Предавање 1   11.10.2024.   ~ Ратаја ~

Оптимизација функције једне променљиве

- шта је битно код одлучивања?
  - 1. ствар - мора постојати више опција
  - 2. ствар - на који начин се мери шта је боље

- инжењери све ствари воле да искажу бројевима
- постоје:
  - кардиналне [опт.] - нешто што можемо исказати бројем (новци, колико материјала је за нешто потребно...)
  - ординалне - не можемо квантификовати, него само можемо поредити опције на неки начин

- када хоћемо да оптимизујемо нешто, најбољи начин је да то квантификујемо

Пример:

x - променљива која се бира (независна променљива)

ax - укупна количина материјала

→ константа (зависи од дужине цеви)

x - дебљина изолације

a - колико новца се потроши по cm изолације

$\sim\frac{1}{x}$ - количина енергије која се баци (колико смо изгубили енергије отишло у земљу)

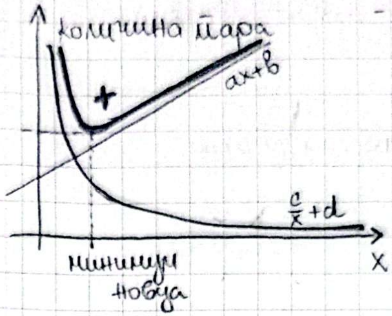
- треба да нађемо идеалну дебљину тога што облажемо цеви

- да бисмо поредили две ствари, морамо их свести на исту меру!
- треба да то сведемо на заједничко - новац (матер. и утрошена енергија)
- хоћемо да збир новца потрошен на материјал и утрошену енергију буде најмањи
- те ствари су најчешће супротстављене

d - минимална количина енергије коју ћемо изгубити

b - неки посао који смо морали на почетку да платимо (нпр. да се ископа нека рупа или шта год)

- шта год да меримо - увек ћемо имати међусобно супротстављене ствари



- проблем је наћи x да $ax+b+\frac{c}{x}+d$ буде минимална:

$$ax+b+\frac{c}{x}+d \to min$$

проблем једнод. оптимизације

$$x \in R$$
$$y(x) \to min$$

- разлика економиста и инжењера је то што економисти максимизују добитке, а инжењери минимизују губитке што је суштински иста ствар

$$y(x) = ax+b+\frac{c}{x}+d$$

- b и d не утичу на позицију решења
- тај део који описују b и d не зависи од нас, што је цена уласка у наш посао (што смо платили на улазку)

$$y'(x) = a - \frac{c}{x^2} \Rightarrow a = \frac{c}{x^2}$$

$$x^2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$$

$$\boxed{x^* = \sqrt{\frac{c}{a}}} \qquad \cancel{x^* = -\sqrt{\frac{c}{a}}} \rightarrow$$ не можемо ставити негативну количину изолације

x^* - најчешћа ознака за оптимално решење

- да нисмо нацртали слику, како бисмо знали да ли је мин/макс

$$y''(x) = \frac{2c}{x^3}$$

$$y''(x^*) = \frac{2c}{\sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^3}} > 0 \Rightarrow \text{минимум}$$

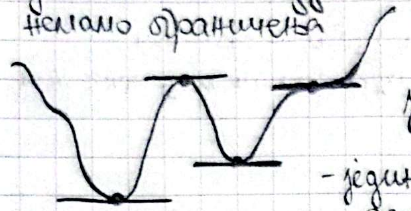
ЗАШТО

1° зашто минимум/максимум тражимо изједначавајући први извод са нулом?
(ако извод постоји у свим тачкама и нема ограничења, у другим случајевима морамо гледати шта се дешава у тим тачкама!)

- извод је НАГИБ
- лево падам, десно растем + значи мења знак

- ради само ако извод постоји и једнозначно је дефинисан!
  - уколико постоје ограничења, могу постојати и други екстреми

- данас нас занимају само диференцијабилне функције где немамо ограничења



$$y(x+h) \approx y(x) + y'(x)h$$

- једини начин да се ово деси је да је $y'(x)=0$

дефиниција минимума

x^* је минимум ако $y(x^*) < y(x) \quad \forall x \neq x^*$

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + \frac{1}{2}y''(x)h^2$$

$y''>0$ минимум

$y''=0$ најчешће преводна тачка

$y''<0$ максимум

2° зашто $y''>0$ у минимуму? → то смо малопре образложили

3° шта се дешава када је и $y''=0$?

$$y(x+h) = y(x) + \underline{y'(x)h} + \underline{\frac{1}{2}y''(x)h^2} + \frac{1}{6}y'''(x)h^3$$

- уколико је први ненулти извод непарног степена - преводна тачка
- уколико је први ненулти извод парног степена - екстрем

терминологија и класификација екстрема

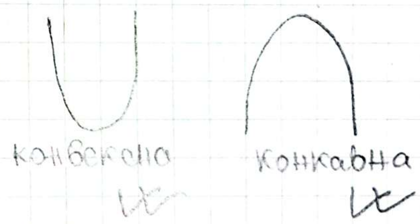
- оптимално = најбоље по задатим условима
- дакле, термин најоптималније не значи ништа (термин латинског порекла, сам по себи је суперлатив)
- ~~најоптималније~~ - не постоји као појам
- може се десити да има више оптимума
* локални оптимум - најбоље решење у околини
* глобални оптимум - решење од кога не постоји боље решење

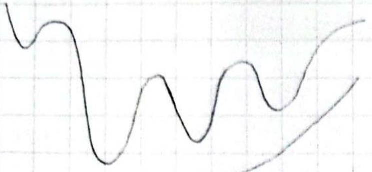
	локални	x^* глобални
	$y(x^*) \leq y(x)$ $\forall x \ \lvert x-x^* \rvert < \varepsilon$	$y(x^*) \leq y(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$
строги	$y(x^*) < y(x)$ $\forall x \ \lvert x-x^* \rvert < \varepsilon$	$y(x^*) < y(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

локални - мора бити у некој околини

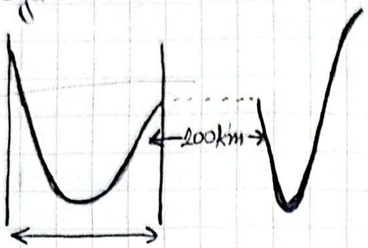
- пошто функција није ограничена са горње стране, немамо глобални максимум

конвексност





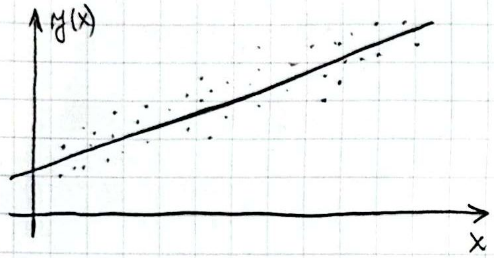
Нерешив проблем
јер функција може сасвим лепо
да изгледа овако



ми се трудимо да је решимо
(имамо ограничене ресурсе
и увек нам може неки део избећи)
али никада не можемо гарантовати
да је то тачно

- да ли је линеарно/нелинеарно - то није проблем
- да ли је конвексно или није - то је огроман проблем

фитовање криве



$$y = ax + b$$

$$\Sigma (y - y_m)^2$$

- желим да нађем минимум по параметрима које бирам
- суштински проблем које параметре гледамо
- често ти параметри не значе сами за себе ништа, али заједно су јако битни
- оптимизацијом се бавимо када од великог броја потенцијалних проблема, бирамо оно које је најбоље

Вежбе 1 (аудиторне) 16.10.2024.

- Статичка оптимизација у случају функције једне променљиве -

- Критеријум оптималности - нека функција коју хоћемо да оптимизујемо, први случај је функција једне променљиве

$$y = y(x)$$

- стационарне тачке су <u>потенцијални екстреми</u> - могу бити мин. или макс., а не морају бити

- потребан услов: $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$
- довољан услов: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} > 0$ минимум; $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} < 0$ максимум

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \; ? \rightarrow$ морамо даље да испитујемо

$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^3y}{dx^3}$	$\frac{d^4y}{dx^4}$	
0	<0			макс.
0	>0			мин.
0	0	0	<0	макс.
0	0	0	>0	мин.
0	0	 >		преводна тачка

1. Пронаћи стационарне тачке функције

$$f(x) = 1 + 8x + 2x^2 - \frac{10}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6$$ и испитати њихов карактер.

потребни услови: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 8 + 4x - 10x^2 - x^3 + 4x^4 - x^5$$

$\boxed{x_1^* = -1}$ $\boxed{x_2^* = 2}$ $\rightarrow$ координате стационарних тачака обично обележавамо звездицом

$$f''(x) = 4 - 20x - 3x^2 + 16x^3 - 5x^4$$

$$f''(-1) = 4 + 20 - 3 - 16 - 5 = 0$$

$$f''(2) = 4 - 40 - 12 + 128 - 80 = 0$$

$$f'''(x) = -20 - 6x + 48x^2 - 20x^3$$

$f'''(-1) = -\cancel{20} + 6 + 48 + \cancel{20} = 54 \rightarrow$ преводна тачка

$$f'''(2) = -20 - 12 + 192 - 160 = 0$$

$$f^{IV}(x) = -6 + 96x - 60x^2$$

$f^{IV}(2) = -6 + 192 - 240 = -54 \rightarrow$ максимум

2. Трошкови производње су 100 дин по комаду. У развоју техноло-гије уложено је 5000 дин. Уколико се у рекламу уложи n дин може се продати $\sqrt{n}$ комада производа по цени 300 дин. по комаду. Како фабрика треба да послује да би добит била максимална

трошкови:

100 дин./ком.

5000 дин.

n дин.

приходи:

$300\sqrt{n}$

- критеријум оптималности: $D = P - T$

$P = 300\sqrt{n} = 300x$ смена: $\sqrt{n} = x \Rightarrow n = x^2$

$T = 100\sqrt{n} + 5000 + n = 100x + 5000 + x^2$

$D = 300x - 100x - 5000 - x^2 = -x^2 + 200x - 5000$

потребни услови: $\frac{\partial D}{\partial x} = 0$

$\frac{\partial D}{\partial x} = -2x + 200$

$\boxed{x^* = 100}$

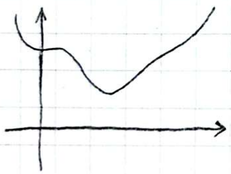
довољни услови:

$\frac{d^2D}{dx^2} = -2 < 0 \rightarrow$ максимум (можемо да кажемо и „пошто је уз x^2 минус, онда је максимум")

3. Показати да увијек важи $e^x \geq x+1,\ x \in \mathbb{R}$.

$e^x - x - 1 \geq 0$ минимум

$y_{min} \geq 0$



$y'(x) = e^x - 1$ $e^x = 1$

$\boxed{x^* = 0}$

$y''(x) = e^x$

$y''(0) = 1 > 0 \rightarrow$ минимум

4. Просторија у којој се отвара ресторан максимално може да прими 25 столова за 4 особе. Узимајући у обзир истраживање тржишта, изведено пре отварања ресторана, закључено је да је могуће напунити ресторан у потпуности уколико има 15 столова или мање и уколико се наплаћује 20е по оброку. На сваки додатни сто, да би ресторан био пун, цена оброка се мора смањити за 1. Са колико столова се може зарадити максимални профит?

25 столова по 4 особе x – број столова

i) $x \leq 15$ ii) $x > 15$

20€   цена 1 оброка $(20 - (x-15))$ број за који смањујемо цену

$Z = 4 \cdot 20 \cdot x$ $Z = 4 \cdot x\,(20 - (x-15))$

$$Z = \begin{cases} 80x, & x \leq 15 \\ 4x(20-(x-15)), & x > 15 \end{cases}$$

i) $x = 15$

$Z(15) = 1200$

ii) $Z = 140x - 4x^2$

$Z'(x) = 140 - 8x$

$\boxed{x^* = 17{,}5} \rightarrow$ и да смо добили 17,2 не смемо заокруживати на 17, проверавамо вредност критеријума у тачки 17 и у тачки 18

$Z(17) = 1224$

$Z(18) = 1224$

- када имамо текстуалне задатке, мењта је увек прво да поставимо критеријум оптималности

5. Авионска карта BG-NY кошта 500€. Авион прима 300 путника, а просечни број путника је 180. Ако се цена карте смањи за 5€, број путника се повећа за 3. Како одредити цену карте да профит буде највећи?

цена:		број путника:	
	500€		180
−5	495€	+3	183
−10	490€	+6	186

$z = цена * број\ путника$

$цена = 500 - 5n$

$број\ путника = 180 + 3n$

$z = (500-5n)(180+3n) = 90000 - 900n + 1500n - 15n^2 =$

$= 90000 + 600n - 15n^2$

$z'(n) = 0$

$z'(n) = 600 - 30n$

$\boxed{n^* = 20}$

$z''(n) = -30 < 0 \rightarrow$ максимум

Предавање 2 18.10.2024. (+снимак 29.10.2021)

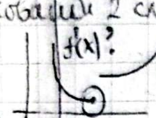
Статичка оптимизација, нумеричке методе једнодимензионе оптимизације

једнодимензиона оптимизација
- нумеричко решавање
  - методе директног претраживања
  - методе апроксимације полиномом
  - градијентне методе
- аналитичко решавање — говорили прошло предавање

на чему ћемо разликовати 2 случаја

$f'(x) = e^x + \sin^2 5x$

f(x)?



решавање сложених проблема и решавање неких проблема где фја прави прекид

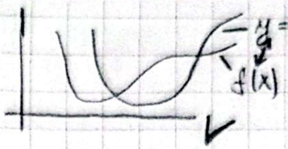
- **градијентне методе** - само име им каже, први извод једнак нули; нумерички израчунавају место где први извод има вредност 0

$f'(x) = 0$ радићемо 2 поступка:
- Њутн-Рафсонов поступак
- метод сечице

- **Методе директног претраживања** - кичма ових поступака
  - метод Фибоначијевих бројева
  - метод златног пресека

- сужавамо интервал у коначном броју итерација све док не дођемо до тог интервала ε где смо сигурни да се налази наш екстрем
- успешно може да третира фје које имају прекид

- **Методе апроксимације полиномом** - нешто сасвим друго
- имамо фју f(x) чије нуле не знамо да нађемо, али углавном знамо да нађемо нуле полинома другог реда који успешно апроксимира ту фју или нуле полинома трећег реда
- постојећу фју ћемо заменити функцијом полинома другог или трећег реда и покушати да нађемо њено решење
- тачност апроксимације између f и y одређује тачност целог нашег



Њутн-Рафсон

$f(x) = 0$

↓

$f'(x) = 0$

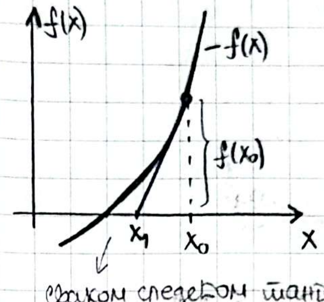
- направљен за нуле функције, не за нуле првог извода

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

$$x_0 - x_1 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x)}{f'(x_0)}$$

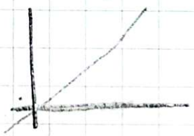
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$



сваком следећом тангентом се приближавамо овој тачки

да бисмо дошли до формуле, неопходни су нам:
1. избор почетног решења
2. итеративни поступак
3. правило (критеријум) заустављања

1. $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ → зашто? нула и њене блиске вредности
2. $\cancel{\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|}} < \varepsilon$ → каже процентуално немој толико да погрешиш



→ ако нам је нула првог извода у нули хоћемо да избегнемо дељење нулом

(што смо ближи тачном решењу, то ћемо имати вероватније дељење нулом)

- боље први; мако је други логички исправан, може нам направити проблем
- да знамо x_0 да убодемо и да знамо кад да се зауставимо, да знамо x_0 и ε

Скенирано помоћу ЦамСцаннер-а

Нуле првог извода:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

- да тражимо други извод и познајемо његово понашање је доста сложен проблем!

- овај поступак кад ради, ради одлично, али ако омашимо почетно погађање, онда је велики проблем (поступак је изузетно изузетно осетљив на почетно погађање)
- у нумерици имају посебне дисциплине за почетна погађања
- боље до спорије дођемо до решења него да га скроз промашимо!

Метод сечице

- желимо да избегнемо постојање другог извода

- опет има своју геометријску интерпретацију
- 2 проблема: познавање другог извода и почетно погађање

$$f'(x_k) = \left[\frac{d_x}{d_t}\right.$$ → помери се мало доле да видим како се креће вредност фје

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \qquad \frac{\Delta f}{\Delta x}$$ → ово је много боље него x_k и x_{k+1}!

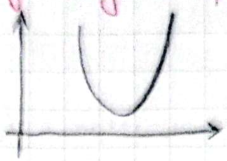
$$f''(x_k) = \frac{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

$$x_{k+1} = x_k - f'(x_k)\,\frac{x_k - x_{k-1}}{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}$$

- цена овога што смо хтели да постигнемо је да нам сада требају две тачке
- суштински нам се променило почетно погађање - више није једна него две тачке

- главна предност - немамо други извод и немамо проблема са почетним погађањем, цена тога је што је овај алгоритам спорији

- унимодална функција - један мин. или један макс.



мин. $f(x)$

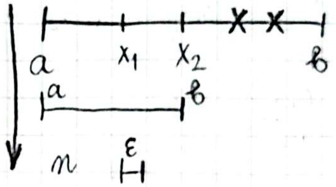
мин. $(-f(x)) \rightarrow$ макс.

Методе директног претраживања

- није битно да је фја непрекидна, диференцијабилна, битно је да је фја унимодална

- унимодална - има минимум, али дозвољава и да има прекид

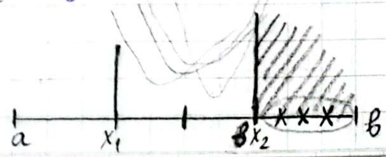
- број корака који је потребан да дођемо до овог интервала (n) је унапред познат и дефинисан



- по неком принципу нађемо x_1 и x_2 и исто неким принципом елиминишемо део, после n корака тврдимо да ће се решење наћи у околини ε

тражимо мин. $f(x)$:

0) претпоставити интервал $[a, b]$
1) наћи по некој формули x_1 и x_2 (нпр. $x_1 = a + \frac{b-a}{2} - \frac{\varepsilon}{2}$ и $x_2 = a + \frac{b-a}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ где је ε резолуција)
2) одредити $f(x_1)$ и $f(x_2)$
3) ако је $f(x_1) < f(x_2)$ тада елиминишемо $x > x_2$ и $b = x_2$
   ако је $f(x_1) > f(x_2)$ тада елиминишемо $x < x_1$ и $a = x_1$
   ако је $f(x_1) = f(x_2)$ тада бирамо нови пар тачака
4) Наставити док интервал не буде $< 2\varepsilon$



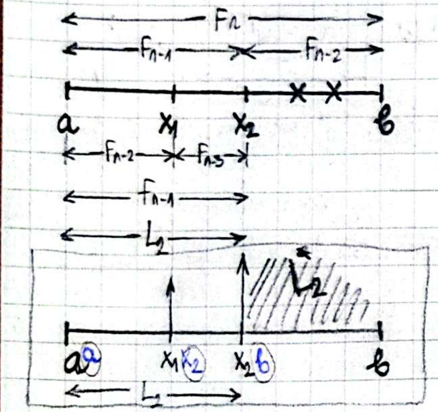
- поступци се разликују само по томе како бирамо x_1 и x_2
- кључна претпоставка је да има један мин.
- 2,3 корак пажљиво да прочитамо → или да запамтимо или да знамо да нацртамо
- важна претпоставка је да је функција унимодална

Фибоначијев метод

1 1 2 3 5 8 13 21

$F_1\ F_2\ F_3\ F_4\ F_5\ F_6\ F_7\ F_8$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$



$$b - a = L_0$$

$$x_1 = a + \frac{F_{n-2}}{F_n} L_0$$

$$x_2 = b - \frac{F_{n-2}}{F_n} L_0$$

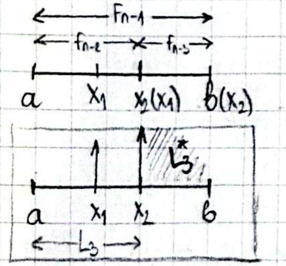
$$x_2 = a + b - x_1$$

$$x_2 = a + \frac{F_{n-1}}{F_n} L_0$$

$$L_2^* = \frac{F_{n-2}}{F_n} L_0$$

$$L_2 = L_0 - L_2^* = \frac{F_{n-1}}{F_n} L_0$$

- у првом кораку гледамо x_1, x_2
- после додајемо само по једну тачку због тога се зове $L_2, L_3, \dots$



$$L_3^* = \frac{F_{n-3}}{F_{n-1}} L_2 = \frac{F_{n-3}}{F_n} L_0$$

$$L_3 = \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} L_2 = \frac{F_{n-2}}{F_n} L_0$$

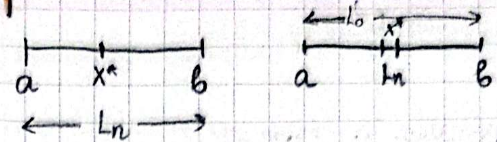
$$L_k^* = \frac{F_{n-k}}{F_{n-(k-2)}} L_{k-1} \qquad L_k = \frac{F_{n-(k-1)}}{F_n} L_0$$

питање?? $b=1,\ a=0,\ \varepsilon = 0.1$

*** за 10 поена *** када завршим поступак k постаје n $\quad k = n$

$$L_n = \frac{F_1}{F_n}(b-a) = \frac{1}{F_n}(b-a)$$

тачност, одговара ширини мог опсега ε



$$F_n > \frac{b-a}{\varepsilon} = \frac{1}{0{,}1}$$

→ фибоначијев број који нам треба $\quad$ 1 1 2 3 5 8 13 (10 између 8 и 13)

значи 10, између 8 и 13 се налази 10

⇒ треба нам **бар 7** итерација да дођемо до коначног решења

$$\boxed{n = 7}$$

$$0{,}1 < \frac{1}{13}$$

- фибоначијеви бројеви се користе да би се установила подела после колико итерација долазимо до коначн. решења
- и онда ми знамо да ће се после 7 корака, наше решење гарантовано налазити у интервалу [0, 1]

$\frac{F_{n-2}}{F_n}$ → кључна пропорција која нам се јавља (после одр. броја фибоначијевих бројева (→ тачно 15 бројева) та пропорција постаје константна)

↓

0.38196 $\qquad \dfrac{F_{n-1}}{F_n} = \dfrac{F_{n-2}}{F_{n-1}}$

Метод златног пресека

- модификација метода фибоначијевих бројева

$$\frac{F_{n-2}}{F_n} = C = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

→ заменили смо константом, не рачунамо више фибоначијеве бројеве, него све време рачунамо док нам интервал не буде мањи од ε

$$(b-a) < \varepsilon$$

- златни пресек је пропорција која као таква постоји у природи

$\frac{F_{n-1}}{F_n}$ → два узастопна фибоначијева броја чине златни пресек

Вежбе 2 (аудиторне) 23.10.2024.

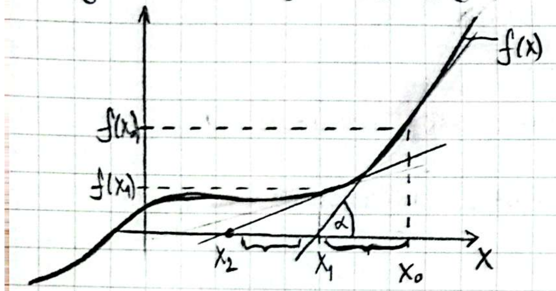
- Једнодимензионе нумеричке методе -

- градијентне методе: → вектор чији су елементи парцијални изводи, показује смер најбржег раста функције
  - Њутн-Рафсонова метода
  - Метода сечице
  - функција мора бити диференцијабилна

  1. почетно погађање
  2. итеративни поступак (корак итерације)
  3. критеријум заустављања

Њутн-Рафсонов метод

- одређивање нула функције



$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \to f'(x_k)$$

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}}$$

- у случају када се корак повећава, то значи да алгоритам дивергира и да никада нећемо доћи до ове тачке

1. почетно погађање x_0
2. корак итерације $x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$
3. критеријум заустављања $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$

Метод сечице

- конвергенција Њутн-Рафсонове методе зависи од почетног погађања и што је лоше, други извод.
- метод сечице служи да побољша ове ствари

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

$$f''(x_k) = \frac{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

1. почетно погађање x_0 (барем 2)
2. корак итерације $x_{k+1} = x_k - f'(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}$

   овде зависи и од тренутне и од претх.

3. критеријум заустављања $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$

   критеријум заустављања остаје исти

- оне проблеме које смо имали код Њутн-Рафсона, решава метод сечице али у више итерација

1. Њутн-Рафсоновом методом наћи минимум функције $f(x) = 2x^4 - 3x$ над интервалом $[0,1]$ са тачношћу $\varepsilon = 10^{-2}$.

мин.

$f(x) = 2x^4 - 3x \quad x \in [0,1] \quad \varepsilon = 10^{-2} = 0,01$

$f'(x) = 8x^3 - 3$

$f''(x) = 24x^2$

$f(0) = 0$

$f(1) = 2 - 3 = -1$

$f(0) > f(1)$

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}}$$

- узимамо тачку за коју је критеријум оптималности мањи (вредност фје у тачки интервала)

$x_0 = 1$

1. $x_1 = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)}$

$x_1 = 1 - \frac{f'(1)}{f''(1)} = 1 - \frac{5}{24} = \frac{19}{24} \approx 0,8$

$|x_1 - x_0| = |0,8 - 1| = |-0,2| = 0,2 > \varepsilon$ → значи морамо да настав.

