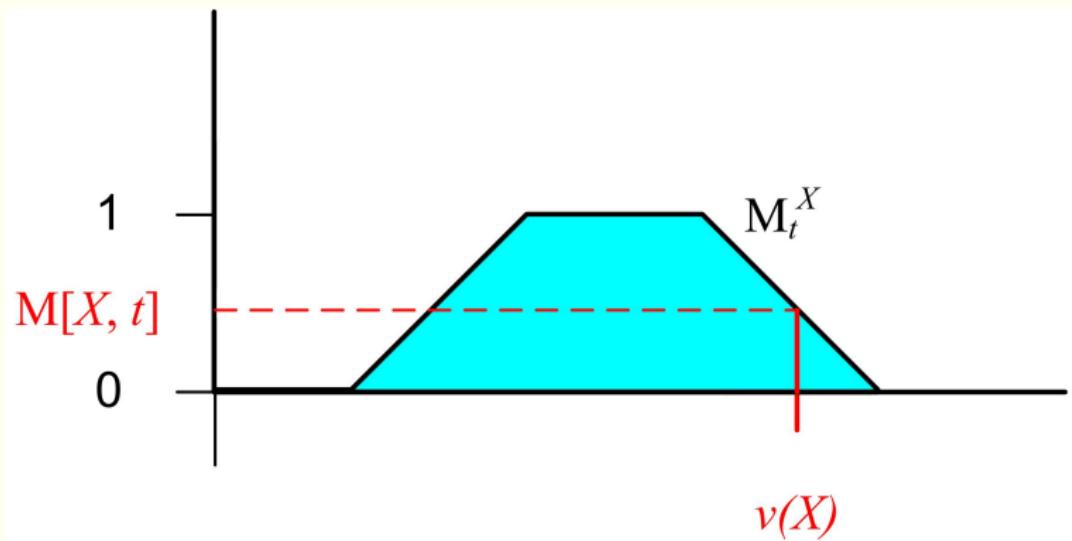
# Фазификация



# Фазификация



# Фазификация



## Алгоритм

```
for all  $X \in I$  do
    for all  $t \in T(X)$  do
         $M[X, t] \leftarrow M_t^X(v(X))$ 
    end for
end for
```

## Агрегация

*Агрегация* — это вычисление значений антецедентов продукции.

В общем случае, антецедент продукции — это *дизъюнкт*, который состоит из *конъюнктов*, состоящих из *литералов*.

Введем обозначения:

- $\text{Con}(d)$  — список конъюнктов дизъюнкта  $d$ ,
- $\text{Lit}(c)$  — список литералов конъюнкта  $c$ ,
- $\text{Neg}(l)$  — признак наличия отрицания в литерале  $l$ ,
- $\text{Var}(l)$  — переменная, входящая в литерал  $l$ ,
- $\text{LTerm}(l)$  — лингвистический терм, входящий в литерал  $l$ ,
- $v(z)$  — значение  $z$ .

# Агрегация

## Алгоритм

```
for all  $p \in P$  do
     $v(A(p)) \leftarrow 0$ 
    for all  $c \in \text{Con}(A(p))$  do
         $v(c) \leftarrow 1$ 
        for all  $l \in \text{Lit}(c)$  do
             $v(l) \leftarrow M[\text{Var}(l), \text{LTerm}(l)]$ 
            if  $\text{Neg}(l)$  then
                 $v(l) \leftarrow 1 - v(l)$ 
            end if
             $v(c) \leftarrow v(c) \sqcap_a v(l)$ 
        end for
         $v(A(p)) \leftarrow v(A(p)) \sqcup_a v(c)$ 
    end for
end for
```

### Активация

*Активация* — это вычисление значений *консеквентов* продукции.

При вычислении используется *степень доверия* к продукции.

## Алгоритм

```
for all  $p \in P$  do
     $v(C(p)) \leftarrow v(A(p)) \sqcap_b B(p)$ 
end for
```

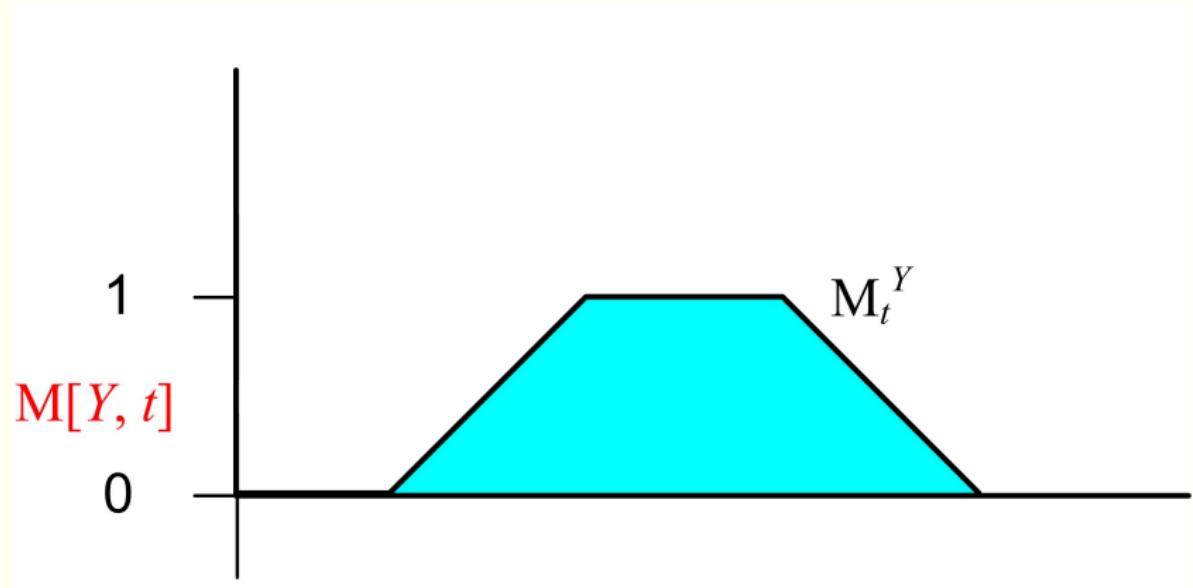
## Алгоритм

```
for all  $Y \in O$  do
    for all  $t \in T(Y)$  do
         $M[Y, t] \leftarrow 0$ 
        for all  $p \in P$  do
            if  $\text{Var}(C(p)) = Y$  and  $\text{LTerm}(C(p)) = t$  then
                 $M[Y, t] \leftarrow M[Y, t] \sqcup_c v(C(p))$ 
            end if
        end for
    end for
end for
```

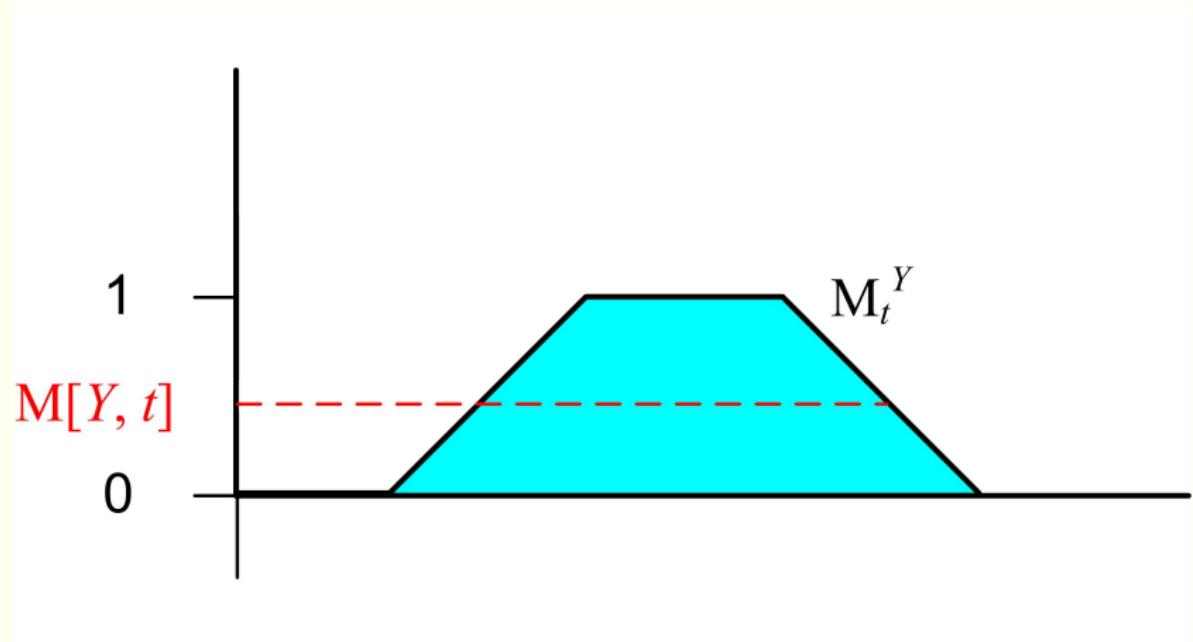
## Обозначение

Обозначим через  $\overline{M}_t^Y$  «усеченную» функцию принадлежности для пары  $\langle Y, t \rangle$ .