2. $x_2 = x_1 - \frac{f'(x_1)}{f''(x_1)} = 0,7429$

$|x_2 - x_1| = 0,0571 > \varepsilon$

3. $x_3 = x_2 - \frac{f'(x_2)}{f''(x_2)} = 0,7272$

$|x_3 - x_2| = 0,0157 > \varepsilon$

4. $x_4 = x_3 - \frac{f'(x_3)}{f''(x_3)} = 0,7228$

$|x_4 - x_3| = 0,0044 < 0,01$ → значи да смо дошли до краја алгор.

- оптимално решење је x_4 и оно има вредност 0,7228 и оно има тачност 0,01

$\boxed{x_{opt} = 0,7228 \quad f_{opt} = -1,6225}$ → овде смо решење добили кроз 4 итерације

2. Методом сечице наћи минимум функције $f(x) = 2x^4 - 3x$ над интервалом $[0,1]$ са тачношћу $\varepsilon = 10^{-2}$.

мин.

$f(x) = 2x^4 - 3x \quad x \in [0,1] \quad \varepsilon = 10^{-2} = 0,01 \quad f'(x) = 8x^3 - 3$

$f(0) = 0$

$f(1) = 2 - 3 = 1$

$f(1) < f(0)$

$x_{k+1} = x_k - f'(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}$

- што можемо одабрати било коју тачку, али метод је да одаберемо почетну и крајњу

$x_0 = 1 \quad x_1 = 0$ → значи да бисмо из добрoг решења прешли у релативно лоше а увек треба да прелазимо у што боље решење

$x_0 = 0, \quad x_1 = 1$

1. $x_2 = x_1 - f'(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f'(x_1) - f'(x_0)}$ проверавамо да ли нам је x_2 довољно добра тачка

$x_2 = 1 - f'(1)\frac{1-0}{f'(1) - f(0)} = 1 - 5\frac{1}{5+3} = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8} = 0,375$

$|x_2 - x_1| = |0,375 - 1| = |-0,625| = 0,625 > \varepsilon$

2. $x_3 = x_2 - f'(x_2)\frac{x_2 - x_1}{f'(x_2) - f'(x_1)} = 0,5876$

$|x_3 - x_2| = 0,2126 > \varepsilon$

3. $x_4 = x_3 - f'(x_3)\frac{x_3 - x_2}{f'(x_3) - f'(x_2)} = 0,813$

$|x_4 - x_3| = 0,2254 > \varepsilon$

4. $x_5 = x_4 - f'(x_4)\frac{x_4 - x_3}{f'(x_4) - f'(x_3)} = 0,7005$

$|x_5 - x_4| = 0,1125 > \varepsilon$

5. $x_6 = x_5 - f'(x_5)\frac{x_5 - x_4}{f'(x_5) - f'(x_4)} = 0,7245$

$|x_6 - x_5| = 0,024 > \varepsilon$

6 $x_7 = x_6 - f'(x_6)\frac{x_6 - x_5}{f'(x_6) - f'(x_5)} = 0,721$

$|x_7 - x_6| = 0,0035 < 0,01$

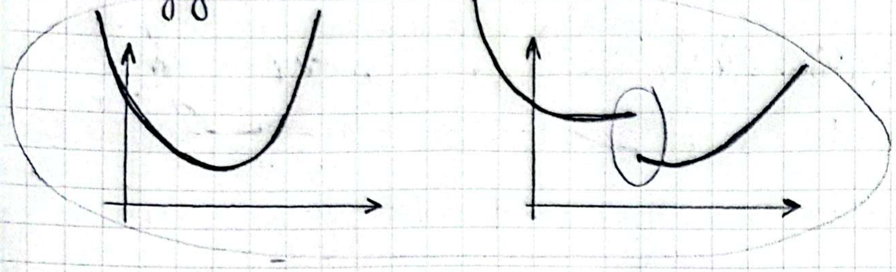
$\boxed{x_{opt} = 0,721 \quad f_{opt} = -1,6225}$

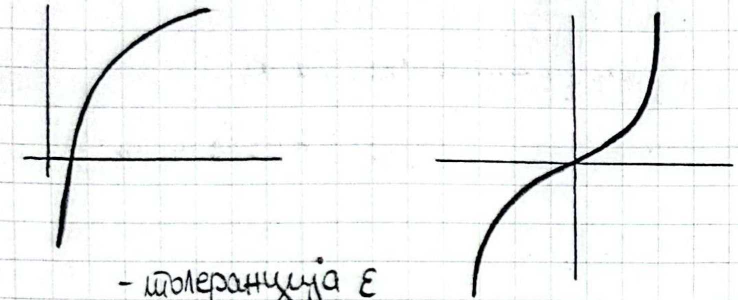
увек ће нам бити наглашено који метод користимо!

- Методе директног претраживања

[мин. фје]

- унимодалне функције - функције које имају један мин. или један макс.



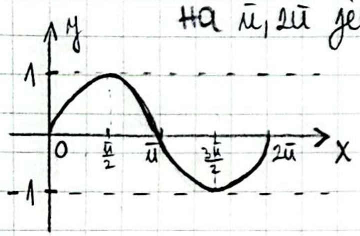


- толеранција ε

- обратити пажњу на ком интервалу се посматра фја

sin x на 0, 2π није унимодална

на π, 2π јесте унимодална



1. почетни интервал [a, b]

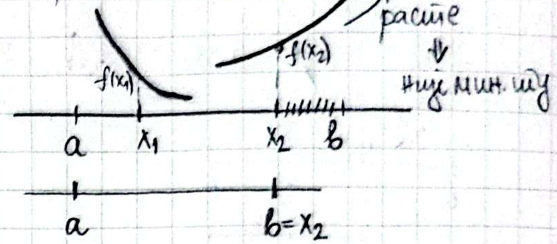
- што имамо мањи интервал, значи да је наше решење ближе реш.

2. итеративни поступак

- на неки начин изаберемо x_1, x_2

$f(x_1) < f(x_2)$

$f(x_1) > f(x_2)$



- овај поступак је направљен за минимум, овим поступком не бисмо могли да нађемо максимум

- поента је на крају да добијемо интервал који је < ε

Фибоначијев метод

- за разлику од осталих, знамо тачно у колико итерација ћемо добити оптимално решење са одређеном грешком ε
- што је толеранција мања, то имамо више корака

1. почетни интервал $[a_0, b_0]$

2. $F_n > \frac{L_0}{\varepsilon}$ $k=n$ $\qquad L_0 = b_0 - a_0$

1 1 2 3 5

први члан фибоначијевог низа

$L_k = \frac{F_{n-(k-1)}}{F_n} L_0$

$L_n = \frac{F_{n-n+1}}{F_n} L_0 \qquad L_n = \frac{F_1}{F_n} L_0 = \frac{L_0}{F_n}$

$\varepsilon = \frac{L_0}{F_n}$ → дужина почетног интервала → сами задамо

толеранција

$F_n = \frac{L_0}{\varepsilon}$

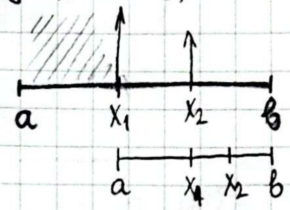
- ако променимо толеранцију ε, промениће се и број корака у коме ћемо добити оптимално решење

3. итеративни поступак

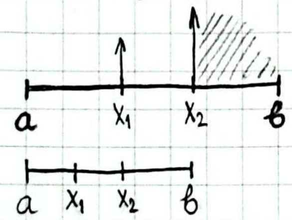
$$x_1 = a + \frac{F_{n-2}}{F_n} L_0$$

$$x_2 = a+b-x_1$$

$f(x_1) > f(x_2)$ $\quad a = x_1, \quad b = b, \quad x_1 = x_2, \quad x_2 = a+b-x_1$



$f(x_2) > f(x_1)$ $\quad a = a, \quad b = x_2, \quad x_2 = x_1, \quad x_1 = a+b-x_2$



n пута понављамо

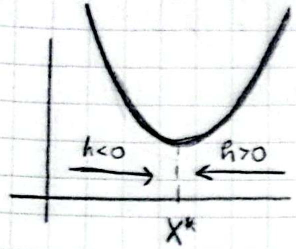
- после n пута сигурно имамо оптимално решење

Предавање 3   25.10.2024.

Вишедимензиона оптимизација без ограничења

- најбоље решење - оно од кога нема боље

*** са MIT-ја књига ***



x^* мин.

$y(x) \geq y(x^*)$

$h y'(x^*) \geq 0$

$h<0 \quad y'(x^*) \leq 0$

$h>0 \quad y'(x^*) \geq 0$

- h не зависи ни од чега, само гледамо са које смо стране

$$y(x) \approx y(x^*) + \overbrace{(x-x^*)}^{h} y'(x^*) + \frac{\overbrace{(x-x^*)}^{h^2}}{2!} y''(x^*)$$

$$y(x^*+h) - y(x^*) \geq 0$$

$$y'(x^*) = 0$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ могу имати било коју вредност, зато пише без ограничења

$$y = y(x_1, x_2, \dots, x_n) = y(x) \quad x_i \ i=1..n$$

П.П. x^* - максимум x^* је вектор

$$y(x) \approx y(x^*) + \Delta y + \frac{\Delta^2 y}{2!} + \dots$$

- радиће са две променљиве, на Canvasy је изведено за више променљивих

$$y = y(x_1, x_2)$$

Δy су све први изводи

$$\Delta y = (x_1 - x_1^*) \frac{\partial y}{\partial x_1}\Big|_{x=x^*} + (x_2 - x_2^*) \frac{\partial y}{\partial x_2}\Big|_{x=x^*}$$

у тачки $x = x^*$

$$h_i = x_i - x_i^*$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}\Big|_{x=x^*} = \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^*$$

$$\Delta y = h_1 \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^* + h_2 \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^*$$

$$\Delta^2 y = \overbrace{(x_1 - x_1^*)^2}^{h_1^2} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right)^* + 2 \overbrace{(x_1 - x_1^*)}^{h_1} \overbrace{(x_2 - x_2^*)}^{h_2} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^* + \overbrace{(x_2 - x_2^*)^2}^{h_2^2} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\right)^*$$

$y(x) - y(x^*) \leq 0$ потр. $\frac{\partial y}{\partial x_i} = 0$ $\Delta y = 0$

- потребан услов екстрема - да су сви парцијални изводи једнаки нули

- за ск. тело узети да је конвексна

конв. $y(x) - y(x^*) < 0$

због траженог максимума

(конкавна) $\Delta^2 y < 0$

$$\Delta^2 y = h_1^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right)^* + 2h_1 h_2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^* + h_2^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\right) < 0$$

акко $\Delta^2 y < 0$ за нетривијалне вредности h_1, h_2 одн. $h_1, h_2 \neq 0$, онда је функција негативно дефинитна

$\Delta^2 y > 0$ позитивно дефинитна   > строги мин./макс

$\Delta^2 y \geq 0$ позитивно семидефинитна   ∨ мин./макс.

$\Delta^2 y \leq 0$ негативно семидефинитна

$\Delta^2 y \gtrless 0$ недефинитна   > мање, веће, једнако

- пут испитивања дефинитности еквивалентан је путу тражења минимума / максимума функције

$$\Delta^2 y = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right)^* \left[h_1^2 + 2h_1 h_2 \frac{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^*}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right)^*} + h_2^2 \frac{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\right)^*}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right)^*}\right]$$

$$\Delta^2 y = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right)^* \left[h_1 + h_2 \frac{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^*}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right)^*}\right]^2 + h_2^2 \left[\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\right)^* - \frac{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^{*2}}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right)^*}\right] < 0$$

$a+b<0 \qquad a<0 \qquad b<0$

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right) < 0 \qquad [\,,\,] < 0$$

$$\frac{\underbrace{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right)^{*}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\right)^{*} - \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^{*2}}_{>0}}{\underbrace{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right)^{*}}_{<0}} < 0$$

D_1, D_2

$$H_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$

мин. $D_1>0,\ D_2>0$

макс. $D_1<0,\ D_2>0$

→ Хесова матрица или Хесијан

- испитивање дефинитности функције преко матрице
- да се овако испитује дефинитност, то се назива Силвестерова теорема

- шта би се десило да имамо n променљивих?

$$y = y(x_1, \dots, x_n)$$

потр. $\frac{\partial y}{\partial x_i} = 0 \qquad i = 1..n$

- нађемо миноре (подматрице) свих елемената око главне дијагонале

D_1, D_2

дов. $$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

мин. $D_i > 0 \qquad i = 1,2,3,\dots,n$

макс. $D_{1,3,5,7,9} < 0$

$D_{2,4,6,8} > 0$

- све остале комбинације су преводне тачке

домаћи – 2 примера да их решимо (нека 2 гранична случаја)

*** важно правило – све што смо радили на предавањима, вежбама и за домаћи – долази на испит

Вежбе 3 (аудиторне) 30.10.2024.

– Статичка оптимизација у случају функције више променљивих без ограничења –

– критеријум оптималности:

$$f(x) = f(x_1,\dots,x_n)$$

– потребни услови:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1\dots n$$

– довољни услови:

– треба да испитамо да ли је матрица других извода дефинитна, а то можемо урадити на 2 начина:

- Силвестерова теорема
- теорема о својственим вредностима

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Силвестерова теорема

$$D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$

$$D_n = H$$

– $D_i > 0$ $\quad i = 1\dots n$ позитивно дефинитна **минимум**

– $D_i < 0$ $\quad i$ - непарно

$\wedge$ негативно дефинитна **максимум**

$D_i > 0$ $\quad i$ - парно

Теорема о својственим вредностима

$|\lambda I - H| = 0$ → јединична матрица

$\lambda_i > 0$ позитивно дефинитна **минимум**

$\lambda_i < 0$ негативно дефинитна **максимум**

1. Да ли постоји оптимум у стационарној тачки функције $y(x) = 8x_1 + x_2 + 5x_1^2 - 9x_1x_2 + 2x_2^2$?

– прва ствар коју тражимо су стационарне тачке

– потребни услови:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \qquad 8 + 10x_1 - 9x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{9x_2 - 8}{10}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \qquad 1 - 9x_1 + 4x_2 = 0$$

$$1 - \frac{9}{10}(9x_2 - 8) + 4x_2 = 0 \quad /\cdot 10$$

$$10 - 81x_2 + 72 + 40x_2 = 0$$

$$41x_2 = 82 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2^* = 2} \quad \boxed{x_1^* = 1} \quad A(1,2)$$

– добили смо стационарну тачку, сад треба да проверимо да ли је она екстрем

+ силвестерова теорема

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ -9 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} D_1 = 10 > 0 \\ D_2 = 40-81 = -41 < 0 \end{array}\right\}$$ није позитивно дефинитна - није минимум за негативну дефинитност имамо обрнуту ситуацију

⇒ дакле, матрица је недефинитна

+ сопствене вредности

$$|\lambda I - H| = 0 \qquad \lambda^2 - 14\lambda + 40 - 81 = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ -9 & 4 \end{bmatrix} \right| = 0 \qquad \lambda^2 - 14\lambda - 41 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-41)}}{2}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 10 & 9 \\ 9 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{14 \pm 6\sqrt{10}}{2}$$

$$(\lambda - 10)(\lambda - 4) - 81 = 0 \qquad \lambda_1 = 7 + 3\sqrt{10} \qquad \lambda_2 = 7 - 3\sqrt{10}$$

⇒ када су сопствене вредности различитих знака, тада је матрица недефинитна

2. Наћи стационарне тачке и испитати њихове карактере за функцију $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + x_2^3 x_1 - x_1 x_2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \qquad 2x_1 x_2 + x_2^3 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2(2x_1 + x_2^2 - 1) = 0 \qquad x_2 = 0 \lor 2x_1 + x_2^2 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \qquad x_1^2 + 3x_1 x_2^2 - x_1 = 0 \Rightarrow x_1(x_1 + 3x_2^2 - 1) = 0 \qquad x_1 = 0 \lor x_1 + 3x_2^2 - 1 = 0$$

i) $\boxed{x_1^* = 0} \land \boxed{x_1^* = 0}$ $\quad A(0,0)$

ii) $\boxed{x_2^* = 0} \land x_1 + 3x_2^2 - 1 = 0$

$\boxed{x_1^* = 1}$ $\quad B(1,0)$

iii) $2x_1 + x_2^2 - 1 = 0 \land \boxed{x_1^* = 0}$

$\boxed{x_2^* = \pm 1}$ $\quad C(0,1) \quad D(0,-1)$

iv) $2x_1 + x_2^2 - 1 = 0 \quad /\cdot 3$

$x_1 + 3x_2^2 - 1 = 0$

$5x_1 - 2 = 0$

$\boxed{x_1^* = \frac{2}{5}}$

$x_2^2 = 1 - 2x_1$

$x_2^2 = 1 - 2 \cdot \frac{2}{5} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

$\boxed{x_2^* = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}}$

$E\left(\frac{2}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \quad F\left(\frac{2}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 & 2x_1 + 3x_2^2 - 1 \\ 2x_1 + 3x_2^2 - 1 & 6x_1 x_2 \end{bmatrix}$$

$D_1 = 2x_2$

$D_2 = 12x_1 x_2^2 - (2x_1 + 3x_2^2 - 1)^2$

	$A(0,0)$	$B(1,0)$	$C(0,1)$	$D(0,-1)$	$E(\frac{2}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5})$	$F(\frac{2}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5})$
D_1	0	0	2	−2	$\frac{2\sqrt{5}}{5} > 0$	$-\frac{2\sqrt{5}}{5} < 0$
D_2	$-1 < 0$	$-1 < 0$	$-4 < 0$	$-4 < 0$	$\frac{4}{5} > 0$	$\frac{4}{5} > 0$
	/	/	/	/	мин.	макс.

- кад добијемо да је једна детерминанта 0 - ту одустајемо, тражимо само строге екстреме!

Скенирано помоћу ЦамСцаннер-а

- кад је парни негативан – није ништа, свакако немамо тако ту ситуацију

- недефинитна је увек кад није дефинитна, а дефинитна је само у та два случаја

*** прошле године је било $3x^3$+.. преко шта неке ***

3. Укупни недељни приход радионице је

$P = -0{,}2x^2 - 0{,}25y^2 - 0{,}2xy + 200x + 160y$, где је x број завршених столова, а y број незавршених столова. Укупни недељни трошкови су $T = 100x + 70y + 4000$. Колико столова треба произвести недељно, како би добит била највећа?

профит ← $P = -0{,}2x^2 - 0{,}25y^2 - 0{,}2xy + 200x + 160y$

x - број завршених столова

y - број незавршених столова

T - укупни недељни трошкови

$T = 100x + 70y + 4000$

$D = P - T = -0{,}2x^2 - 0{,}25y^2 - 0{,}2xy + 200x + 160y - 100x - 70y - 4000 =$

$= -0{,}2x^2 - 0{,}25y^2 - 0{,}2xy + 100x + 90y - 4000$

$\frac{\partial D}{\partial x} = 0 \qquad -0{,}4x - 0{,}2y + 100 = 0$

$\frac{\partial D}{\partial y} = 0 \qquad -0{,}5y - 0{,}2x + 90 = 0 \quad /\cdot 2$

$-0{,}8y + 80 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y^* = 100}$

$0{,}2x = 90 - 0{,}5y$

$0{,}2x = 90 - 0{,}5 \cdot 100 = 90 - 50 = 40$

$\boxed{x^* = 200}$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}4 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & -0{,}5 \end{bmatrix}$$

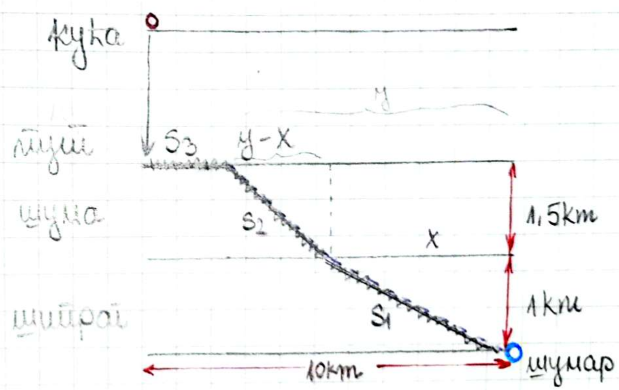
$D_1 = -0{,}4 < 0$

$D_2 = 0{,}2 - 0{,}04 = 0{,}16 > 0$

⇒ негативно дефинитна
максимум

домаћи:

1. Шумар се налази у тачки А и треба да пређе путем, шумом и кроз шипражје да би дошао до куће. Кроз шипраг се креће брзином 3km/h, кроз шуму брзином 4km/h и путем 5km/h. Како треба да се креће шумар како би најбрже стигао до куће?



$V = \frac{S}{T} \Rightarrow T = \frac{S}{V}$

$S_1^2 = 1^2 + x^2 \qquad V_1 = 3$

$S_2^2 = (1{,}5)^2 + (y-x)^2 \qquad V_2 = 4$

$S_3 = 10 - y \qquad V_3 = 5$

- треба да минимизујемо време тако би шумар за што краће време стигао до куће

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$T = \frac{S_1}{V_1} + \frac{S_2}{V_2} + \frac{S_3}{V_3}$$

$$2{,}25 + y^2 - 2xy + x^2$$

$$T = \frac{\sqrt{1+x^2}}{3} + \frac{\sqrt{(1{,}5)^2 + (y-x)^2}}{4} + \frac{10-y}{5}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \qquad \frac{1}{3}\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{4}\frac{-2y+2x}{2\sqrt{(1{,}5)^2+(y-x)^2}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}\cdot\frac{x-y}{\sqrt{(1{,}5)^2+(y-x)^2}} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} \;/\cdot(-1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \qquad \frac{1}{4}\frac{2y-2x}{2\sqrt{(1{,}5)^2+(y-x)^2}} - \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}\frac{-(x-y)}{\sqrt{(1{,}5)^2+(y-x)^2}} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{3}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{3}{5}$$

$$5x = 3\sqrt{1+x^2} \;/^2, \quad \underline{x>0}$$

$$25x^2 = 9 + 9x^2$$

$$16x^2 = 9$$

$$x^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow \boxed{x^* = \frac{3}{4}}$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{y-x}{\sqrt{(1{,}5)^2+(y-x)^2}} = \frac{1}{5}$$

$$5(y-x) = 4\sqrt{(1{,}5)^2+(y-x)^2} \;/^2, \quad \underline{y-x>0}$$

$$25(y-x)^2 = 36 + 16(y-x)^2$$

$$9(y-x)^2 = 36$$

$$(y-x)^2 = 4 \;/\sqrt{\;}$$

$$y - x = 2$$

$$y = 2 + x = 2 + \frac{3}{4}$$

$$\boxed{y^* = \frac{11}{4}}$$

Предавање 4 1.11.2024. ~ Ратаја ~

Вишедимензиона нумеричка оптимизација

- главна разлика је то што су први алгоритми много ефикаснији, док су други много робуснији / отпорнији, користе се у случају заглављивања...

локални оптимизациони алгоритми

- $\boxed{\text{метод најбржег пада (Gradient Descent - GD), ...}}$
+ Њутнов метод
- квази-Њутнови методи
- ...

глобални оптимизациони алгоритми

- $\boxed{\text{генетски алгоритам}}$
- $\boxed{\text{PSO}}$
- Artificial Bee Colony (ABC)
- Inteligent waterdrop
- симулирано каљење
- Алгоритам девичанских јужноамеричких лешинара
- $\boxed{\text{Ant Colony Optimization (ACO)}}$
- ...

	локални оптимизациони алгоритми	глобални оптимизациони алгоритми
дим. простора	$> 10^9$	$\sim 10^3$
комплексност имплементације	мала	средња
гаранција конвергенције	✓ постоји	не постоји
строгост претпоставке	велика	нема

Метод најбржег пада и модификације

- основна суштина је да сви имају исту петљу

x_k - решење у k-тој итерацији
$f(x)$ - критеријум који минимизујемо

x_0 ← некако иницијализујемо
v_k ← некако срачунамо
$x_{k+1} = x_k - v_k$

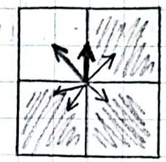
петља траје док се не задовоље услови краја/услови заустављ.

(I) Како рачунамо корак?
(II) Када алгоритам стаје?

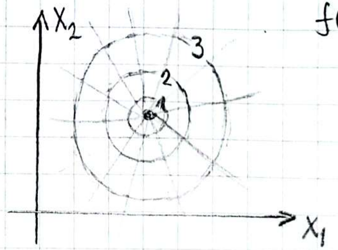
1D

- избор правца у коме ћемо кренути је најтежи део

2D



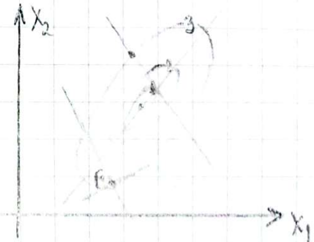
- градијент као показатељ правца



$f(x_1, x_2)$ - тачке на истој линији имају исту висину

Градијент

- вектор који показује у правцу најбржег пада
- управан је у односу на контурне линије (права која је управна на криву)
- критеријум је подједнако осетљив на обе променљиве
- ако мало пратимо градијент - то нам може бити корисна информација, али ако га пратимо мало више - можемо отићи тамо где нисмо хтели

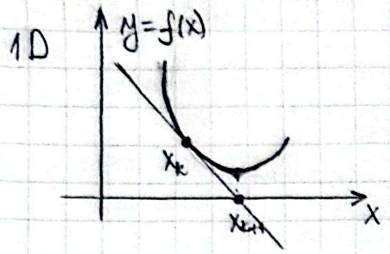


Њутнов метод

$$f(x_k+\Delta x) \approx f(x_k)+f'(x_k)\Delta x+\underbrace{\tfrac{1}{2}f''(x_k)\Delta x^2}$$

оптимизујемо по Δx

1D



$$\frac{d}{d\Delta x}=0: \quad f'(x_k)+f''(x_k)\Delta x=0$$

$$\Delta x=-\frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

- извод скалара по вектору нисмо радили, верујемо му на реч

*** извођење нас нико неће питати ***

- овај прајдао је градијент
- проблем инвертовање матрице, H^{-1} ако имамо 1000 променљ. нпр.

nD $\quad f(x_k+\Delta x) \approx f(x_k)+(\nabla f(x_k))^T\Delta x+\frac{1}{2}\Delta x^T H(x_k)\Delta x$

$$\frac{\partial f}{\partial \Delta x}=0 \qquad \nabla f(x_k)+H(x_k)\Delta x \Rightarrow \boxed{\Delta x=-H^{-1}(x_k)\nabla f(x_k)}$$

$\nabla f(x)$ - градијент функције $\qquad f=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}\\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\end{bmatrix}$

$$x_{k+1}=x_k-P_k\cdot\nabla f(x_k)$$

матрица чија је улога да ротира и скалира градијент

GRADIENT STEEPEST DESCENT

$$x_{k+1}=x_k-p\,\nabla f(x_k)$$

- највећи проблем у овом алгоритму је изабрати p, не постоји начин да се p изабере паметно, него пробамо па шта буде
- не модификујемо градијент, само га скалирамо са p

① (−) алгоритам стаје у првом локалном оптимуму или преводној тачки

2. (−) не постоји начин да се p одабере унапред: trial and error

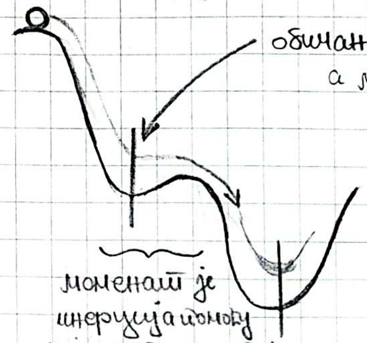
- zig-zag - јако пуно времена трошимо око решења, а никако да до њега дођемо

покушава да се избори са овим стварима

Градијент са моментом

- даје способност алгоритму да настави чак и када наиђе на локални оптимум или преводну тачку.
  решава прву тачку, другу не
- градијентни алгоритам ће стати када детектује нулти или мали градијент

обичан градијент стаје у првом локалном екстрему а моменат даје способност да ово прескочи



моменат је инерција помоћу које се кретање наставља

моментум

$$v_k=w v_{k-1}+p\nabla f(x_k)$$

$$x_{k+1}=x_k-v_k$$

- сада ћемо да нападнемо овај 2. део:
- „да ли могу да научим колико је p, и да ли је p исто по свакој оси?"
- ствар коју моменат ради је регулише кретање

*** градијентни, са моментом, њутнов - да знамо да постоји, не морамо знати извођење ***

- главно је више алгоритама, само ћемо радити 3, 4

- адаград алгоритам

- ако је градијент по некој оси јако велики, значи да се ту створи дељиоцу број

ADAGRAD

$$x_{k+1} = x_k - \eta \nabla f(x_k)$$

$$x_{i,k+1} = x_{i,k} - \eta \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_k) \qquad (\forall i)$$

основна идеја је да η зависи од i

$$\eta_i = \frac{\eta}{\sqrt{\sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_j)\right)^2 + \varepsilon}}$$

→ не служи ничему, него да се не дели нулом

- шта год радим, ово овде стада

$$x_{k+1,i} = x_{k,i} - \frac{\eta}{\sqrt{G_{k,i} + \varepsilon_1}} g_{k,i}$$

ADAM

$$x_{i,k+1} = x_{i,k} - \frac{\eta}{\sqrt{\hat{v}_{i,k}} + \varepsilon_1} \hat{m}_{i,k}$$

$$m_{i,k} = w_1 m_{i,k-1} + (1-w_1)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_k)$$

$$v_{i,k} = w_2 v_{i,k-1} + (1-w_2)\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_k)\right)^2$$

$$\hat{m}_{i,k} = \frac{m_{i,k}}{1-w_1}$$

$$\hat{v}_{i,k} = \frac{v_{i,k}}{1-w_2}$$

- све ово односи се на i-ту компоненту

- доста је отпоран на то како изаберемо η

*** на испиту ће питати само:
обичан градијент, градијент са моментом, адаград, адам ***

- не постоји начин да ово научимо сем да искодирамо и пробамо
- да пробамо да напишемо проблем да алгоритам не ради

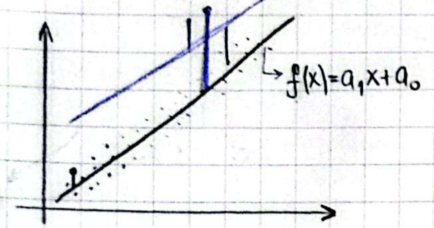
Вежбе 4 (аудиторне) 6.11.2024. (нисам била тада - снимак 17.11.2021.)

- Метод најмањих квадрата -

*** На писменим задацима нећемо добијати задатке тог типа у смислу да ми сами нешто проналазимо, али се могу наћи неки задаци где ће нам бити неопходно да креирамо критеријум оптималности на основу методе најмањих квадрата ***

- радиће цело извођење што они нас неће питати, циљ ће бити једино да разумемо како се формира метод најмањих квадрата

фитовање криве



- јако је тешко ако имамо пуно података да прођемо кроз сваку тачку, док нпр. тренд те праве можемо много лакше да одредимо

→ јако је битнији тренд

- податке представљамо неком кривом
- неки подаци налазе се на криву, а неки не - па самим тим правимо одређену грешку
- циљ је да нађемо a_1 и a_0 како бисмо нацртали ову криву
- хоћемо криву која ће „најбоље" да опише наше податке

$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n)$ → хоћемо да минимизујемо ову грешку

$f(x_k)=y_k+\underbrace{E_k}_{\text{грешка}\to\text{мин}}$

n-димензиони проблем свели смо на дводимензионални проблем

Грешке:

1) Максимална грешка

$$E_\infty(f)=\max_{1\le k\le n}|f(x_k)-y_k|$$

- за сваку тачку рачунамо растојање стварне вредности од наше апроксимиране вредности (те криве) и затим нађемо максимално растојање

2) средња грешка (L_1 грешка)

$$E_1(f)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-y_k|$$

- за разлику од максималне, средња грешка сумира сва растојања и дели их са бројем тачака које се налазе у нашем data set-у

3) средња квадратна грешка (LSQ)

$$E_2=\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-y_k|^2\right)^{1/2}$$

- представља стандард (оно што се најчешће користи у пракси)

① проблем код максималне грешке - када цртамо криву на основу максималне грешке → није добро јер овиме нисмо обухватили ниједну тачку из нашег data set-а, па се због тога максимална грешка ретко користи у пракси јер нам само једна тачка може направити проблем

Зато се средња грешка и средња квадратна грешка много чешће користе

Метод најмањих квадрата

$$E_2=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-y_k|^2}\to \text{мин.}$$

$$I=\varepsilon_2=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-y_k|^2$$ → ако минимизујемо ову суму, ми ћемо заправо минимизовати цео овај израз E_2

$f(x)=a_1x+a_0$ $(x_i, f(x_i))$

a_1 – нагиб криве; a_0 – место пресека са ординатом

x - независна (предикциона, предиктивна) променљива

f_0 - зависна променљива

$$I = \sum_{k=1}^{n} |a_1 x_k + a_0 - y_k|^2$$

непознате променљиве

→ тражимо парцијалне изводе по a_1 и a_0

$$\frac{\partial I}{\partial a_0} = 0 : \quad \sum_{k=1}^{n} 2(a_1 x_k + a_0 - y_k) = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} = 0 : \quad \sum_{k=1}^{n} 2(a_1 x_k + a_0 - y_k) x_k = 0$$

2 јне са 2 непознате

$$\sum_{k=1}^{n} (a_1 x_k + a_0 - y_k) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_1 x_k^2 + a_0 x_k - x_k y_k) = 0$$

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{k=1}^{n} x_k \\ \sum_{k=1}^{n} x_k & \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} y_k \\ \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \end{bmatrix}$$

уз a_0 уз a_1

Крамерово правило

$$Ax = b$$

A_i је матрица код које се i-та матрица мења вектором колоне код b

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

пр. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - cb} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ce}{ad - cb}$$

$$a_1^* = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum y_k \\ \sum x_k & \sum x_k y_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum x_k \\ \sum x_k & \sum x_k^2 \end{vmatrix}} = \frac{n \sum x_k y_k - \sum x_k \sum y_k}{n \sum x_k^2 - (\sum x_k)^2}$$

$$a_0^* = \frac{\begin{vmatrix} \sum y_k & \sum x_k \\ \sum x_k y_k & \sum x_k^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum x_k \\ \sum x_k & \sum x_k^2 \end{vmatrix}} = \frac{\sum y_k}{n} - a_1^* \frac{\sum x_k}{n}$$

x_k, y_k - вредности самог сета

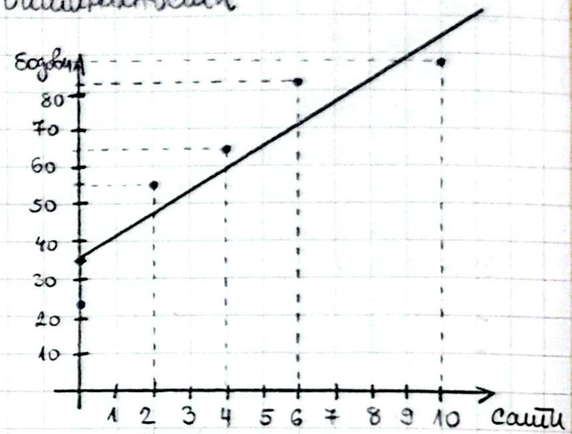
n - број тих података које имамо

$$I_{LSE} = \sum_{k=1}^{n} (a_1^* x_k + a_0^* - y_k)^2$$

↓ вредност критеријума оптималности

1.

сати које је студент провео учећи	број бодова који је остварио
6	82
10	88
2	56
4	64
0	23



$$y = a_1 x + a_0$$

$$a_1^* = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum y_k \\ \sum x_k & \sum x_k y_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum x_k \\ \sum x_k & \sum x_k^2 \end{vmatrix}}$$

$$a_0^* = \frac{\sum y_k}{n} - a_1^* \frac{\sum x_k}{n}$$

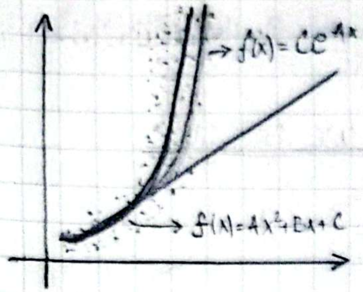
$$a_1^* = \frac{5 \cdot (6 \cdot 82 + 10 \cdot 88 + 2 \cdot 56 + 4 \cdot 64 + 0) - (6+10+2+4+0)(82+88+56+64+23)}{5 \cdot (36+100+4+16+0) - (6+10+2+4+0)^2}$$

$$= 6,1284$$

$$a_0^* = \frac{82+88+56+64+23}{5} - a_1^* \frac{6+10+2+4+0}{5} = 35,6351$$

$$\boxed{y = 6,1284x + 35,6351}$$

- некад ову криву желимо да фитујемо на мало софистициранији начин, да немамо само линеарну регресију



$$I=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-y_k|^2=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}|Ax_k^2+Bx_k+C-y_k|^2$$

$$\frac{\partial I}{\partial A}=0:\ \sum_{k=1}^{n}2(Ax_k^2+Bx_k+C-y_k)\cdot x_k^2=0$$
$$\frac{\partial I}{\partial B}=0:\ \sum_{k=1}^{n}2(Ax_k^2+Bx_k+C-y_k)\cdot x_k=0$$
$$\frac{\partial I}{\partial C}=0:\ \sum_{k=1}^{n}2(Ax_k^2+Bx_k+C-y_k)=0$$

- повећавањем реда полиномне функције, повећавамо број једначина, односно број непознатих које треба да одредимо

- некада те везе између зависне и независне променљиве **нису увек линеарне** - то може да буде и нека друга зависност
- генерално, постоји широка класа <u>НЕЛИНЕАРНИХ</u> проблема где се уз одговарајуће смене почетни нелинеарни проблем регресије може свести на линеарни

$$I=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-y_k|^2=\sum_{k=1}^{n}|Ce^{Ax_k}-y_k|^2$$

$$\frac{\partial I}{\partial C}=\sum_{k=1}^{n}2(Ce^{Ax_k}-y_k)e^{Ax_k}=0$$
$$\frac{\partial I}{\partial A}=\sum_{k=1}^{n}2(Ce^{Ax_k}-y_k)Cx_ke^{Ax_k}=0$$
$$C\sum_{k=1}^{n}e^{2Ax_k}-\sum_{k=1}^{n}y_ke^{Ax_k}=0$$
$$C\sum_{k=1}^{n}e^{2Ax_k}x_k-\sum_{k=1}^{n}x_ky_ke^{Ax_k}=0$$

$$\boxed{Ax=b}$$

- ово не знамо да решимо, па ћемо одрадити линеаризацију овог нелинеарног модела

- па линеаризација не може увек функционисати, али код оваквих функција она ради посао

Линеаризација нелинеарних модела

$$f(x)=y=Ce^{Ax}\ /\ln$$
$$\ln y=\ln(Ce^{Ax})$$
$$\underbrace{\boxed{\ln y}}_{Y}=\ln C+\ln e^{Ax}=\underbrace{\boxed{\ln C}}_{B}+A\underbrace{x}_{X}$$

$$\left.\begin{aligned}Y&=\ln y\\ B&=\ln C\\ X&=x\end{aligned}\right\}\Rightarrow\boxed{Y=AX+B}\quad \begin{aligned}A&=\dots\\ B&=\dots\end{aligned}$$

2.

сати	бодови
6	82
10	88
2	56
4	64
0	23

$$y=Ax+B$$
$$A=a_1\qquad B=a_0$$

$$A^*=\frac{n\sum x_ky_k-\sum x_k y_k}{n\sum x_k^2-(\sum x_k)^2}=0{,}1183$$
$$B^*=\frac{\sum y_k}{n}-A^*\frac{\sum x_k}{n}=3{,}5202$$
$$Y=\ln|y|=[\overset{\ln 82}{4{,}4067}\ \ 4{,}773\ \ 4{,}0254\ \ 4{,}1589\ \ 3{,}1355]$$
$$f(x)=Ce^{Ax}\ \rightarrow C=e^{\overset{B=\ln C}{B}}=33{,}7927$$
$$\boxed{f(x)=33{,}7927e^{0{,}1183x}}$$

Предавање 5

8.11.2024. (нисам била тада – снимак 19.11.2024.)

Оптимизација уз ограничење типа једнакости. Метод смене и метод ограничене варијације

$y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $\quad y = y(x_i)$ $\quad i = 1 \dots n$

- свесни смо да променљиве које нам служе да дођемо до оптималног решења имају нека ограничења – нивоа оф. (или смо ограничени новцем, процесором, меморијом...)
- ограничења на променљиве $x_1, x_2, \dots, x_n$ увек постоје

- реални физички систем увек има ограничење
- међутим, некада су та ограничења толико широка, да се проблем посматра као проблем без ограничења

$g_1(x_1 \dots x_n) = 0$

$g_2(x_1 \dots x_n) = 0$

$\vdots$

$g_m(x_1 \dots x_n) = 0$

$g_k(x_1 \dots x_n) = 0 \quad k = 1 \dots m$

$m < n$ → гранични случај када је $m = n$ не долази у обзир!

- да бисмо решавали ове проблеме, строго мора важити ова релација – што каже да када бисмо решили овај систем једначина остала би барем једна слободна променљива (барем један степен слободе) тако да променом те променљиве можемо да дођемо до бољег решења

m – број ограничења (колико услова ови x-еви морају да задовоље)

n – број променљивих

1. Метод смене

решимо систем $g_k(x_1 \dots x_n) = 0 \quad k = 1 \dots m$

→ одатле смо одредили m променљивих

тако добијено решење мењамо у критеријум оптималности чиме са редукујемо

m – променљивих

$y = y(x_1, x_2, \dots, x_{n-m})$

даље решавамо слободном оптимизацијом

пример 1: $y = 4x_1^2 + 5x_2^2$ → проблем је добро дефинисан (имамо две променљиве и

$2x_1 + 3x_2 = 6$ линеарно једно ограничење)

$x_1 = \frac{6 - 3x_2}{2}$

$y = 4\left(\frac{6 - 3x_2}{2}\right)^2 + 5x_2^2$

$y = 14x_2^2 - 36x_2 + 36$ → смањили смо димензионалност проблема даље решавамо када ограничење не постоји

$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 28x_2 - 36 = 0 \qquad x_2^* = \frac{36}{28} = 1{,}286$

$x_1^* = 1{,}071$

$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = 28 > 0$ мин.

пример 2: $y = x_2 - x_1^2$

$x_1^2 + x_2^2 = 1$ нелинеарно

$x_2 = \pm\sqrt{1 - x_1^2}$

$+\sqrt{1-x_1^2}$

$+ \quad y = \sqrt{1 - x_1^2} - x_1^2 \qquad x_1^* = 0 \quad x_2^* = 1$

- $y = -\sqrt{1-x_1^2} - x_1^2$ $x_1^* = 0$ $x_2^* = -1$

$x_1^* = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ $x_2^* = -0,5$

$x_1^2 = 1 - x_2^2$

$x_2 = \pm 1$, $x_1 = 0$ → максимална вредност коју x_2 може да има (што је баш оно што нам недостаје)

$y = x_2 - 1 + x_2^2 = x_2^2 + x_2 - 1$

$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 2x_2 + 1 = 0$ $x_2^* = -0,5 \to x_1^* = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

- пример 1 разликује се од примера 2 по томе што је ограничење у примеру 1 линеарно, а у примеру 2 квадратно одн. нелинеарно
- општа теорија нелинеарних једначина и нелинеарних система не постоји.
- када имамо нелинеарну једначину, ми не знамо колико има решења, а не знамо ни да ли решења постоје!
- „Сви линеарни системи личе један на друге, а сви нелинеарни су нелинеарни на свој начин"
- кључна разлика:
  - када имамо линеарни систем - увек можемо да га решимо одн. знамо услове егзистенције решења одн. када га можемо решити
  - међутим, када имамо нелинеарни систем - немамо никакву представу о томе

(када су ограничења нелинеарна, систем је изузетно осетљив на то коју ћемо променљиву да елиминишемо, одн. по којој променљивој ћемо да радимо)

- дакле, метод смене није подесан за ограничења која су нелинеарна!
- прилично је лак и практичан за линеарна ограничења, док се код нелинеарних показао много комплексније
- зато, метод смене нема велику употребну вредност
- питање? где да нађемо $x_1^* = 0$ $x_2^* = 1$?
  $x_1^* = 0$ $x_2^* = -1$

- у оптимизацији увек имамо могућа два решења:
  прво решење што је као да не постоји ограничење;
  ако то није случај онда се ограничење увек налази на граници

цела мудрост оптимизације и то је капитално битно

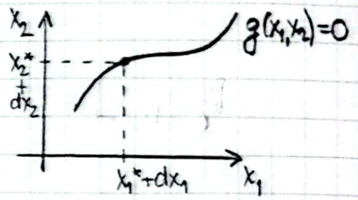
- или нас ограничења не погађају или се налазе на граници!
- зато смо код нелинеарних морали проверити и границе

2. Метод ограничене варијације

- значајно је општији (значајно потентнији) од претходног
- али је извођење мало комплексније, па ћемо кренути од функције две променљиве (тада можемо имати само једно ограничење)

$y = y(x_1, x_2)$

$g(x_1, x_2) = 0$



П.П. у x^* се налази екстрем

(1) $dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 = 0$

$g(x_1^*, x_2^*) = 0$

$g(x_1^* + dx_1, x_2^* + dx_2) = 0$

за дозвољене вредности dx_1, dx_2

dy - тотални диференцијал → померимо се за dx_1, dx_2 и гледамо како ће да расте y

dy каже колики је прираштај функције у тачки екстрема, а то фактички значи да када се померимо из тачке dx_1 и dx_2 морају бити такви да стално задовољавају ограничење

→ дозвољени помераји су само они који стално гарантују да ограничење буде задовољено

$$g(x_1^*+dx_1, x_2^*+dx_2) \approx g(x_1^*, x_2^*) + \frac{\partial g}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2}dx_2 = 0$$ све је у x^*

$$\underbrace{g(x_1^*+dx_1, x_2^*+dx_2) - g(x_1^*, x_2^*)}_{dg} = \frac{\partial g}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2}dx_2 = 0$$

(2) $dg = \frac{\partial g}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2}dx_2$

(1), (2) $dx_1 = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_2}}{\frac{\partial g}{\partial x_1}}dx_2 \rightarrow (1)$ $\quad \frac{\partial g}{\partial x_1} \neq 0$

→ из доња израза елиминишемо тај дозвољени померај dx_1 и мењамо у ову горњу једначину

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} - \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\frac{\partial g}{\partial x_2}}{\frac{\partial g}{\partial x_1}}\right)dx_2 = 0$$

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial g}{\partial x_1} - \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)dx_2 = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial g}{\partial x_1} - \frac{\partial y}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial g}{\partial x_2} = 0}$$

→ овај услов изведен је заправо из услова да је први извод једнак нули

- ми смо фактички опет радили неки метод смене тако што смо елиминисали дозвољени померај dx_1 под условом да он задовољава $\frac{\partial g}{\partial x_1} \neq 0$

$$\boxed{g(x_1, x_2) = 0}$$

→ потребни услови да би функција имала екстрем

- сакривено, што је и даље метод смене - нисмо елиминисали променљиве x_1 и x_2, али смо елиминисали dx_1 и дошли до 1. услова, а онда 2. услов представља само ограничење

- Јакобијан - матрица првих извода

- није нам битан само параметар и која је његова вредност, већ и како ће он да се мења
- како ће он да се мења у нумерици указује та детерминанта првих извода која се зове јакобијан

пр. 45 ↘ 15 ↙ 2 → ти трендови у мултидимензионом простору - њих одређује јакобијан

- зашто у нумерици када нам нешто треба да објаснимо наше решење - није довољно одредити тачку (као 15 у овом случају), него је изузетно важно одредити тренд да ли расте или опада

- матрица првих извода = матрица трендова

$\underline{dx_1} \rightarrow dx_2$

- прво тражимо извод по dx_2 одн. по ономе што нисмо елиминисали

$$J_2\left(\frac{y, g}{x_2, x_1}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_2} & \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_1} \end{vmatrix} = 0$$

→ прво тражимо по „слободној" променљивој x_2, па онда по x_1 који смо померај елиминисали

$$g(x_1, x_2) = 0$$

- Јакобијан представља матрицу првих извода, а први изводи су ти који одређују тренд
- као што нам први изводи говоре да ли функција расте или опада, тако нам и матрица првих извода говори да ли тренд у простору опада или расте

$$y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad k = 1 \ldots m \quad m < n$$

$$g_k(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad dx_1 \ldots dx_m$$

$m+1 \ldots n$

пошто имамо m ограничења, можемо елиминисати $dx_1 \ldots dx_m$ помераја; али од $m+1$ до n морамо тражити неке друге потребне услове

$$dg_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial x_i} dx_i = 0$$

$$dy = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i = 0 \qquad m \rightarrow \text{елиминишемо}$$

$m+1 \ldots n$
$n-m$
} остале изводе морали бисмо заменити неким оваквим јакобијаном

$$y = y(x_1 \dots x_n)$$

$$\downarrow$$

$$y = y(x_1 \dots x_{n-m})$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial y}{\partial x_{n-m}} = 0$$

методом смене

→ ако смо морали имати $n-m$ првих извода једнаких нули, морамо имати и исто толико јакобијана једнаких нули

$$J_k\left(\frac{y, g_1 \dots g_m}{x_k, x_1 \dots x_m}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_k} & \frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_m} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_k} & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_k} & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m} \end{vmatrix}_{(m+1)\times(m+1)} = 0$$

$k = m+1, m+2 \dots n$

променљива по којој се врши оптимизација

оне променљиве које су служиле за елиминисање додољених померања

служили су да се елиминишу померaји

слободна колона за оптимизацију која је уствари она којом управљамо, а то су они који нису пали под ограничење од $m+1$ до n

- значи, ми сада нисмо тражили нуле првог извода, него нуле линеаризованог система (фактички смо линеаризовали ограничење) и тражили нуле првог извода
- међутим, пошто смо линеаризовали, наш систем се закомпликовао и уместо <u>првог извода</u> сада имамо <u>јакобијан</u>

- да погледамо 3 примера у скрипти:
  - <u>први</u> – тривијалан
  - <u>други</u> – служи за вежбу
  - <u>трећи</u> – служи да покажемо колико смо научили (има једну зачкољицу на коју је указао када је рекао да је $\frac{\partial g}{\partial x_1} \neq 0$)

    → пажљиво обратити пажњу на оно што пише са стране

*** решавање задатака проверава се на колоквијуму, а на усменом нас пита извођење, као што је писао на табли ***

Вежбе 5 (аудиторне) 13. 11. 2024.