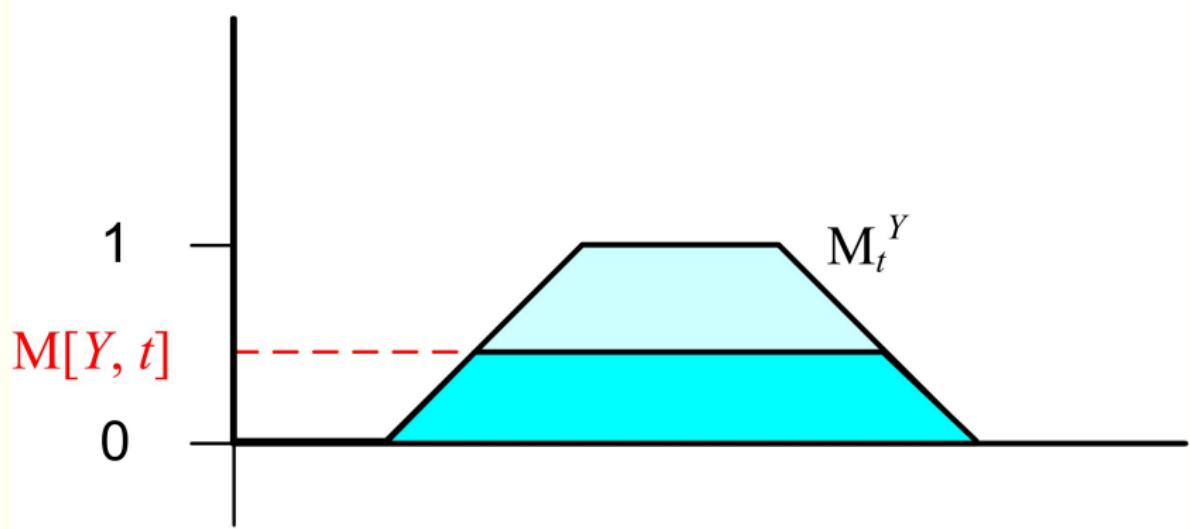
# Сечение График



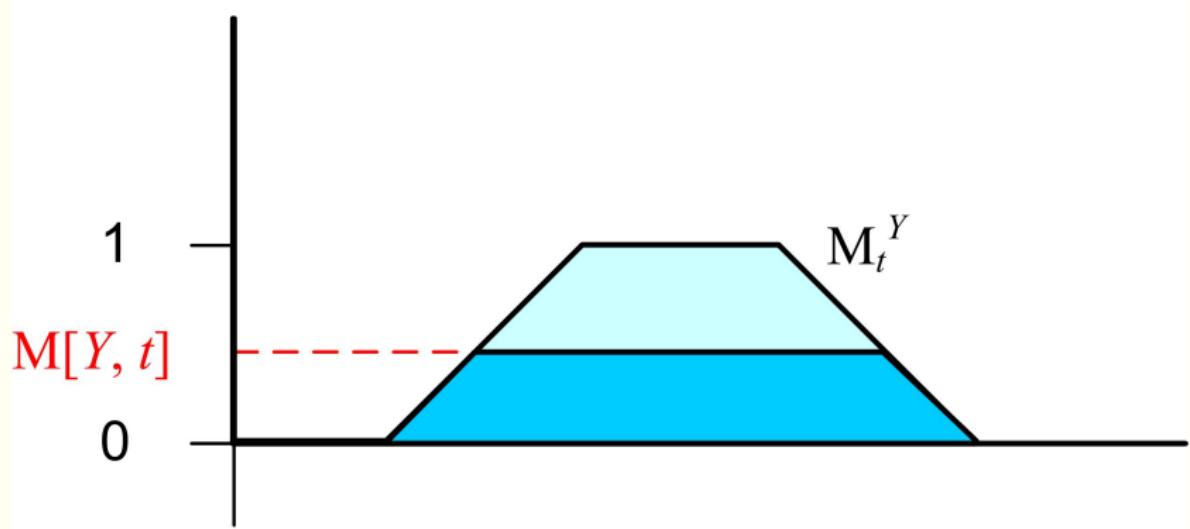
# Сечение График



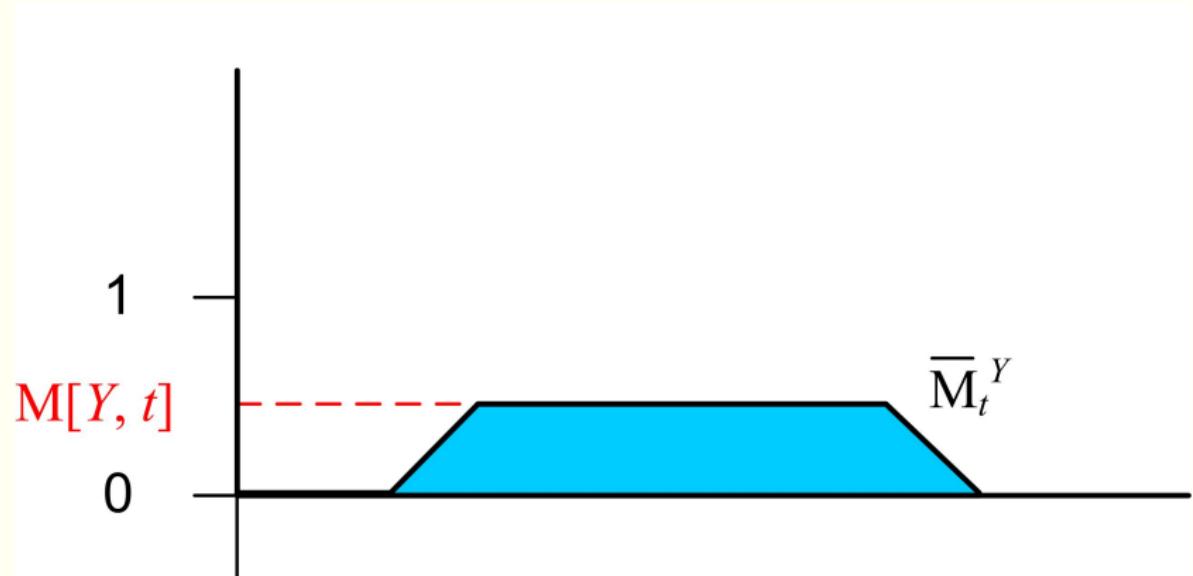
# Сечение График



# Сечение График



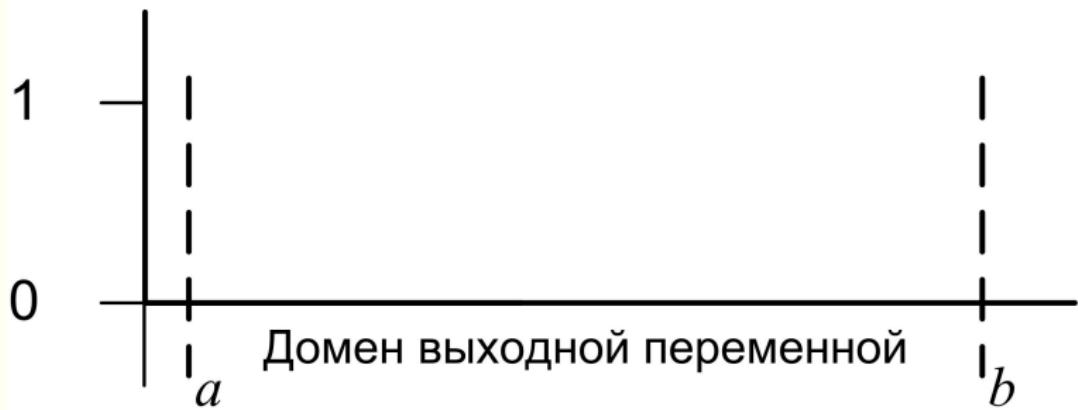
# Сечение График



## Алгоритм

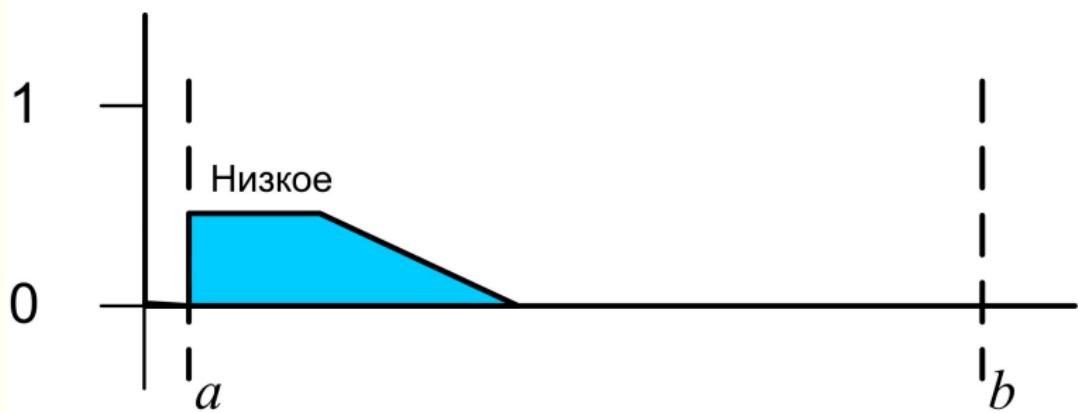
```
for all  $Y \in O$  do
    for all  $t \in T(Y)$  do
        for all  $z \in D(Y)$  do
             $\bar{M}_t^Y(z) \leftarrow M_t^Y(z) \sqcap_c M[Y, t]$ 
        end for