– Оптимизација уз ограничења типа једнакости.
Метод смене и ограничене варијације –

– критеријум оптималности:

$f(\underline{x}) = f(x_1 \dots x_n)$

– ограничења:

$h_i(\underline{x}) = 0 \quad i = 1 \dots m$

1. Одреди минимум функције $f(\underline{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2$ уз ограничење $h(\underline{x}): x_1 + x_2 - 4 = 0$ користећи метод смене.

$$f(\underline{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2$$
$$h(\underline{x}): x_1 + x_2 - 4 = 0$$
$$x_1 = 4 - x_2$$

$$f(x_2) = 2(4 - x_2)^2 + 3x_2^2$$
$$f(x_2) = 2(16 - 8x_2 + x_2^2) + 3x_2^2 =$$
$$= 5x_2^2 - 16x_2 + 32$$

П.У. $\frac{df}{dx_2} = 10x_2 - 16 = 0 \Rightarrow x_2^* = \frac{8}{5}$

$x_1^* = 4 - \frac{8}{5} = \frac{12}{5}$ $\quad A\left(\frac{12}{5}, \frac{8}{5}\right)$

довољни услови: $\frac{d^2f}{dx_2^2} = 10 > 0$ минимум

- димензионалност ће нам се само смањити за 1 и радимо са тим критеријумом који смо добили

2. Применом методе смене одредити тачку у којој функције $f(\underline{x}) = 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_1^2 - 2x_2^2 - \frac{1}{3}x_3^2$ има максимум уз ограничење $h(\underline{x}): x_1 + x_2 + x_3 = 5$.

$$f(\underline{x}) = 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_1^2 - 2x_2^2 - \frac{1}{3}x_3^2$$
$$h(\underline{x}): x_1 + x_2 + x_3 = 5$$
$$x_3 = 5 - x_1 - x_2$$

$$f(\underline{x}) = 6x_1 + 4x_2 + 2(5 - x_1 - x_2) - 3x_1^2 - 2x_2^2 - \frac{1}{3}(5 - x_1 - x_2)^2 =$$
$$= \frac{22}{3}x_1 + \frac{16}{3}x_2 + \frac{5}{3} - \frac{10}{3}x_1^2 - \frac{7}{3}x_2^2 - \frac{2}{3}x_1x_2$$

П.У. $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{22}{3} - \frac{20}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 = 0 \;/\cdot 3$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{16}{3} - \frac{14}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_1 = 0 \;/\cdot 3$$

$$22 - 20x_1 - 2x_2 = 0$$
$$16 - 14x_2 - 2x_1 = 0$$

$$10x_1 + x_2 = 11 \;/\cdot(-7)$$
$$x_1 + 7x_2 = 8$$

$$-69x_1 = -69$$
$$x_2 = 11 - 10x_1$$
$$x_1^* = 1$$
$$x_2^* = 11 - 10 = 1$$

$$x_3^* = 5 - 1 - 1 = 3$$

$A(1, 1, 3)$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{20}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{14}{3} \end{bmatrix}$$

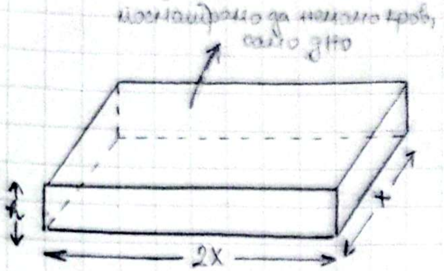
$D_1 = -\frac{20}{3} < 0$

$D_2 = \frac{280}{9} - \frac{4}{9} = \frac{276}{9} > 0$

максимум

- које ћемо стационарне тачке добити зависи од смене коју смо одабрали
- ако урадимо само за једну смену, ризикујемо да изгубимо неку од стационарних тачака

3. Контејнер треба да има ширину x, дужину $2x$, а запремина треба да буде $10m^3$. Трошак за материјал дна је $10€/m^2$, а за материјал зидова је $6€/m^2$. Које су димензије контејнера најјефтиније?



$V = 10\,m^3$

основа: $10€/m^2$

омотач: $6€/m^2$

h: $\underline{2x^2h = 10}$ – имамо ограничење, треба да поставимо критеријум оптималности:

$z = 10 \cdot 2x^2 + 6(2xh + 2\cdot 2xh) = \underline{20x^2 + 36xh}$ $\quad h = \frac{5}{x^2}$

$z = 20x^2 + 36x\frac{5}{x^2} = 20x^2 + 180x^{-1}$

$\frac{dz}{dx} = 40x - 180x^{-2} = 0$

$\frac{2x^3-9}{x^2} = 0$

$x \neq 0 \qquad 2x^3 - 9 = 0$

$x^3 = \frac{9}{2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{9}{2}}$

$x \approx 1,65 \qquad h \approx 1,83 \qquad A(1,65,\ 1,83)$

- да видимо шта ће се десити ако имамо другу смену:

  $x^2 = \frac{h}{5}$

  $x = \pm\sqrt{\frac{h}{5}}$

- нема смисла радити други случај јер дужина не може бити негативна

Метод ограничених варијација

- овде нема фаворизована променљивих, имамо проблем ако су решења линеарно зависна по променљивама

$f(\underline{x}) = f(x_1 \dots x_n) \rightarrow n$ - број променљивих

ограничења: $h_i(x) = 0 \quad i = 1 \dots m \rightarrow m$ - број ограничења / број неких једначина

$n > m$

- ако имамо више једначина него променљивих, нема никакве оптимизације у томе

$k = m+1 \dots n$

$$J_k = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_k} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_m} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_k} & \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \frac{\partial h_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_k} & \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \frac{\partial h_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial h_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_k} & \frac{\partial h_m}{\partial x_1} & \frac{\partial h_m}{\partial x_2} & \frac{\partial h_m}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} = 0$$

1. Методом ограничених варијација одредити стационарне тачке функције $y(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2$ уз ограничење $h(x_1, x_2): 1 - x_1^2 - x_2^2 = 0$.

$y(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2 \qquad m = 1 \quad n = 2$

$h(x_1, x_2): 1 - x_1^2 - x_2^2 = 0 \qquad k = m+1 \dots n \quad \boxed{k = 2}$

$$J_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_2} & \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} & \frac{\partial h}{\partial x_1} \end{vmatrix} = 0$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2x_1 \\ -2x_2 & -2x_1 \end{vmatrix} = 0$$

$-2x_1 - 4x_2x_1 = 0$

$x_1 + 2x_2x_1 = 0$

$x_1(1 + 2x_2) = 0$

$x_1 = 0 \qquad 1 + 2x_2 = 0$

$1 - x_1^2 - x_2^2 = 0$

$x_1^2 = 1 - x_2^2$

$x_2^2 = 1 - x_1^2$

i) $x_1^* = 0$

$x_2^2 = 1$

$x_2^* = \pm 1$

$A(0,1)$

$B(0,-1)$

ii) $x_2^* = -\frac{1}{2}$

$x_1^2 = \frac{3}{4}$

$x_1^* = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$D\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

2. Методом ограничених варијација одредити стационарне тачке функције $y(x_1,x_2,x_3) = 7x_1 - 6x_2 + 4x_3$ уз ограничење $h(x_1,x_2,x_3): x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 1 = 0$.

$y(x_1,x_2,x_3) = 7x_1 - 6x_2 + 4x_3$ $\quad m=1 \quad n=3$

$h(\underline{x}): x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 1 = 0$ $\quad k = m+1 \ldots n \quad \boxed{k=2,3}$

$$J_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_2} & \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} & \frac{\partial h}{\partial x_1} \end{vmatrix} = 0 \qquad J_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_3} & \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_3} & \frac{\partial h}{\partial x_1} \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

требаће нам и матрица J_3 јер k може бити и 3

$$J_2 = \begin{vmatrix} -6 & 7 \\ 4x_2 & 2x_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad J_3 = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6x_3 & 2x_1 \end{vmatrix} = 0$$

$-12x_1 - 28x_2 = 0$ ...

$8x_1 - 42x_3 = 0$

$x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 1 = 0$

$A(0{,}823,\ -0{,}353,\ 0{,}157)$

$B(-0{,}823,\ 0{,}353,\ -0{,}157)$

3. Методом ограничених варијација одредити стационарне тачке функције $z(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ уколико су ограничења $h_1(\underline{x}): x_1 + 2x_2 = 2$ и $h_2(\underline{x}): x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 = 2$.

$z(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ $\quad m=2 \quad n=3$

$h_1: x_1 + 2x_2 = 2$

$h_2: x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 = 2$

$k = m+1 \ldots n \quad \boxed{k=3} \rightarrow$ k може да узме вредност од 3 до 3 значи само 3

$h=0$ треба све пребацити на леву страну, овде свакако ништа неће мењати јер су константе, а извод константе је 0

$$J_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_3} & \frac{\partial z}{\partial x_1} & \frac{\partial z}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_3} & \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_3} & \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = 0 \qquad J_3 = \begin{vmatrix} 2x_3 & 2x_1 & 2x_2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4x_3 & 2x_1 & 4x_2 \end{vmatrix} = 0$$

- од потребних услова добили смо једну једначину, остале две су једначине ограничења

$$2x_3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2x_1 & 4x_2 \end{vmatrix} + 4x_3 \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$2x_3(4x_2 - 4x_1) + 4x_3(4x_1 - 2x_2) = 0$

$\cancel{8x_2x_3} - 8x_1x_3 + 16x_1x_3 - \cancel{8x_2x_3} = 0$

$8x_1x_3 = 0$

$x_1 + 2x_2 - 2 = 0$

$x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2 = 0$

i) $x_1^* = 0$

$x_2^* = 1$

$x_3^* = 0$

$A(0,1,0)$

ii) $x_3^* = 0$

$x_2^* = 1 \quad x_2^* = \frac{1}{3}$

$x_1^* = 0 \quad x_1^* = \frac{4}{3}$

$B(0,1,0)$

$C\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$

Предавање 6

15. 11. 2024. (+снимак 26. 11. 2021.)
(и део 3. 11. 2021.)

Оптимизација уз ограничење типа једнакости
Метод Лагранжевих множитеља и казнених функција

$y = y(x_1 \ldots x_n)$

$g_1(x_1 \ldots x_n) = 0$

$\vdots$

$g_m(x_1 \ldots x_n) = 0$ $\qquad m < n$

- схватили смо и да је метод ограничене варијације у основи осетљив на избор променљивих, односно њихове променљиве сврставамо у две категорије
- оне по којима решавамо допуштене прираштаје и оне које заменујемо у потребан услов да је први извод једнак нули

- дакле, и он је у принципу неки метод смене и на неки начин фаворизује неке променљиве па се у неким случајевима не може применити

- нама треба мало општији алгоритам – да све променљиве третира на исти начин
- треба нам алгоритам који би нам био први избор ако нисмо сигурни како да започнемо решавање нашег оптимизационог проблема
  → што је у принципу метод Лагранжевих множитеља

- метод казнених функција пре свега има своју примену у нумеричким итерацијама
- традиционалне методе су све прављене да систем нема ограничења
→ уградити ограничење у неки нови критеријум оптималности је у принципу метод казнених функција

1. формирање новог критеријума оптималности – Лагранжева функција (лагранжијан)

$$F \equiv L = y(x_1, x_2 \ldots x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(x_1 \ldots x_n) \qquad n+m$$

$\lambda_k \quad k = 1 \ldots m$

↳ Лагранжеви множитељи

- стари критеријум оптималности + ограничење које се уводи помоћу Лагранжевих множитеља

- колико имамо ограничења, толико имамо Лагранжевих множитеља
- наша оригинална димензионалност је порасла, а цена је та да све променљиве третирамо на исти начин

↑ основна идеја поступка

- даље проблем решавамо као да ограничења не постоје

2. $\dfrac{\partial F}{\partial x_i} = \dfrac{\partial y}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \dfrac{\partial g_k}{\partial x_i} = 0 \qquad i = 1 \ldots n$
   - први извод по свим променљивама једнак нули

3. $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda_k} = g_k(x_1 \ldots x_n) = 0 \qquad k = 1 \ldots m$
   - први извод по свим Лагранжевим множитељима λ_k једнак нули (додатним променљивама)

4. решимо систем 2, 3 и проверимо ограничења $g_k = 0$
   - проверимо да ли свако од решења задовољава ограничење
   - често се заборави корак 4

- прва четири корака довољна су за потребне услове

- кораци 5, 6 су довољни услови

пример: $y = 4x_1^2 + 5x_2^2$

$2x_1 + 3x_2 = 6$ → 6 мора прећи на другу страну, $g(\ ) = 0$

$F = 4x_1^2 + 5x_2^2 + \lambda(2x_1 + 3x_2 - 6)$

↳ једно λ пошто имамо једно ограничење!

$\dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 8x_1 + 2\lambda = 0 \qquad \lambda = -4x_1$

$\dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 10x_2 + 3\lambda = 0 \qquad \lambda = -\dfrac{10}{3}x_2$

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{5}{6}x_2$

$\dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 2x_1 + 3x_2 - 6 = 0$

$x_1^* = 1{,}071$

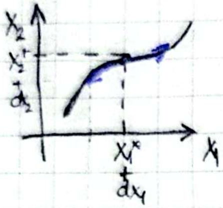
$x_2^* = 1{,}286$

$y = y(x_1, x_2)$

$g(x_1, x_2) = 0$

ограничена функција, у тачки екстрема

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 = 0$$



$$dg = \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

$$dx_1 = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_2}}{\frac{\partial g}{\partial x_1}} dx_2$$

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} - \underbrace{\frac{\frac{\partial y}{\partial x_1}}{\frac{\partial g}{\partial x_1}}}_{\lambda} \frac{\partial g}{\partial x_2}\right) dx_2 = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned}}$$

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}\right) dx_2 = 0$$

$$\lambda = -\frac{\frac{\partial y}{\partial x_1}}{\frac{\partial g}{\partial x_1}} \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0$$

- има смисла увести неку додатну променљиву и формирати проширени критеријум оптималности и онда поставити први извод по свим променљивама да буде једнак нули

(овај доказ има својих недостатака)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} \end{bmatrix} = -\lambda \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

није исто λ али само због овог горе минуса (он заправо не значи ништа)

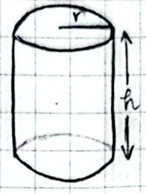
$$\nabla y(x_1, x_2) = \lambda \, \nabla g(x_1, x_2)$$

градијент ← Лагранжов множилац → градијент

- поента је да су у тачки екстрема градијент функције (критеријума оптималности) и градијент ограничења међусобно паралелни, а да њихова међусобна сразмера у интензитету тог вектора одговара Лагранжовом множиоцу

Проблем руских конзерви

- проблем конзерве - од свих цилиндара задате запремине, нађи онај најмање површине (да потрошимо најмање материјала)
- колико Coca Cola баца материјала да прави лименке које нису оптималне



y: $P = 2r^2\pi + 2r\pi h$ → критеријум оптималности

g: $V = r^2\pi h$ → ограничење $\quad V - r^2\pi h = 0$

- ако задамо и r и h, ми смо предефинисали проблем, значи мора бити једно ограничење

$g=0$ → само нам је битно да са десне стране буде 0

$$F = 2r^2\pi + 2r\pi h + \lambda(V - r^2\pi h)$$

$$\frac{\partial F}{\partial r} = 4r\pi + 2\pi h - 2\lambda r\pi h = 0 \qquad 2r + h - \lambda r h = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial h} = 2r\pi - \lambda r^2\pi = 0 \qquad r(2 - \lambda r) = 0$$

$\cancel{r=0}$ $\qquad r = \frac{2}{\lambda}$

- цилиндар најмање површине ← $\cancel{r=0}$ је онај који не постоји
- у оптимизацији је изузетно битно добро дефинисати проблем (проблем морамо добро вербализовати)

провери ограничење! не задовољава услов (**корак 4**)

- морамо проверити и на испиту, нека ограничења испадну тривијални али не задовољавају услов

$$2r + h - \cancel{\lambda} \cdot \frac{2}{\cancel{\lambda}} h = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{2r = h}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial h} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial h} & \frac{\partial^2 F}{\partial h^2} \end{bmatrix}$$

(D_1, D_2)

- када решимо ово, добијамо да је:

$D_1 = -4$?

$D_2 = -4$

- враћамо се сада на кораке 5 и 6 да испитамо довољне услове

5. формирамо матрицу која одговара Хесијану,
матрица Φ - матрица свих других извода

$$\Phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \qquad D_1, D_2 \qquad D_i > 0$$

- ако анализа дефинитности матрице покаже да се ради о екстрему, онда то решење јесте min/макс.
- ако не покаже, идемо на корак 6

6. матрица P - матрица свих градијената

анализа

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

а онда формирамо матрицу Δ

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Phi - \mu I_{n\times n} & P^T_{n\times m} \\ P_{m\times n} & \emptyset_{m\times m} \end{bmatrix}_{(n+m)(n+m)}$$

I - јединична матрица димензије n

- од матрице Δ нађемо детерминанту Δ коју решимо у функцији непознатих параметара μ

$\mu_i > 0$ минимум

$\mu_i < 0$ максимум

$i = 1 \dots n$

- ако буде овај задатак - 2×1 ће бити макс.
- и стављао нам је чисто ради заокруживања оцене
- доказ се базира на својственим вредностима матрице које нисмо радили, па нећемо доказивати

↳ на вежбама ћемо можда радити 3×1 али не да нас малтретирају, само да нам покажу

казнене функције

- основна идеја казнених функција јесте да ставимо велику казну ако ограничење не буде задовољено
- велика казна служи да ограничење буде стално задовољено

пример: $y = x^2$

$x = 1$

$$F = \underbrace{x^2}_{\text{стари критеријум оптималности}} + \underbrace{p(x-1)^2}_{\text{казна, казнена ф-ја}} \qquad p \nearrow \rightarrow p \text{ је јако велики број}$$

ограничење $x = 1$

- ако ограничење није задовољено овај велики број p ће да допринесе да вредност ф-је драстично порасте

$y = y(x_1 \dots x_n)$

$g_1(x_1 \dots x_n) = 0$

$g_m(x_1 \dots x_n) = 0$

- за казнене функције јако је битно тражимо ли минимум или максимум

минимум: $\Phi = y + pg^2$

максимум: $\Phi = y - pg^2$

$P_k g_k^{(2)}$

минимум

$$\Phi = y(x_1 \ldots x_n) + \sum_{k=1}^{m} p_k g_k^2 (x_1 \ldots x_n)$$

$p_k \to \infty$

максимум

$$\Phi = y(x_1 \ldots x_n) + \sum_{k=1}^{m} p_k g_k^2 (x_1 \ldots x_n)$$

<u>пример:</u> $y = 4x_1^2 + 5x_2^2$

$$2x_1 + 3x_2 = 6$$

$$\Phi = 4x_1^2 + 5x_2^2 + p(2x_1 + 3x_2 - 6)^2$$

ограничење више не постоји, од сада нам је само овај критеријум оптималности битан

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 8x_1 + 4p(2x_1 + 3x_2 - 6) = 0 \qquad p(\ ) = -2x_1$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 10x_2 + 6p(2x_1 + 3x_2 - 6) = 0 \qquad p(\ ) = -\frac{10}{3}x_2$$

$$x_1 = \frac{5}{6}x_2$$

$$x_2 = \frac{9}{7 + \frac{1}{p}} \qquad p \to \infty \qquad x_2 = \frac{9}{7} = 1{,}286$$

- значи, у оптималном решавању оног тренутка када поставимо нови критеријум оптималности, стари критеријум оптималности не постоји

- треба водити рачуна да сва ограничења буду ненегативна и због тога стављамо под знаком квадрата

Вежбе 6 (аудиторне) 20. 11. 2024.

– Метод Лагранжових множитеља –

– критеријум оптималности:

$$f(\underline{x}) = f(x_1 \ldots x_n) \quad i = 1 \ldots n$$

– ограничења:

$$g_k(\underline{x}) = 0 \quad k = 1 \ldots m \qquad m < n$$

да систем не буде предефинисан

– Метод Лагранжових множитеља – формирамо функцију Лагранжијан, формирамо проширени критеријум

– идеја је да сваку променљиву третирамо једнако!

1. формирамо проширени критеријум

$$L = f(\underline{x}) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot g_k$$

m+k

2. потребни услови:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1 \ldots n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = g_k(\underline{x}) = 0$$

↓ стационарне тачке

3. проверити ограничења

↓ у овој лекцији ће бити банално, у каснијим примерима ће имати више смисла

4. довољни услови:

- Силвестерова теорема
- теорема о сопственим вредностима

$$H = \ldots \qquad |\lambda I - H| = 0$$

Q - Хесијан

5. $$\begin{bmatrix} Q - I\mu & P^T \\ P & 0 \end{bmatrix}$$ → сад треба да нађемо детерминанту ове матрице и изједначимо је са 0

– да радимо овако (некад са предавања)

– уколико преко корака 4 не добијемо, онда радимо корак 5

$$\begin{vmatrix} Q - I\mu_{n\times n} & P^T_{n\times m} \\ P_{m\times n} & 0_{m\times m} \end{vmatrix}_{(m+n)(m+n)} = 0 \qquad \begin{matrix} \mu > 0 & \text{мин.} \\ \mu < 0 & \text{макс.} \end{matrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

→ врсте се односе на ограничења, а колоне на парцијалне изводе по одређеним променљивама

1. Методом Лагранжових множитеља одредити стационарне тачке функције $f(x,y) = -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y$ уз ограничење $g: 3x + y - 10 = 0$ и испитати њихов карактер.

$$f(x,y) = -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y$$

$$g:\ 3x + y - 10 = 0$$

→ додамо суму Лагранжових множитеља и ограничења

1. $L = -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y + \lambda(3x + y - 10)$

2. потребни услови

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -4x + y + 8 + 3\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -2y + x + 3 + \lambda = 0 \qquad x^* = \frac{69}{28} \qquad y^* = \frac{73}{28}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 3x + y - 10 = 0 \qquad A\left(\frac{69}{28}, \frac{73}{28}\right)$$

3. проверити ограничење

4. довољни услови

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$D_1 = -4 < 0$

$D_2 = 8 - 1 = 7 > 0$

→ ово је негативно дефинитна матрица и имамо макс.

2. Методом Лагранжевих множитеља одредити стационарне тачке функције $f(x_1, x_2) = x_2^2 - 2x_1 - x_1^2$ уз ограничење $g: x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ и испитати њихов карактер.

$$f(x_1, x_2) = x_2^2 - 2x_1 - x_1^2$$

$$g: x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

1. $L = x_2^2 - 2x_1 - x_1^2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1)$

→ парцијални извод по Лагранжевом множиоцу а то нам је заправо ограничење

2. $\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2 - 2x_1 + 2\lambda x_1 = 0$

$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + 2\lambda x_2 = 0 \qquad x_2(1+\lambda) = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \qquad x_2 = 0 \quad 1 + \lambda = 0$

i) $x_2^* = 0 \qquad x_1^2 = 1 \qquad A(1, 0)$

$x_1^2 + 0 - 1 = 0 \qquad x_1^* = \pm 1 \qquad B(-1, 0)$

ii) $\lambda = -1 \qquad \frac{1}{4} + x_2^2 - 1 = 0 \qquad C\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$-2 - 2x_1 - 2x_1 = 0 \qquad x_2^2 = \frac{3}{4} \qquad D\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$-4x_1 = 2 \qquad x_2^* = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_1^* = -\frac{1}{2}$

$\lambda_C = \lambda_D = -1$

- физички смисао Лагранжевог множитеља
- за колико повећамо неку вредност да видимо за колико ће се повећати ограничење??

4. довољни услови

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+2\lambda & 0 \\ 0 & 2+2\lambda \end{bmatrix}$$

$D_1 = -2 + 2\lambda$

$D_2 = (-2+2\lambda)(2+2\lambda) =$

$= 4\lambda^2 - 4$

$\lambda_A = 2 \qquad \lambda_B = 0$

	A	B	C	D
D_1	2	-2	-4	-4
D_2	12	-4	0	0
	мин.	не знамо	не знамо	не знамо

- сада за тачке Б, C и D морамо да радимо 5. корак

5. $|\Delta| = \begin{bmatrix} Q - \mu I & P^T \\ P & 0 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -2+2\lambda-\mu & 0 & 2x_1 \\ 0 & 2+2\lambda-\mu & 2x_2 \\ 2x_1 & 2x_2 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$|\Delta| = -4x_2^2(2\lambda-2-\mu) - 4x_1^2(2\lambda+2-\mu) = 0$$

	$A(1,0)$	$B(-1,0)$	$C(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$	$D(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$
	$\lambda_A=2$	$\lambda_B=0$	$\lambda_C=-1$	$\lambda_D=-1$
μ		$2>0$	$-3<0$	$-3<0$
		мин.	макс.	макс.

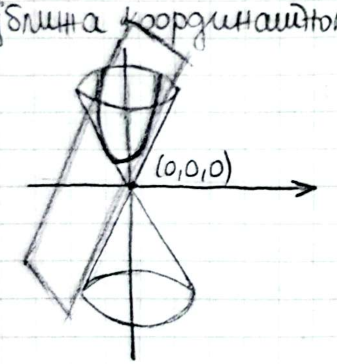
← само смо написали нисмо рачунали

већ смо рачунали
можемо проверити да ли се добија мин (добија се)

3. Пресек купе описане једначином $z^2=x^2+y^2$ и равни $z=1+x+y$ је нека крива C. Одредити тачку на кривој C која је најближа координатном почетку.

$$z^2 = x^2+y^2$$

$$z = 1+x+y$$



$$d_{min} = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}$$

$$d = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad /^2$$

$$f = x^2+y^2+z^2$$

$$g_1: z^2-x^2-y^2=0$$

$$g_2: z-1-x-y=0$$

имамо два ограничења, па сада имамо два сабирка

1. $L = x^2+y^2+z^2+\lambda_1(z^2-x^2-y^2)+\lambda_2(z-1-x-y)$

*** 2 задатка - оба морамо да попунимо.
- не знамо да добро поставимо почетне услове

професор нерешено да испити и колоквијум
- да поставимо добро почетне услове и критеријум ***

2. $\frac{\partial L}{\partial x} = 2x-2\lambda_1 x-\lambda_2=0$

$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y-2\lambda_1 y-\lambda_2=0$

$\frac{\partial L}{\partial z} = 2z+2\lambda_1 z+\lambda_2=0$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = z^2-x^2-y^2=0$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = z-1-x-y=0$

$\vdots$

$A\left(-1-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1-\sqrt{2}\right)$

$B\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2}, -1+\frac{\sqrt{2}}{2}, -1+\sqrt{2}\right)$

↓

ове две тачке су код оне кандидати минимум и максимум

$\lambda_A=-5{,}628 \quad \lambda_B=-0{,}1716$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2\lambda_1 \end{bmatrix}$$

A:

$D_1 = 2-2\lambda_1 \quad 13{,}656<0$

$D_2 = (2-2\lambda_1)^2 >0$

$D_3 = (2-2\lambda_1)^2(2+2\lambda_1) \quad -1800{,}7<0$

B:

$D_1 = 2{,}34>0$

$D_2>0$

$D_3 = 9{,}09>0$

- у овом задатку се тражио мин., пошто смо за B добили мин., не морамо испитивати карактер тачке A
- да је требало да испитамо карактер тачке A, можемо то урадити као у претходном задатку са $|\Delta|$

Предавање 7 22.11.2024.

*** 2,4 и ово следеће предавање што радимо су најважније теме на курсу
- Сви први изводи једнаки нули и хесијан
- Лагранжеви множитељи и ...
- како да хендлујемо неједнакости
  → што су најзначајнија питања у оптимизацији ***

- данас изузетно лака лекција, али је увод у оно што ћемо радити следећи час

Оптимизација уз ограничење типа ≤ (неједнакости): увођење додатне променљиве

$y = y(x_1 \dots x_n)$

$g_1(x_1 \dots x_n) \le 0$

$\vdots$

$g_m(x_1 \dots x_n) \le 0$

$g_k \le 0$

$m \gtrless n$ → они су увели ову ознаку јер им је згодна

мање, веће, једнако

однос између m и n је произвољан (слободан)

- Све алгоритме сем неколико тривијалних ограничења на почетку свешћемо на ≤
- немој потрошити више од толико пара, немој возити брже од дозвољене брзине...

$y = 4x_1^2 + 5x_2^2$

$x_1 \ge 1$ → први пут ћемо овако ограничити јер је пример тривијалан

- гледаћемо као да нема ограничења, па ћемо проверити да ли x_1 упада у ограничење

$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 8x_1 = 0 \quad x_1^* = 0 \perp \quad \Rightarrow x_1^* = 1 \qquad y = 4 + 5x_2^2$

$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 10x_2 = 0 \quad x_2^* = 0 \qquad \frac{\partial y}{\partial x_2} = 10x_2 = 0$

$x_2^* = 0$

- ако решење није тамо где постоји и ограничење, решење онда може само на граници да се налази
- цела оптимизација се своди да тражимо решење на граници или када је први извод једнак нули
- или нас ограничења не потврђују или имамо решења на горњој граници

најмањи природан број → 1
најмањи природан број од 1 до 5 → 1
најмањи природан број почев од 5 → 5

- слободна оптимизација је океј у тривијалним случајевима
- ограничење типа неједнакости хоћемо да преведемо у једнакост (увек када нешто хоћемо да пребацимо из једног облика у други вероватно се усложњава)

$g_k \le 0$ → хоћемо да преведемо у једнакост

$g_k + S_k = 0$ → морамо увести додатне променљиве, колико? онолико колико има ограничења

$S_k \ge 0$

$g_k + S_k(x_{n+k}) = 0$ паразитске

$S_k(x_{n+k}) \ge 0$

$S_k = 0 \quad\quad S_k > 0$

$\downarrow$

$g_k = 0 \quad\quad g_k < 0$

на граници — унутар дозвољене области

- ако је та функција једнака нули → решење је на граници
- ако није једнака нули (једини случај >0) → онда је унутра

$g_k + x_{n+k}^2 = 0$

- највећи проблем код овога јесте што димензионалност проблема може да експлодира
- додатне променљиве имају једину улогу да преведемо неједнакости у једнакост, па их називамо паразитске променљиве

$$y = 4x_1^2 + 5x_2^2$$

$$x_1 \geq 1$$

$$1 - x_1 \leq 0 \qquad 1 - x_1 + x_3^2 = 0$$

смена: $x_1 = 1 + x_3^2$

$$y = 4(1+x_3^2)^2 + 5x_2^2$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 10x_2 = 0 \qquad x_2^* = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_3} = 16x_3(1+x_3^2) = 0$$

$$x_3^* = 0 \qquad D_1 = 10$$

$$x_1^* = 1 \qquad D_2 = 160$$

$$y = 4x_1^2 + 5x_2^2$$

$$x_1 \leq 1$$

$$x_1 - 1 \leq 0 \qquad x_1 - 1 + x_4^2 = 0$$

смена: $x_1 = 1 - x_4^2$

$$y = 4(1-x_4^2)^2 + 5x_2^2$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 10x_2 = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_4} = 16x_4(1-x_4^2) = 0$$

$x_4 = 0 \quad x_4 = \pm 1 \rightarrow$ морамо проверити шта је решење

$$D_1 = 10 \qquad x_4 = 0 \quad D_2 < 0 \ \perp$$

$$D_2 = -160(1-3x_4^2) \qquad x_4 = \pm 1 \quad D_2 > 0 \ \top$$

$$y = x_2^2 - 2x_1 - x_1^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 1$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$$

$\frac{y}{x_2}$	$\frac{y}{x_1}$
$\frac{g}{x_2}$	$\frac{g}{x_1}$

- паразитска променљива не може утицати на критеријум оптималности
- детерминанта по додатној променљивој мора бити једнака нули ако смо добро написали!

$$J_2\left(\frac{y, g}{x_2, x_1}\right) = \begin{vmatrix} 2x_2 & -2-2x_1 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad x_2(1+2x_1) = 0$$

$$J_3\left(\frac{y, g}{x_3, x_1}\right) = \begin{vmatrix} 0 & -2-2x_1 \\ 2x_3 & 2x_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad x_3(1+x_1) = 0$$

- ово сад је важно и то ће нас водити следећи час:
(и пример после тога који следи је важан)

$$y = y(x_1 \dots x_n)$$

$$g_k \leq 0 \qquad k = 1 \dots m$$

мењамо алгоритам Лагр. множитеља
1. корак да преведемо неједнакост у једнакост
2. корак формирамо Лагранжеву фју
3. корак извод по свим оригиналним променљивим да је једнак нули (оригиналне променљиве постоје само у g_k)

1. $\phi_k = g_k + x_{n+k}^2 = 0$
2. $F = y(x_1 \dots x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (g_k + x_{n+k}^2)$
3. $\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} = 0 \qquad i = 1 \dots n$

4. корак је следећи (због овога радимо) - како Лагранжеви множитељи кажу да све променљиве третирамо на исти начин, радимо први извод по свим паразитским променљивама да је једнак нули

$$\frac{\partial F}{\partial x_{n+k}} = 2\lambda_k x_{n+k} = 0 \qquad k = 1 \dots m$$

→ ово је тако важно да ће нам изнести готово сл. час

$$\lambda_k x_{n+k} = 0$$

- кад год је додатна променљива једнака нули, тада аутоматски значи и да је $g_k = 0$

1. $\lambda_k = 0$; $\quad x_{n+k} \neq 0$
$\quad g_k = -x_{n+k}^2 < 0$ унутар области

граница

2. $\lambda_k \neq 0$; $\quad x_{n+k} = 0, \ g_k = 0$
3. $\lambda_k = 0$; $\quad x_{n+k} = 0, \ g_k = 0$

$$\lambda_k g_k = 0$$

редукујемо димензионалност

$$y = x_2^2 - 2x_1 - x_1^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 \le 1$$

*** Кун-Такер и симплекс је престао давао, али је сада то променио ***

1. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$

2. $F = x_2^2 - 2x_1 - x_1^2 + \lambda(x_1 + x_2^2 + x_3^2 - 1)$

3. $\frac{\partial F}{\partial x_1} = -2 - 2x_1 + 2\lambda x_1 = 0$

   $\frac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 + 2\lambda x_2 = 0$

4. $\frac{\partial F}{\partial x_3} = 2\lambda x_3 = 0$

5. $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$

	A	B	C	D
x_1	-1	$+1$	$-0,5$	$-0,5$
x_2	0	0	$+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
x_3	0	0	0	0
λ	0	2	-1	-1
y	1	-3	$1,5$	$1,5$

$$1 + x_1 - \lambda x_1 = 0$$

$$x_2(1+\lambda) = 0$$

$$\lambda x_3 = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

увек одавде крећемо
емпиријски доказано
да одавде најлакше
налазимо решење

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda > 0 & \text{мин.} \\ \lambda < 0 & \text{макс.} \end{array}\right\} \text{интуиција}$$

*** Каруш и Кун-Такерови услови су јако важно испитно питање. ***

*** два су типа људи на дипломском
- нон стоп смарају ментора, не мичу ни на шта
- донесу и кажу да су урадили ***

*** он предлаже да радимо пројекат уместо II рачунарског колоквијума ***

*** за две недеље када завршимо линеарно програмирање, договорићемо термин колоквијума *** -

Каруш, Кун-Такерови услови

1939.
објавио у свом
мастер раду,
- каже да карактер екстрема
утиче на знак λ

1950.-их година (1951)
били су само они
заслужни за то

Вежбе 7 (аудиторне) 27.11.2024. (нисам била тада - снимак 8.11.2024)

– Оптимизација уз ограничења типа једнакости и неједнакости –

1. Метода Лагранжевих множитеља

оптимум $f(x)$ $\quad x=[x_1\ x_2 \dots x_n]$

ограничења типа једнакости ← $h_j(x)=0 \quad j=1,2\dots m_1$

ограничења типа неједнакости ← $g_k(x)\le 0 \quad k=1,2\dots m_2$

1. формирамо проширени критеријум оптималности Лагранжијан

$$L = f(x) + \sum_{k=1}^{m_1} \lambda_j h_j(x) + \sum_{k=1}^{m_2} \lambda_k g_k(x, x_{n+k}^2)$$

ограничења типа једнакости

g_k неће зависити само од x, него и од x_{n+k}^2 када уведемо додатну променљиву

2. тражење парцијалних извода прво по свим променљивим (основним и додатним) и Лагранжевим множитељима - потребни услови

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=0 \quad i=1\dots n$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{n+k}}=0 \quad k=1\dots m_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}=0 \quad j=1\dots m_1+m_2$$

за једнакости, неједнакости

3. довољни услови - формирамо матрицу других извода

$$H = Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

$Q>0$ минимум

$Q<0$ максимум

– уколико је матрица недефинитна, формирамо матрицу Δ

$$\Delta = \begin{bmatrix} Q-\mu I & P^T \\ P & 0 \end{bmatrix}$$

P представља парцијалне изводе ограничења по свим променљивим

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$\forall \mu > 0$ минимум

$\forall \mu < 0$ максимум

1. Наћи минимум функције $f(x)=(x_1-1)^2+x_2^2$ уз ограничење $x_1-\frac{x_2^2}{4}\le 0$.

$f(x)=(x_1-1)^2+x_2^2$

$g: \quad x_1-\frac{x_2^2}{4}\le 0$

$\Rightarrow x_1-\frac{x_2^2}{4}+x_3^2=0$

1. $L=(x_1-1)^2+x_2^2+\lambda\left(x_1-\frac{x_2^2}{4}+x_3^2\right)$

2. $\frac{\partial L}{\partial x_1}=2(x_1-1)+\lambda=0$

$\frac{\partial L}{\partial x_2}=2x_2-\lambda\frac{x_2}{2}=0 \quad \Rightarrow x_2\left(2-\frac{\lambda}{2}\right)=0 \quad x_2=0 \quad \lambda=4$

$\frac{\partial L}{\partial x_3}=2\lambda x_3=0 \quad \Rightarrow \lambda=0 \lor x_3=0$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x_1-\frac{x_2^2}{4}+x_3^2=0$

i) $x_2=0 \land \lambda=0 \quad \Rightarrow x_3^2=-x_1=-1$ ✗

$x_1+x_3^2=0$

$2(x_1-1)=0$

$x_1=1$

ii) $x_2 = 0 \wedge x_3 = 0$

$x_1 = 0$

$2(x_1 - 1) + \lambda = 0$

$-2 + \lambda = 0$

$\underline{\lambda = 2}$

$\boxed{A(0,0)}$ → сада испитујемо карактер ове тачке

iii) $\lambda = 4 \wedge \lambda = 0$

iv) $\lambda = 4 \wedge x_3 = 0$

$x_1 - \frac{x_2^2}{4} = 0$

$2x_1 = -2$

$x_1 = -1$

$\Rightarrow \frac{x_2^2}{4} = x_1 = -1$

$x_2^2 = -4$

$$\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \frac{\lambda}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{bmatrix}$$

$D_1 = 2 > 0$

$D_2 = 2\left(2 - \frac{\lambda}{2}\right) = 4 - \lambda$ $2 > 0$

$D_3 = 4\lambda\left(2 - \frac{\lambda}{2}\right) = 8\lambda - 2\lambda^2$ $8 > 0$

$A(0,0)$ $\lambda = 2$

→ минимум

2. Одредити стационарне тачке и њихов карактер за проблем $f(x) = x_1 x_2$, уколико важи ограничење $g(x) = 25 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$.

$f(x) = x_1 x_2$

$g(x)$: $25 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$ $/ \cdot (-1)$

$-25 + x_1^2 + x_2^2 \leq 0$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 25 = 0$

1. $L = x_1 x_2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 25)$

2. $\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 + 2x_1\lambda = 0$

$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + 2x_2\lambda = 0$

$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2\lambda x_3 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee x_3 = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 25 = 0$

i) $\underline{\lambda = 0}$

$x_2 = 0$

$x_1 = 0$

$x_3^2 = 25$

$x_3 = \pm 5$

$\boxed{A(0,0)}$

ii) $x_3 = 0$

$$\left.\begin{aligned} x_2 + 2x_1\lambda &= 0 \quad / \cdot x_2 \\ x_1 + 2x_2\lambda &= 0 \quad / \cdot (-x_1) \end{aligned}\right\} +$$

$x_1^2 + x_2^2 = 25$

$x_2^2 - x_1^2 = 0 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$

$x_1^2 + x_2^2 = 25$

$2x_1^2 = 25$

$x_1^2 = \frac{25}{2}$

$x_1 = \pm \frac{5}{\sqrt{2}}$

$x_2 = \pm \frac{5}{\sqrt{2}}$

$\lambda = -\frac{x_2}{2x_1}$

$B\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$ $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$

$C\left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$ $\lambda_3 = \frac{1}{2}$

$D\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$ $\lambda_4 = \frac{1}{2}$

$E\left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$ $\lambda_5 = -\frac{1}{2}$

$$\varphi = \begin{bmatrix} 2\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{bmatrix}$$

$D_1 = 2\lambda$

$D_2 = 4\lambda^2 - 1$

$D_3 = 8\lambda^3 - 2\lambda$

недефинитна

↓

морамо даље испитати карактер тачака (формирамо матрицу Δ)

$$\Delta = \begin{bmatrix} \varphi - \mu I & P^T \\ P & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda - \mu & 1 & 0 & 2x_1 \\ 1 & 2\lambda - \mu & 0 & 2x_2 \\ 0 & 0 & 2\lambda - \mu & 2x_3 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \end{bmatrix}$$

смена: $2\lambda - \mu = a$

$$\Delta = (-1)^{1+1} a \begin{vmatrix} a & 1 & 2x_1 \\ 1 & a & 2x_2 \\ 2x_1 & 2x_2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4}\, 2x_3 \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a(4x_1x_2 + 4x_1x_2 - 4x_1^2 a - 4x_2^2 a) - 2x_3(2x_3 a^2 - 2x_3) = 0$$

$$a(8x_1x_2 - 4x_1^2 a - 4x_2^2 a) - 4x_3^2(a^2 - 1) = 0$$

① $\underline{A(0,0)}$ $\quad x_3 = \pm 5 \quad \lambda_1 = 0 \qquad a^2 - 1 = 0 \qquad -\mu = a$

$\Delta = -4x_3^2(a^2 - 1) = 0 \qquad a = \pm 1 \qquad \mu = -a$

$\Delta = -100(a^2 - 1) = 0 \qquad 2\lambda - \mu = a \quad \mu_1 = -1 \quad \mu_2 = 1$

→ пошто знак μ_1 и μ_2 није исти, не можемо да констатујемо карактер тачке A

② $\underline{B, E}$ $\quad \lambda = -\frac{1}{2} \quad x_3 = 0 \qquad 2\lambda - \mu = 0 \qquad 2\lambda - \mu = 1$

$\Delta = a(8 \cdot \frac{25}{2} - 4a\frac{25}{2} - 4a\frac{25}{2}) = 0 \qquad 2(-\frac{1}{2}) - \mu = 0 \qquad -1 - \mu = 1$

$\Delta = a(100 - 100a) = 0 \qquad -1 - \mu = 0 \qquad \mu_2 = -2 < 0$

$a = 0 \ \vee \ 100(1 - a) = 0 \to a = 1 \qquad \mu_1 = -1 < 0 \qquad$ максимум

③ $\underline{C, D}$ $\quad \lambda = \frac{1}{2} \quad x_3 = 0 \qquad 2\lambda - \mu = 0 \qquad 2\lambda - \mu = -1$

$\Delta = a(8(-\frac{25}{2}) - 4a\frac{25}{2} - 4\frac{25}{2}a) = 0 \qquad 2\frac{1}{2} - \mu = 0 \qquad 1 - \mu = -1$

$\Delta = a(-100 - 100a) = 0 \qquad 1 - \mu = 0 \qquad \mu_2 = 2 > 0$

$a = 0 \ \vee \ -100(a+1) = 0 \to a = -1 \qquad \mu_1 = 1 > 0 \qquad$ минимум

3. Одредити стационарне тачке следећег проблема

$f(x) = 4x_1 - x_2^2 - 12 \to 0$, уколико буде ограничења

$25 - x_1^2 - x_2^2 = 0$ и $10x_1 - x_1^2 + 10x_2 - x_2^2 - 34 \geq 0$

$f(x) = 4x_1 - x_2^2 - 12 = 0$

$25 - x_1^2 - x_2^2 = 0$

$10x_1 - x_1^2 + 10x_2 - x_2^2 - 34 \geq 0 \quad /\cdot(-1) \qquad \Rightarrow -10x_1 + x_1^2 - 10x_2 + x_2^2 + 34 + x_3^2$

$-10x_1 + x_1^2 - 10x_2 + x_2^2 + 34 \leq 0$

1. $L = 4x_1 - x_2^2 - 12 + \lambda_1(25 - x_1^2 - x_2^2) + \lambda_2(-10x_1 + x_1^2 - 10x_2 + x_2^2 + x_3^2 + 34)$

2. $\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4 - 2\lambda_1 x_1 - 10\lambda_2 + 2x_1\lambda_2 = 0$

$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_2 - 2x_2\lambda_1 - 10\lambda_2 + 2x_2\lambda_2 = 0$

$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2\lambda_2 x_3 = 0 \quad \to \quad \lambda_2 = 0 \ \vee \ x_3 = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 25 - x_1^2 - x_2^2 = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -10x_1 + x_1^2 - 10x_2 + x_2^2 + x_3^2 + 34 = 0$

i) $\lambda_2 = 0$

$4 - 2\lambda_1 x_1 = 0$

$-2x_2 - 2x_2\lambda_1 = 0$

$-2x_2(1 + \lambda_1) = 0$

$x_2 = 0 \quad \lambda_1 = 0$

i.i) $x_2 = 0$

$25 - x_1^2 = 0$

$-10x_1 + x_1^2 + x_3^2 + 34 = 0$

$x_1^2 = 25$

$x_1 = \pm 5$

$x_3^2 = -34 - x_1^2 + 10x_1 < 0$ ↯

i.ii) $\lambda_1 = 0$

$2x_2 + 2x_2 = 0$

$4 + 2x_1 = 0$

$x_1 = -2$

$x_2 = 0$

$x_3^2 = -34 + 10x_1 - x_1^2 + 10x_2 - x_2^2$

$-34 - 20 - 4 < 0$ ↯

ii) $x_3=0$ $\qquad x_1+x_2=-6,3$

$4-2\lambda_1 x_1-10\lambda_2+2x_2\lambda_2=0 \qquad \rightarrow x_1=-6,3-x_2$

$-2x_2-2x_2\lambda_1-10\lambda_2+2x_2\lambda_2=0 \qquad (-6,3-x_2)^2+x_2^2=25$

$x_1^2+x_2^2=25 \qquad \boxed{A(1,545,\ 4,755)}$

$-10(x_1+x_2)+x_2^2+x_1^2=-38 \qquad \boxed{B(1,755,\ 1,545)}$

$-10(x_1+x_2)=-63$

2. Метод ограничених варијација

оптимум: $f(x) \qquad X=[x_1 \dots x_n]$

ограничења типа једнакости ← $h_j(x)=0 \qquad j=1\dots m_1$

ограничења типа неједнакости ← $g_k(x)=0 \qquad k=1\dots m_2 \qquad g_k(x_1\, x_{n+k}^2)=0$

Матрица првих извода

$$J_k=\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_k} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_{m_1+m_2}} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_k} & \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_{m_1+m_2}} \\ \vdots & \vdots & & \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_k} & \frac{\partial h_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial x_{m_1+m_2}} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_k} & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_{m_1+m_2}} \\ \vdots & \vdots & & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_k} & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_{m_1+m_2}} \end{bmatrix}$$

→ парцијални изводи функције

→ парцијални изводи ограничења неједнакости

$(m_1+m_2+1)(m_1+m_2+1)$

$k=m_1+m_2+1 \dots n+m_2$

m_1 – број ограничења типа једнакости

m_2 – број ограничења типа неједнакости

n – број променљивих

1. Пронаћи стационарне тачке $f(x)=x_1^2+x_2^2+13$ уз ограничења $x_1^2+4x_2^2=4,\ 8-x_1^2-x_2^2\geq 0$.

$f(x)=x_1^2+x_2^2+13 \qquad n=2$

$x_1^2+4x_2^2=4 \qquad m_1=1$

$8-x_1^2-x_2^2\geq 0 \ /\cdot(-1) \qquad \Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2-8=0 \qquad m_2=1$

$x_1^2+x_2^2-8\leq 0 \qquad \boxed{k=3}$

$$J_3=\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h}{\partial x_3} & \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_3} & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 2x_1 & 2x_2 \\ 0 & 2x_1 & 8x_2 \\ 2x_3 & 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}=0$$

$J_3=32x_1x_2x_3-8x_1x_2x_3=0$

$24x_1x_2x_3=0 \qquad \Rightarrow x_1=0 \lor x_2=0 \lor x_3=0$

$x_1^2+4x_2^2-4=0$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2-8=0$

i) $x_1=0 \qquad x_3^2=8-x_1^2-x_2^2 \qquad A(0,1,\sqrt{7})$

$4x_2^2=4 \qquad x_3^2=7 \qquad B(0,1,-\sqrt{7})$

$x_2=\pm 1 \qquad x_3=\pm\sqrt{7} \qquad C(0,-1,\sqrt{7})$

$D(0,-1,-\sqrt{7})$

ii) $x_2=0 \qquad x_3^2=8-x_1^2-x_2^2 \qquad E(2,0,2)$

$x_1^2=4 \qquad x_3^2=4 \qquad F(2,0,-2)$

$x_1=\pm 2 \qquad x_3=\pm 2 \qquad G(-2,0,2)$

$H(-2,0,-2)$

iii) $x_3=0 \qquad 3x_2^2=-4$

$\left.\begin{matrix} x_1^2+4x_2^2-4=0 \\ x_1^2+x_2^2-8=0 \end{matrix}\right\} - \qquad x_2^2=-\frac{4}{3}$ ✗

2. Пронаћи стационарне тачке следеће функције

$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_2 - 6x_1 + 1$, уколико важе ограничења

$h_1: x_1 + 5x_2 + 4 = 0, \quad g_1: x_1^2 - 2x_2^2 - 2 \leq 0.$

$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_2 - 6x_1 + 1 \qquad n = 2$

$h_1: x_1 + 5x_2 + 4 = 0 \qquad m_1 = 1$

$g_1: x_1^2 - 2x_2^2 - 2 \leq 0 \qquad m_2 = 1$

$x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 2 = 0 \qquad \boxed{k = 3}$

$$J_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_3} & \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2x_1 - 6 & 2x_2 + 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2x_3 & 2x_1 & -4x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$J_3 = 10x_3(2x_1 - 6) - 2x_3(2x_2 + 4) = 0$

$2x_3(5(2x_1 - 6) - (2x_2 + 4)) = 0$

$x_1 + 5x_2 + 4 = 0$

$x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 2 = 0$

i) $x_3 = 0$

$x_1 + 5x_2 + 4 = 0$

$x_1^2 - 2x_2^2 - 2 = 0$

$x_1 = -5x_2 - 4$

$(-5x_2 - 4)^2 - 2x_2^2 - 2 = 0$

$A(-1,165, -0,567)$

$B(0,572, -0,914)$

ii) $10x_1 - 30 - 2x_2 - 4 = 0$

$10x_1 - 2x_2 - 34 = 0 \quad /:2$

$5x_1 - x_2 - 17 = 0 \quad /\cdot 5$

$x_1 + 5x_2 + 4 = 0$

$x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 2 = 0$

$26x_1 - 81 = 0 \qquad x_2 = 17 - 5x_1 \qquad x_3^2 = 2 - x_1^2 + 2x_2^2 < 0$

$x_1 = \frac{81}{26} \qquad x_2 = -\frac{37}{26}$

Предавање 8 29.11.2024. (нисам била тада – снимак 10.12.2021.)