    end for
end for
```

# Объединение График



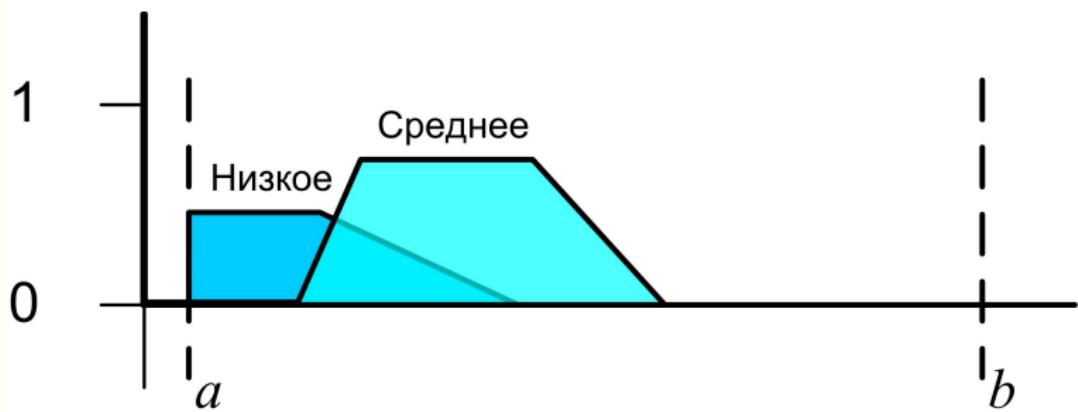
# Объединение

## График

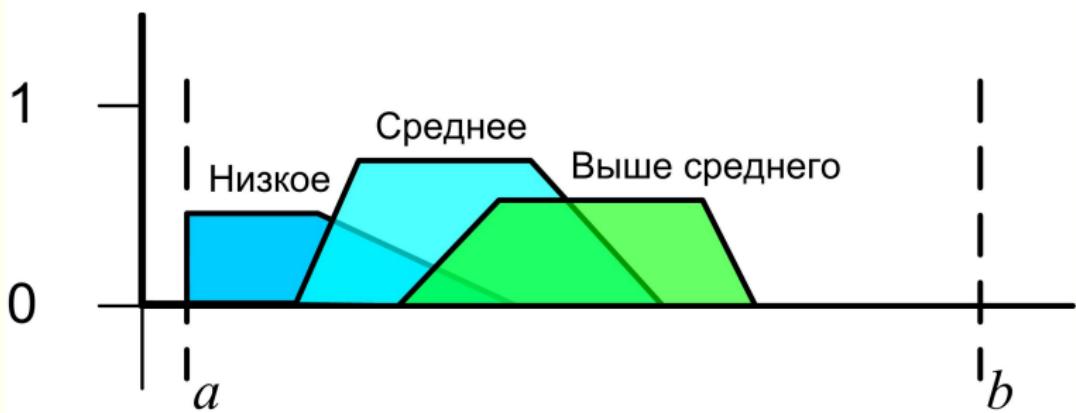


# Объединение

## График

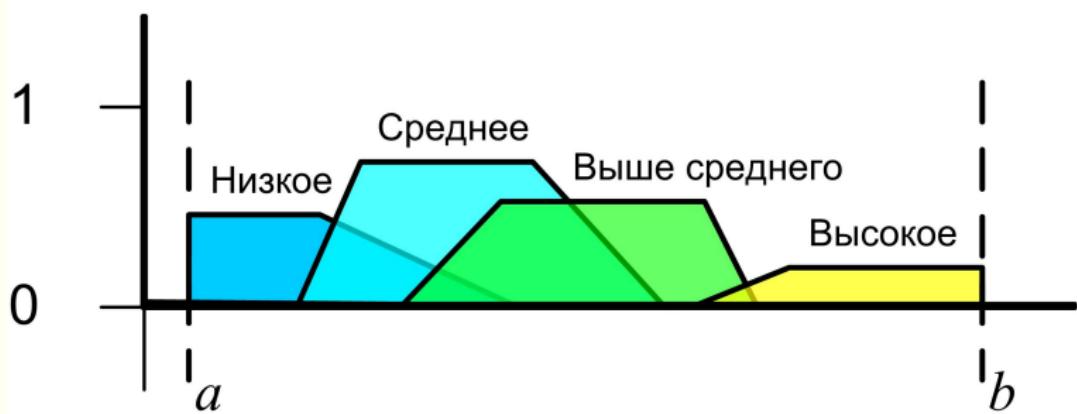


# Объединение График

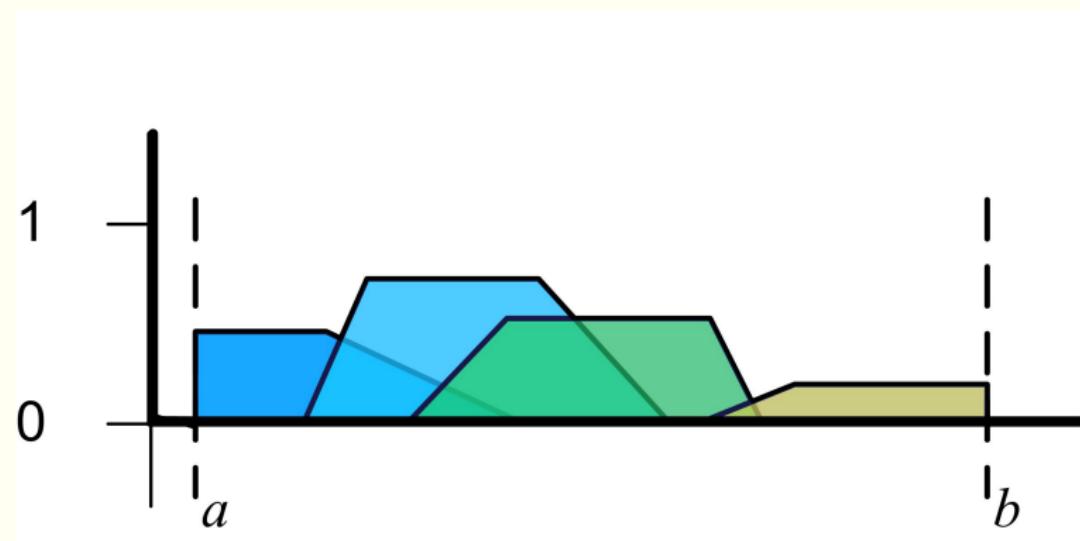


# Объединение

## График



# Объединение График



# Объединение

## График



## Обозначение

Обозначим через  $M^Y$  «обобщенную» или «объединенную» функцию принадлежности для выходной переменной  $Y$ .