Каруш, Кун-Такерови услови

једно од капитално важних испитних питања

- многи алгоритми који се сада користе у себи имају већ уграђене Каруш, Кун-Такерове услове

- дуго су се звали само Кун-Такерови услови, касније је утврђено да је и Каруш дошао до истих резултата неких 20 година разлике (раније)

- користе се за решавање проблема оптимизације уз ограничења типа неједнакости

$$y = y(x_1 \dots x_n) \qquad m \lessgtr n \rightarrow \text{произвољан однос између } m \text{ и } n$$

$$g_k(x_1 \dots x_n) \le 0 \qquad k = 1 \dots m \rightarrow \text{строго мора да важи услов неједнакости!}$$

1. ограничење типа неједнакости сводимо на ограничење типа једнакости

$$\Phi_k = g_k + x_{n+k}^2 = 0$$

2. формирање Лагранжове функције (Лагранжових множитеља имамо колико имамо и ограничења)

$$F = y + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (g_k + x_{n+k}^2)$$

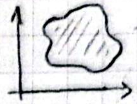
3. први извод по свим оригиналним променљивама (не обухвата извод по паразитским променљивама - то је обухваћено 4. условом)

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} = 0 \qquad i = 1 \dots n$$

4. $\frac{\partial F}{\partial x_{n+k}} = 2\lambda_k x_{n+k} = 0 \longrightarrow$ ако смо све добро поставили, увек ћемо добити $\lambda_k x_{n+k} = 0$

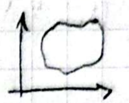
$\lambda_k x_{k+n} = 0 \rightarrow$ имамо 3 могућа сценарија

1. $\lambda_k = 0;\quad x_{n+k} \neq 0,\quad g_k = -x_{n+k}^2 \ (1)$



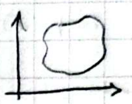
→ решење ће се налазити строго у дозвољеној области (јер је тада $g_k < 0$)

2. $\lambda_k \neq 0;\quad \begin{bmatrix} x_{n+k} = 0 \\ g_k = 0 \ (1) \end{bmatrix}$



→ решење се строго налази на граници

3. $\lambda_k = 0;\quad \begin{bmatrix} x_{n+k} = 0 \\ g_k = 0 \ (1) \end{bmatrix}$



→ чим је додатна променљива једнака нули, без обзира на λ_k решење се налази на границу

- димензионалност проблема је озбиљан проблем код метода Лагранжевих множитеља
- овде смо додатно повећали димензионалност проблема увођењем додатних променљивих и сада је димензионалност нарасла на

$\underbrace{n}_{\text{оригиналних променљивих}} + \underbrace{m}_{\text{Лагранжевих множитеља}} + m \rightarrow$ додатних променљивих } проблем је несразмерно порастао и његово решавање постаје доста сложено

- примећујемо да се додатна променљива појављује само као потребан услов (у услову 4)
- зато се поставља питање да ли некако можемо елиминисати додатну променљиву из даље студије и да проблем решавамо као да она не постоји (знамо да мора постојати како бисмо неједнакост претворили у једнакост)
- када је додатна променљива једнака нули, тада је и $g_k = 0$

$$\lambda_k g_k = 0 \iff \lambda_k x_{n+k} = 0$$

- значи, има смисла да додатну променљиву не уведемо, него израз где се она први пут јавља (4) заменимо њеним еквивалентом $\lambda_k g_k = 0$

- друга важна чињеница јесте то што смо нашли логичку зависност између карактера екстремума и знака λ ($\lambda > 0$ мин., $\lambda < 0$ макс.)

$y = y(x_1 \dots x_n)$

$g(x_1 \dots x_n) \le 0$

пп. $\lambda > 0$ $(x_{n+1} = 0)$ → чим смо претпоставили да је $\lambda > 0$ $(\lambda \ne 0)$, додатна променљива је једнака нули и у критеријум оптималности нам не треба додатна променљива

$$F = y(x_1 \dots x_n) + \lambda g(x_1 \dots x_n)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad i = 1 \dots n$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\lambda \frac{g}{\partial x_i} \quad i = 1 \dots n$$

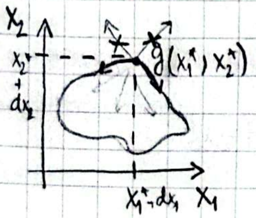
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} = -\lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i = -\lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i$$

$\boxed{dy = -\lambda dg}$ → тотални диференцијал

dg: ≤ 0, < 0 → $dy \ge 0$

↓ под претпоставком $\lambda > 0$



→ када се померимо за dx_1, dx_2 можемо наставити да се крећемо по области или да будемо унутра, јер шта год да се деси увек мора бити задовољено ограничење (није нам дозвољено да идемо ван ограничења)

$g(x_1^*, x_2^*) + dg \le 0$, где је $g(x_1^*, x_2^*) = 0$ → dg мора увек бити мање од нуле

- дакле, ако се померимо из тачке екстрема (x_1^*, x_2^*), вредност y може само да расте, а ако може само да расте → онда се у тој тачки сигурно налази минимум

↓

потпуно важан закључак у оптимизацији!

$dy \ge 0$ → свакако је минимум (свака тачка од које не може да буде мања вредност је и даље минимум)

- да би функција имала минимум, потребно је да $\lambda > 0$

- Кун-Такерови услови и разматрање знака λ и карактера екстрема очигледно се односе само на случајеве који се налазе на граници
(уколико се решење налази унутар дозвољене области - Кун-Такеров метод то не открива, али у том случају карактер екстрема испитујемо на онај конвенционалан начин: први, други изводи, матрица Q, Δ итд.)

- сада ће покушати да сублимира све ово до сада - даје алгоритам који ћемо користити у задацима:

$$y = y(x_1 \dots x_n)$$

$$g_k(x_1 \dots x_n) \le 0 \quad k = 1 \dots m$$

ККТ (Каруш, Кун-Такерови услови)

1. формирање проширеног критеријума оптималности
(важно: не уводимо додатне променљиве → знамо да оне морају да постоје, али је направио алгоритам без њих)

$$F = y(x_1 \dots x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k$$

2. парцијални изводи по свим иксевима (сад имамо само прве, задржали смо димензионалност проблема)

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1 \dots n$$

3. $\lambda_k g_k = 0$ → ово нисмо извели, већ смо доказали да је то еквивалентно са $\lambda_k x_{n+k} = 0$

↓

*** ако не прихватимо ову чињеницу одн. не напишемо на испиту → пали смо задатак! ***

4. 2,3 решимо и проверимо ограничења $g_k \le 0$

5. анализирамо знак λ_k

$\lambda_k \ge 0$ минимум → ово значи да све могу бити једнаке нули, али да је барем једна ≥ 0 (исто за максимум)

$\lambda_k \le 0$ максимум

- у свим осталим случајевима ради се о превојној тачки

*** да бисте положили испит на сваком задатку морамо имати мин. 50% – значи морамо тачно поставити све једначине и тачно дођемо до корака 4 (поставимо услове и започнемо решавање, ако не добијемо ниједно тачно λ, барем речима да објаснимо како бисмо испитали екстрем) ***

*** **грешке** због којих **не** прегледају задатак – ако уведемо додатну променљиву а текст задатка каже методом Каруш, Кун-Такер решити → онда смо скроз промашили метод ***

- Каруш, Кун-Такер не дозвољава додатну променљиву, она је елиминисана условом $\lambda_k g_k = 0$!
- велика грешка је увођење додатне променљиве јер онда цео овај формализам пада

*** не смемо дозволити себи луксуз да промашимо метод –
- ако каже методом Лагранжових множитеља, онда додамо додатну променљиву и решавамо даље како метод Лаг. множ. каже ***

- дакле, ако каже методом Каруш, Кун-Такера – НИСЛУЧАЈНО НЕ УВОДИМО ДОДАТНУ ПРОМЕНЉИВУ пошто је цела студија и ова законитост изведена под претпоставком да она НЕ МОРА ДА СЕ УВЕДЕ (зато је велика грешка ако се то уради!)

- support vector машине
- често ћемо видети тај појам када се решава неки проблем да кажу пошто је нека променљива већа од нуле, гарантују да је решење минимум (та променљива је баш Лагранжов множитељ → полазе од претпоставке на друг начин да ако је $\lambda_k > 0$, решење ће бити минимум онда добро ћемо обучити свој алгоритам)
- овај феномен да $\lambda > 0$ је минимум уграђен је у велики број алгоритама (често га не објасне, а заправо је све последица ових Каруш, Кун-Такерових услова)
- минимум гарантују неким параметром који одржавају позитивност, а тај параметар је заправо Лагранжов множитељ!

$$y = x_1^3 + 2x_2^2 - 10x_1 + 6 + 2x_2^3$$

$x_1 x_2 - 10 \le 0 \leftarrow x_1 x_2 \le 10$

$-x_1 \le 0 \leftarrow x_1 \ge 0$

$-x_2 \le 0 \leftarrow x_2 \ge 0$

Метод Каруш, Кун-Такера каже да су сви услови мањи или једнаки од нуле
→ катастрофално је велика грешка да ово не урадимо!
(јер је под том претпоставком цела ова теорија уведена)

↓

често кажу да се тривијална ограничења не уводе, него на крају провере јесу ли задовољена → суштински **нетачно**
(јер свако то ограничење вуче Лагранжов множитељ и можда баш тај Лагранжев множитељ уз тривијално ограничење буде једини различит од нуле и можда баш он одреди да ли је мин или макс.)
- Метод Каруш, Кун-Такер јако формално гледа на то и не дозвољава (други методи би то дозволили)

$$F = x_1^3 + 2x_2^2 - 10x_1 + 6 + 2x_2^3 + \lambda_1 (x_1 x_2 - 10) + \lambda_2 (-x_1) + \lambda_3 (-x_2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 3x_1^2 - 10 + \lambda_1 x_2 - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 4x_2 + 6x_2^2 + \lambda_1 x_1 - \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_1 (x_1 x_2 - 10) = 0$$

$$\lambda_2 (-x_1) = 0$$

$$\lambda_3 (-x_2) = 0$$

*** савет када решавамо ове задатке
- када вежбамо за колоквијум да стрпљиво задатке решавамо до краја како бисмо их квалитетно решили неопходна је рутина
(да не дозволимо себи да сигурно може јер погрешимо систем) ***

$\lambda_1 (x_1 x_2 - 10) = 0$

i) $x_1 x_2 = 10$ (1) $\quad 3x_1^2 - 10 + \lambda_1 x_2 = 0$ (2)

$\lambda_2 = 0 \qquad 4x_2 + 6x_2^2 + \lambda_1 x_1 = 0$ (3)

$\lambda_3 = 0 \qquad \vdots$

ii) $\lambda_1 = 0$

$4x_2 + 6x_2^2 - \lambda_3 = 0 \;\wedge\; \lambda_3 (-x_2) = 0$

$\lambda_3 = 0 \quad x_2 = 0$

Скенирано помоћу ЦамСцаннер-а

$3x_1^2 - 10 - \lambda_2 = 0 \wedge \lambda_2(-x_1) = 0$

$\lambda_2 = 0$ $\quad x_1 = \pm\frac{\sqrt{10}}{3}$ — једино λ које није нула

$x_1 = 0$ $\quad \boxed{\lambda_2 = -10}$ макс.

→ карактер екстрема нам је одредило λ_2 ($\lambda_2(-x_1)=0$), а да њега нисмо узели у обзир и само проверавали на крају, добили бисмо бесмислено решење и тражили бисмо овај максимум!

$y = y(x_1 \dots x_n)$ → критеријум оптималности тражи комбинована решења (и једнакости и неједнакости)

$g_k(x_1 \dots x_n) \le 0 \qquad k = 1 \dots m$

$g_j(x_1 \dots x_n) = 0 \qquad j = 1 \dots l$ — Ово само да не бисмо мешали Лагранжеве множитеље за једнакост и неједнакост

1. $F = y(x_1 \dots x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k + \sum_{j=1}^{l} M_j h_j$

2. $\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{l} M_j \frac{\partial h_j}{\partial x_i} = 0 \qquad i = 1 \dots n$

3. Каруш, Кун-Такерови услови односе се строго на ограничења типа неједнакости!

$\lambda_k g_k = 0$ → неједнакост → Каруш, Кун-Такер

(суштина за ограничења типа једнакости је да њу карактер Лагранжевог множитеља μ не значи ништа)

- за њих се односе правила као на ограничења типа једнакости:

4. $\frac{\partial F}{\partial M_j} h_j = 0$ → једнакост → стара правила (извод по свим променљивим једнак нули)

$\cancel{M_j h_j} = 0$ → катастрофално велика грешка (за ограничења типа једнакости — овакав израз не постоји)

*** ако је написано – не прегледа ***

- дакле, за ограничења типа једнакости не важи ниједна скраћеница, трешења или било шта сл., него користимо парцијални извод по свим променљивим једнак нули

5. проверавамо да ли су задовољена ограничења

$g_k \le 0; \quad h_j = 0$

6. $\lambda_k \ge 0$ мин. $\qquad \cancel{M_j > 0}$ ... → катастрофална грешка је да ово напишемо

$\lambda_k \le 0$ макс.

- на карактер екстрема не може да утиче M_j зато што код ограничења типа једнакости никакву везу нисмо нашли између карактера екстрема и знака Лагранжевог множитеља

$y = y(\,)$

$h_j = 0$

пример: $V = r^2\pi h$

$\lambda > 0 \qquad +\lambda(V - r^2\pi h) = 0$ — можемо оба написати

$\lambda < 0 \qquad +\lambda(r^2\pi h - V) = 0$

- Лагранжев множитељ је овде само додатна променљива која служи (без физичке интерпретације) да уведе ограничење у критеријум оптималности

Свеједно је хоћемо ли написати $2x_1 + 3x_2 = 6$ или $2x_1 + 3x_2 = -6$ итд.

- зато код ограничења типа неједнакости тражимо јако строгу форму баш зато да бисмо могли да дискутујемо карактер екстрема преко знака λ (на основу Лагранжевог множитеља) и то је суштинска разлика!

Вежбе 8 (аудиторне) 4.12.2024. (нисам била тада - снимак 15.12.2021.)

- Каруш, Кун-Такерова теорема -

*** овај метод је јако битан и професор на њој стално инсистира - вероватно долази или као задатак или као теорија, и Лагранжов метод који смо радили прошли пут ***

- код Каруш, Кун-Такера се **не додаје променљива** (код Лагранжовог метода да бисмо из ограничења типа неједнакости прешли у ограничење типа једнакости додајемо квадратну променљиву)

*** ово се меша често, а упази у тих 50% што је мин. за зад. ***

$y=f(\underline{x})$ – функција циља (критеријум оптималности)

$\underline{x}=[x_1\ x_2\ \dots\ x_n]^T$ – вектор променљивих стања

- променљиве стања ограничене су следећим једначинама:

$h_i(\underline{x})=0 \qquad i=1\dots m_1$ – ограничења једнакости

$g_j(\underline{x})\le 0 \qquad j=1\dots m_2$ – ограничења неједнакости

Алгоритам:

1. формирање новог критеријума оптималности на основу старог

$$F=f(\underline{x})+\sum_{i=1}^{m_1}\boxed{\mu_i}\,h_i(\underline{x})+\sum_{j=1}^{m_2}\lambda_j\boxed{g_j}(\underline{x})$$

Лагранжови множиоци који се уводе за ограничења типа једнакости

Лагранжови множиоци који се уводе за ограничења типа неједнакости

- не уводи се додатна променљива код ограничења типа неједнакости

2. парцијални изводи по основним променљивама су једнаки нули

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}=0 \qquad k=1\dots n$$

3. на основу једначина ограничења формирамо систем једначина

$$h_i(\underline{x})=0$$

$$\lambda_j g_j(\underline{x})=0$$

4. проверити ограничења

5. $\lambda_j\ge 0$ мин. → мора барем једно λ бити ≥ 0

$\lambda_j\le 0$ макс. → такође мора бар једно λ бити ≤ 0

- уколико су све $\lambda=0$ – не знамо ништа о карактеру саме тачке
- уколико λ мења знак - ради се о преводној тачки

1. Применом Каруш, Кун-Такерове методе одредити екстремне вредности следећег оптимизационог проблема

$f(\underline{x})=x_1x_2,\quad g(\underline{x}):\ x_1^2+x_2^2-25\le 0.$

$f=x_1x_2$

$g:\ x_1^2+x_2^2-25\le 0$

$F=x_1x_2+\lambda(x_1^2+x_2^2-25)$

$\frac{\partial F}{\partial x_1}=x_2+2\lambda x_1=0$

$\frac{\partial F}{\partial x_2}=x_1+2\lambda x_2=0$

$\lambda(x_1^2+x_2^2-25)=0$

$\lambda=0 \ \vee\ x_1^2+x_2^2-25=0$

i) $\lambda=0$

$x_2=0$

$x_1=0$

$(0,0)$ не можемо ништа рећи о карактеру ове тачке

ii) $x_1^2+x_2^2-25=0$ $x_1^2=x_2^2$ $x_1=\pm\frac{5}{\sqrt2}$ $\left(\frac{5}{\sqrt2},\frac{5}{\sqrt2}\right)$ $\lambda=-\frac12<0$ макс.

$x_2+2\lambda x_1=0 \;/\cdot(-x_2)$ $x_1^2+x_1^2=25$ $\left(\frac{5}{\sqrt2},-\frac{5}{\sqrt2}\right)$ $\lambda=\frac12>0$ мин.

$x_1+2\lambda x_2=0 \;/\cdot x_1$ $2x_1^2=25$ $x_2=\pm\frac{5}{\sqrt2}$ $\left(-\frac{5}{\sqrt2},\frac{5}{\sqrt2}\right)$ $\lambda=\frac12>0$ мин.

$-x_2^2+x_1^2=0$ $x_1^2=\frac{25}{2}$ $\lambda=-\frac{x_2}{2x_1}$ $\left(-\frac{5}{\sqrt2},-\frac{5}{\sqrt2}\right)$ $\lambda=-\frac12<0$ макс.

2. Применом Каруш, Кун-Такерове теореме одредити екстреме функције $z(\underline{x})=-x_1(30-x_1)-x_2(50-2x_2)+3x_1+5x_2+10x_3$ уз ограничења $g_1(\underline{x}): x_1+x_2\le x_3$ и $g_2(\underline{x}): x_3\le 17{,}25$.

$z=-x_1(30-x_1)-x_2(50-2x_2)+3x_1+5x_2+10x_3$

$g_1:\; x_1+x_2\le x_3 \longrightarrow x_1+x_2-x_3\le 0$

$g_2:\; x_3\le 17{,}25 \longrightarrow x_3-17{,}25\le 0$

$F=-x_1(30-x_1)-x_2(50-2x_2)+3x_1+5x_2+10x_3+\lambda_1(x_1+x_2-x_3)+\lambda_2(x_3-17{,}25)$

$\frac{\partial F}{\partial x_1}=-30+2x_1+3+\lambda_1=0$ $\lambda_1(x_1+x_2-x_3)=0 \rightarrow \lambda_1=0 \vee x_1+x_2-x_3=0$

$\frac{\partial F}{\partial x_2}=-50+4x_2+5+\lambda_1=0$ $\lambda_2(x_3-17{,}25)=0 \rightarrow \lambda_2=0 \vee x_3-17{,}25=0$

$\frac{\partial F}{\partial x_3}=10-\lambda_1+\lambda_2=0$

i) $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$, $10=0$ ✗

ii) $\lambda_1=0$, $x_3=17{,}25=\frac{69}{4}$, $2x_1=27$, $x_1=\frac{27}{2}$, $4x_2=45$, $x_2=\frac{45}{4}$ $\left(\frac{27}{2},\frac{45}{4},\frac{69}{4}\right)$

$g_1:\; \frac{27}{2}+\frac{45}{4}-\frac{69}{4}=\frac{15}{2}\le 0$ ✗

iii) $x_1+x_2-x_3=0$ $\underline{\lambda_1=10>0}$ $2x_1=17$ $4x_2=35$ $x_3=\frac{69}{4}$

$\underline{\lambda_2=0}$ $x_1=\frac{17}{2}$ $x_2=\frac{35}{4}$ $\left(\frac{17}{2},\frac{35}{4},\frac{69}{4}\right)$ мин.

iv) $x_1+x_2-x_3=0$ $x_1=\frac{69}{4}-x_2$ $-50+4x_2+5+2x_2-\frac{15}{2}=0$ $\left(\frac{17}{2},\frac{35}{4},\frac{69}{4}\right)$

$x_3=17{,}25=\frac{69}{4}$ $-30+2\left(\frac{69}{4}-x_2\right)+3+\lambda_1=0$ $x_2=\frac{35}{4}$ $\lambda_1=10>0$

$x_1+x_2=\frac{69}{4}$ $\lambda_1=2x_2-\frac{15}{2}$ $x_1=\frac{69}{4}-\frac{35}{4}=\frac{17}{2}$ $\underline{\lambda_2=0}$ мин.

- некада се траже стационарне тачке у задатку а не само екстрем, па због тога не одбацујемо њих када је само $\lambda=0$ њих рачунамо...

3. Применом Каруш, Кун-Такерове теореме одредити екстреме следећег оптимизационог проблема

$f(\underline{x})=4x_1-x_2^2-12$, $h_1(\underline{x}): 25-x_1^2-x_2^2=0$,

$g_1(\underline{x}): 10x_1-x_1^2+10x_2-x_2^2-38\ge 0$, $g_2(\underline{x}): x_1\ge 2$, $g_3(\underline{x}): x_2\ge 0$.

$f=4x_1-x_2^2-12$

$h_1:\; 25-x_1^2-x_2^2=0 \longrightarrow x_1^2+x_2^2-25=0$

$g_1:\; 10x_1-x_1^2+10x_2-x_2^2-38\ge 0 \longrightarrow x_1^2-10x_1+x_2^2-10x_2+38\le 0$

$g_2:\; x_1\ge 2 \longrightarrow 2-x_1\le 0$

$g_3:\; x_2\ge 0 \longrightarrow -x_2\le 0$

$F=4x_1-x_2^2-12+\mu(x_1^2+x_2^2-25)+\lambda_1(x_1^2-10x_1+x_2^2-10x_2+38)+\lambda_2(2-x_1)+\lambda_3(-x_2)$

$\frac{\partial F}{\partial x_1}=4+2\mu x_1+2\lambda_1x_1-10\lambda_1-\lambda_2=0$ $\lambda_2(2-x_1)=0 \rightarrow \lambda_2=0 \vee 2-x_1=0$

$\frac{\partial F}{\partial x_2}=-2x_2+2\mu x_2+2\lambda_1x_2-10\lambda_1-\lambda_3=0$ $\lambda_3(-x_2)=0 \rightarrow \lambda_3=0 \vee -x_2=0$

$x_1^2+x_2^2-25=0$

$\lambda_1(x_1^2-10x_1+x_2^2-10x_2+38)=0 \rightarrow \lambda_1=0 \vee x_1^2-10x_1+x_2^2-10x_2+38=0$

i) $\lambda_1=0$ $\quad 4+2\mu x_1=0$ $\quad -2x_2+2\mu x_2=0$ i.i) $x_2=0$ i.ii) $\mu=1$

$\lambda_2=0$ $\quad x_1=-\frac{2}{\mu}$ $\quad -2x_2(1-\mu)=0$ $\quad x_1^2=25$ $\quad (-5,0)$ (због g_1) $\quad 4+2x_1=0$

$\lambda_3=0$ $\quad -2x_2=0 \vee 1-\mu=0$ $\quad x_1=\pm 5$ $\quad (5,0)$ (због g_1) $\quad x_1=-2$ (због g_2)

ii) $\lambda_1=0$ $\quad x_1^2=25$ $\quad (5,0)$

$\lambda_2=0$ $\quad x_1=\pm 5$ $\quad (-5,0)$ (исто као i.i)

$x_2=0$

iv) $\lambda_1=0$ $\quad (2,0)$ (због h_1)

$x_1=2$

$x_2=0$

iii) $\underline{\lambda_1=0}$ $\quad -2x_2+2\mu x_2=0$ iii.i) $x_2=0$ iii.ii) $\mu=1$ $\quad x_2=\pm\sqrt{21}$

$x_1=2$ $\quad -2x_2(1-\mu)=0$ $\quad (2,0)$ (због h_1) $\quad \underline{\lambda_2=8>0}$ $\boxed{(2,\sqrt{21})}$ мин.