## Алгоритм

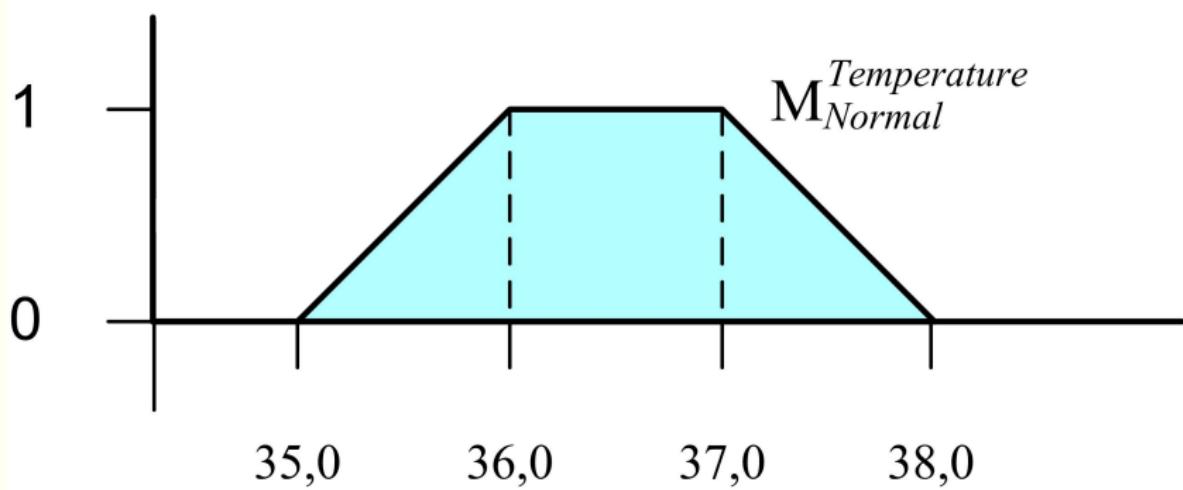
```
for all  $Y \in \mathbf{O}$  do
    for all  $z \in D(Y)$  do
         $M^Y(z) \leftarrow 0$ 
        for all  $t \in T(Y)$  do
             $M^Y(z) \leftarrow M^Y(z) \sqcup_c \bar{M}_t^Y(z)$ 
        end for
    end for
end for
```

### Неформальное объяснение

*Дефазификация* позволяет находить «типичного представителя» нечеткого множества, заданного своей функцией принадлежности.

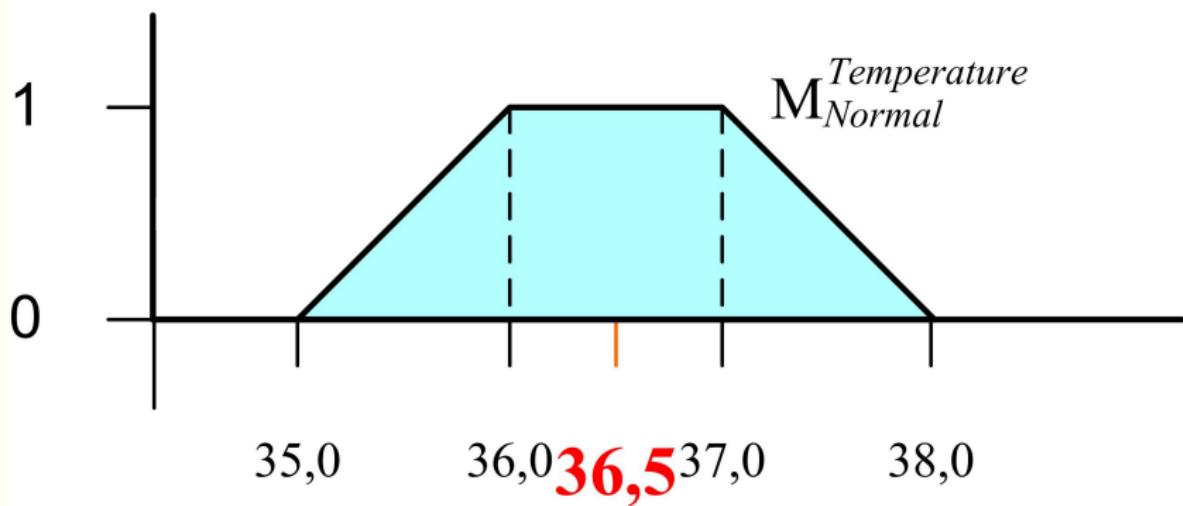
# Дефазификация

## Иллюстрация



# Дефазификация

## Иллюстрация



### Математическая интерпретация

Любой *метод дефазификации*  $DM$  можно рассматривать как отображение

$$DM: [0, 1]^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R},$$

где  $\mathbb{R}$  — множество вещественных чисел,  $[0, 1]^{\mathbb{R}}$  — множество функций, определенных на  $\mathbb{R}$  и принимающих значения на отрезке  $[0, 1]$ .

### Интуитивный смысл

*Метод дефазификации DM* ставит в соответствие каждой функции  $f$ , определенной на  $\mathbb{R}$  со значениями в  $[0, 1]$ , единственное вещественное число  $x$ , которое можно интерпретировать как *типичного представителя* нечеткого множества с функцией принадлежности  $f$ .

## Алгоритм

```
for all  $Y \in O$  do
     $v(Y) \leftarrow DM(M^Y)$ 
end for
//  $DM$  – метод дефазификации
```

# Методы дефазификации

## Центроидный метод

### Неформальное объяснение

Значение выходной переменной  $Y$  определяется как центр тяжести фигуры, ограниченной:

- сверху графиком объединенной функции принадлежности  $M^Y$ ,
- снизу — осью абсцисс,
- слева и справа — прямыми  $x = a$  и  $x = b$ , соответственно, где отрезок  $[a, b]$  есть домен выходной переменной  $Y$ .

# Центроидный метод

Формула для вычисления значения выходной переменной

## Формула для вычисления $v(Y)$

$$v(Y) = \frac{\int_a^b x \cdot M^Y(x) dx}{\int_a^b M^Y(x) dx},$$

где

- $Y$  — выходная переменная,
- $M^Y$  — «объединенная» функция принадлежности для переменной  $Y$ ,
- $v(Y)$  — значение выходной переменной  $Y$ ,
- $[a, b]$  — домен выходной переменной  $Y$ .

# Центроидный метод

## Дискретный вариант

Формула для вычисления  $v(Y)$

$$v(Y) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot M^Y(x_i)}{\sum_{i=1}^n M^Y(x_i)},$$

где

- $Y$  — выходная переменная,
- $M^Y$  — «объединенная» функция принадлежности для переменной  $Y$ ,
- $v(Y)$  — значение выходной переменной  $Y$ ,
- $\{x_1, \dots, x_n\}$  — домен выходной переменной  $Y$ .

# Методы дефазификации

## Метод первого (левого) максимума

### Объяснение

Пусть  $M$  — *наибольшее* значение «объединенной» функции принадлежности  $M^Y$  на домене  $D(Y)$ .

Значение выходной переменной  $Y$  определяется как *наименьшее* из тех чисел  $x \in D(Y)$ , для которых  $M^Y(x) = M$ .

# Метод первого (левого) максимума

Формула для вычисления значения выходной переменной

Формула для вычисления  $v(Y)$

Пусть

$$M = \max \{M^Y(x) \mid x \in D(Y)\}.$$

Тогда

$$v(Y) = \min \{x \in D(Y) \mid M^Y(x) = M\}.$$

# Методы дефазификации

## Метод последнего (правого) максимума

### Объяснение

Пусть  $M$  — *наибольшее* значение «объединенной» функции принадлежности  $M^Y$  на домене  $D(Y)$ .

Значение выходной переменной  $Y$  определяется как *наибольшее* из тех чисел  $x \in D(Y)$ , для которых  $M^Y(x) = M$ .

# Метод последнего (правого) максимума

Формула для вычисления значения выходной переменной

Формула для вычисления  $v(Y)$

Пусть

$$M = \max \{M^Y(x) \mid x \in D(Y)\}.$$

Тогда

$$v(Y) = \max \{x \in D(Y) \mid M^Y(x) = M\}.$$

# Методы дефазификации

## Метод среднего максимума

### Объяснение

Пусть  $M$  — *наибольшее* значение «объединенной» функции принадлежности  $M^Y$  на домене  $D(Y)$ .

Значение выходной переменной  $Y$  определяется как *среднее арифметическое* тех чисел  $x \in D(Y)$ , для которых  $M^Y(x) = M$ .

# Метод среднего максимума

Формула для вычисления значения выходной переменной

## Формула для вычисления $v(Y)$

Пусть

$$M = \max \{M^Y(x) \mid x \in D(Y)\}.$$

Тогда

$$v(Y) = \text{avg} \{x \in D(Y) \mid M^Y(x) = M\},$$

где  $\text{avg}\{\dots\}$  — среднее арифметическое элементов множества  $\{\dots\}$ .

### Особенности

Система Мамдани (Mamdani) — это самая обычная система нечеткого вывода. Именно такую систему мы рассматривали выше. В классической системе Мамдани:

- все  $t$ -нормы — минимум, все  $s$ -нормы — максимум;
- в качестве *метода дефазификации* берется центроидный метод.

### Особенности

Система Ларсена (Larsen) отличается от системы Мамдани только подэтапом сечения. В этом подэтапе вместо операции взятия минимума (логического произведения) в системе Ларсена используется обычное (алгебраическое) произведение.

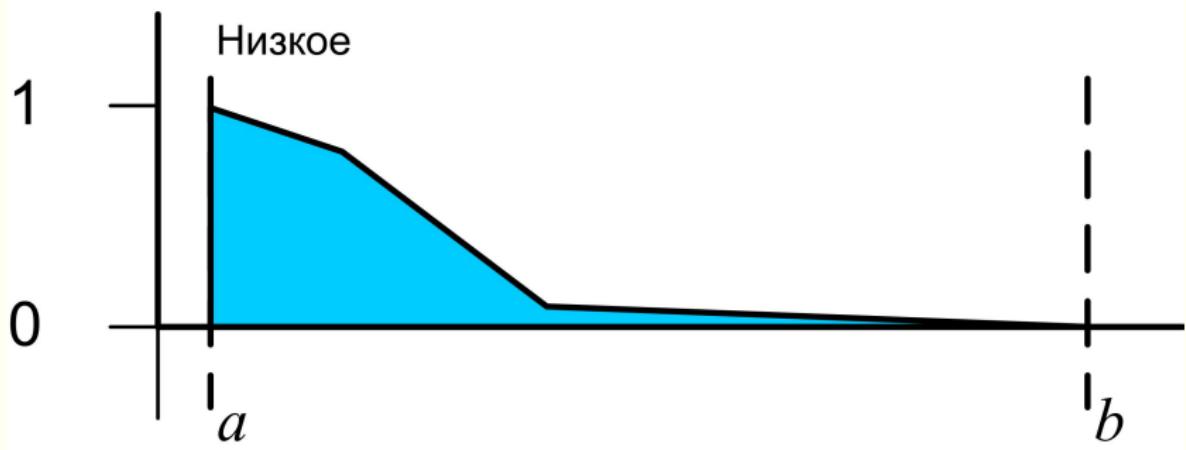
### Особенности

В системе Цукамото (Tsukamoto):

- все функции принадлежности для пар  $\langle Y, t \rangle$ , где  $Y$  — *выходная* переменная,  $t$  — лингвистический терм из  $T(Y)$ , являются строго монотонными;
- подэтап *сечения* заменяется подэтапом *решения уравнений*;
- подэтап *объединения* отсутствует;
- на этапе *дефазификации* происходит вычисление **взвешенного среднего** решений уравнений.

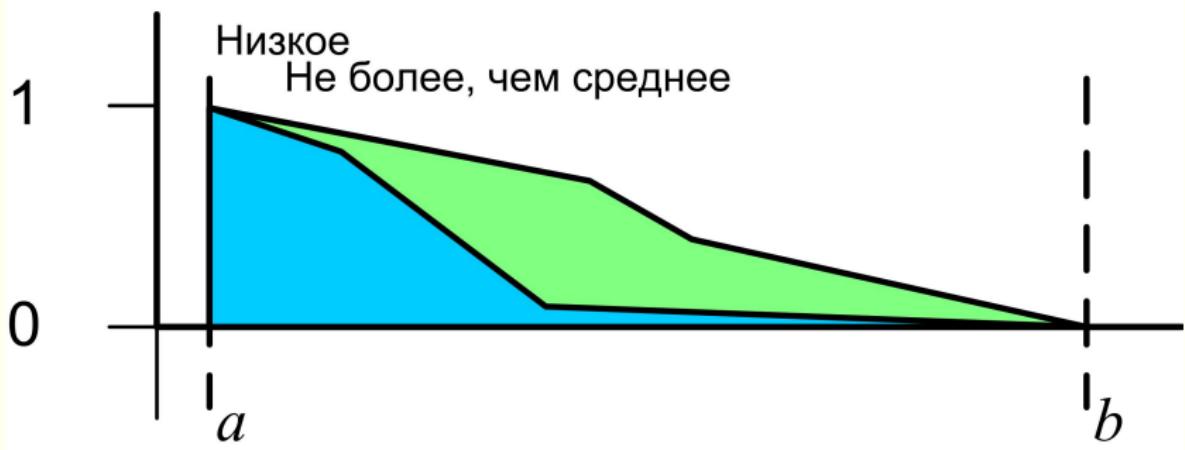
# Система Цукамото

Строго монотонные выходные функции принадлежности



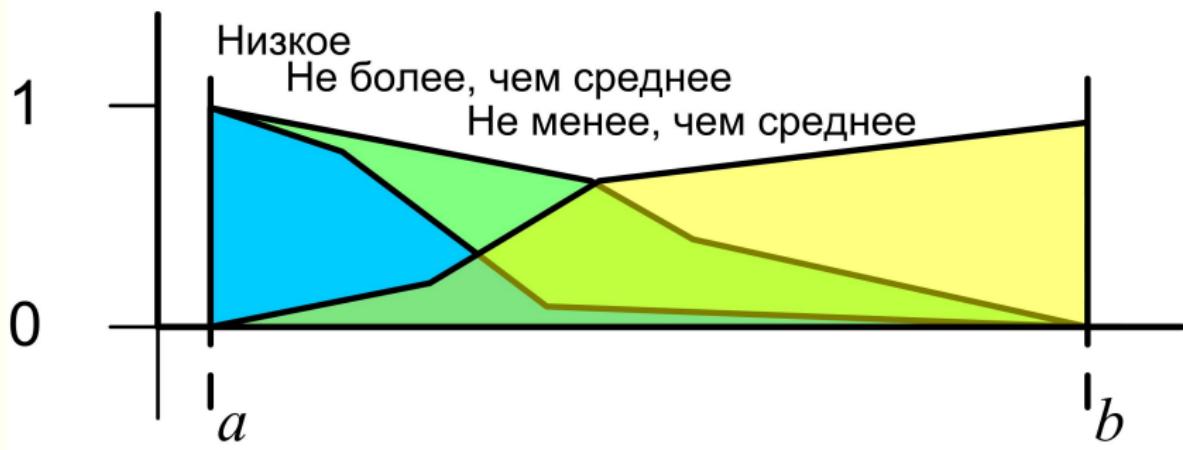
# Система Цукамото

Строго монотонные выходные функции принадлежности



# Система Цукамото

Строго монотонные выходные функции принадлежности



# Система Цукамото

Строго монотонные выходные функции принадлежности



# Виды систем нечеткого вывода

## Система Цукамото

### Обозначение

Пусть  $Y$  — выходная переменная,  $t \in T(Y)$ .