$g_1: 4-20+21-10\sqrt{21}+38\approx 2{,}81\leq 0$

$\underline{\lambda_3=0}$ $\quad x_2=0$ $\quad \mu=1$ $\quad h_1: 25-4=21\neq 0$ $\quad x_2^2=21$ $\quad (2,-\sqrt{21})$ (због g_1)

v) $x_1^2-10x_1+x_2^2-10x_2+38=0$ $\quad 25-10x_1-10x_2+38=0$ $\quad x_2'=4{,}7554$

$\underline{\lambda_2=0}$ $\quad x_1=\frac{63}{10}-x_2$ $\quad x_2''=1{,}5445$

$\underline{\lambda_3=0}$ $\quad \left(\frac{63}{10}-x_2\right)^2+x_2^2-25=0$ $\quad x_1'=1{,}5449$

$x_1^2+x_2^2=25$ $\quad 2x_2^2-\frac{63}{5}x_2+\frac{1469}{100}=0$ $\quad x_1''=4{,}7555$

$(1{,}5449,\ 4{,}7554)$ (због g_2) $\quad 3{,}089+3{,}089\mu-6{,}911\lambda_1=0$ $\quad \underline{\lambda_1=-0{,}65\ngeq 0}$

$(4{,}7555,\ 1{,}5445)$ $\quad 4+9{,}511\mu-0{,}489\lambda_1=0$ $\quad$ макс.

vi) $x_1^2-10x_1+x_2^2-10x_2+38=0$ vii) $x_1^2-10x_1+x_2^2-10x_2+38=0$ vii) $x_1^2-10x_1+x_2^2-10x_2+38=0$

$\lambda_2=0$ $\quad x_1=2$ $\quad x_1=2$

$x_2=0$ $\quad \lambda_3=0$ $\quad x_2=0$

$x_1^2-10x_1+38=0$ $\quad x_2^2=21$ → већ смо имали $\quad (2,0)$

$x_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{(10)^2-4\cdot 1\cdot 38}}{2}$ $\quad x_1=\pm\sqrt{21}$ $\quad$ такође смо имали

*** можемо користити дигитрон на колоквијуму/испиту ***

*** добићемо два задатка (нпр. Каруш, Кун-Такер и симплекс), највероватније буду текстуални где сами креирамо критеријум оптималности и ограничења, мада се може десити да један буде текстуални а други само конкретно задат задатак ***

*** хоће ли бити задата метода у текстуалном?
Претежно увек задају методе (посебно на колоквијумима), али може се десити да некад не задају методу и тада бирамо тако што:
- ако је све линеарно – користићемо симплекс метод
- што се осталих тиче, у принципу је свеједно хоћемо ли користити Каруш, Кун-Такеров или Лагранжов метод, ограничене варијације ***

4. Каруш, Кун-Такеровом методом наћи минимум следећег оптимизационог проблема $f(x_1,x_2)=e^{-x_1-x_2}$ уз ограничења $g_1(x_1,x_2): e^{x_1}+e^{x_2}\leq 20$, $g_2(x_1,x_2): x_1\geq 0$.

$f=e^{-x_1-x_2}$

$g_1: e^{x_1}+e^{x_2}\leq 20 \longrightarrow e^{x_1}+e^{x_2}-20\leq 0$

$g_2: x_1\geq 0 \longrightarrow -x_1\leq 0$

$F=e^{-x_1-x_2}+\lambda_1(e^{x_1}+e^{x_2}-20)+\lambda_2(-x_1)$

$\frac{\partial F}{\partial x_1}=-e^{-x_1-x_2}+\lambda_1 e^{x_1}-\lambda_2=0$ $\quad \lambda_1(e^{x_1}+e^{x_2}-20)=0 \rightarrow \lambda_1=0 \vee e^{x_1}+e^{x_2}-20=0$

$\frac{\partial F}{\partial x_2}=-e^{-x_1-x_2}+\lambda_1 e^{x_2}=0$ $\quad \lambda_2(-x_1)=0 \rightarrow \lambda_2=0 \vee -x_1=0$

i) $\lambda_1=0$ $\quad$ ii) $\lambda_1=0$

$\lambda_2=0$ $\quad x_1=0$

$-e^{-x_1-x_2}=0$ $\quad -e^{-x_2}=0$

iii) $e^{x_1} + e^{x_2} - 20 = 0$ $\quad -\lambda_1 e^{x_1} + \lambda_1 e^{x_2} = 0$ $\quad$ iii.i) $\lambda_1 = 0$

$\underline{\lambda_2 = 0}$ $\quad -\lambda_1 (e^{x_1} - e^{x_2}) = 0$ $\quad -e^{-x_1-x_2} = 0$ N

$$\left.\begin{aligned} -e^{-x_1-x_2} + \lambda_1 e^{x_1} &= 0 \ /(-1) \\ -e^{-x_1-x_2} + \lambda_1 e^{x_2} &= 0 \end{aligned}\right\} + \qquad \lambda_1 = 0 \lor e^{x_1} - e^{x_2} = 0$$

iii.ii) $e^{x_1} = e^{x_2}$ $\quad e^{x_1} = 10 \ /\ln$ $\quad (\ln 10, \ln 10)$

$2e^{x_1} - 20 = 0$ $\quad x_1 = \ln 10$ $\quad \lambda_1 = \dfrac{e^{-x_1-x_2}}{e^{x_2}}$

$2e^{x_1} = 20$ $\quad x_2 = \ln 10 \ (= x_1)$ $\quad \underline{\lambda_1 = 0{,}001} > 0$ мин.

iv) $e^{x_1} + e^{x_2} - 20 = 0$ $\quad e^{x_2} = 19 \ /\ln$ $\quad (0, \ln 19)$ $\quad \lambda_2 = -e^{-x_1-x_2} + \lambda_1 e^{x_1}$

$x_1 = 0$ $\quad x_2 = \ln 19$ $\quad \lambda_1 = \dfrac{e^{-x_1-x_2}}{e^{x_2}}$ $\quad \underline{\lambda_2 = -0{,}049} < 0$

$1 + e^{x_2} - 20 = 0$ $\quad \underline{\lambda_1 = 0{,}0028} > 0$ пребојна тачка

- најбитније је да запамтимо да се код <u>Каруш, Кун-Такерове</u> <u>методе</u> не додаје никаква додатна променљива, док се код <u>Лагранжове</u> <u>методе</u> додаје и то <u>квадратна</u> додатна променљива

Предавање 9 6.12.2024.

Линеарно програмирање, симплекс метод

*** данас завршавамо са градивом за колоквијум ***

- теорија линеарног програмирања постављена је пред крај Другог светског рата; поставио ју је Канторович
- линеарно програмирање је принципски јако једноставна ствар – сва ограничења и критеријум оптималности су строго линеарна

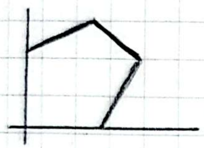
- решење – или је први извод једнак нули или се налази на граници

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a_1 = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = a_2 = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_3} = a_3 = 0$$



- линеарно програмирање користили су Британци за потребе рата – како да поставе муницију и то организују за потребе рата

- Џорџ Данциг – написао је решење које се зове SIMPLEX
- Данциг – један је од најзаслужнијих за увођење појмова линеарног, нелинеарног, генеричког програмирања

- америчка војска једно време није хтела да плаћа ништа везано за математику (линеарна оптимизација – нису хтели да финансирају),
  програмирање значи формализам, алгоритам
- тада је програмирање имало другачије значење и нико га није повезивао са математиком

- границе за кредитни рејтинг – то се све своди у категорију линеарног програмирања
- операциона истраживања – посебна тема линеарног програмирања у техници

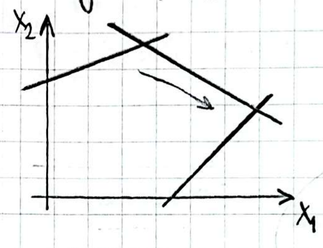
- све је линеарно (критеријум оптималности, ограничења)
- ту први извод не важи

$\boxed{x_i \geq 0}$ → не може се решити проблем линеарног програмирања без ове претпоставке

- ово се своди на интензивно претраживање граница, ништа више

- он је издвојио да нам ради 3 поступка:
  • графички метод јако добро приказује о чему се ради, да разумемо

$$y = 2x_1 - x_2$$



- заменимо (0,0) и гледамо коју област посматрамо

→ очигледно је смер пораста на ову страну

$y = 2x_1 - x_2 = 0$ цртамо за 0,1,2 → мењамо вредности за y

- критеријум оптималности је број (стићи до Београда за најкраће време – 45min је боље од 50min)

*** највећи број задатака из ове области ће бити текстуалан ***

- оптимизација је увек компромис између више ствари!
  (ретко имамо те граничне ствари) → да је у задатку зарада од усева B била 200 – онда је лако, посејали бисмо само семе за усев B

- ограничење је само ограничење типа неједнакости, а овај први услов је критеријум оптималности
- да ли је сваки проблем решив? → у овом примеру мин. је на слици, макс. је у бесконачности (слајд 13 → ово где пише оптимално реш. $y_1 = \frac{21}{8}, y_2 = \frac{9}{8}$)

36    $xyz = 36$

36	1	1
18	2	1
9	2	2
6	6	1

- разлика континуираних и дискретних решења $x+y+z = const.$
- имамо коначан скуп допустивих решења   једнак је броју куће са друге стране улице

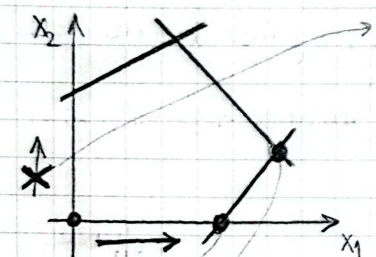
→ најстарији син има плаве очи

- две променљиве су слободне – ставимо их да су нула
- то почетно решење назива се basis

$5 - 3 = 2$

$x_i = 0$

- за сад увек ће бити да су почетне променљиве једнаке нули
- ако је почетно решење нула – одатле само могу да расту
  - у ком смеру се крећемо – у смеру пораста x_1 или у смеру пораста x_2



→ повећањем x_1 нам расте y па смо добили ово решење
- из прве   – колико год хоћемо
- из друге је не можемо да га повећамо 1,5
- из треће је не можемо да га повећамо 6

- можемо повећати 1,5 → најмање заједничко
- ако га повећамо до 6, x_4 ће бити негативно

→ следеће базно решење $x_2 = 0$, $x_4 = 0$
- несрећно се потрефило – можемо x_2 повећати до 1,5
→ сада смо се пребацили у ову тачку овде

- сада повећањем ниједне променљиве → то је решење

- да бисмо прешли на границе – са неједнакости прелазимо на једнакост
- претрага на граници – једнакост (једнозначно решење)
- неједнакости нису једнозначно решење
- претрага на граници и унутар дозвољене области – неједнакост

- први нетривијални корак је да формирамо табелу, три корака:
  - превођење неједнакости у једнакост
  - избор базног решења
  - писање функције у форми базног решења

- инвертовали смо форму – то је кључна разлика

- максимум – тражимо негативан број, највећи по апсолутној вредности
- макс. мање од нуле и онај који највише доприноси (највећи по апсолутној вредности)
- негативни јер доприноси максимуму, највећи по апсолутној вредности јер највише доприноси! – пажљиво је бирао речи

- минимум – највећи позитиван број

- „пивотска колона" – где је онај који највише утиче валјда?
- онај број до кога можемо да повећамо x_1 – најмањи позитивни
- пивотски елемент – у пресеку пивотске колоне и пивотске врсте, реда

следећи корак:
- све елементе пивотског реда поделимо пивотским (уместо пивотског који је реципрочна вредност)
- за колону исто само додамо минус

- над истим скупом решавамо два проблема
  мин...   макс...
- строга дуалност – минимум и максимум над истим скупом података

НАДОКНАДА ЗИМСКОГ СЕМЕСТРА - предавања

Предавање (СНИМАК 22.12.2021.)

Генетски алгоритми (еволутивни алгоритми)

- следећи час се бавимо ројевним алг. (PSO)
- и један и други алгоритам спадају у групу популационих алгоритама - алг. који проблем решавају тако што се не баве само једним подпроблемом
- зашто је то лоше - унесе један реш. који посматрамо и update-ујемо морамо посматрати већи број таквих проблема (рачунски су аутоматски сложенији)
- зашто је добро - овакви алгоритми не захтевају од нас да знамо нешто о проблему (није битно да критеријум оптималности одн. фја коју минимизујемо, максимизујемо да буде диференцијабилна, да знамо градијент, да буде унимодална, конвексна) - ништа од тих ствари није битно и не мора бити тако

- популациони алг. - изузетно робусни, способни да налазе изузетно комплексна реш, сналазе се у изузетно комплексним просторима претраге без неких унапред познатих чињеница о к.о.
- успевају да пређу велики бр. површину локалних оптимума, превојних тачака и сл. које би устрпеле градијентне алг.

- овакви алг. још увек нису способни да реше проблеме где имамо огроман бр променљивих (као код градијентних алг.)
- дим. од пар десетина до пар стотина

- они проблеми где градијентни алг постижу супер рез - ови алг. ће се показати никако
- где се градијентни алг. показују слабо - за ове алг. ће бити релативно какве решења

- градијентни алг. раде добро када је к.о. диференцијабилна фја, можемо одр. градијент, нарочито су добри ако имамо неке инфо. о конвексности (унимодалности) критеријума који посматрамо
- могу да савладају не велики бр локалних оптимума, али могу савладати изузетно велики бр променљивих

- популациони алгоритми могу да функц. на просторима знатно ниже дим. али не захтевају знање о к.о. (к.о. не мора бити конвексан, унимодалан, може имати велики бр лок. оптимума)
- не постоји теоријска гаранција (као код градијентних), али искуствено се показало да они имају врло добра решења

Еволутивни алгоритми. Генетски алгоритам

- овакви алг. настају као покушај имитације процеса еволуције у биолошким системима
- јако битно - не прилагођава се једна јединка (она је таква каква јесте), прилагођавају се будуће јединке
- оне јединке које су боље прилагођене имају бољу шансу да се репродукују
- основна идеја - да се јединке које су боље „прилагођене условима средине" репродукују ефикасније од других јединки, остављајући већи бр. успешних потомака
- самим тим се њихове особине ефикасније преносе на будућа покољења

- процес еволуције нема намеру сам по себи (било која јединка нема намеру да се развија на одр. начин)
- успешност - способн. оставити велики бр. потомака који ће такође бити успешни
- пр број људи и број крава, пр. плави кит

- у техници - неки приступи су јако ефикасни, али подобни за мали број проблема, а неки нису толико ефикасни ни за један бр. проблема, али су задовољавајући на изузетно велики бр. проблема

- еволуција - фантастичан алг. претраге

- добро прилагођен не значи исто за све врсте, за исту врсту разл. нивоите дође
- осн. принцип комбинације гена (оне јединке које су успеле да преживе имаће рел. већи бр. потомака) → јединке ће личити све више на оне које су успешне

- додати механизам који нам фали - мутација - допринеси да се у неком потомку појави особина која није постојала ни у једном од потомака (најч. је та особина бескорисна)
- мутације су обично лоше (пт ће се отклонити природном селекцијом)
- добре мутације ће се проширити - они који их носе биће способнији од оних који их немају (могућност да оборимо - била је мутација)

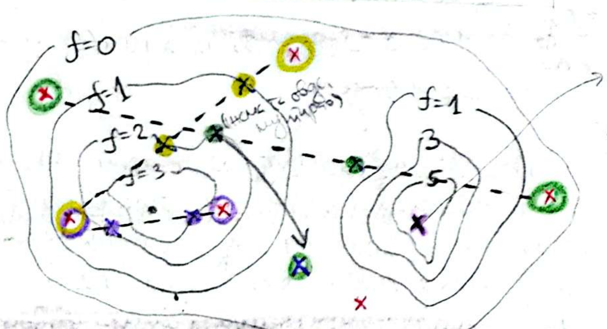
- генетски алгоритам - желимо да имитирамо поступак еволуције на што једноставнији начин

- конструкција алгоритма:
  1. проблем који решавамо: $\max f(x)$

x - иницијална популација (родитељска)

x - потомачка популација (6 род. и 6 потомака)

→ прави оптимум
↑
шта до њега дође



- прво унапред изаберемо неки бр. решења (потенцијалних) (зависи која дим. простора је у питању)
- препорука барем 10 реш. по једној димензији простора

- процес иницијализације - та реш. разбацамо по простору (узећемо 6)
- популација - тај скуп решења којим се бавимо (претпоставимо популацију чине 6 x)

- циљ генетског алг. - да се од текуће популације направи нова (прави се укрштањем и репродукцијом постојећих јединки)

- бирамо парове родитеља (два по два), некако их укрстимо (генеришемо два нова потомка) и убацимо их у нову популацију
- имамо једну родитељску популацију која генерише другу потомачку популацију
- из те две популације бирамо једну заједничку популацију - јединке којима ћемо дозволити да преживе и пређу у наредни корак

свим еволутивним алг.
↓
- један корак се назива генерација
- алг. функционише тако што имамо смену генерација
- после одр. броја генерација долазимо до жељеног решења
- од сложености проблема зависи колико генерација ћемо пустити алг. да ради

- сада, треба да генеришемо потомке - из популације родитеља бирамо парове тако да већу вероватноћу избора имају они који су боље прилагођени
- желимо да максимизујемо фју f - боље прилагођене јединке - оне за које је вр. фје f већа

- алгоритам не ради ако узмемо најбоље две и укрстимо их и само њих комбинујемо (проблеми су сложени и није сва инфо. о простору претраге садржана лепо у иницијалној популацији)
- не можемо претп. да је иницијална популација тако добро разбацана да маркира цео простор претраге

- бирамо родитеље тако да имају већу вероватноћу избора (али не гарантујемо бољима да ће бити изабрани!)
- играмо игру на срећу где највећу вероватноћу има најбоља јединка, а мању вероватноћу слабије јединке
- свака јединка има ненулту вероватноћу (ако популација има 6 јединки - 3 пута бирамо парове)

- не желимо да популација расте!
- желимо да број јединки популације остаје фиксан

- овде се свако са сваким може упарити
- сви су исти што се тиче репродуктивних капацитета
(није битно ко је кога „родио")

- мутацију можемо генерисати након укрштања
- имплементирамо мутацију - тако што се са малом вероватноћом питамо за свако реш. да ли ће да мутира
(најч. неће мутирати)
- пр. - да узмемо да једно реш. мутира - промени се на начин који није условљен ниједним од његових родитеља
(на случајан начин се избаци из линије која повезује два родитеља)

- како сада од две популације (x и x) да стигнемо до једне која ће бити нова популација у новој итерацији:
  1. начин - убити родитеље, оставити живе само потомке
  2. начин - убацити родитеље и потомке у исту гомилу, сортирати их и задржати само 6 најбољих
  3. начин - међу решење: максимално 2,3 родитеља могу прећи у сл. генерацију и то само ако су бољи од свих потомака, сва остала места морају заузети потомци
- узети и сортирати и родитеље и потомке, пустити 1, 2. или 3. да преживи без обзира да ли је родитељ или потомак, све остале бирати само ако су потомци
- што је јако добро, јер некада само бирањем добрих реш. цела популација личи на пар једн. суперродитеља и умањује генетски потенцијал популације)

- упаривањем реш. која јако личе једно на друго — нећемо добити ништа ново!
- исплати нам се да делове популације пустимо да буду релативно далеко од реш. (можда ћемо баш том мутацијом добити нешто ново што немамо у популацији) - то се зове елитизам
- ред елитизма = макс. број родитеља којима дозвољавамо да преживе

- сада је остало да идентификујемо разл. операције које је неопх. извршити да би се имплементирао генетски ал. и да видимо како извршити те операције

- операције које је неопходно имплементирати за потребе реализације ГА!
  1. селекција родитеља
  2. укрштање родитеља
  3. мутација
  4. избор нове популације

0. кодирање решења (јединки) у зависности од тога како овај корак изаберемо, сви др. кораци (до 4. ће се променити)

зависе од тога како је изабран 0. корак

- постоји скуп појмова (назива) који се овде користе и који су инспирисани називима из биологије, а имају прилично јасно у контексту рачунарских наука

основни појмови

ТЕРМИНОЛОГИЈА:
- јединка - једно потенцијално решење (било које)
- популација - скуп јединки које посматрамо у оквиру једне генерације алгоритма
- генерација = итерација
- прилагођености - мера „квалитета" одн. „пожељности" решења (јединке)
  - ако се бавимо максимизацијом - то је онда баш $f(x)$
  - ако се бавимо минимизацијом - то је $-f(x)$
- прилагођеност мора бити растућа, што је већа, то сматрамо јединку бољом

- ген / хромозом - део решења који сматрамо недељивим, а његовом комбинацијом са истим таквим деловима других решења креирају потомци
- можемо одр. беск. много начина кодирања решења, два су најч. коришћена:

- бинарно кодирање - свака јединка се приказује низом бита

1	0	1	1	1	0	0	1

- реално кодирање - свака јединка се приказује низом реалних бројева

1.32	2.36	4.18

један ген/хромозом
(сваки од бројева посматрамо посебно, не спуштамо се на ниво бита)

- разлика је у томе како др. организује интерпретирају ово кодирање

Укрштање

бинарно

1	1	0	1	0	1	0	јединка 1
0	0	1	1	0	0	0	јединка 2
1	1	0	1	0	0	0	потомци
0	0	1	1	0	1	0	потомци

- најчешће - укрштање у једној тачки - на случајан начин бирамо битску позицију (сваки пут када радимо укрштање бирамо другу битску позицију) и онда:
  - 1. потомку до те битне поз. додељујемо од 1. родитеља
  - 2. потомку додељујемо бите након те битне поз. и контра за 2. родитеља

- постоје варијанте овога:
  - укрштање у две тачке
  - укрштање у n тачака
  - укрштање у свим тачкама

  код сваког бита на случ. начин бирамо од ког родитеља ће доб. бите први потомак, а другом потомку дајемо контра

- само је питање колико јако ми желимо да замешамо родитеље

- мутација - изаберемо индекс произвољног бита и променимо га

реално

- много једноставније, бет је показао
- родитеље спајамо линијом и на тој линији бирамо две случајне тачке које предст. потомке

X родитељ1

X потомак1

потомак2 X

X родитељ 2

r - бирамо случајан бр. између 0 и 1

$p1 = r\,r1 + (1-r)\,r2$ — r1: родитељ1, r2: родитељ2 — потомак1

$p2 = (1-r)\,r1 + r\,r2$ — потомак2

- мутација - бирамо неки случајан вектор и додамо га на решење

Мутација

бинарно

↓ на случ. начин бирамо

1	**0**	0	1	1	0	1
1	**1**	0	1	1	0	1

реално

X мутирана јединка

X јединка пре мутације

(изаберемо јединку и саберемо са вектором)

Селекција родитеља

- постоји више начина да се ово уради:
  - рулетска селекција са рангирањем:

1. сортирамо све јединке у популацији од најгоре ка најбољој. То значи да ће редни број јединке у сортираној листи бити велики ако је јединка добра (тај редни број се зове ранг)

- формирамо табелу:

ранг јединке

случајни бројеви у опсегу од 0 до 1

производ ранга и случајно генерисаног броја

1	0.34	1 x 0.34
2	0.9	2 x 0.9
3	0.15	3 x 0.15
N	0.42	

- као родитеље бирамо оне две јединке које имају максималан овај производ

- на овакав начин ћемо заиста добити да ће било која јединка имати неку вероватноћу да буде селектована
- оне јединке које имају најбољи ранг имаће највећу шту вероватноћу

Поступак селекције популације у новој генерацији

- Показује се неефикасним:
  - да се изаберу само најбоље јединке, без обзира да ли су у питању родитељи или деца - склоност ка превременој конвергенцији, осетљивост на локалне оптимуме
  - да се у наредној генерацији пусте само потомци, без обзира на њихову прилагођеност - спора конвергенција (јер одбацујемо нека добра реш. која су била у родитељској популацији)

- радимо компромис ове две идеје:
- дозвољавамо малом броју родитеља да „преживи" под условом да су бољи од свих потомака. Остале позиције се морају попунити потомачким јединкама - овакав приступ се назива елитизам

- колико дуго извршавамо алгоритам?
- типичан критеријум заустављања код генетског алгоритма -
  - да утврдимо унапред деф. број генерација да ради или
  - да пратимо најбољу јединку у популацији и ако се она није променила 10, 20, 50, 100 итерација - онда станемо и видимо у чему се ради

- код генетског алгоритма ми можемо изабрати кодирање решења које је апсолутно прилагођено нашем проблему

- води се рачуна да мутација и када постоји није претерано великог интензитета

(једино да мењамо више битова са одр. вероватноћом)
- не мора бити забушено да се један бит мења - може се десити да променимо 2 од 100 итд.