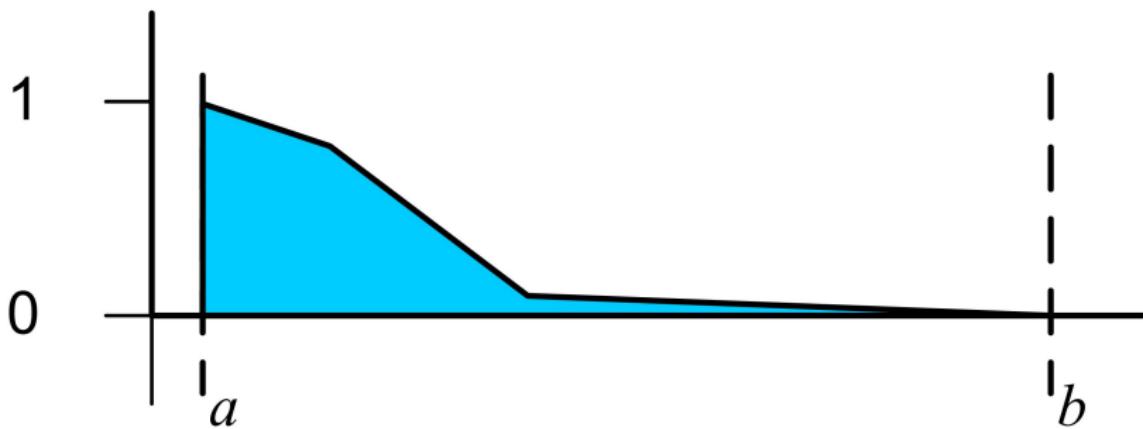
Решение уравнения

$$M_t^Y(z) = M[Y, t]$$

будем обозначать через  $Y_t$ .

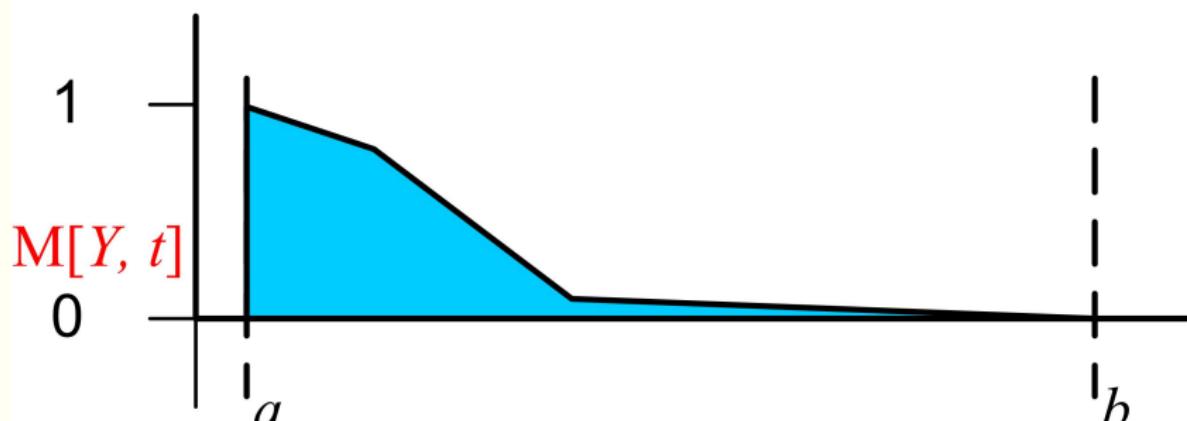
# Система Цукамото

## Решение уравнения



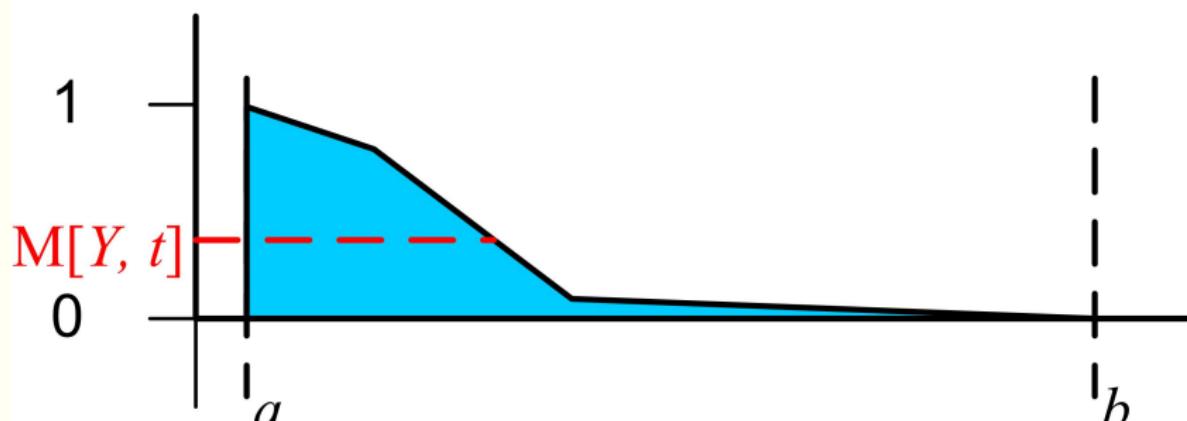
# Система Цукамото

## Решение уравнения



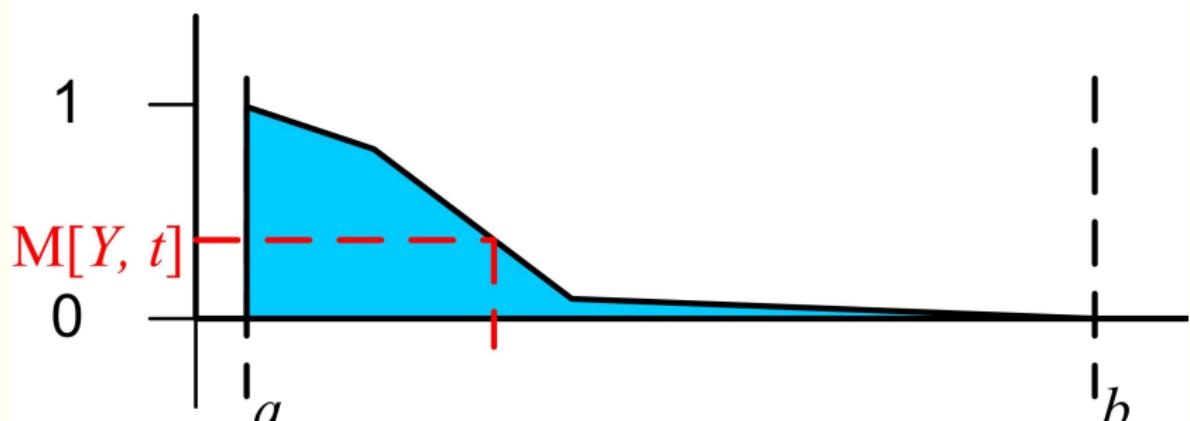
# Система Цукамото

## Решение уравнения



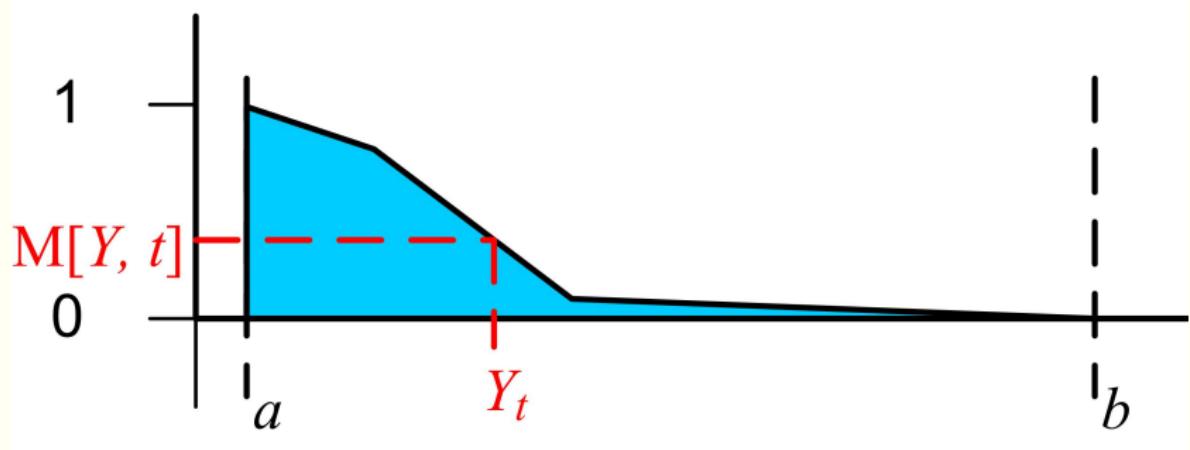
# Система Цукамото

## Решение уравнения



# Система Цукамото

## Решение уравнения



# Система Цукамото

## Дефазификация

### Формула для вычисления $v(Y)$

$$v(Y) = \frac{\sum_{t \in T(Y)} M[Y, t] \cdot Y_t}{\sum_{t \in T(Y)} M[Y, t]},$$

где

- $Y$  — выходная переменная,
- $v(Y)$  — значение выходной переменной  $Y$ ,
- $Y_t$  — решение уравнения

$$M_t^Y(z) = M[Y, t],$$

где  $M_t^Y$  — функция принадлежности для пары  $\langle Y, t \rangle$ .

# Виды систем нечеткого вывода

## Система Сугено и Такаги

### Особенности

В системе Сугено (Sugeno) и Такаги (Takagi):

- ① терм-множество для выходных переменных не формируется;
- ② выходные атомарные формулы имеют вид

$$Y = \left( \sum_{X \in I} a_X \cdot X \right) + b,$$

где  $Y$  — выходная переменная, некоторые (и даже все) коэффициенты  $a_X$  могут быть равны 0;

### Особенности (продолжение)

- ③ этап *композиции* заменяется этапом *вычисления* для каждой продукции  $p$  *значения*

$$Y_p = \left( \sum_{X \in \mathbf{I}} a_X \cdot v(X) \right) + b,$$

где  $v(X)$  — значение входной переменной  $X$ ;

- ④ на этапе *дефазификации* происходит вычисление взвешенного среднего величин  $Y_p$  по всем продукциям, содержащим  $Y$  в качестве выходной переменной.

### Обозначение

Пусть  $C$  — выходная атомарная формула, т. е.  $C$  имеет вид

$$Y = \left( \sum_{X \in \mathbf{I}} a_X \cdot X \right) + b,$$

где  $Y$  — выходная переменная. Тогда через  $\text{Var}(C)$  будем обозначать переменную  $Y$ .

### Обозначение

Пусть  $Y$  — выходная переменная.

Множество продукции

$$\{p \in \mathbf{P} \mid \text{Var}(\mathbf{C}(p)) = Y\}$$

будем обозначать через  $\mathbf{P}_Y$ .

### Формула для вычисления $v(Y)$

$$v(Y) = \frac{\sum_{p \in \mathbf{P}_Y} v(\mathbf{C}(p)) \cdot Y_p}{\sum_{p \in \mathbf{P}_Y} v(\mathbf{C}(p))},$$

где

- $Y$  — выходная переменная,
- $v(Y)$  — значение выходной переменной  $Y$ ,
- $Y_p$  — величина, вычисленная по формуле

$$Y_p = \left( \sum_{X \in \mathbf{I}} a_X \cdot v(X) \right) + b.$$

### Условные обозначения

Объект

Коллекция

Метод

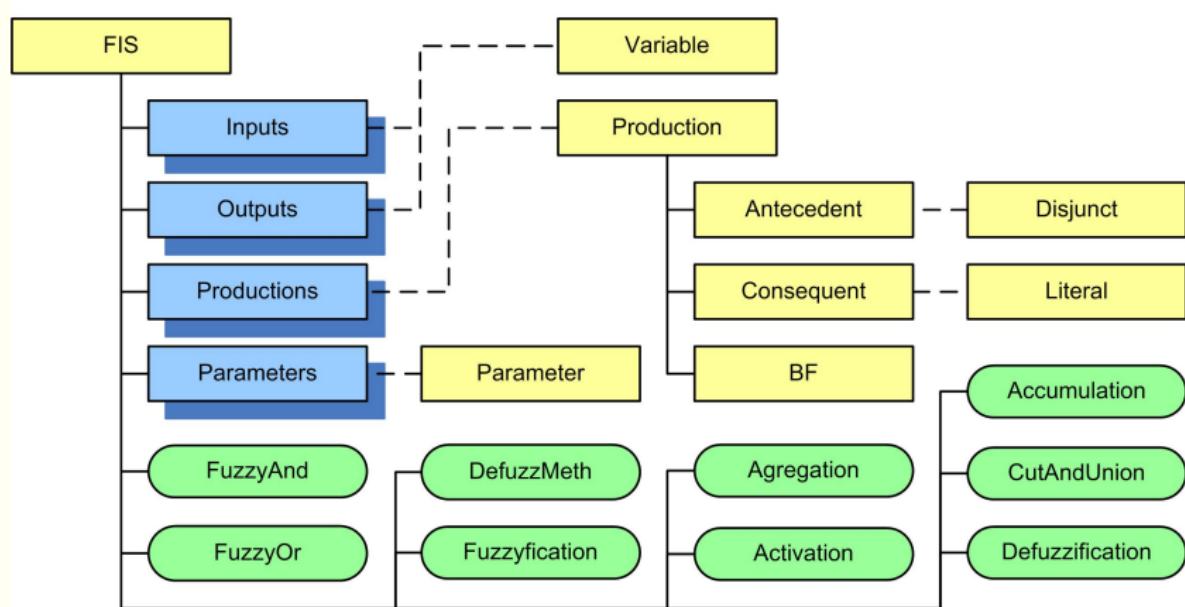
# Объектная модель системы нечеткого вывода

## Общая схема



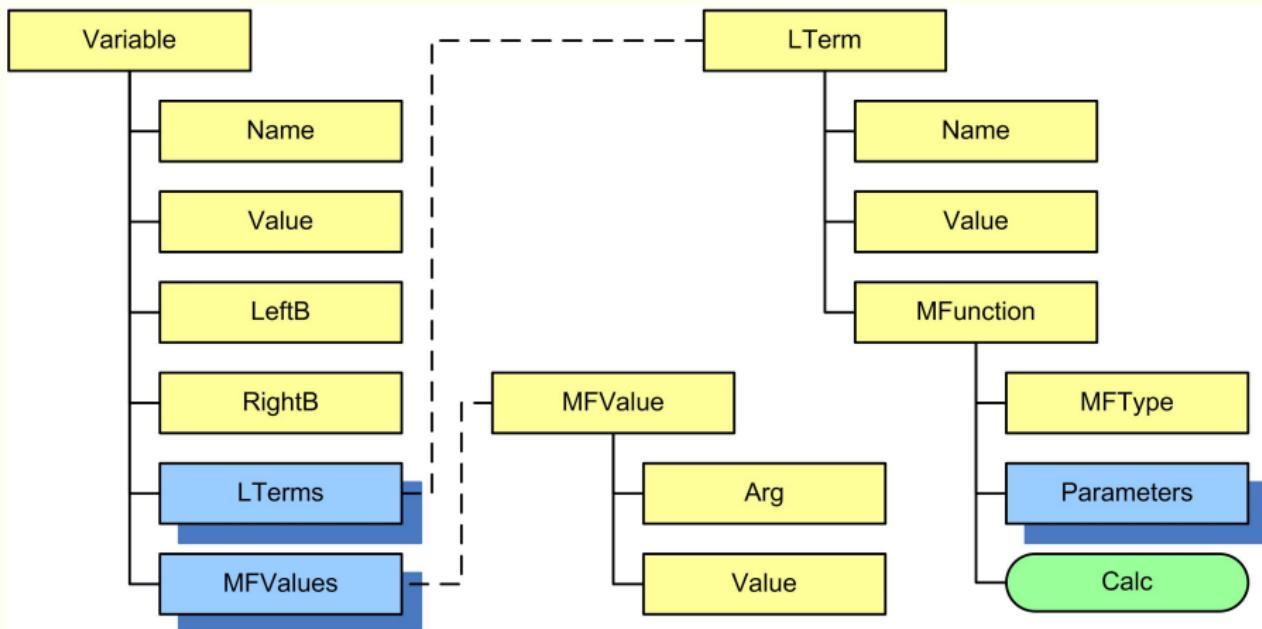
# Объектная модель системы нечеткого вывода