- поступак селекције је релативно скуп јер генеришемо релативно много случ. бројева (штиме штедимо ако производимо 2 потомка уместо само једног итд.)
- али није проблем ако креирамо мање или више потомака па бирамо од њих (наравно да популација остане иста)
- није проблем ни да популација расте, па да је обарамо (можемо бити јако креативни у конструкцији детаља алг.)

- - - - - - - -

- да ли су уцртали како се мења квалитет најбољег реш. у генерацији током генерација или су мерили само шта се на крају деси
- ако се заглавимо у неком локалном оптимуму који је близу нуле а налази се нпр. у 0,05 → како проверити да ли се то десило?
- узмемо класичан алгоритам, иницијализујемо га у тачки коју је добио генетски и видимо шта ће нам дати генетски

НАДОКНАДА ЗИМСКОГ СЕМЕСТРА - Вежбе (аудиторне)

Вежбе (аудиторне) (СНИМАК 22.12.2021.)

- данас завршавамо са регуларним делом градива које долази на писмени колоквијум (остао нам је још симплекс метод до краја)

- Симплекс метод -

- симплекс метод се користи како бисмо решили проблеме из линеарног програмирања одн. само ограничење и к.о. налази се у линеарном облику

1. Коришћењем симплекс методе пронаћи мин. следеће фје:

$$\left.\begin{aligned} f &= -2x_1 + 3x_2 \\ x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1 - x_2 &\le 6 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} f + 2x_1 - 3x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 6 \end{aligned}$$

(1.) → све пребацимо на леву стр. једн!

огр. типа неједнакости преб. у огр. типа једнакости тако што додамо додатну променљиву

$x_1, x_2 \ge 0$ → природна, здраворазумска ограничења (не дирамо их)

(2.) формирамо симплекс табелу
- у прву врсту стављамо променљиве које се налазе у к.о. одн. основне (базне) променљиве
- затим у др. врсте пишемо додатне променљиве и к.о.

		x_1	x_2	
x_3	4	1	1	4 ← (5.)
x_4	6	1	-1	6
f	0	2	-3	

↑ (4.)

(3.)
→ у последњу врсту пишемо коеф уз основне променљиве
→ затим мењамо одг. јне (неједн → једн) и пребацујемо коеф из тих јна у основне врсте

- Морамо на почетку знати да ли тражимо мин. или макс.
  - уколико тражимо минимум - циљ је да у последњој врсти добијемо све негативне елементе

(4.) → крећемо од најпозитивнијег елем (пошто тражимо мин)
(бирамо тај елем. одн. ту колону - пивот колона)

1° за минимум - највећи позитиван
за максимум - најнегативнији елемент

(5.) слободну колону делимо пивот колоном (рач. посл. колону)

2° од тих елем. бирамо најмањи позитивни елем.
(и за мин. и за макс)
- врста у којој се налази најмањи позитивни елем. - пивот врста

(6.) елем. који се налази на пресеку пивот врсте и пивот колоне назива се пивот елемент

→ овиме смо одредили **прву симплекс табелу**

- формирање сл. симплекс табеле: → пивот колона и врста мењају места

3° $e_p^{k+1} = \dfrac{1}{e_p^k}$ → пивот елем. у сл. симплекс табели је реципрочна вр. претходног пивота

($k+1$ → вр. у сл. симплекс табели; k → вр. из пре симплекс табеле)

$e_v^{k+1} = \dfrac{e_v^k}{e_p^k}$ → елем у пивот врсти у сл. симплекс табели рач. се као прет. вр. из те врсте / пивот

$e_k^{k+1} = -\dfrac{e_k^k}{e_p^k}$ → елем у пивот колони у сл. симплекс табели рач. се као - прет. вр. из те колоне / пивот

$e^{k+1} = e^k - \dfrac{e_v^k e_k^k}{e_p^k}$ → остали елем. у сл. симплекс табели рач. се као тај елем. - (најближи елем из врсте / најбл. елем. из колоне) / пивотом — прет. вредности (из старе табеле!)

		x_3 (=0)	x_2 (=0)
$x_1 =$	4	1	1
$x_4 =$	2	-1	-2
$f =$	-8	-2	-5

$6 - \frac{4 \cdot 1}{1}$

$-1 - \frac{1 \cdot 1}{1}$

$0 - \frac{4 \cdot 2}{1}$

$-3 - \frac{2 \cdot 1}{1}$

$$\boxed{\begin{aligned} &x_1 = 4,\ x_4 = 2,\ f_{min} = -8 \\ &x_2 = x_3 = 0 \end{aligned}}$$

решење

(читали бисмо и да смо доб. -8 0 -5)

↳ КРАЈ АЛГОРИТМА (тражили смо мин фје и доб. смо све нег. елем.)

*** на испиту - 50%. Код симплекс методе ако добијемо текстуални задатак јесте да формирамо к.о. и ограничења одн. овај мат. модел, да поставимо прву симплекс табелу како треба, попунимо је, одн. пивот врсту и пивот колону (све закључно са првом табелом) и другу табелу само започнемо (да знамо шта ради)
Преостало рачунање носи преостали 50%. ***

2. Радионица производи клупе, столове и столице. Производња захтева дрво као сировину и постоје две врсте обраде: фина и груба. У датом тренутку радионица располаже са 48 јединица дрвета, 20 сати фине обраде и 8 сати грубе обраде. Клупа кошта 60 $, сто кошта 30 $, а столица 20 $. Може се продати највише 5 столица. Колико треба произвести клупа, столова и столица како би приход радионице био максималан? Неопходни подаци приказани су у табели:

бр клупа које произведемо

	x_1 клупа	x_2 сто	x_3 столица	
јединице дрвета	8	6	1	48
фина обрада	4h	2h	1,5h	20h
груба обрада	2h	1,5h	0,5h	8h
	60$	30$	20$ 5 стол.	

да је било ≥ прво бисмо помножили са -1 па бисмо онда неједнакости претворили у једнакост

$$f = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \qquad f - 60x_1 - 30x_2 - 20x_3 = 0$$

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48 \qquad 8x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 = 48$$

$$4x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \leq 20 \qquad 4x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 + x_5 = 20$$

$$2x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 \leq 8 \qquad 2x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 + x_6 = 8$$

$$x_3 \leq 5 \qquad x_3 + x_7 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

		x_1	x_2	x_3	
x_4	48	8	6	1	6
x_5	20	4	2	1,5	5
x_6	8	2	1,5	0,5	4 ← најмања позитивна вредност
x_7	5	0	0	1	+∞
f	0	-60	-30	-20	

① – Максимум - бирамо најнегативнији елем.
– уколико тражимо Макс. - циљ је да у последњој врсти буду сви позитивни елем.

множимо прво рач. елем. из пет врсте како бисмо видели да ли смо дошли до краја алгоритма (да скратимо рачунање)

$$0 + \frac{60 \cdot 8}{2} = 240 \qquad -30 + \frac{60 \cdot 1{,}5}{2} = 15 \qquad -20 + \frac{60 \cdot 0{,}5}{2} = -5$$

		x_6	x_2	x_3	
x_4	16	-4	0	-1	-16
x_5	4	-2	-1	1/2	8
x_1	4	1/2	3/4	1/4	16
x_7	5	0	0	1	5 ←
f	240	30	15	-5	

		$x_6 = 0$	$x_2 = 0$	$x_7 = 0$
x_4	= 21	-4	0	1
x_5	= 3/2	-2	-1	-1/2
x_1	= 11/4	1/2	3/4	-1/4
x_3	= 5	0	0	1
f	265	30	15	5

→ КРАЈ АЛГОРИТМА

$$\boxed{x_1 = \frac{11}{4},\ x_2 = 0,\ x_3 = 5 \quad f_{max} = 265}$$

$x_4 = 21,\ x_5 = 3/2,\ x_6 = x_7 = 0$

- Не можемо произвести 11/4 неког производа, узећемо или 12/4 или 8/4

→ прво тако шиштено у сам к.о. вратити те вр. и видети са чим добијамо бољу зараду

3. Наћи минимум следеће фје коришћењем симплекс методе:

$f(x) = x_1 + 4x_2$	$f - x_1 - 4x_2 = 0$	$f - x_5 + x_6 - 4x_2 = 0$
$x_1 + x_2 \le 3$	$x_1 + x_2 + x_3 = 3$	$x_5 - x_6 + x_2 + x_3 = 3$
$-x_1 + x_2 \le 1$	$-x_1 + x_2 + x_4 = 1$	$x_6 - x_5 + x_2 + x_4 = 1$

$x_2 \ge 0$ → природна ограничења не држимо

x_1 - без ограничења $x_1 = x_5 - x_6$ → замењено преко друге две променљиве (разлика)

→ и у смислу морамо вратити у к.о. и ограничења

→ базне променљиве видимо у к.о. (овде су x_5, x_6 и x_2)

		x_2	x_5	x_6	
x_3	3	1	1	-1	-3
x_4	1	1	-1	1	1 ←
f	0	-4	-1	1	
				↑	

ако овде немамо ниједан позитивни елемент да изаберемо (сви елем. су негативни или нула) - то би био крај алгоритма

- што је још један услов за крај алг.

		x_2 =0	x_5 =0	x_4 =0
x_3 =	4	2	0	1
x_6 =	1	1	-1	1
f	-1	-5	0	-1

$x_2 = x_5 = x_4 = 0$

$x_3 = 4, \quad x_6 = 1, \quad f_{min} = -1$

↳ КРАЈ АЛГОРИТМА (не можемо изабрати ниједну позитивну вредност)

4. Наћи максимум следеће фје применом симплекс методе:

$f = 2x_1 - x_2$	$f - 2x_1 + x_2 = 0$
$-3x_1 + 2x_2 \le 2$	$-3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$
$2x_1 - 4x_2 \le 3$	$2x_1 - 4x_2 + x_4 = 3$
$x_1 + x_2 \le 6$	$x_1 + x_2 + x_5 = 6$

$x_1, x_2 \ge 0$

		x_1	x_2	
x_3	2	-3	2	-2/3
x_4	3	2	-4	3/2 ←
x_5	6	1	1	6
f	0	-2	1	
		↑		

		x_4	x_2	
x_3	13/2	3/2	-4	-13/8
x_1	3/2	1/2	-2	-3/4
x_5	9/2	-1/2	3	3/2 ←
f	3	1	-3	
			↑	

		x_4 =0	x_5 =0
x_3 =	25/2	5/6	4/3
x_1 =	9/2	1/6	2/3
x_2 =	3/2	-1/6	1/3
f	15/2	1/2	1

↳ КРАЈ АЛГОРИТМА

$x_1 = \frac{9}{2}, \quad x_2 = \frac{3}{2}, \quad x_3 = \frac{25}{2}$

$x_4 = x_5 = 0$

$f_{max} = \frac{15}{2}$

5. Компанија је обезбедила буџет од максималних 600 000$ за оглашавање одређеног производа на националном нивоу. Сваки минут оглашавања на телевизији кошта 60 000$, док свако оглашавање на једној страници у новинама кошта 15 000$. Очекује се да ће рекламу на телевизији видети 15 милиона гледаоца, а да ће сваку новинску рекламу видети 3 милиона гледаоца. Одељење за истраживање тржишта саветује компанију да највише 90% буџета уложи у оглашавање на телевизији. Како треба расподелити буџет оглашавања да би се обезбедила укупна видљивост огласа (публика)? При таквој расподели буџета, колико публике се очекује да ће видети оглас?

600 000$ - буџет

60 000$ - мин. на ТВ → 15 милиона

15 000$ - 1 стр. у нв. → 3 милиона

90% ТВ

циљ да максимизујемо нашу публику

$f = 15\,000\,000x_1 + 3\,000\,000x_2$ $\qquad$ $f - 15\,000\,000x_1 + 3\,000\,000x_2 = 0$

$60\,000x_1 + 15\,000x_2 \leq 600\,000$ $\qquad$ $60\,000x_1 + 15\,000x_2 + x_3 = 600\,000$

$60\,000x_1 \leq 0{,}9 \cdot 600\,000$ $\qquad$ $60\,000x_1 + x_4 = 540\,000$

$x_1, x_2 \geq 0$

		x_1	x_2	
x_3	600000	60000	15000	10
x_4	540000	60000	0	9 ←
f	0	-15000000	-3000000	

		x_4	x_2	
x_3	60000	-1	15000	4 ←
x_1	9	$\frac{1}{60000}$	0	+∞
f	135000000	250	-3000000	

		x_4	x_3	
x_2	4			
x_1	9			
f	147000000	50	200	

→ КРАЈ АЛГОРИТМА

$\boxed{x_1 = 9, \quad x_2 = 4 \\ f_{max} = 147\,000\,000}$

$x_3 = x_4 = 0$

Скенирано помоћу ЦамСцаннер-а

Вежбе (аудиторне) (СНИМАК 12.1.2022.)

*** 2 задатка - како бисмо их положили, на оба морамо имати барем 50%, на та два зад. може доћи било шта што смо радили до сада
- најчешћа комбинација која долази - за 1. задатак - Лагранжи или Каруш, Кун-Такер, за 2. задатак - симплекс метод
- траје 1,5h или 2h ***

- Припрема за колоквијум -

1. Применом Каруш, Кун-Такерове теореме, одредити стационарне тачке и њихов карактер:

$$f = x_1^2 + x_2^2 + 4x_2 - 6x_1 + 1$$

$$h:\ x_1 + 5x_2 + 4 = 0$$

$$g:\ x_1^2 + 2x_2^2 - 2 \le 0$$

$$F = x_1^2 + x_2^2 + 4x_2 - 6x_1 + 1 + \mu(x_1 + 5x_2 + 4) + \lambda(x_1^2 + 2x_2^2 - 2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 - 6 + \mu + 2\lambda x_1 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 + 4 + 5\mu + 4\lambda x_2 = 0$$

$$x_1 + 5x_2 + 4 = 0$$

$\lambda(x_1^2 + 2x_2^2 - 2) = 0$

$\lambda = 0$ $\quad$ $x_1^2 + 2x_2^2 - 2 = 0$

i) $\lambda = 0$

$2x_1 - 6 + \mu = 0 \quad /\cdot(-5)$

$2x_2 + 4 + 5\mu = 0$

$x_1 + 5x_2 + 4 = 0$

$-10x_1 + 30 - \cancel{5\mu} + 2x_2 + 4 + \cancel{5\mu} = 0$

$-10x_1 + 2x_2 + 34 = 0$

$x_1 + 5x_2 + 4 = 0 \quad /\cdot 10$

$52x_2 + 74 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{74}{52}$

$x_1 = 4 - 5\left(-\frac{74}{52}\right)$

$x_1 = \frac{81}{26}$

$g:\ x_1^2 + 2x_2^2 - 2 \le 0$

g ✗

ова тачка није стационарна

ii) $x_1^2 + 2x_2^2 - 2 = 0$

$2x_1 - 6 + \mu + 2\lambda x_1 = 0 \quad /\cdot(-5)$

$2x_2 + 4 + 5\mu + 4\lambda x_2 = 0$

$x_1 + 5x_2 + 4 = 0$

$\rightarrow x_1 = -5x_2 - 4$

$(-5x_2 - 4)^2 + 2x_2^2 - 2 = 0$

$25x_2^2 + 40x_2 + 16 + 2x_2^2 - 2 = 0$

$27x_2^2 + 40x_2 + 14 = 0$

$x_2 = -0{,}56 \quad x_2 = -0{,}914$

$\rightarrow x_1 = -1{,}165 \quad x_1 = 0{,}57$

$g:\ x_1^2 + 2x_2^2 - 2 \le 0$ ✓

$A(-1{,}165, -0{,}56)$

$B(0{,}57, -0{,}914)$

$\lambda = ?$

$-10x_1 + 30 - 10\lambda x_1 + 2x_2 + 4 + 4\lambda x_2 = 0$

$$\lambda = \frac{10x_1 - 30 - 2x_2 - 4}{-10x_1 + 4x_2} = \frac{10x_1 - 34 - 2x_2}{-10x_1 + 4x_2}$$

$\lambda_A = -4{,}744 \rightarrow$ A је максимум

$\lambda_B = 2{,}82 \rightarrow$ B је минимум

- у првом случају свакако смо морали да радимо иако је $\lambda = 0$ јер се тражи да одредимо стационарне тачке (па је требало да одредимо стац. тачке, због $\lambda = 0$ само не можемо знати њихов карактер!)

2. У склопу експеримента вршено је мерење излаза процеса при чему су добијени следећи резултати: у тренуцима $t = [0,1,2,3]$, сензор излаза процеса показао је вредности $y = [5,0,6,8]$. Решити оптимизациони проблем и наћи параболу $(at^2 + bt + c)$ која најбоље описује понашање излаза процеса.

$t = [0,1,2,3]$

$y = [5,0,6,8]$

$at^2 + bt + c$

$y(0) = \ c = 5 \rightarrow c - 5 = y$

$y(1) = \ a + b + c = 0 \rightarrow a + b + c = y$

$y(2) = \ 4a + 2b + c = 6 \rightarrow 4a + 2b + c - 6$

$y(3) = \ 9a + 3b + c = 8 \rightarrow 9a + 3b + c - 8$

$$F = (c-5)^2 + (a+b+c)^2 + (4a+2b+c-6)^2 + (9a+3b+c-8)^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 2(a+b+c) + 2(4a+2b+c-6)\cdot 4 + 2(9a+3b+c-8)\cdot 9 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 2(a+b+c) + 2(4a+2b+c-6)\cdot 2 + 2(9a+3b+c-8)\cdot 3 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} = 2(c-5) + 2(a+b+c) + 2(4a+2b+c-6) + 2(9a+3b+c-8) = 0$$

$$196a + 72b + 28c = 192$$

$$72a + 28b + 12c = 72$$

$$28a + 12b + 8c = 38$$

$a = 1{,}75 \quad b = -3{,}75 \quad c = 4{,}25$

$$y = 1{,}75t^2 - 3{,}75t + 4{,}25$$

3. Фабрика производи 3 врсте пакета A, B, C. Модел A захтева 8h обраде, 5h лакирања и 6h сушења. Модел B захтева 6h обраде, 4h лакирања и 2h сушења. Модел C захтева 5h обраде, 2h лакирања и 4h сушења. Столар има на располагању 96h за обраду, 44h за лакирање и 58h за сушење. Зарада по јединици модела A, B и C је 380€, 260€ и 220€. Којом ће се комбинацијом производње постићи максимална добит и колико она износи?

A 8h обраде, 5h лакирања, 6h сушења

B 6h обраде, 4h лакирања, 2h сушења

C 5h обраде, 2h лакирања, 4h сушења

96h обраде, 44h лакирања, 58h сушења

A – 380€, B – 260€, C – 220€

$f = 380A + 260B + 220C \qquad f - 380A - 260B - 220C = 0$

$8A + 6B + 5C \le 96 \qquad 8A + 6B + 5C + X_1 = 96$

$5A + 4B + 2C \le 44 \qquad 5A + 4B + 2C + X_2 = 44$

$6A + 2B + 4C \le 58 \qquad 6A + 2B + 4C + X_3 = 58$

		A	B	C	
X_1	96	8	6	5	12
X_2	44	5	4	2	8,8 ←
X_3	58	6	2	4	9,66
f	0	-380	-260	-220	

↑

		X_2	B	C	
X_1	25,6	$-\frac{8}{5}$	-0,4	1,8	14,2
A	$\frac{44}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	22
X_3	5,2	$-\frac{6}{5}$	-2,8	1,6	3,25 ←
f	3344	76	44	-68	

↑

пивот колона – максимум – најнегативнији члан
пивот врста – најмањи позитиван члан

		X_2	B	X_3	
X_1	19,75	-0,25	2,75	$-\frac{9}{8}$	7,18
A	7,5	0,5	1,5	$-\frac{1}{4}$	5 ←
C	3,25	-0,75	-7/4	$\frac{5}{8}$	-1,85
f	3565	25	-75	$\frac{85}{2}$	

↑

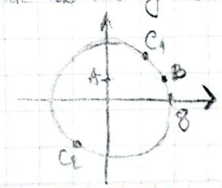
		X_2 =0	A =0	X_3 =0
X_1 = 6				
B = 5			$\frac{1}{1{,}5}$	
C = 5				
f	3940	50	50	30

$$\boxed{f_{max} = 3940 \quad X_2 = A = X_3 = 0 \quad X_1 = 6,\ B = 5,\ C = 5}$$

4. Тачка C се налази на кружници полупречника 8 са центром у координатном почетку. Методом Лагранжевих множитеља одредити координате тачке тако да збир квадрата растојања од те тачке до тачака A(0,2) и B(8,2) буде минималан.

A(0,2)

B(8,2)



$d_1^2 + d_2^2$ – мин.

$d_1^2 = (x-0)^2 + (y-2)^2$ $\qquad h: (x-0)^2 + (y-2)^2 = 8^2$

$d_2^2 = (x-8)^2 + (y-2)^2$ $\qquad h: x^2 + y^2 = 64$

$F = d_1^2 + d_2^2 = x^2 + (y-2)^2 + (x-8)^2 + (y-2)^2$

$L = x^2 + 2(y-2)^2 + (x-8)^2 + \lambda(x^2+y^2-64)$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2(x-8) + 2\lambda x = 0 \quad \rightarrow 4x - 16 + 2\lambda x = 0 \;/\cdot(-y)$

$\frac{\partial L}{\partial y} = 4(y-2) + 2\lambda y = 0 \quad \rightarrow 4y - 8 + 2\lambda y = 0 \;/\cdot x \quad \Big\} + \quad \rightarrow 2\lambda y = -4(y-2)$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 64 = 0 \quad \rightarrow x^2 + y^2 - 64 = 0 \qquad \lambda = \frac{-2(y-2)}{y}$

$-\cancel{4xy} + 16y - \cancel{2\lambda yx} + \cancel{4xy} - 8x + \cancel{2\lambda yx} = 0$

$16y = 8x \rightarrow x = 2y$

$4y^2 + y^2 - 64 = 0$ $\qquad C_1\left(\frac{16\sqrt{5}}{5}, \frac{8\sqrt{5}}{5}\right) \quad \lambda_{C_1} = 3{,}59$

$5y^2 = 64 \rightarrow y = \pm\frac{8\sqrt{5}}{5}, \; x = \pm\frac{16\sqrt{5}}{5}$ $\qquad C_2\left(-\frac{16\sqrt{5}}{5}, -\frac{8\sqrt{5}}{5}\right) \quad \lambda_{C_2} = -7{,}59$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+2\lambda & 0 \\ 0 & 4+2\lambda \end{bmatrix} \qquad D_1 = 4+2\lambda \qquad D_2 = (4+2\lambda)^2$$

C_1: $D_1 = 11{,}18 > 0$ $D_2 = 124{,}99 > 0$ $\rightarrow$ C_1 је минимум

C_2: $D_1 = -11{,}18 < 0$ $D_2 = 124{,}99 > 0$ $\rightarrow$ C_2 је максимум

$\rightarrow$ тачка C_1 има минимално растојање од ове две тачке

5. Методом ограничених варијација одредити стационарне тачке функције $y = x_1x_2x_3$, ако важи ограничење $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

$y = x_1x_2x_3$ $\qquad n = 3 \rightarrow$ број променљивих

$h: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ $\qquad m = 1 \rightarrow$ број ограничења

$k = m+1 \ldots n \qquad \boxed{k = 2,3}$

$$J_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_2} & \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} & \frac{\partial h}{\partial x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_3 & x_2x_3 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{bmatrix} \qquad 2x_1^2x_3 - 2x_2^2x_3 = 0$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_3} & \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y}{\partial x_3} & \frac{\partial y}{\partial x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & x_2x_3 \\ 2x_3 & 2x_1 \end{bmatrix} \qquad 2x_1^2x_2 - 2x_2x_3^2 = 0$$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

$2x_3(x_1^2 - x_2^2) = 0 \quad \rightarrow x_3 = 0 \;\vee\; x_1^2 = x_2^2$

$2x_2(x_1^2 - x_3^2) = 0 \quad \rightarrow x_2 = 0 \;\vee\; x_1^2 = x_3^2$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

i) $x_3 = 0 \wedge x_2 = 0$

$x_1^2 = 1 \rightarrow x_1 = \pm 1$

$A(1,0,0) \quad B(-1,0,0)$

ii) $x_3 = 0 \wedge x_1^2 = x_3^2$

$x_1 = 0$

$x_2^2 = 1 \rightarrow x_2 = \pm 1$

$C(0,1,0) \quad D(0,-1,0)$

iii) $x_2 = 0 \wedge x_1^2 = x_2^2$

$x_1 = 0$

$x_3^2 = 1 \rightarrow x_3 = \pm 1$

$E(0,0,1) \quad F(0,0,-1)$

- Не критеријум довољан?
- метод нормалних квадратних
може у сваком случају

iv) $x_1^2 = x_2^2 \wedge x_1^2 = x_3^2$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

$3x_1^2 = 1 \rightarrow x_1^2 = \frac{1}{3} \rightarrow x_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad (= x_2 = x_3)$

$G\left(\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}\right) \quad J\left(\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}, -\frac{1}{\sqrt3}\right) \quad M\left(-\frac{1}{\sqrt3}, -\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}\right)$

$H\left(-\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}\right) \quad K\left(-\frac{1}{\sqrt3}, -\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}\right) \quad N\left(-\frac{1}{\sqrt3}, -\frac{1}{\sqrt3}, -\frac{1}{\sqrt3}\right)$

$I\left(\frac{1}{\sqrt3}, -\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}\right) \quad L\left(-\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}, -\frac{1}{\sqrt3}\right)$