## Общая схема



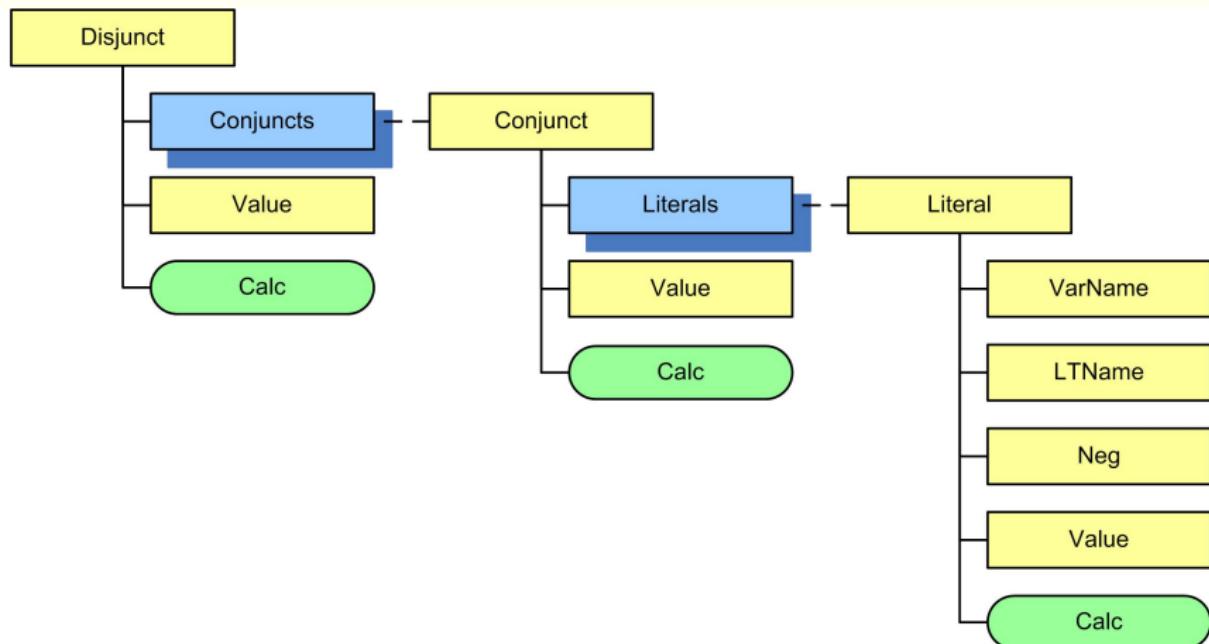
# Объектная модель системы нечеткого вывода

## Переменная и лингвистический терм



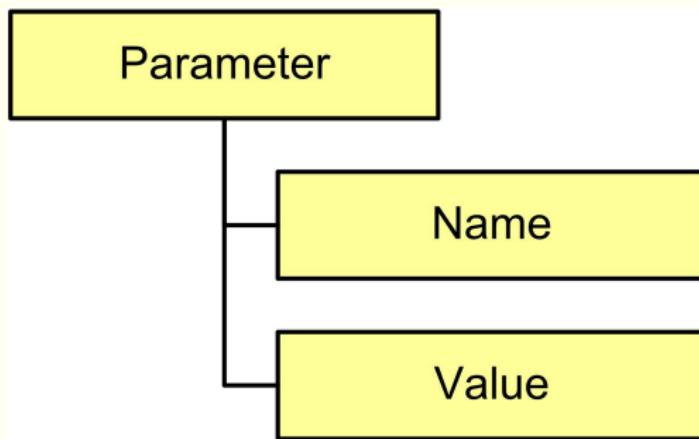
# Объектная модель системы нечеткого вывода

## Конъюнкт, дизъюнкт и литерал



# Объектная модель системы нечеткого вывода

## Параметр



# Объектная модель системы нечеткого вывода

## Фазификация

### Фазификация

```
For Each X In Inputs  
    For Each L In X.LTerms  
        L.Value = L.MFunction.Calc(X.Value)  
    Next  
Next
```

# Объектная модель системы нечеткого вывода

## Методы

### Метод Calc объекта типа Literal

```
Me.Value = Inputs(Me.VarName).LTerms(Me.LTName).Value  
If Me.Neg Then  
    Me.Value = 1 - Me.Value  
End If
```

### Метод Calc объекта типа Conjunct

```
Me.Value = 1
```

```
For Each L In Me.Literals
```

```
    L.Calc
```

```
    Me.Value = FuzzyAnd(Me.Value, L.Value)
```

```
Next
```

### Метод Calc объекта типа Disjunct

```
Me.Value = 0
```

```
For Each C In Me.Conjuncts
```

```
    C.Calc
```

```
    Me.Value = FuzzyOr(Me.Value, C.Value)
```

```
Next
```

# Объектная модель системы нечеткого вывода

## Агрегация

### Агрегация

```
For Each P In Productions  
    P.Antecedent.Calc
```

[Next](#)

## Активация

### Активация

```
For Each P In Productions
```

```
    P.Consequent.Value = _
```

```
        FuzzyAnd(P.Antecedent.Value, P.BF)
```

```
Next
```

# Объектная модель системы нечеткого вывода

## Аккумуляция

### Аккумуляция

```
For Each Y In Outputs
    For Each L In Y.LTerms
        L.Value = 0
        For Each P In Productions
            If P.Consequent.VarName = Y.Name And _
                P.Consequent.LTName = L.Name Then
                L.Value = FuzzyOr(L.Value, _
                    P.Consequent.Value)
            End If
        Next
    Next
Next
```

# Объектная модель системы нечеткого вывода

## Сечение и объединение

### Сечение и объединение

```
For Each Y In Outputs
    For Each M In Y.MFValues
        M.Value = 0
        For Each L In Y.LTerms
            M.Value = FuzzyOr(M.Value, _
                FuzzyAnd(L.MFunction.Calc(M.Arg), L.Value))
        Next
    Next
Next
```

# Объектная модель системы нечеткого вывода

## Дефазификация

### Дефазификация

```
For Each Y In Outputs  
    Y.Value = DefuzzMeth(Y.MFValues)
```

[Next](#)

# Конец презентации

# Что такое взвешенное среднее?

Формула для вычисления

## Взвешенное среднее

Пусть  $A$  — конечное множество вещественных чисел.

Каждому  $a \in A$  поставим в соответствие вещественное число  $w_a$ , которое будем называть весом элемента  $a$ .

Взвешенное среднее  $M$  элементов множества  $A$  вычисляется по следующей формуле:

$$M = \frac{\sum_{a \in A} w_a \cdot a}{\sum_{a \in A} w_a}.$$

Возврат

# Что такое взвешенное среднее?

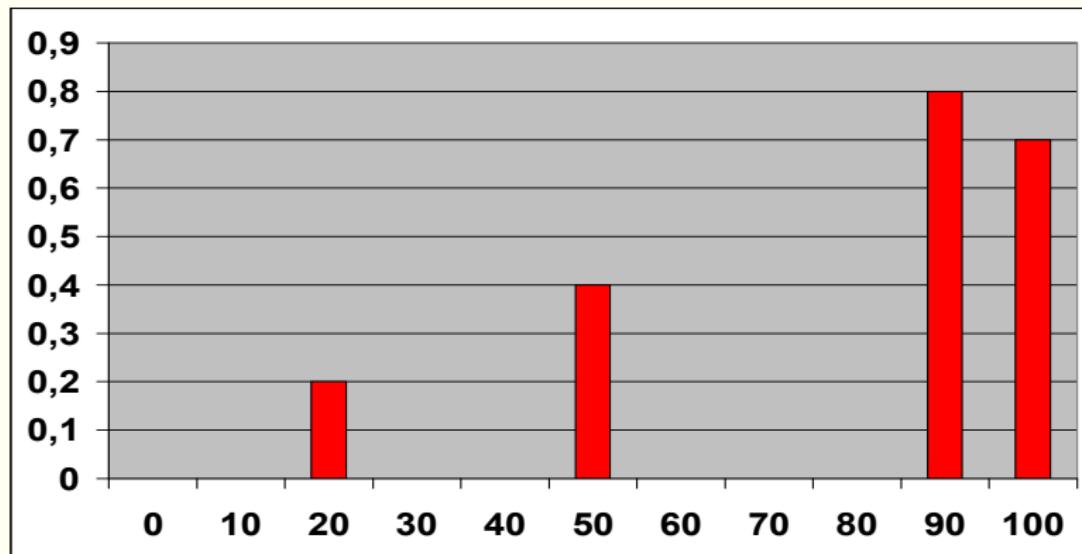
Таблица

| Значение           | 20  | 50  | 90  | 100 | $\Sigma$      |
|--------------------|-----|-----|-----|-----|---------------|
| Вес                | 0,2 | 0,4 | 0,8 | 0,7 | <b>2,10</b>   |
| Значение · Вес     | 20  | 50  | 90  | 100 | <b>166,00</b> |
| Взвешенное среднее |     |     |     |     | <b>79,05</b>  |

Возврат

# Что такое взвешенное среднее?

Иллюстрация



Возврат